Caminant Aleatori
Setembre 2022, Ot Garces Ortiz

1. Caminant Aleatoris

Definició 1.1. Sigui $p \in [0,1]$ i prenem $q = 1-p$ per definició. Sigui ara $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una seqüència de variables aleatòries discretes *independents i idènticament distribuïdes* amb distribució $p(\sigma_i = +1) = p$ i $p(\sigma = -1) = q = 1-p$. Siguin també $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ la *condició incial* i el *pas* respectivament. Per a $n \in \mathbb{N}$, definim

$$s_n := a + b\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$$

aleshores la seqüència $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es diu *caminant aleatori a* $\mathbb{Z}$. Per a $p \neq q$, diem que el caminant aleatori és *esbiaixat*, mentres que per $p = q = 1/2$ en diem que és *no-esbiaixat* (o bé *simètric*). A partir d'ara considerem que el caminant aleatori és no-esbiaixat.

De manera més col·loquial, es pot entendre com un '*joc*' aleatori on decidim si caminar cap endavant o cap enrere en funció del resultat de tirar una moneda no-esbiaixada, a salts discrets, de forma que a cada passa que donem com a caminants tenim la mateixa probabilitat de retrocedir que d'avançar. Es pot veure de forma bastant clara que si prenem $b > 0$, aleshores fem una passa endavant quan $\sigma_i = +1$ i en fem una passa enrere quan $\sigma_i = -1$ per una i qualsevol, $i \leq n$. Una de les propietats més interessants que té el caminant aleatori no-esbiaixat és que el valor esperat de la '*posició*' (respecte de la condició inicial) després de fer-ne n passes és nul, però el *desplaçament quadràtic mitjà* (respecte de la condició inicial) no ho és pas. No és complicat trobar aquests dos resultats de forma directa

$$\mathbb{E}\left(s_n - a\right) = \mathbb{E}\left(b\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\right) = b\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\sigma_i\right) = 0$$

ja que $\mathbb{E}(\sigma_i) = +(1)\times 1/2 + (-1)\times 1/2 = 0\ \forall i \leq n$. Per altra banda, tenim que

$$\mathbb{E}\left((s_n - a)^2\right) = \mathbb{E}\left(b^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\right) = \mathbb{E}\left(b^2\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\right) = b^2\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}(\sigma_i\sigma_j)$$

però recordem que $\mathbb{E}(\sigma_i\sigma_j) = \mathbb{E}(\sigma_i)\mathbb{E}(\sigma_j)$ per $i \neq j$ ja que són variables aleatòries independents, i també recordem que havíem vist que $\mathbb{E}(\sigma_i) = 0\ \forall\ i \leq n$, pel que $\mathbb{E}(\sigma_i\sigma_j) = \mathbb{E}(\sigma_i)\mathbb{E}(\sigma_j) = 0$ per $i \neq j$. Per $i = j$ tenim que $\mathbb{E}(\sigma_i\sigma_j) = \mathbb{E}(\sigma_i^2) = (+1)^2\times 1/2 + (-1)^2\times 1/2 = 1$, i aleshores tenim que $\mathbb{E}(\sigma_i\sigma_j) = \delta_{ij}$. Així doncs

$$\mathbb{E}\left((s_n - a)^2\right) = b^2\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}(\sigma_i\sigma_j) = b^2\sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij} = b^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij} = b^2\sum_{i=1}^{n}1 = nb^2$$

i d'aquesta forma tenim que $\mathbb{E}\left((s_n - a)^2\right) = nb^2$. Per tant, podem veure que el valor esperat de la '*posició*' és nul respecte a la condició inicial a, mentre que el desplaçament quadràtic mitjà (DQM o QMD en anglés) no és nul per a $n \geq 1$, i depèn de la longitud del pas b.

