グラフの問題に対する パラメータ化量子クエリ計算量

<u>寺尾 樹哉</u>[1], 森 立平[2]

1. 京都大学 数理解析研究所 M2
2. 名古屋大学 多元数理科学研究科

量子情報技術研究会 (**QIT51**)＠高松
11月27日(水)

クエリ計算量

関数fが陽にではなく、
オラクルで与えられてる！

オラクル $\mathcal{O}_f$

$f: \{1, \ldots, N\} \to \{0, 1\}$

クエリ計算量

$\boldsymbol{i}$ での値
をクエリ

アルゴリズム

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{i})$を返す

オラクル $\boldsymbol{O_f}$

$\boldsymbol{f}: \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

$\boldsymbol{f}$の性質

☞ **オラクルへのクエリ回数を評価**

量子クエリ計算量

量子アルゴリズム

$|\boldsymbol{i}, b\rangle$

$|i, b \oplus \boldsymbol{f}(\boldsymbol{i})\rangle$

量子オラクル $\mathcal{O}_f$

$\boldsymbol{f}: \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

$\boldsymbol{f}$の性質

☞ オラクルへのクエリ回数を評価

量子クエリ計算量

量子アルゴリズム

$\sum_i \alpha_i |\boldsymbol{i}, b\rangle$

$\sum_i \alpha_i |i, b \oplus \boldsymbol{f}(\boldsymbol{i})\rangle$

fの性質

量子オラクル $\mathcal{O}_f$

$\boldsymbol{f}: \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

☞ **オラクルへのクエリ回数を評価**

Groverのアルゴリズム

入力：$\boldsymbol{f}: \{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$**へのオラクルアクセス**
出力：$f(i) = 1$なる$i \in \{1, \ldots, N\}$を一つ

古典

$\boldsymbol{\Theta(N)}$ クエリは
誤り確率高々1/3には必要

Groverのアルゴリズム

入力：$\boldsymbol{f}: \{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$**へのオラクルアクセス**
出力：$f(i) = 1$なる$i \in \{1, \ldots, N\}$を一つ

古典

$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{N})$ クエリは
誤り確率高々1/3には必要

量子

$\boldsymbol{O}(\sqrt{\boldsymbol{N}})$ クエリで誤り確率高々1/3
[Grover ’96]

$\boldsymbol{\Omega}(\sqrt{\boldsymbol{N}})$ クエリは必要
[Bennett-Bernstein-Brassard-Vazirani ’97]

Groverのアルゴリズム

入力：$\boldsymbol{f}: \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$**へのオラクルアクセス**
出力：$f(i) = 1$なる$i \in \{1, \dots, N\}$を一つ

古典

$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{N})$ クエリは
誤り確率高々1/3には必要

量子

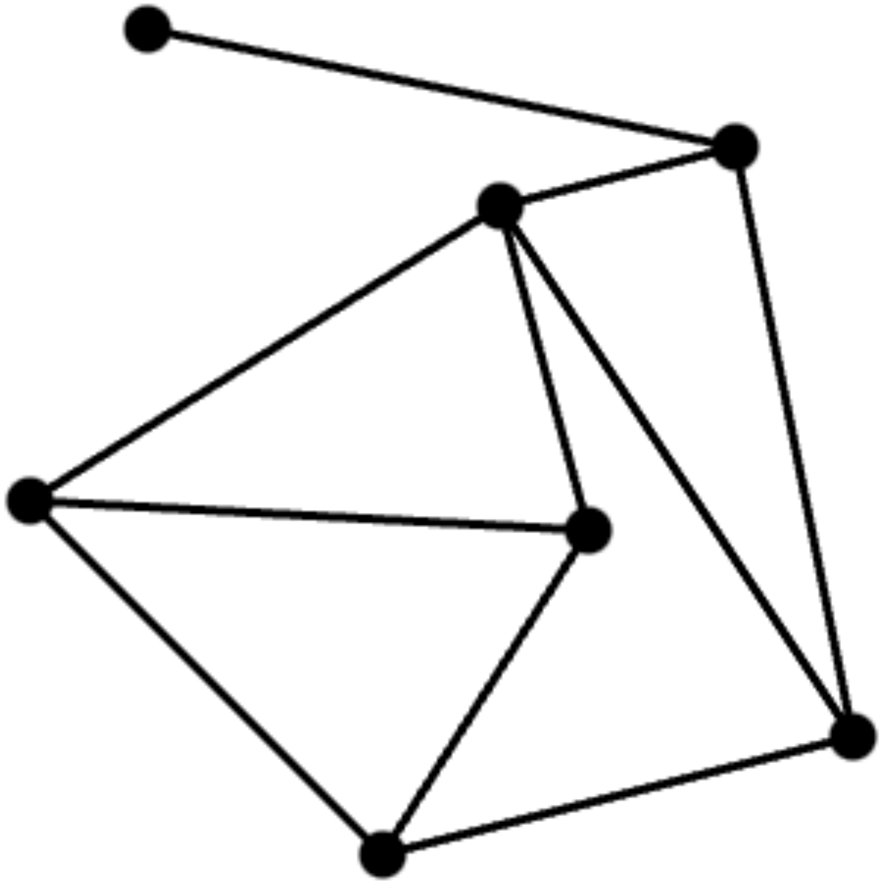
意義①: 量子計算の優位性！

$\boldsymbol{O}\left(\sqrt{\boldsymbol{N}}\right)$ クエリで誤り確率高々1/3
[Grover '96]

意義②: 量子計算の限界！

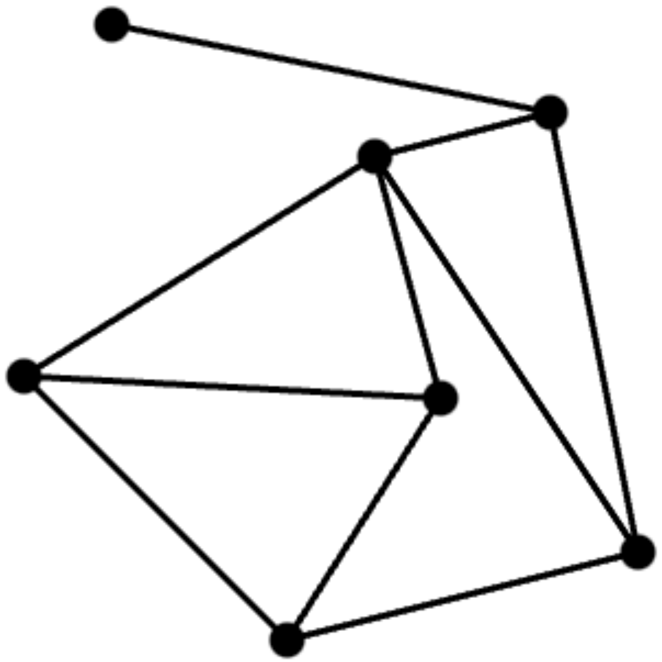
$\boldsymbol{\Omega}\left(\sqrt{\boldsymbol{N}}\right)$ クエリは必要
[Bennett-Bernstein-Brassard-Vazirani '97]

グラフの問題の量子クエリ計算量



n =頂点数

グラフの問題の量子クエリ計算量



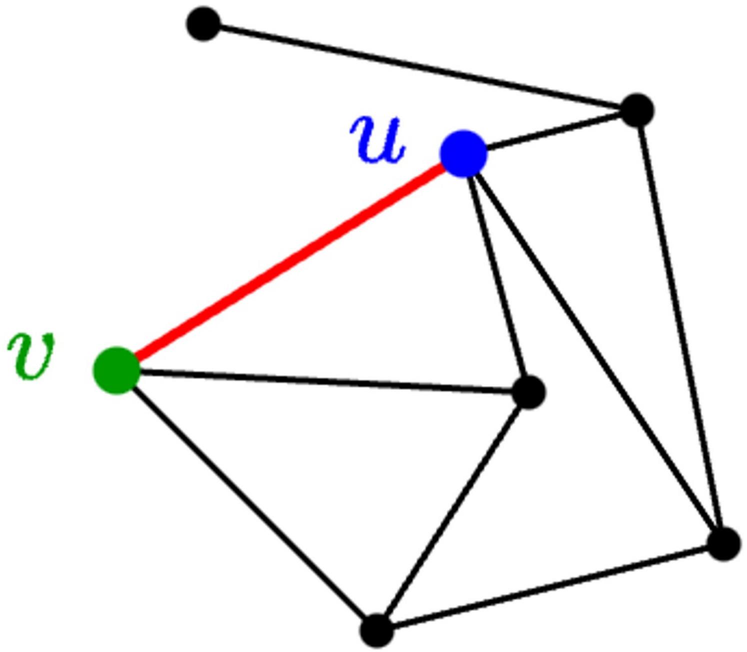
隣接行列モデル

量子オラクルで隣接行列 $E_M: \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\} \to \{0,1\}$にアクセス

