

Caminant Aleatori

Setembre 2022, Ot Garces Ortiz

1. CAMINANT ALEATORIS

Definició 1.1. Sigui $p \in [0, 1]$ i prenem $q = 1 - p$ per definició. Sigui ara $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una seqüència de variables aleatòries discretes *independents i idènticament distribuïdes* amb distribució $p(\sigma_i = +1) = p$ i $p(\sigma_i = -1) = q = 1 - p$. Siguin també $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la *condició inicial* i el *pas* respectivament. Per a $n \in \mathbb{N}$, definim

$$s_n := a + b \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

aleshores la seqüència $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es diu *caminant aleatori* a \mathbb{Z} . Per a $p \neq q$, diem que el caminant aleatori és *esbiaixat*, mentre que per $p = q = 1/2$ en diem que és *no-esbiaixat* (o bé *simètric*). A partir d'ara considerem que el caminant aleatori és no-esbiaixat.

De manera més col·loquial, es pot entendre com un 'joc' aleatori on decidim si caminar cap endavant o cap enrere en funció del resultat de tirar una moneda no-esbiaixada, a salts discrets, de forma que a cada passa que donem com a caminants tenim la mateixa probabilitat de retrocedir que d'avançar. Es pot veure de forma bastant clara que si prenem ≥ 0 , aleshores fem una passa endavant quan $\sigma_i = +1$ i en fem una passa enrere quan $\sigma_i = -1$ per una i qualsevol, $i \leq n$. Una de les propietats més interessants que té el caminant aleatori no-esbiaixat és que el valor esperat de la 'posició' (respecte de la condició inicial) després de fer-ne n passes és nul, però el *desplaçament quadràtic mitjà* (respecte de la condició inicial) no ho és pas. No és complicat trobar aquests dos resultats de forma directa

$$\mathbb{E}(s_n - a) = \mathbb{E}\left(b \sum_{i=1}^n \sigma_i\right) = b \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\sigma_i) = 0$$

ja que $\mathbb{E}(\sigma_i) = +1 \times 1/2 + (-1) \times 1/2 = 0 \forall i \leq n$. Per altra banda, tenim que

$$\mathbb{E}((s_n - a)^2) = \mathbb{E}\left(b^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i \sum_{j=1}^n \sigma_j\right) = \mathbb{E}\left(b^2 \sum_{i,j=1}^n \sigma_i \sigma_j\right) = b^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}(\sigma_i \sigma_j)$$

però recordem que $\mathbb{E}(\sigma_i \sigma_j) = \mathbb{E}(\sigma_i) \mathbb{E}(\sigma_j)$ per $i \neq j$ ja que són variables aleatòries independents, i també recordem que havíem vist que $\mathbb{E}(\sigma_i) = 0 \forall i \leq n$, pel que $\mathbb{E}(\sigma_i \sigma_j) = \mathbb{E}(\sigma_i) \mathbb{E}(\sigma_j) = 0$ per $i \neq j$. Per $i = j$ tenim que $\mathbb{E}(\sigma_i \sigma_j) = \mathbb{E}(\sigma_i^2) = (+1)^2 \times 1/2 + (-1)^2 \times 1/2 = 1$, i aleshores tenim que $\mathbb{E}(\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij}$. Així doncs

$$\mathbb{E}((s_n - a)^2) = b^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}(\sigma_i \sigma_j) = b^2 \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} = b^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = b^2 \sum_{i=1}^n 1 = nb^2$$

i d'aquesta forma tenim que $\mathbb{E}((s_n - a)^2) = nb^2$. Per tant, podem veure que el valor esperat de la 'posició' és nul respecte a la condició inicial a , mentre que el desplaçament quadràtic mitjà (DQM o QMD en anglès) no és nul per a $n \geq 1$, i depèn de la longitud del pas b .

