Ahora unimos cada punto en el ecuador exterior al punto en el ecuador interior que es el tercer punto a partir de la asignación anterior, recorriendo los puntos a favor de las manecillas del reloj.

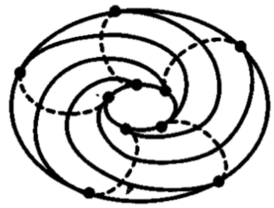

Figura 0.1. $(5,3)$-nudo tórico

Un procedimiento análogo se debe seguir para la construcción de un nudo tórico tipo (p,q).

Teorema 0.0.1. *Cualquier (p,q)-nudo tórico es también un (q,p)-nudo tórico.*

Demostración. Consideremos un (p,q)-nudo tórico, removemos un pequeño disco del toro donde dicho nudo yace de tal forma que el disco no se intersecte con el nudo. Deformamos dicho toro con el disco removido en dos bandas que están unidas una con otra. La banda más corta corresponde al meridiano del toro, mientras que la banda más larga corresponde a la longitud del toro.

Entonces tomamos la banda más larga y la giramos de adentro hacia afuera, luego realizamos el mismo procedimiento con la banda más pequeña. Entonces deformamos nuevamente las bandas para formar un nuevo toro con un disco removido pero con los roles de meridianos y longitudes cambiados, es decir, la banda que originalmente correspondía a la longitud ahora es la banda que corresponde al meridiano y la banda que originalmente correspondía al meridiano ahora es la banda que corresponde a la longitud. Debido a que la longitud y el meridiano intercambiaron papeles ahora tenemos un (q,p)-nudo tórico. $\square$

Utilizando el $(3,2)$-nudo tórico ejemplificaremos la demostración anterior.

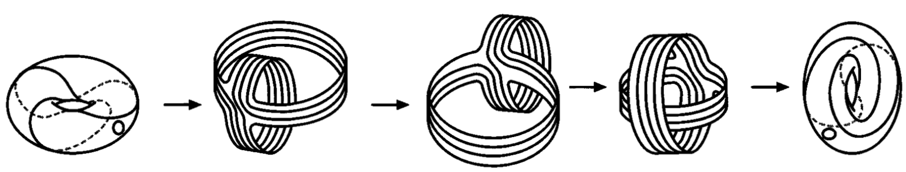

Figura 0.2. El $(3,2)$-nudo tórico es un $(2,3)$-nudo tórico

Proposición 0.1. *Todo (p,q)-nudo tórico siempre tiene una proyección con $p(q-1)$ cruces.*

Demostración. Consideremos un (p,q)-nudo tórico, construiremos una proyección que posea exactamente $p(q-1)$ cruces. Consideremos un cilindro con q líneas dibujadas a lo largo de él, entonces manteniendo un lado fijo realizamos p giros a favor de las manecillas del reloj obteniendo un el mismo cilindro pero ahora las líneas antes dibujadas se ven como espirales en él. Luego unimos los extremos del cilindro para formar así un toro. Entonces al proyectar dicho nudo en el plano y nos fijamos en alguna de las líneas antes dibujadas tenemos que dicha línea forma un ciclo en el cual pasa exactamente a través de las otras $q-1$ líneas restantes por cada giro dado, es decir se tienen $p(q-1)$ cruces. □

Para ejemplificar el procedimiento anterior consideremos el $(4,3)$-nudo tórico, formaremos un nudo con 8 cruces en su proyección.

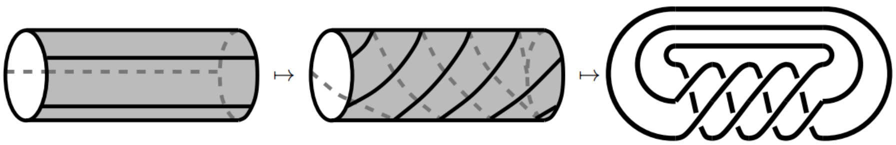

Figura 0.3. Proyección de un nudo tórico

Uniendo los dos resultados anteriores tenemos que un (p,q)-nudo tórico tiene una proyección con $p(q-1)$ cruces y una proyección con $q(p-1)$ cruces.

Definición 0.1. Llamaremos el **número de cruces** de un (p,q)-nudo tórico al mínimo entre $p(q-1)$ y $q(p-1)$.

Podemos generalizar la noción de un nudo tórico. Por definición tenemos que un nudo tórico es un nudo no trivial que puede ser colocado en la superficie de un toro incrustado en $\mathbb{R}^3$ de forma estándar, sin que el nudo posea cruces en dicha superficie. Donde incrustado en $\mathbb{R}^3$ de forma estándar significa que el toro es no anudado en $\mathbb{R}^3$. Ciertamente, algunos nudos no pueden ser tóricos pero tal vez pueden ser colocados en superficies de otros géneros.