$$\boldsymbol{E_M(u,v) = 1 \Leftrightarrow (u,v) \in E(G)}$$

n =頂点数

グラフの問題の量子クエリ計算量



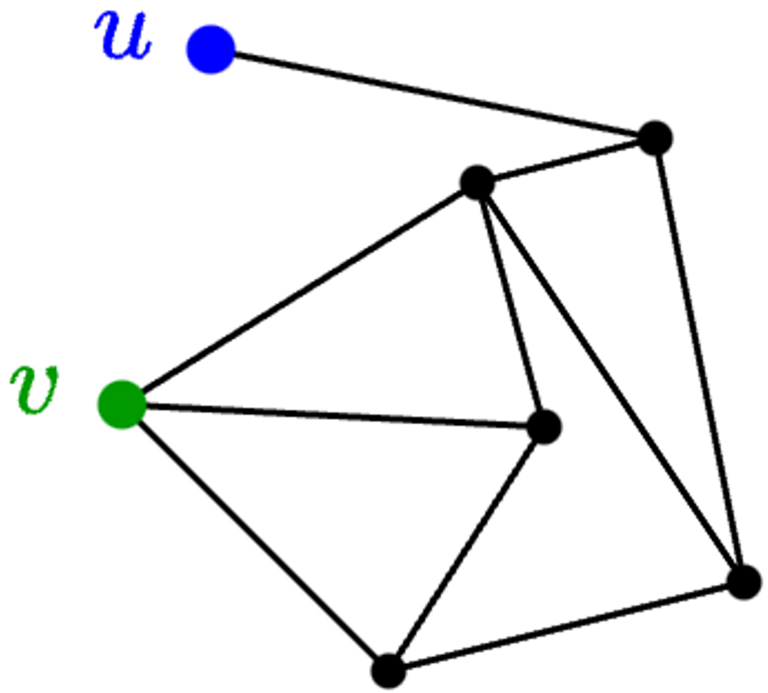
隣接行列モデル

量子オラクルで隣接行列 E_M: $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$にアクセス

2頂点のペアu, vをクエリした時,
間にに辺がある or ないを返す

n =頂点数

グラフの問題の量子クエリ計算量



隣接行列モデル

量子オラクルで隣接行列 $E_M: \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$にアクセス

2頂点のペアu, vをクエリした時,
間に辺がある or ないを返す

n =頂点数

先行研究:グラフの問題の量子クエリ計算量

古典では$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{n}^2)$の問題でも…

- 連結性判定：$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{n}^{3/2})$ [Dürr-Heiligman-Høyer-Mhalla '06]
- 最大マッチング：$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}^{7/4})$ [Kimmel-Witter '21], $\Omega(n^{3/2})$ [Zhang '04]
- 最小カット：$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{n}^{3/2})$ [Apers-Lee '21]

n = 頂点数

先行研究:グラフの問題の量子クエリ計算量

- 連結性判定：$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{n}^{3/2})$　[Dürr-Heiligman-Høyer-Mhalla '06]
- 最大マッチング：$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}^{7/4})$ [Kimmel-Witter '21], $\Omega(n^{3/2})$ [Zhang '04]
- 最小カット：$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{n}^{3/2})$　[Apers-Lee '21]

頂点被覆, ハミルトン路, クリーク問題などの他の問題でも
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}^{2-\epsilon})$を達成できるか？

n = 頂点数

先行研究:グラフの問題の量子クエリ計算量

- 連結性判定：$\mathbf{\Theta}(\boldsymbol{n}^{3/2})$ [Dürr-Heiligman-Høyer-Mhalla '06]
- 最大マッチング：$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}^{7/4})$ [Kimmel-Witter '21], $\Omega(n^{3/2})$ [Zhang '04]
- 最小カット：$\mathbf{\Theta}(\boldsymbol{n}^{3/2})$ [Apers-Lee '21]

頂点被覆, ハミルトン路, クリーク問題などの他の問題でも
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}^{2-\epsilon})$を達成できるか？

パラメータ化計算量を考える！

n = 頂点数

先行研究:グラフの問題の量子クエリ計算量

- 連結性判定：$\boldsymbol{\Theta(n^{3/2})}$ [Dürr-Heiligman-Høyer-Mhalla '06]
- 最大マッチング：$\boldsymbol{O(n^{7/4})}$ [Kimmel-Witter '21], $\Omega(n^{3/2})$ [Zhang '04]
- 最小カット：$\boldsymbol{\Theta(n^{3/2})}$ [Apers-Lee '21]

頂点被覆, ハミルトン路, クリーク問題などの他の問題でも
$\boldsymbol{O(n^{2-\epsilon})}$を達成できるか？

パラメータ化計算量を考える！

- k-クリーク：$\boldsymbol{\tilde{O}(n^{2-2/k})}$ [Magniez-Santha-Szegedy '05]

n = 頂点数

先行研究:グラフの問題の量子クエリ計算量

- 連結性判定：$\boldsymbol{\Theta(n^{3/2})}$　[Dürr-Heiligman-Høyer-Mhalla '06]
- 最大マッチング：$\boldsymbol{O(n^{7/4})}$ [Kimmel-Witter '21], $\Omega(n^{3/2})$ [Zhang '04]
- 最小カット：$\boldsymbol{\Theta(n^{3/2})}$　[Apers-Lee '21]

頂点被覆, ハミルトン路, クリーク問題などの他の問題でも
$\boldsymbol{O(n^{2-\epsilon})}$を達成できるか？

パラメータ化計算量を考える！

- k-クリーク：$\boldsymbol{\tilde{O}(n^{2-2/k})}$　[Magniez-Santha-Szegedy '05]

😋　k：定数
😰　k：より大（例, $k=\Theta(\log n), k=\Theta(\sqrt{n})$）

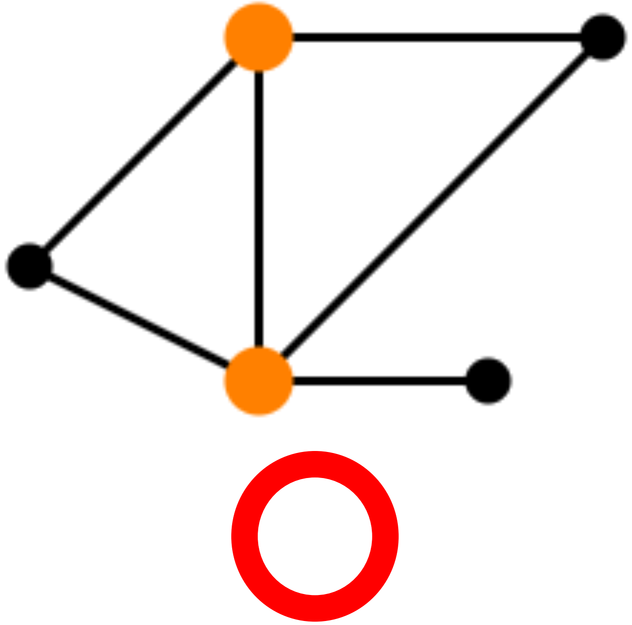
n = 頂点数

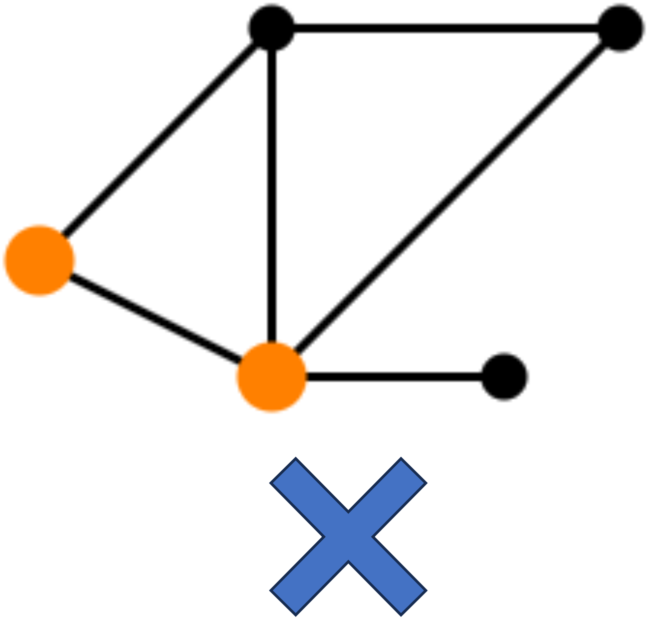
k-頂点被覆問題

入力：グラフ G と整数 k
問題：大きさ **k 以下**の**頂点被覆** $S \subseteq V$ が G に存在するか？

Gのどの辺も端点の少なくとも一方はSに属す

例)





k-頂点被覆問題

入力：グラフ G と整数 k
問題：大きさ **k 以下**の**頂点被覆** $S \subseteq V$ が G に存在するか？

	パラメータ化なし	パラメータ化あり
古典時間計算量	NP-hard	FPT

poly(n, k)は無理

$f(k) \cdot \mathrm{poly}(n)$

k-頂点被覆問題

入力：グラフ G と整数 k
問題：大きさ $\boldsymbol{k}$ **以下**の**頂点被覆** $S \subseteq V$ が G に存在するか？

	パラメータ化なし	パラメータ化あり
古典時間計算量	NP-hard	FPT
量子クエリ計算量	自明な$\boldsymbol{O(n^2)}$しか知られず	??

k-頂点被覆問題

入力：グラフ G と整数 k
問題：大きさ **k 以下**の**頂点被覆** $S \subseteq V$ が G に存在するか？

	パラメータ化なし	パラメータ化あり
古典時間計算量	NP-hard	FPT
量子クエリ計算量	自明な $\boldsymbol{O(n^2)}$ しか知られず	??