2. IMPLEMENTACIÓ I SIMULACIÓ

2.1. Primer programa. El caminant aleatori s'implementa mitjançant un generador de decisions semi-aleatòries entre dos elements (**down** o **up**) a un vector amb la mateixa probabilitat. Es fa una lectura del valor que s'ha extret i aleshores es fa un desplaçament a la dreta si el valor és **up** i cap a l'esquerra si el valor és **down**. La condició inicial es dona al començament del programa i el valor del pas queda fixat per definició $b = 1$. Al mateix programa s'indica el nombre de passes totals que es volen fer (s'especifica el nombre de variables aleatòries σ_i), i la denotem per **nstep**. La primera part del programa únicament corre un bucle pels **nstep** i retorna un gràfic del caminant aleatori com el següent:

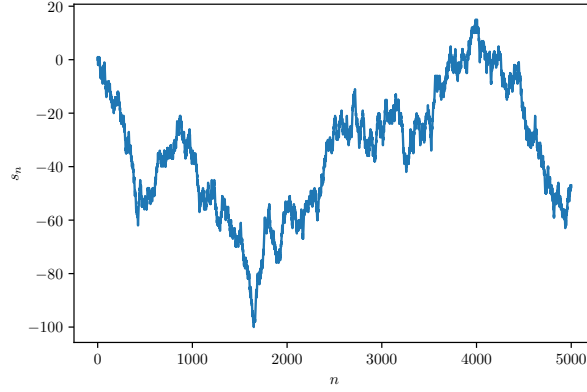


FIGURE 1. Caminant aleatori generat amb el programa `random_walks.ipynb`.

2.2. Segon programa. El segon bloc del programa incorpora una nova variable anomenada `nexp` que representa el nombre de caminants aleatoris que generarem per poder calcular, estadísticament, el desplaçament quadràtic mitjà (DQM). Això ho aconseguirem generant `nexp` caminants aleatoris diferents i mirant quin és el desplaçament quadràtic de cadascun d'ells respecte a la condició inicial, i farem un promig sobre tots els caminants aleatoris que hem generat, per tal de verificar que després de `nstep`, es té que efectivament $\mathbb{E}((s_n - a)^2) \sim b^2 \text{nstep} = \text{nstep}$ (ja que hem pres $b = 1$). En aquest programa, donem `nexp`, `nstep` i ens retorna el QMD, que està definit com $\text{QMD} = \sqrt{\mathbb{E}((s_n - a)^2)}$ i la seva incertesa estadística per a `nstep` passes.

2.3. Tercer programa. L'últim programa implementa un bucle sobre un vector de diferents valors de `nstep`, és a dir, fa simulacions per diferents valors del nombre de passes i en calcula el valor del QMD per a cada passa, juntament amb la seva incertesa estadística. Això ens permet verificar que efectivament $\text{QMD} = \sqrt{\mathbb{E}(s_n - a)^2} \sim \sqrt{\text{nstep}}$. Aquest programa retorna dos vectors, un amb els valors del QMD que porta el nom de `vsqQMD` i també un vector amb les incerteses estadístiques associades, `vsqQMDerr`. El vector que inclou els diferents nombres de passes es pot modificar per incloure els punts que desitgem per fer les simulacions, i es pot modificar a la part superior del programa (porta el nom `liststeps`). Aquest programa també retorna un gràfic on es presenten els valors obtinguts del QMD per a cada valor de `nstep` introduïts al vector `liststeps`, tal com es mostra a continuació

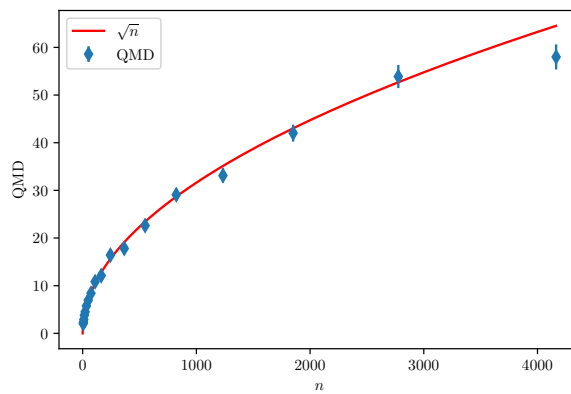


FIGURE 2. Valors del QMD trobats amb la simulació per diferents valors de `nstep` amb `nexp = 200` experiments comparats amb la predicció teòrica.