

Connectivitat i Percolació

Professorat d'Algorísmia (Grau-A)
Departament de Ciències de la Computació
Univeristat Politècnica de Catalunya

Q1 2024-2025

I. OBJECTIU GENERAL I NORMES

Aquest projecte té com a objectiu un estudi experimental de la possible transició (o transicions) de fase del nombre de components connexes d'un graf sotmès a un procés de percolació.

El projecte es farà en grups de **4 persones**. Per formalitzar els grups us heu d'apuntar al fitxer compartit **Equips Projecte GRAU-A Q1 2024-25** (seguiu l'enllaç). En aquest fitxer trobareu una columna per introduir un identificador d'equip (1, 2, 3, ...) i a continuació, columnes per a introduir els cognoms, nom i subgrup de cadascun dels integrats de l'equip, seguint el model d'exemple. Això s'ha de fer **abans del 20 de setembre de 2024**. Els estudiants que no hagin format grup fins aquesta data, seran organitzats en equips pel professorat de l'assignatura.

El lliurament dels materials demanats en aquest projecte es farà en línia via el **Racó FIB**. La data límit d'entrega són les 23:59 hores del dia **24/10/2024**.

En qualsevol moment durant el procés de correcció podríeu ser contactats per part d'algun professor de l'assignatura per tal de resoldre dubtes o fer aclariments sobre el vostre treball.

Totes les comunicacions públiques referents al projecte es duran a terme mitjançant el *Racó FIB* o el *canal de Slack #projecte*.

II. OBJECTIUS

L'objectiu principal d'aquesta pràctica és portar a terme un estudi experimental de la possible existència de transició (o transicions) de fase per una propietat de grafs quan les arestes i /o els nodes poden fallar. Com a objectiu secundari el d'obtenir un coneixement de diferents models de grafs aleatoris d'ús habitual en els estudis experimentals d'algorismes per a problemes sobre grafs amb fallides.

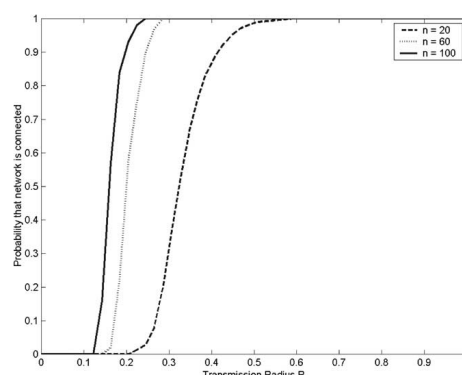
Les fallides permanents a un graf es poden modelitzar de diferents maneres. En aquest projecte podeu assumir que es corresponen a un senzill procés aleatori de percolació per nodes (*site percolation*) o per arestes (*bond percolation*). El model de percolació a un graf està definit per un paràmetre $q \in [0, 1]$ que representa la

probabilitat de fallida i proporciona un nou graf G_q . En un procés de percolació per nodes a un graf G el paràmetre q representa la probabilitat de que un node no falli. Així obtenim un graf G_q en el que, per a cada node $u \in V(G)$, de forma independent, decidirem si el node u continua al graf (amb probabilitat q no falla) o si esborrem u (amb probabilitat $p = 1 - q$ falla). En un procés de percolació per arestes el paràmetre representa la probabilitat de fallida de una aresta. En aquest cas, per a cada aresta $e \in E$, mantindrem e amb probabilitat q i la treure'm amb probabilitat $p = 1 - q$. Observeu que en el cas de percolació per arestes $V(G_q) = V(G)$.

Una vegada tenim fixat un procés de percolació en un graf concret G , volem estudiar per quins valors de q podem esperar que certa propietat Π es doni al graf G_q . Per moltes propietats Π es pot trobar un valor de q_Π de manera que, amb alta probabilitat, els grafs G_q amb $q > q_\Pi$ verifiquen la propietat Π , metres que, amb alta probabilitat, els grafs G_q amb $q < q_\Pi$ no verifiquen Π . Quan es dona aquest tipus de comportament es diu que la propietat Π presenta una transició de fase al voltant de q_Π .