本研究: FPTのような量子クエリ計算量, i.e., $\boldsymbol{O(f(k)\cdot n^{2-\epsilon})}$

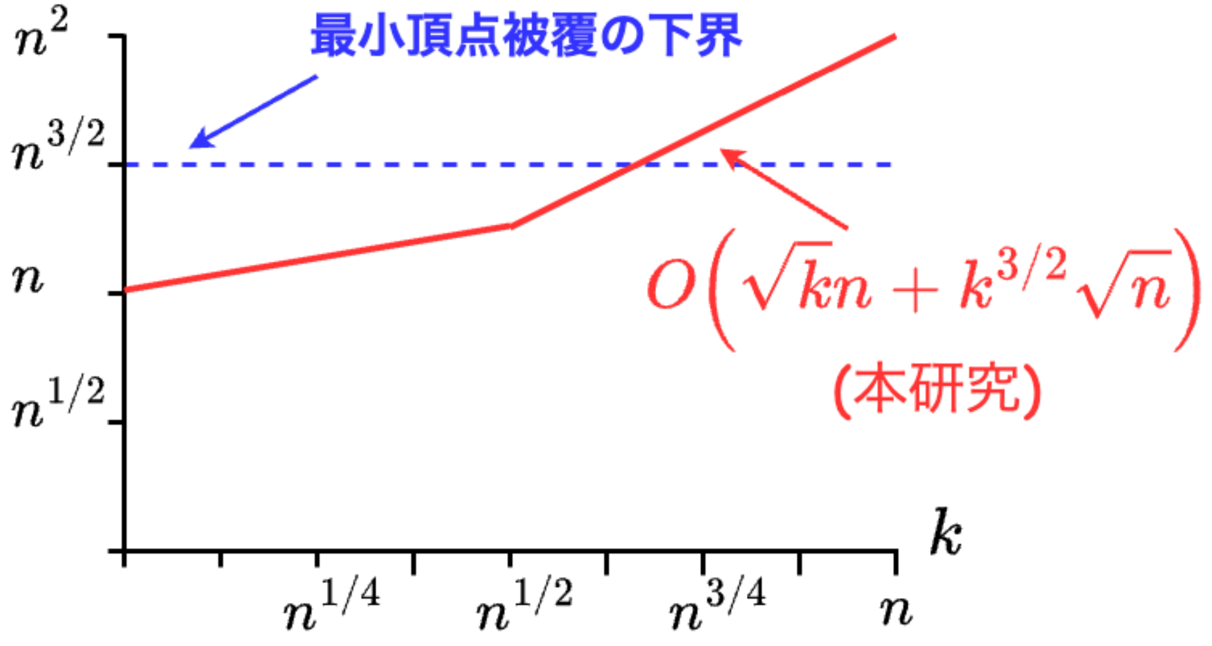
主結果①: 頂点被覆問題に対する パラメータ化量子クエリ計算量

<u>定理</u>

大きさ k 以下の頂点被覆を持つかの判定問題の量子クエリ計算量

上界：$O(\sqrt{k}n + k^{3/2}\sqrt{n})$

FPTのような計算量, i.e., $O(f(k) \cdot n^{2-\epsilon})$



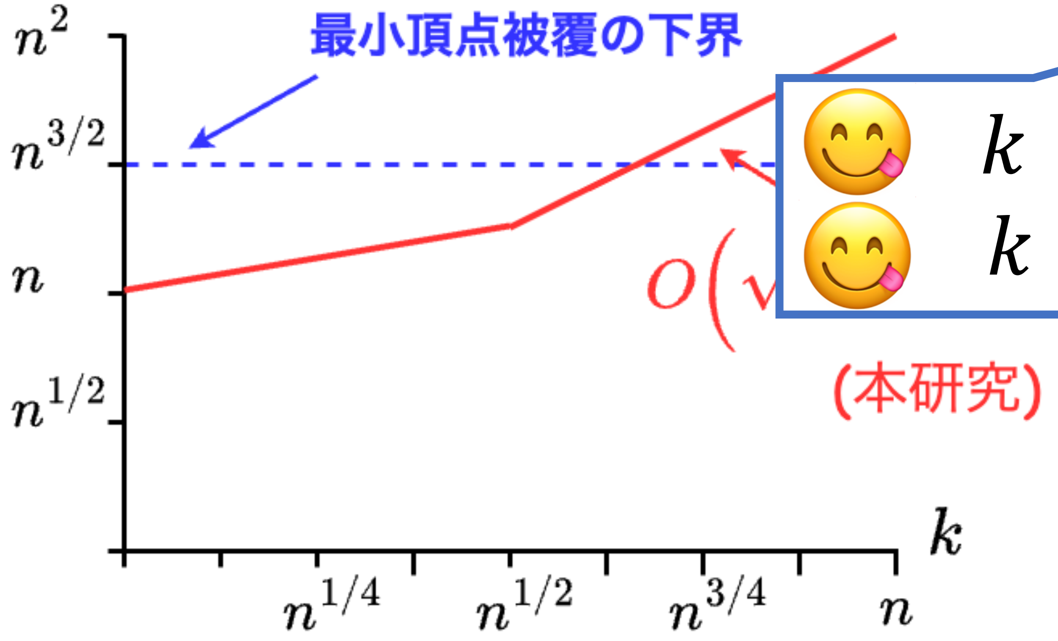
主結果①: 頂点被覆問題に対する パラメータ化量子クエリ計算量

定理

大きさ k 以下の頂点被覆を持つかの判定問題の量子クエリ計算量

上界：$O(\sqrt{k}n + k^{3/2}\sqrt{n})$

FPTのような計算量, i.e., $O(f(k) \cdot n^{2-\epsilon})$



k：定数

k：より大 (例, $k = \Theta(\log n), k = \Theta(\sqrt{n})$)

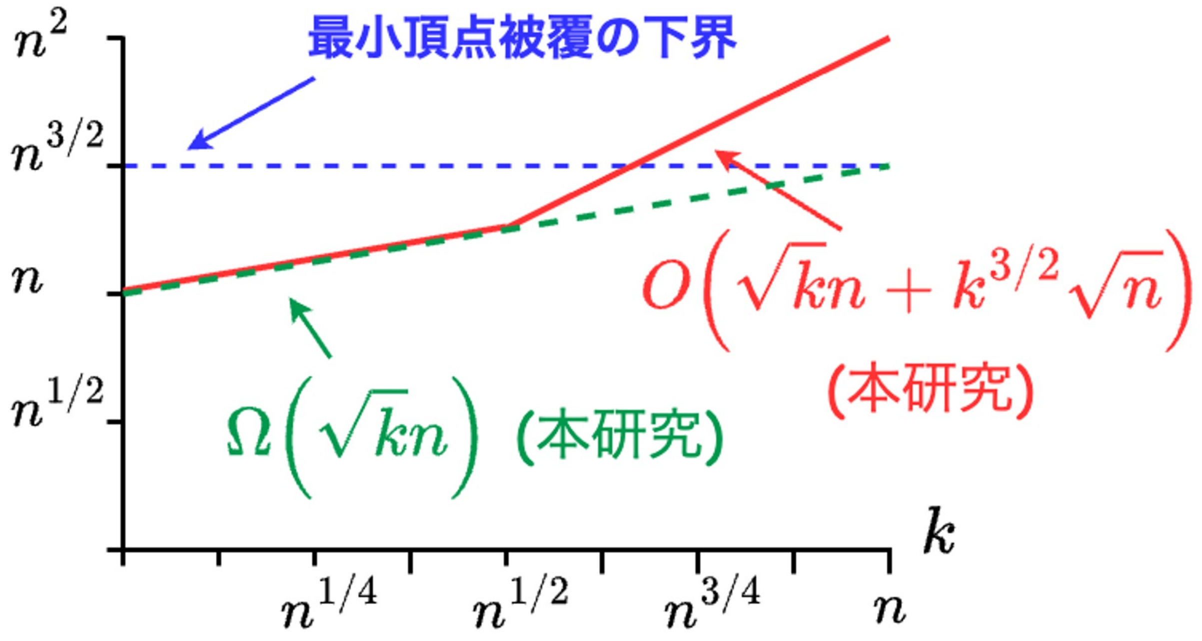
主結果①: 頂点被覆問題に対する
パラメータ化量子クエリ計算量

定理

大きさ k 以下の頂点被覆を持つかの判定問題の量子クエリ計算量

上界：$O(\sqrt{kn}+k^{3/2}\sqrt{n})$

下界：$\Omega(\sqrt{kn})$ （$k \le (1-\epsilon)n$ の時）



$k=O(\sqrt{n})$のとき
$\Theta(\sqrt{kn})$で最適！！

主結果①: 頂点被覆問題に対する パラメータ化量子クエリ計算量

定理

大きさ k 以下の頂点被覆を持つかの判定問題の量子クエリ計算量

上界：$O(\sqrt{kn} + k^{3/2}\sqrt{n})$

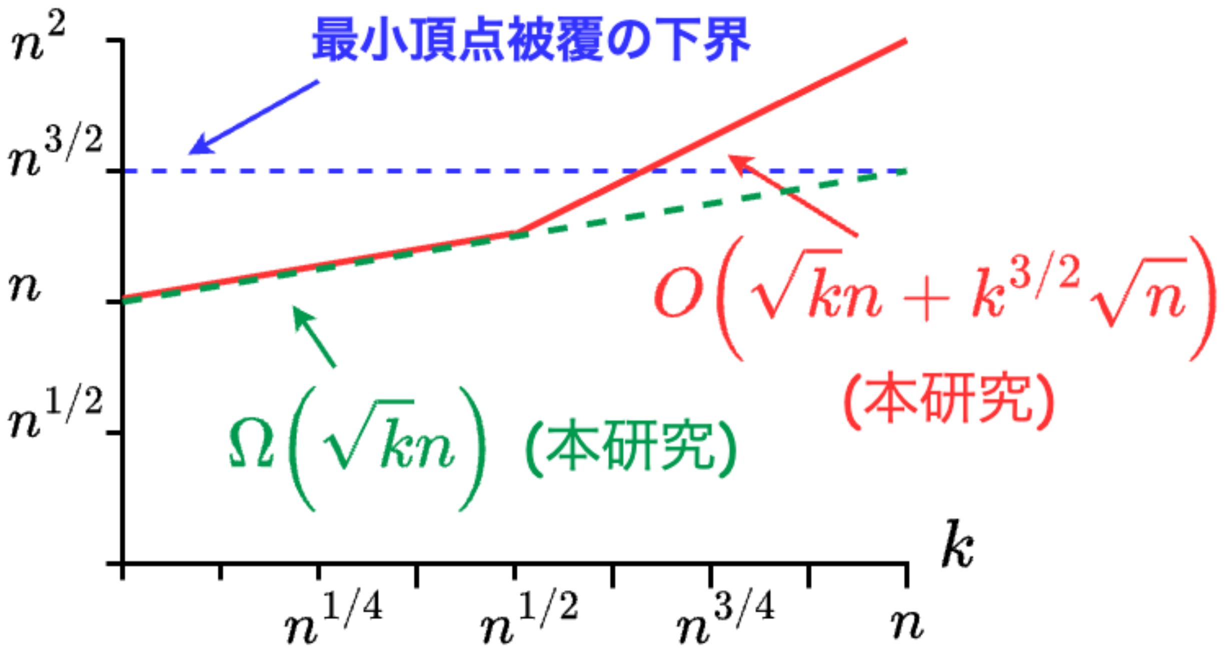
下界：$\Omega(\sqrt{kn})$ ($k \leq (1-\epsilon)n$ の時)