Tomemos por ejemplo una superficie de género dos, llamaremos un **nudo 2-incrustable** a un nudo que yace sin intersecciones en una superficie de género dos. Un ejemplo de ello es el nudo 8.

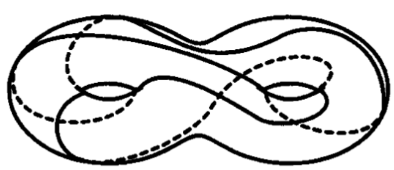

Figura 0.4. Nudo 2-incrustable

0.1. Nudos Satélite

Un segundo conjunto de nudos que se ha sido muy importante en los años recientes es el conjunto de los nudos satélite.

Definición 0.2. Sea K_1 un nudo dentro de un toro solido no anudado, con el toro formamos un segundo nudo K_2. Entonces el nudo K_1 que estaba dentro del toro original se transforma en un nuevo nudo dentro del toro anudado, a este nuevo nudo lo llamaremos un **nudo satélite**. El nudo K_2 es llamado el **nudo compañero** del nudo satélite.

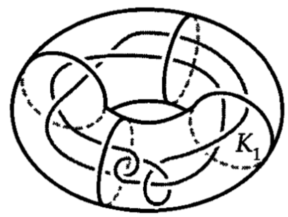

Figura 0.5. Un nudo K_1 dentro de un toro no anudado

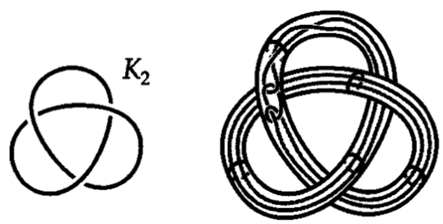

Figura 0.6. Toro anudado como K_2

Siempre tomaremos un nudo no trivial como el nudo compañero, ya que de ser el nudo trivial tendríamos que el nudo satélite es el mismo nudo que el original. También vamos a asumir que el nudo K_1 toca a todos los discos meridionales del toro solido y no se puede saltar alguno de ellos. Pensamos en el nudo satélite como un nudo que permanece dentro de un toro solido que tiene un nudo compañero como su curva central, tal y como un satélite permanece en una órbita alrededor del planeta.

Si tomamos el nudo original K_1 como un no nudo pero con un giro, entonces el nudo satélite resultante es llamado un **Whitehead doble** del nudo compañero. El nombre hace referencia al hecho que K_1 se asemeja al enlace de Whitehead.

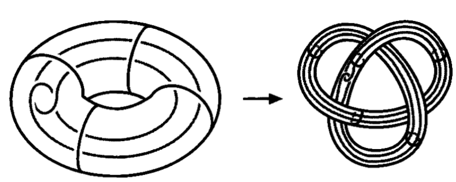

Figura 0.7. El Whitehead doble del nudo trébol

Un Whitehead doble no es único. Podemos cortar el toro solido a lo largo de un disco meridional, girar un extremo algún número de veces y entonces pegamos nuevamente los discos para obtener una copia homeomorfa del toro solido pero ahora

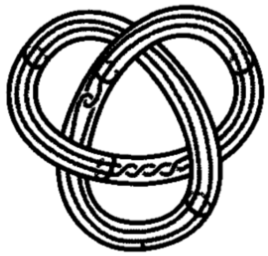

Figura 0.8. Un segundo Whitehead doble del nudo trébol

dos hilos de K_1 están enrollados entre ellos. Entonces cuando el anudamos el toro sólido como el nudo trébol obtenemos un segundo Whitehead doble del nudo trébol.

Si el nudo origina K_1 es nuevamente un no nudo, pero ahora como en la figura 0.9, entonces el nudo satélite resultante es llamado un **cable de dos hilos** del nudo compañero. Es como si tuviéramos un cable que recorre dos veces el nudo compañero. Nuevamente el cable de dos hilos de un nudo acompañante no es único, podríamos realizar un procedimiento como para los Whitehead dobles.

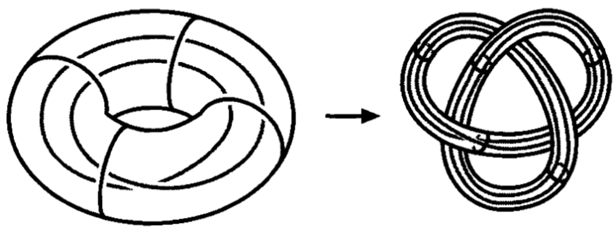

Figura 0.9. Cable de dos hilo del nudo trébol