2. Implementació i Simulació

2.1. **Primer programa.** El caminant aleatori s'implementa mitjançant un generador de decisions semi-aleatòries entre dos elements (`down` o `up`) a un vector amb la mateixa probabilitat. Es fa una lectura del valor que s'ha extret i aleshores es fa un desplaçament a la dreta si el valor és `up` i cap a l'esquerra si el valor és `down`. La condició inicial es dona al començament del programa i el valor del pas queda fixat per definició $b = 1$. Al mateix programa s'indica el nombre de passes totals que es volen fer (s'especifica el nombre de variables aleatòries σ_i), i la denotem per `nstep`. La primera part del programa únicament corre un bucle pels `nstep` i retorna un gràfic del caminant aleatori com el següent:

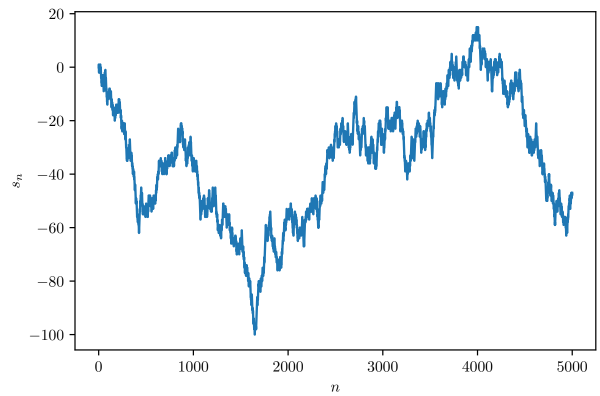

Figure 1. Caminant aleatori generat amb el programa `random_walks.ipynb`.

2.2. **Segon programa.** El segon bloc del programa incorpora una nova variable anomenada `nexp` que representa el nombre de caminants aleatoris que generarem per poder calcular, estadísticament, el desplaçament quadràtic mitjà (DQM). Això ho aconseguirem generant `nexp` caminants aleatoris diferents i mirant quin és el desplaçament quadràtic de cascun d'ells respecte a la condició inicial, i farem un promig sobre tots els caminants aleatoris que hem generat, per tal de verificar que després de `nstep`, es té que efectivament $\mathbb{E}((s_n - a)^2) \sim b^2\texttt{nstep} = \texttt{nstep}$ (ja que hem pres $b = 1$). En aquest programa, donem `nexp`, `nstep` i ens retorna el QMD, que està definit com $\text{QMD} = \sqrt{\mathbb{E}((s_n - a)^2)}$ i la seva incertesa estadística per a `nstep` passes.

2.3. **Tercer programa.** L'últim programa implementa un bucle sobre un vector de diferents valors de `nstep`, és a dir, fa simulacions per diferents valors del nombre de passes i en calcula el valor del QMD per a cada passa, juntament amb la seva incertesa estadística. Això ens permet verificar que efectivament $\text{QMD} = \sqrt{\mathbb{E}(s_n - a)^2} \sim \sqrt{\texttt{nstep}}$. Aquest programa retorna dos vectors, un amb els valors del QMD que porta el nom de `vsqQMD` i també un vector amb les incerteses estadístiques associades, `vsqQMDerr`. El vector que inclou els diferents nombres de passes es pot modificar per incloure els punts que desitgem per fer les simulacions, i es pot modificar a la part superior del programa (porta el nom `liststeps`). Aquest programa també retorna un gràfic on es presenten els valors obtinguts del QMD per a cada valor de `nstep` introduïts al vector `liststeps`, tal com es mostra a continuació

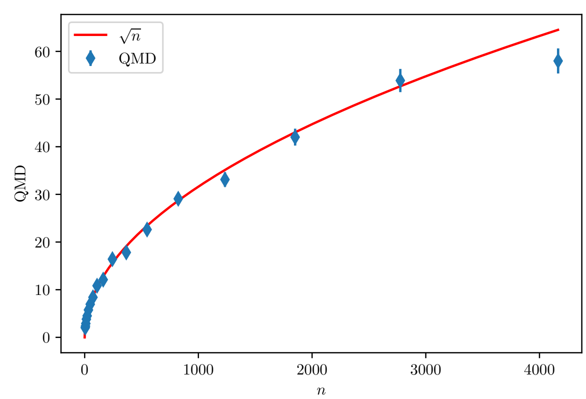

Figure 2. Valors del QMD trobats amb la simulació per diferents valors de `nstep` amb $\texttt{nexp} = 200$ experiments comparats amb la predicció teòrica.