意義

- **最小頂点被覆の上界$O(n^2)$, 下界$\Omega(n^{3/2})$** [Zhang '04]**をパラメータ化により改善**

手法

- **量子クエリカーネル化**



カーネル化 (kernelization)

入力：インスタンス (G, k)
出力：別の**等価**で**小さな**インスタンス (G', k')
　　or (G, k)がYesインスタンス or Noインスタンスだと断定

カーネル

- **(G, k)がYesインスタンス $\Leftrightarrow$ (G', k')がYesインスタンス**
- $|E(G')| \leq f(k)$
- $k' \leq g(k)$

Buss-Goldsmithによるk-頂点被覆のカーネル化

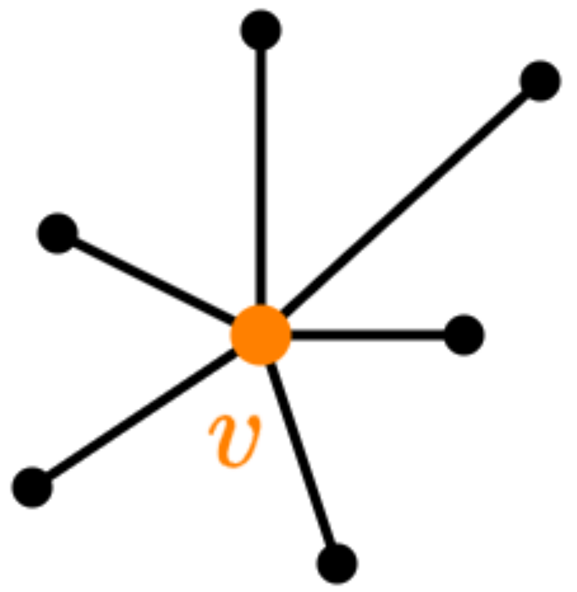
Rule 1. 孤立点 v がある時，$\boldsymbol{(G,k) \to (G - v, k)}$

Buss-Goldsmithによるk-頂点被覆のカーネル化

Rule 1. 孤立点 v がある時、$(G, k) \to (G - v, k)$

Rule 2. **次数 $k+1$ 以上の頂点 v** がある時,

vを選ばなければ、
vと接続する頂点を全て
選ばないといけない

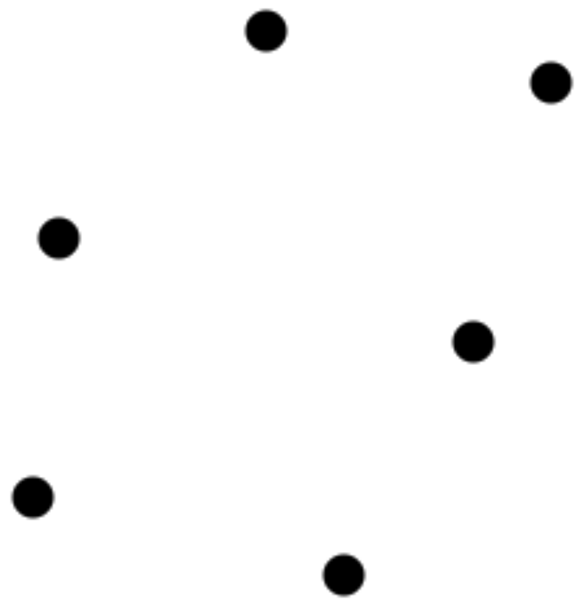


Buss-Goldsmithによるk-頂点被覆のカーネル化

Rule 1. 孤立点 v がある時、$(G,k) \rightarrow (G - v, k)$

Rule 2. **次数 $\boldsymbol{k+1}$ 以上の頂点 $\boldsymbol{v}$** がある時, $\boldsymbol{(G,k) \rightarrow (G - v, k-1)}$

サイズk以下の頂点被覆は必ずvを含む.

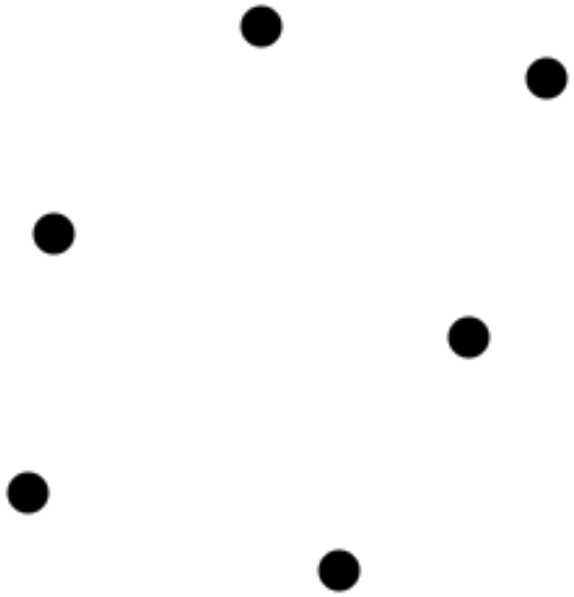


Buss-Goldsmithによるk-頂点被覆のカーネル化

Rule 1. 孤立点 v がある時、$(G, k) \to (G - v, k)$

Rule 2. **次数 $k+1$ 以上の頂点 v** がある時, $\boldsymbol{(G, k) \to (G - v, k - 1)}$

サイズk以下の頂点被覆は必ずvを含む.



事実: Rule1, 2の適用後 G の辺の本数が k^2本より多いならNoインスタンス

新しいアプローチ: 量子クエリカーネル化

入力：**量子オラクルでアクセスする**インスタンス (G, k)
出力：**ビット列として**別の**等価な**インスタンス (G', k')を得る
or (G, k)がYesインスタンス or Noインスタンスだと断定

- **(G, k)がYesインスタンス $\Leftrightarrow$ (G', k')がYesインスタンス**

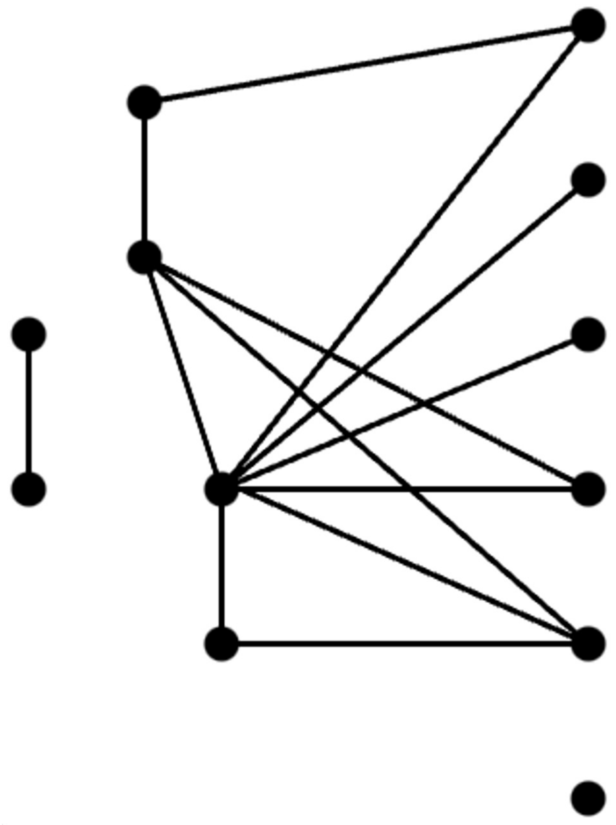
新しいアプローチ: 量子クエリカーネル化

入力：**量子オラクルでアクセスする**インスタンス (G,k)
出力：**ビット列として**別の**等価な**インスタンス (G',k')を得る
or (G,k)がYesインスタンス or Noインスタンスだと断定

- **(G,k)がYesインスタンス $\Leftrightarrow$ (G',k')がYesインスタンス**

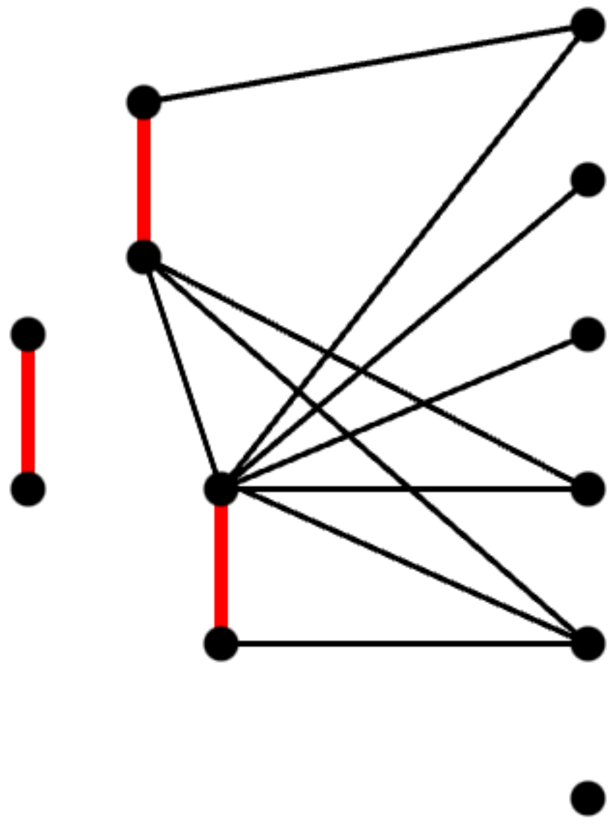
☞ **量子クエリカーネル化後は、(G',k')に**
古典のアルゴリズムを適用するだけ！