Una descripció exacta d'un procés de *site percolation* a una graella quadrada $n \times n$ el podeu trobar a partir de la transparència 45 del material de suport del llibre *Algorithms* [1] (<https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/keynote/15UnionFind-2x2.pdf>). En concret s'estudia la transició de fase a la graella, sota percolació de nodes, de la propietat d'existència d'una connexió entre els nodes de la part de dalt de la graella amb els nodes de la part de sota de la graella. En aquest cas se sap que la transició de fase per graelles grans apareix al voltant d'una probabilitat de percolació de 0.593.

En el cas de models parametritzats de grafs aleatoris la transició de fase estudia la variabilitat d'una propietat (o una mesura) en relació al valor (o valors) dels paràmetres que defineixen el graf. Com a exemple, considereu la propietat de la connectivitat de grafs (és a dir, que un graf sigui o no connex) aplicada a grafs aleatoris. Considereu que disposem d'una funció $\text{Graf}(n, p)$ que permet generar un graf aleatori de n . Per a cada valor de p paràmetre, i fent un nombre raonable de crides, podem estimar la probabilitat que un graf amb n vèrtexs del model sigui connex. La transició de fase, si n'hi ha, ens mostraria un valor del paràmetre p on la probabilitat de ser connex, per valors $p' < p$, és radicalment diferent a la de valors $p' > p$. Com podeu pensar, la transició de fase no sempre es dona per valors de n petits i per això cal fer experiments que facin créixer el valor de n fins a tenir una certa evidència de l'existència de la transició de fase o la constatació que no apareix. A la figura de sota en teniu una imatge que mostraria una transició de fase.



Us demanem que analitzeu experimentalment l'existència o no de transició (o transicions) de fase amb relació al nombre de components connexes del graf percolat. Observeu que el nombre de components connexes no és un valor booleà i per tant poden aparèixer més d'un canvi de comportament al rang de valors de la probabilitat. Aquest estudi s'ha de realitzar sobre models parametritzats de grafs tant deterministes com aleatoris. Això vol dir que a més de les definicions de grafs parametritzats haureu d'estudiar els procediments que permeten generar un graf al model.

Teniu en compte que volem analitzar el comportament asimptòtic amb relació al nombre de nodes però que els models de grafs poden tenir altres paràmetres a més del nombre de nodes.

Per això us demanem que implementeu algorismes per:

- (a) Donats G i $q \in [0, 1]$ obtenir mostres dels grafs corresponents al procés de percolació de nodes i d'arestes amb probabilitat q .
- (b) Donat un graf G obtenir el nombre de components connexes que en té.

Aquests algorismes els haureu de fer servir per:

- (c) Estudiar la possible transició de fase a graells quadrades $n \times n$, sota un procés de percolació de nodes i un d'arestes.
- (e) Estudiar la possible transició de fase en graphs geomètrics aleatoris connexes (Random geometric graphs), sota un procés de percolació d'arestes.
- (d) Estudiar la possible transició de fase sota un procés de percolació de nodes i un d'arestes a un altre model de grafs, per exemple graells triangulars, o graells tridimensionals o un altre model de graf aleatori

Teniu en compte que per veure experimentalment l'existència o no de transició (o transicions) de fase, haureu de treballar amb grafs grans, i potser caldrà que considereu casos en els quals la probabilitat del procés de percolació sigui també una funció dels paràmetres que defineixen el model de graf sota consideració.

Cal també que tingueu en compte la transició de fase de la connectivitat en grafs geomètrics aleatoris per tal de garantir que el procés de percolació es porta a terme sempre sobre un graf connex.

Per una altra part els grafs percolats són grafs aleatoris i per tant caldrà tenir resultats sobre una mostra prou gran per tal de garantir que els valors mitjans utilitzats a l'estudi són significatius.