k-頂点被覆問題に対する量子に適した(古典の)カーネル化



k-頂点被覆問題に対する量子に適した(古典の)カーネル化

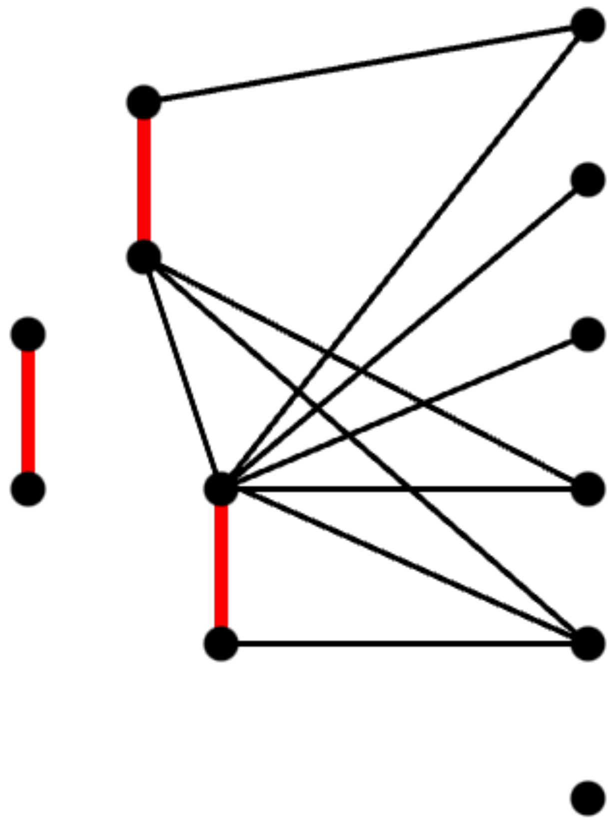
Step1　**極大マッチングM**をみつける



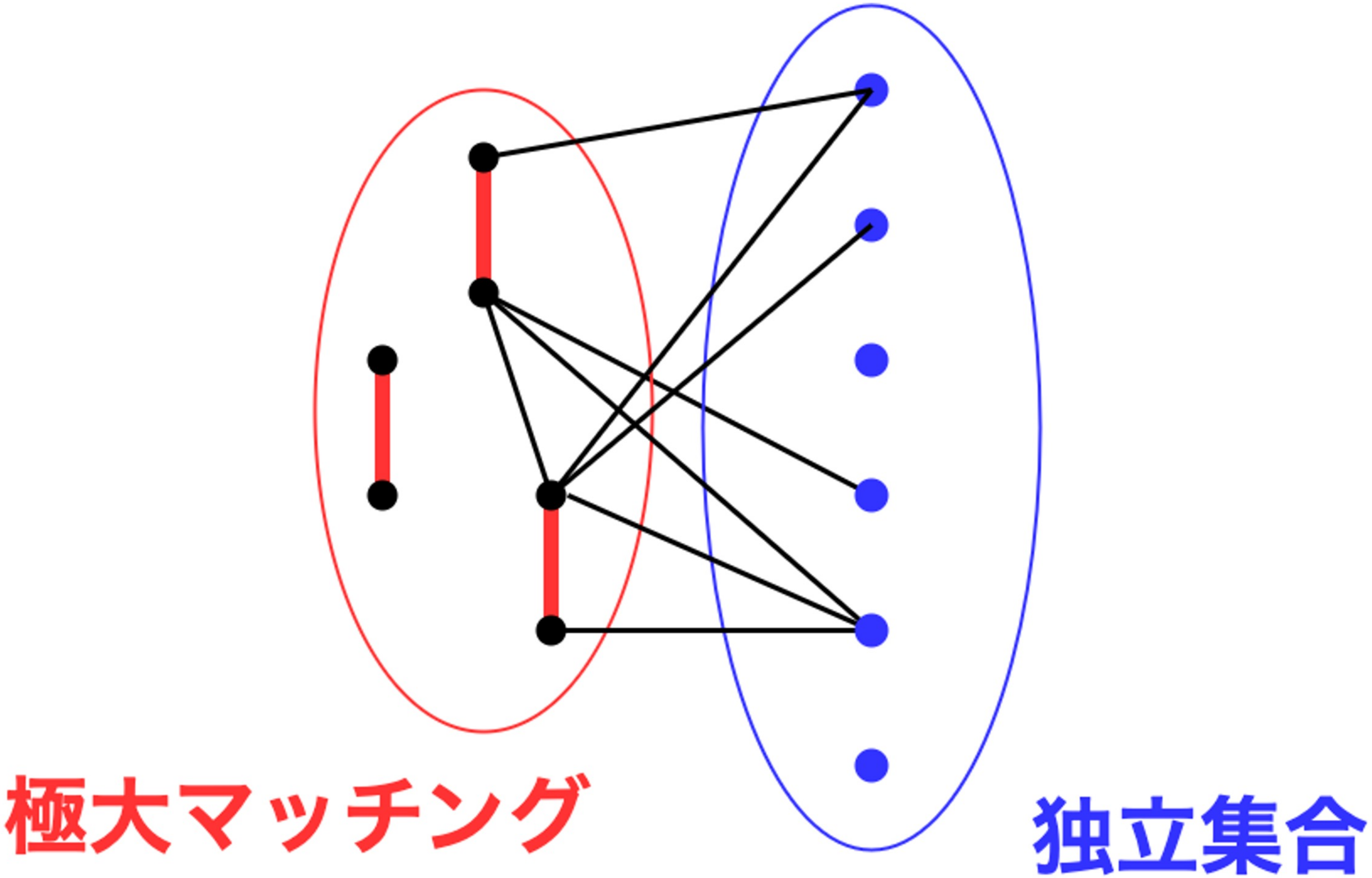
k-頂点被覆問題に対する量子に適した(古典の)カーネル化

Step1　**極大マッチングM**をみつける

if $|M| > k$: then Noインスタンス



重要な観察: 極大マッチングの構造



☞ すべての辺は、極大マッチングの端点を端点としてもつ！

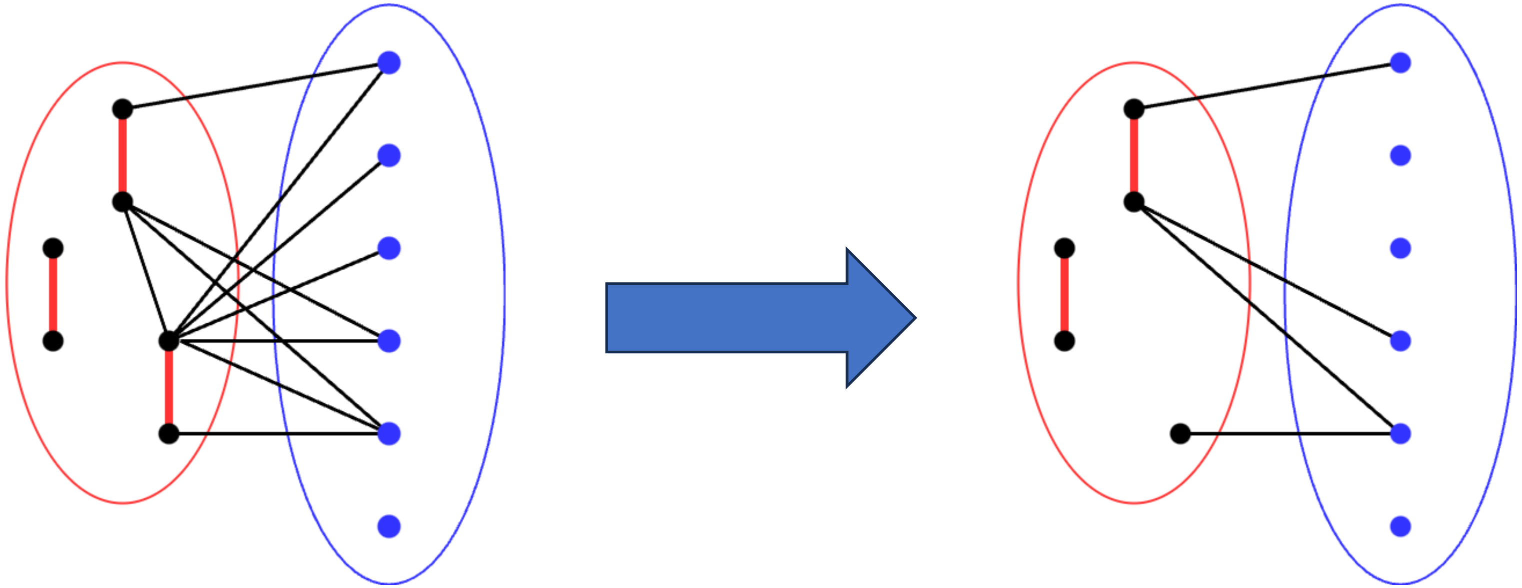
k-頂点被覆問題に対する量子に適した(古典の)カーネル化

Step1　極大マッチングMをみつける

if $|M| > k$: then Noインスタンス

Step2　$\boldsymbol{M}$**に属す辺の各端点**$\boldsymbol{v}$**のみ**に対して，**Rule 2**を適用

Rule 2 **次数** $\boldsymbol{k+1}$ **以上の頂点** $\boldsymbol{v}$ がある時、$(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{k}) \rightarrow (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}-\mathbf{1})$



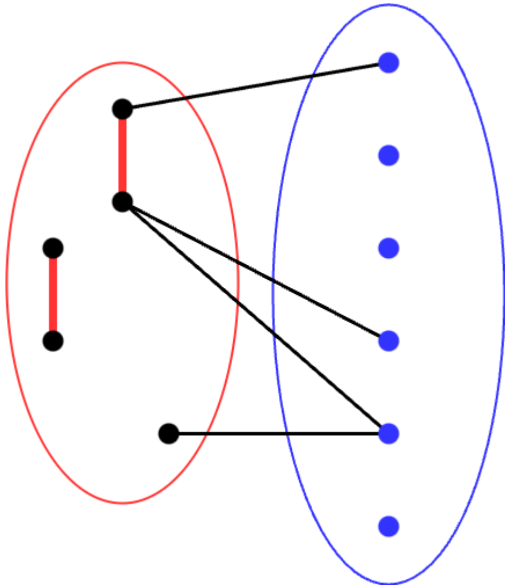
k-頂点被覆問題に対する量子に適した(古典の)カーネル化

Step1　極大マッチングMをみつける

if $|M| > k$: then Noインスタンス

Step2　Mに属す辺の各端点vのみに対して，**Rule 2**を適用

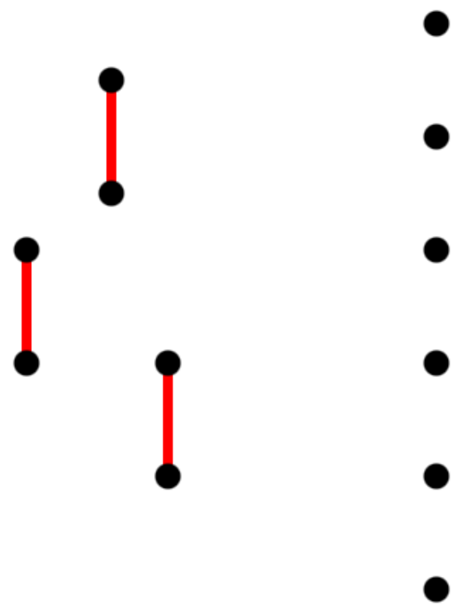
Rule 2 **次数 $k+1$ 以上の頂点 v** がある時、$(G,k) \to (G-v, k-1)$



補題:
Step1, 2の後，$|E(G)| \leq 2k^2$

k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

Step1 **Grover探索**で サイズ $k+1$ 以上のマッチング or サイズ k 以下の極大マッチング をみつける



補題: Step1は$\boldsymbol{O(\sqrt{kn})}$クエリでできる

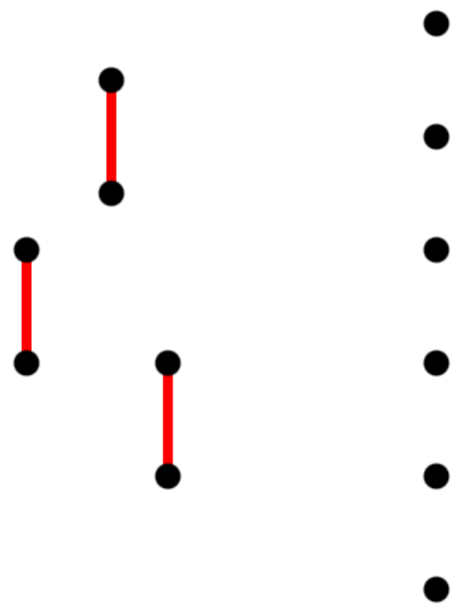
k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

サイズ $k+1$ 以上のマッチング

Step1　Grover探索で　　or　　をみつける

サイズ k 以下

Noインスタンス



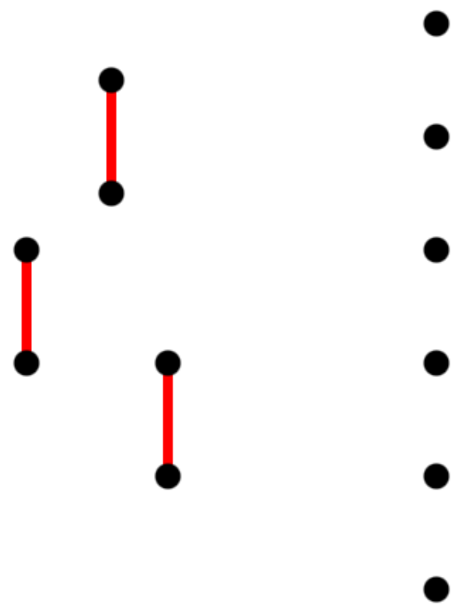
補題: Step1は$\boldsymbol{O(\sqrt{kn})}$クエリでできる

k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

サイズ $k+1$ 以上のマッチング

Step1　Grover探索で　or　をみつける

サイズ k 以下の極大マッチング



補題: Step1は$\boldsymbol{O(\sqrt{kn})}$クエリでできる

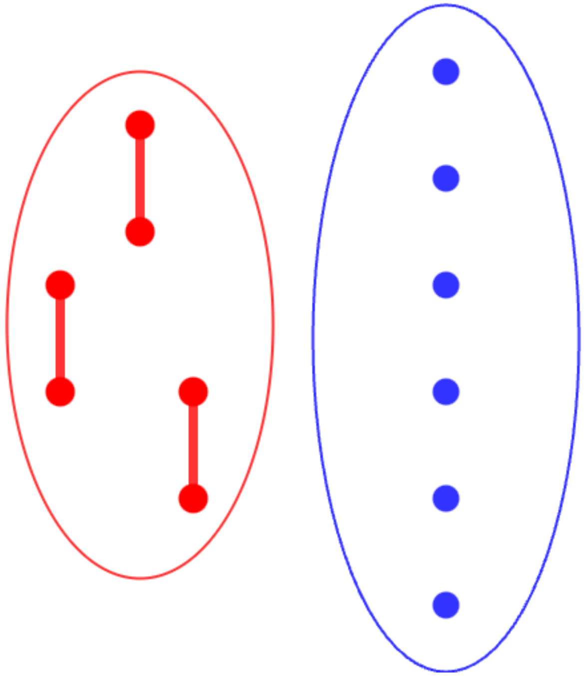
k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