III. ENTREGA

El nivell de sofisticació i esforç dedicat a la pràctica és opcional i es tindrà en compte a l'hora d'avaluar-la. En la versió més senzilla (suficient per aprovar el projecte si està acompanyada d'un bon disseny d'experiments) caldria que implementeu programes en C++ per als problemes proposats als apartats (a), (b) i justificar els resultats experimental per als models (c) i (d). Per optar a una bona nota caldria fer, a més, l'anàlisi de la transició de fase a un altre model (e).

IV. ALGUNS PUNTERS

Aquest document és intencionadament vague. Per tant, a més d'analitzar i experimentar amb diferents famílies de grafs, processos de percolació, grafs aleatoris i propietats, haureu de documentar les fonts d'informació, les decisions preses i el disseny d'experiments que els hi donen suport. Per qualsevol font que feu servir cal que proporcioneu una referència adient, l'adreça web (si cal), les modificacions i/o simplificacions fetes en les vostres implementacions i/o la selecció de models de grafs.

Com a únic requisit us demanem que cobriu les implementacions per resoldre els problemes descrits als apartats (a) i (b). Per portar a terme l'estudi tindreu que utilitzar generadors de grafs en els diferents models, podeu dissenyar-los vosaltres o fer servir implementacions ja fetes. En el segon cas cal que documenteu les fonts d'on heu tret els generadors.. Per portar a terme l'estudi haureu d'utilitzar generadors de grafs en els diferents models, podeu dissenyar-los vosaltres mateixos o fer servir implementacions ja fetes. En el segon cas cal que documenteu les fonts d'on heu tret els generadors.

Pel que fa als models de grafs aleatoris, podeu trobar alguns models per triar seguint els enllaços a https://en.wikipedia.org/wiki/Random_graph o les implementacions de generadors a NetworkX. També podeu trobar definicions d'alguns models de grafs aleatoris als capítols 12–15 del llibre [2].

V. QUÈ CAL LLIURAR

Cal lliurar una carpeta comprimida (.zip) que contingui:

- Una documentació adequada del algorismes i mètodes que heu implementat, les proves que heu fet i la comparació dels resultats que heu obtingut. També és interessant que indiqueu altres idees que hagueu provat, encara que no hagin donat bons resultats, o d'altres que no heu explorat. El document en format PDF ha d'incloure les referències adients.
- Una carpeta amb totes les fonts necessàries per compilar i executar el vostre projecte (en C++). S'han d'incloure les instruccions per a la compilació i execució, així com els conjunts de dades utilitzats i/o els programes per generar-los.
- Tingueu en compte que la documentació entregada ens ha de permetre valorar el nivell d'assoliment de la competència transversal que hem d'avaluar: **Capacitat d'autoaprenentatge**. En el context del projecte hi han uns quants aspectes rellevants relacionats amb aquesta competència: propietats de grafs, transició de fase, models de grafs aleatoris, i el disseny i anàlisi dels experiments. La qualificació final del projecte reflectirà la qualitat del vostre aprenentatge, de l'experimentació feta i de la documentació on es reflectirà tot. La qualitat del codi entregat (programes) es pressuposa i representarà una part molt petita de la qualificació final.
- La documentació ha de recollir i presentar la feina feta, les fonts que s'han consultat, el que heu après i els resultats de l'experimentació. En particular es molt important que reflecteixi de forma succinta el que heu après. Si no es compleix aquesta condició, la qualificació final del projecte reflectirà la qualitat de la presentació i no es tindrà en consideració la resta de material lliurat.

REFERÈNCIES

- [1] R. Sedgewick and K. Wayne. *Algorithms*. Addison-Wesley, 4th edition, 2011. <https://algs4.cs.princeton.edu/>
- [2] M.E.J. Newman. *Networks. An Introduction*. Oxford University Press, 2010.