サイズ $k+1$ 以上のマッチング

Step1 or をみつける

サイズ k 以下の極大マッチングM

Step2 **Mに属す辺の各端点vのみ**に対して、



k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

サイズ $k+1$ 以上のマッチング

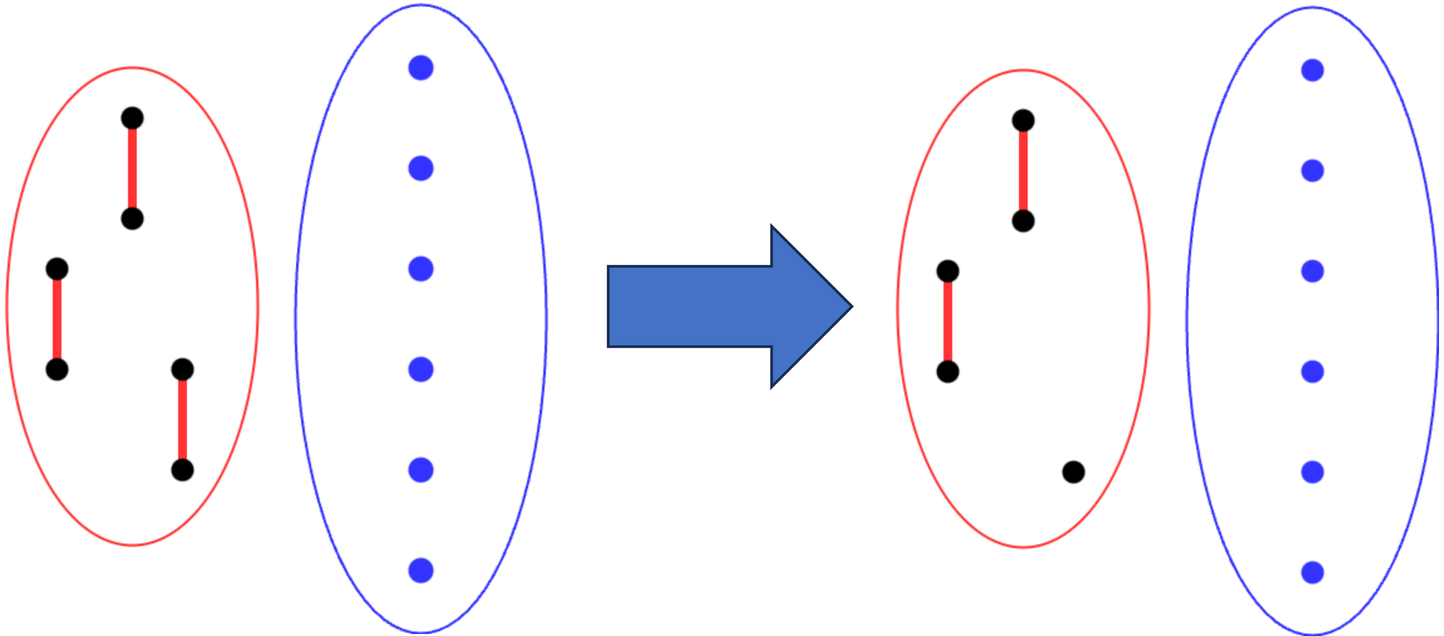
Step1　　or　　をみつける

サイズ k 以下の極大マッチングM

Step2　**Mに属す辺の各端点vのみ**に対して、

if vの次数 $> k$: then vを削除, $k \leftarrow k-1$

else: vと接続する辺を全てみつける



k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

サイズ $k+1$ 以上のマッチング

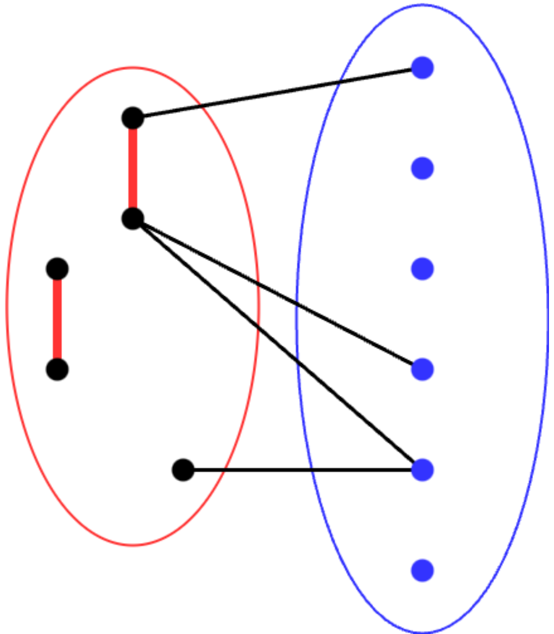
Step1 or をみつける

サイズ k 以下の極大マッチング M

Step2 **M に属す辺の各端点 v のみ**に対して、

if v の次数 $> k$: then v を削除, $k \leftarrow k-1$

else: v と接続する辺をGrover探索で全てみつける



k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

サイズ $k+1$ 以上のマッチング

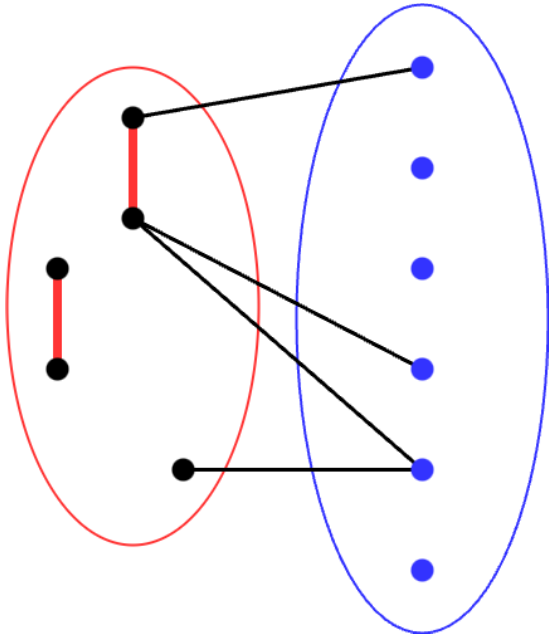
Step1　　　　　　or　　　　　　　をみつける

サイズ k 以下の極大マッチングM

Step2　**Mに属す辺の各端点vのみ**に対して、

if vの次数 $> k$: then vを削除, $k \leftarrow k - 1$

else: vと接続する辺をGrover探索で全てみつける



カーネルをビット列として得た！

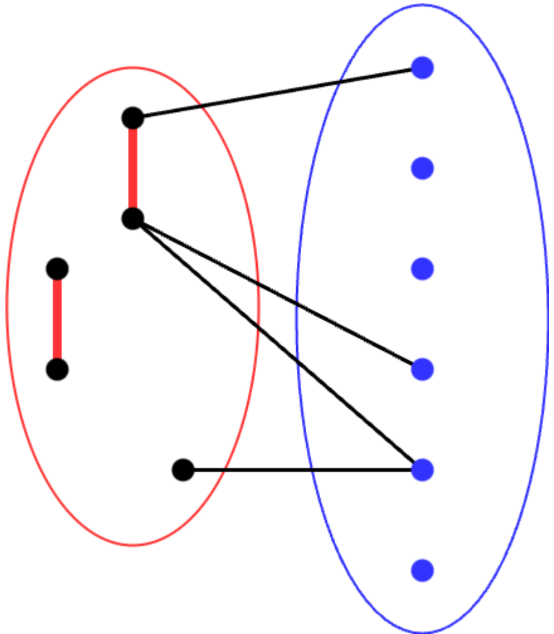
k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

Step1 サイズ $k+1$ 以上のマッチング or **サイズ k 以下の極大マッチングM** をみつける

Step2 **Mに属す辺の各端点vのみ**に対して、

if vの次数 $> k$: then vを削除, $k \leftarrow k-1$

else: vと接続する辺をGrover探索で全てみつける



補題:

Step2は$O(k^{3/2}\sqrt{n})$クエリでできる

k-頂点被覆問題に対する量子クエリカーネル化

Step1　Grover探索で

サイズ $k+1$ 以上のマッチング

or

サイズ k 以下の極大マッチング

をみつける

$\boldsymbol{O(\sqrt{kn})}$クエリ

Step2　Mに属す辺の各端点vのみに対して、

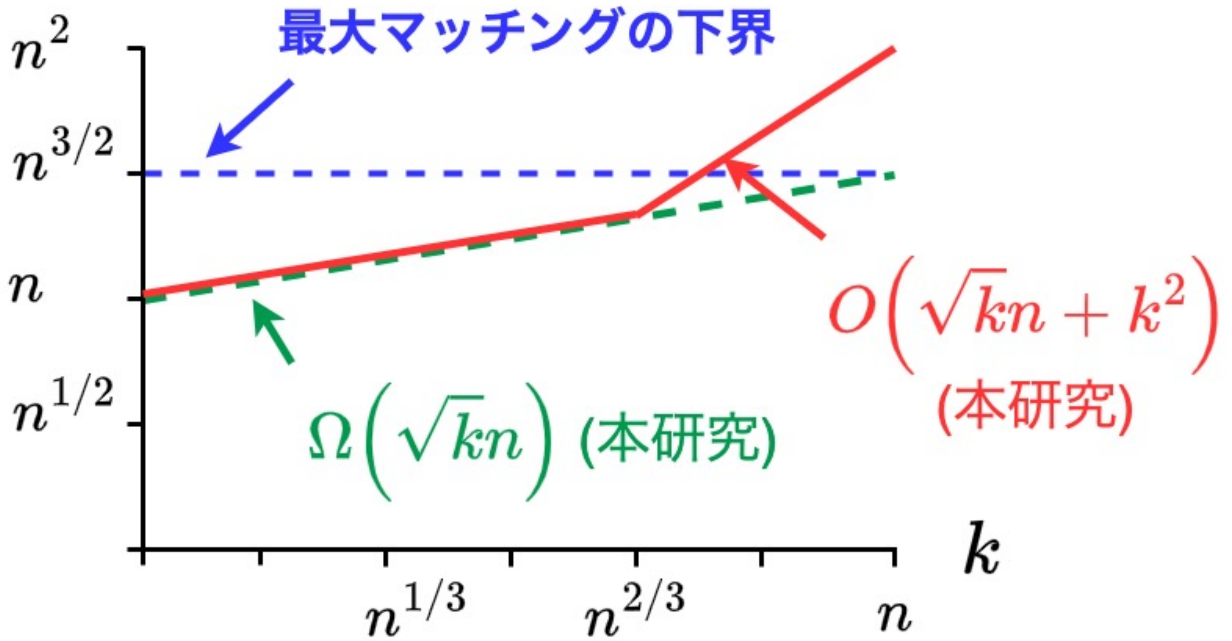
if vの次数 $> k$: then vを削除, $k \leftarrow k - 1$

else: vと接続する辺をGrover探索で全てみつける

$\boldsymbol{O(k^{3/2}\sqrt{n})}$クエリ

主結果②:マッチング問題に対する パラメータ化量子クエリ計算量

定理
大きさ k 以上のマッチングを持つかの判定問題の量子クエリ計算量
上界：$O(\sqrt{k}n + k^2)$
下界：$\Omega(\sqrt{k}n)$



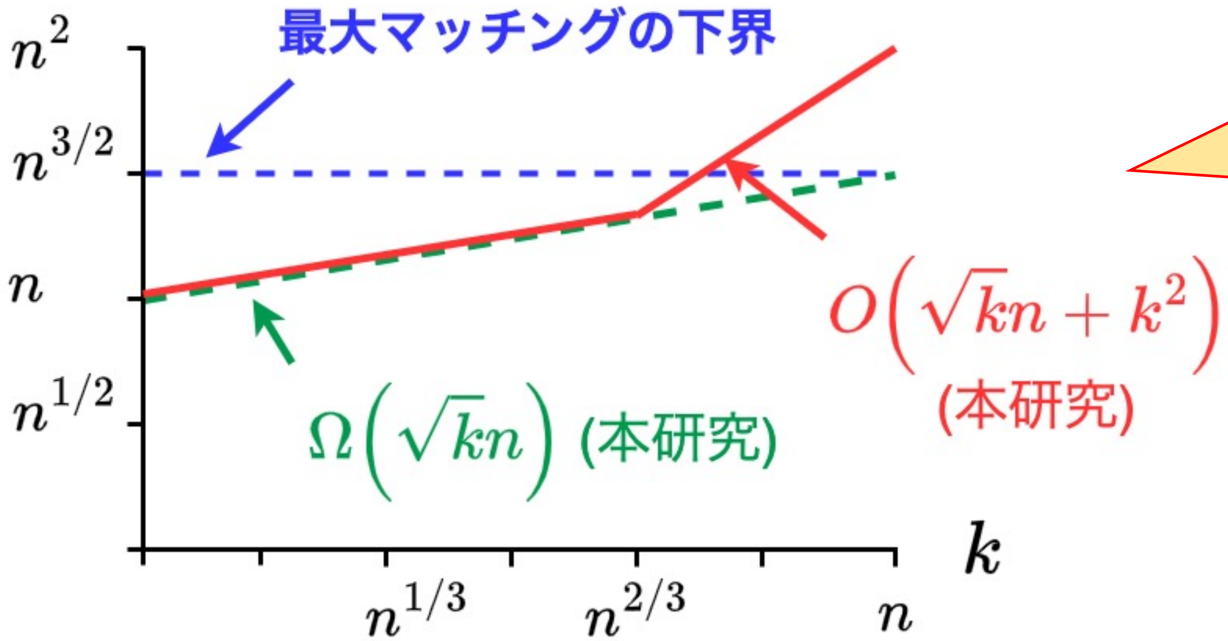
主結果②:マッチング問題に対する パラメータ化量子クエリ計算量

定理

大きさ k 以上のマッチングを持つかの判定問題の量子クエリ計算量

上界：$O(\sqrt{k}n + k^2)$

下界：$\Omega(\sqrt{k}n)$



$k = O(n^{2/3})$のとき

$\Theta(\sqrt{k}n)$で最適！！

主結果②:マッチング問題に対する パラメータ化量子クエリ計算量

定理

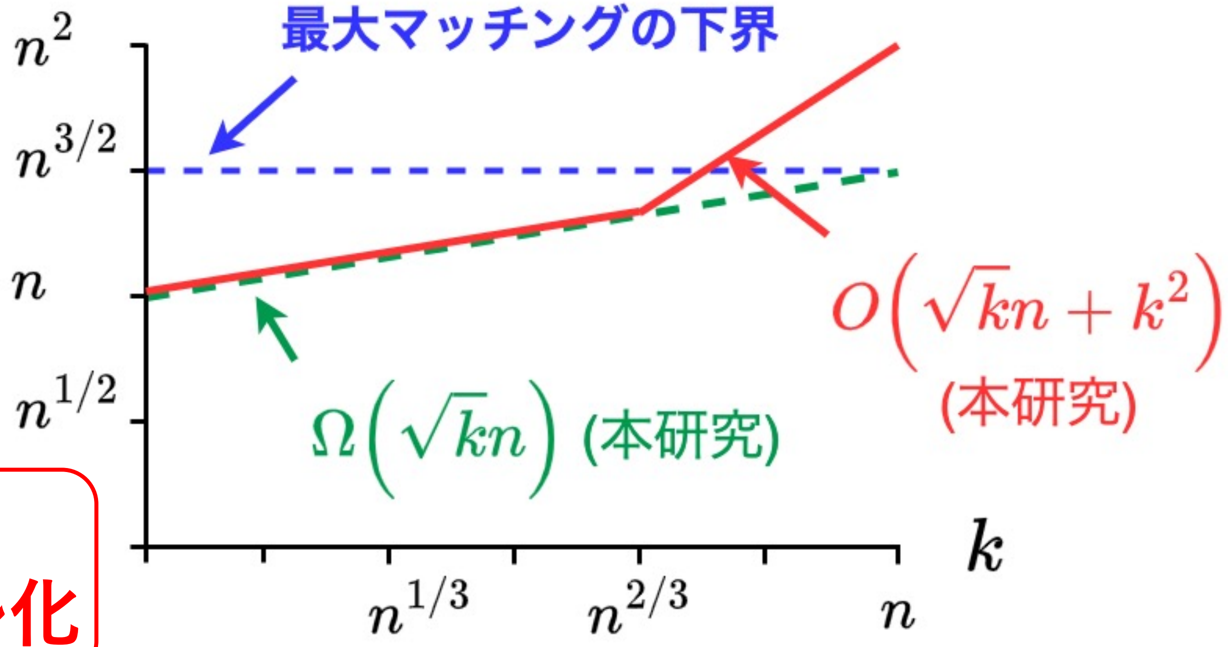
大きさ k 以上のマッチングを持つかの判定問題の量子クエリ計算量

上界：$O(\sqrt{kn} + k^2)$

下界：$\Omega(\sqrt{kn})$

意義

- **最大マッチングの上界$O(n^{7/4})$** [Kimmel-Witter '21], **下界$\Omega(n^{3/2})$** [Zhang '04]**を パラメータ化により改善**



手法

- **増加路探索 ＋ 量子クエリカーネル化**

結論

- パラメータ化量子クエリ計算量について考察
- 頂点被覆問題とマッチング問題に対して, パラメータがそんなに大きくない時に最適なパラメータ化量子クエリ計算量を導出

結論

- **パラメータ化量子クエリ計算量について考察**
- **頂点被覆問題とマッチング問題に対して, パラメータがそんなに大きくない時に最適なパラメータ化量子クエリ計算量を導出**

Message

☞ **カーネル化のような古典のテクニック**を賢く使うことで, 量子クエリ計算量を改善できる！

Appendix

Quantum Query Algo for k-matching

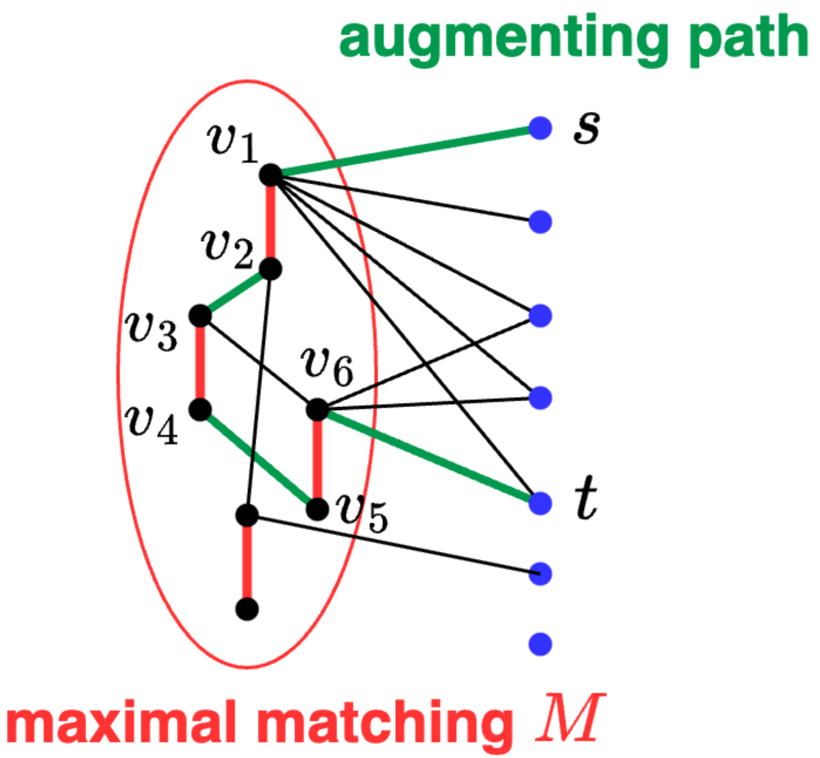
Step1 Find a matching of size at least $k+1$ or a maximal matching of size at most k ⟸ $O(\sqrt{kn})$ queries

Quantum Query Algo for k-matching

Step1 Find a matching of size at least $k+1$ or a maximal matching M of size at most k ⟸ $O(\sqrt{kn})$ queries

Step2 Repeatedly find an augmenting path and augment along it

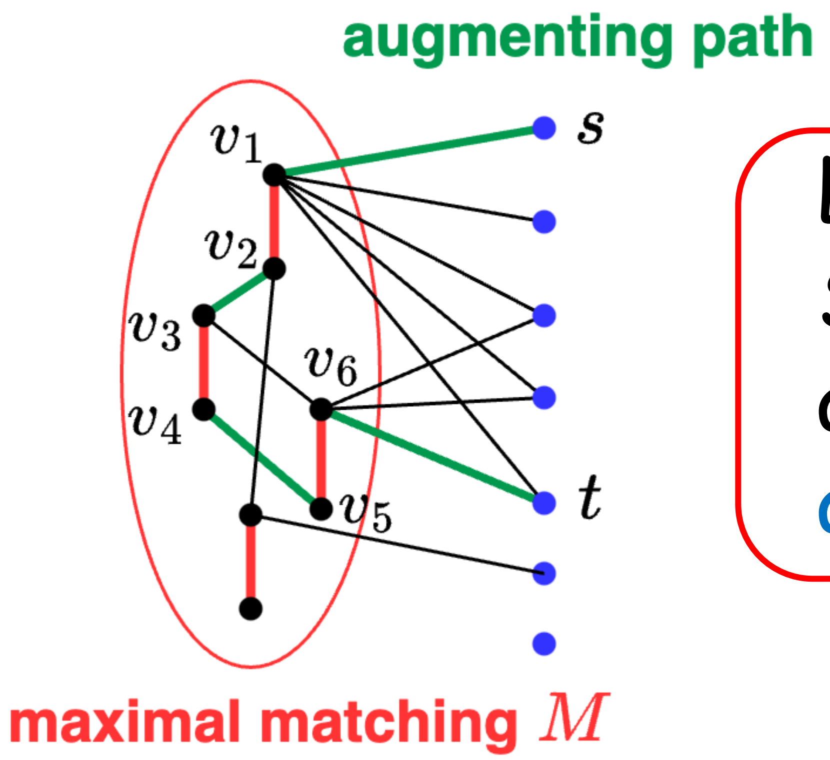
$|M|$ increases by 1 !



Quantum Query Algo for k-matching

Step1 Find a matching of size at least $k+1$ or a maximal matching M of size at most k ⟸ $O(\sqrt{kn})$ queries

Step2 Repeatedly find an augmenting path and augment along it

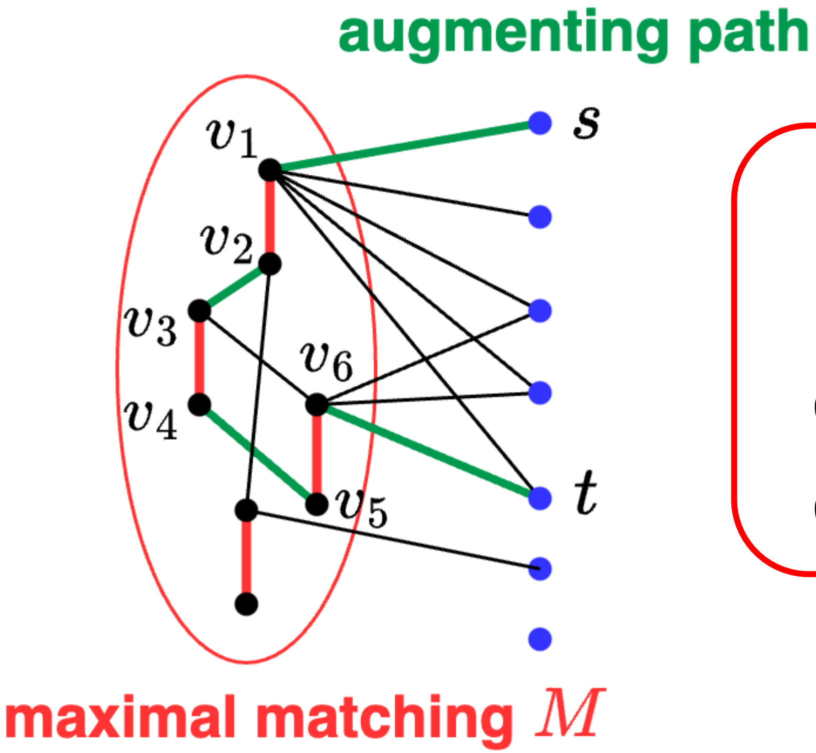


Lem:
Step2 uses $O(k^2)$ queries + amoritized $O(\sqrt{n})$ queries per one augmentation

Quantum Query Algo for k-matching

Step1 Find a matching of size at least $k+1$ or a maximal matching M of size at most k ⟸ $O(\sqrt{kn})$ queries

Step2 Repeatedly find an augmenting path and augment along it



Lem:
Step2 uses $O(k^2)$ queries + amoritized $O(\sqrt{n})$ queries per one augmentation

$O(k^2 + k\sqrt{n})$ queries