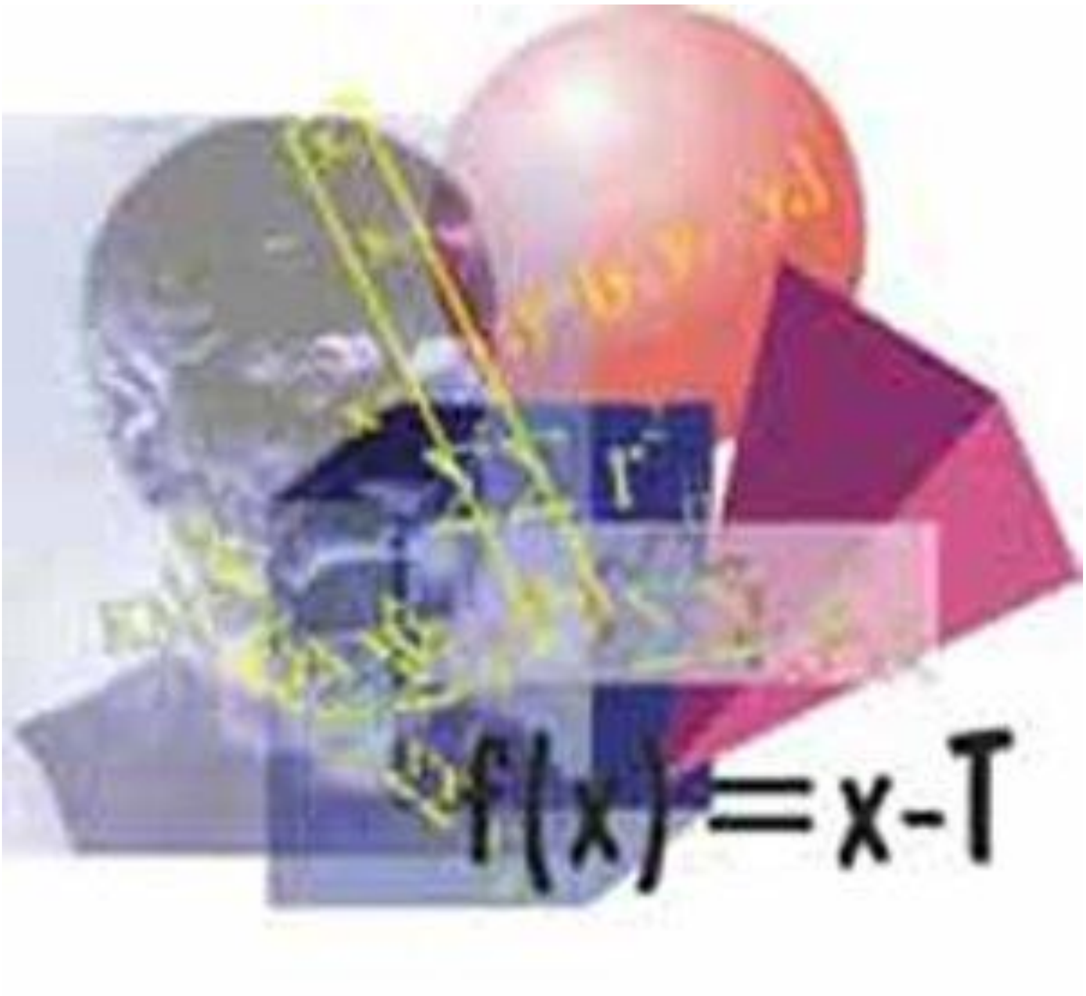
CALCULO DIFERENCIAL



MC13

PROPOSITO GENERAL

El presente libro didáctico, tiene como propósito ayudar a que el estudiante se introduzca en el cálculo diferencial, por medio del análisis de la expresión gráfica de las funciones algebraicas y trascendentes, y, de ésta manera, poderlo aplicar como herramienta básica en su comprensión del mundo que lo rodea.

Para lograr lo anterior es necesario que el estudiante tenga presentes los conceptos aprendidos en el nivel medio superior, puesto que en la presente asignatura de Cálculo Diferencial tendrá necesidad de aplicar tanto sus habilidades algebraicas como su conocimiento de las funciones y de su correspondiente representación gráfica.

Los conocimientos que adquiera con éste libro serán de gran utilidad en la materia de Cálculo integral y ecuaciones diferenciales.

PRESENTACION

Esta obra de cálculo diferencial, está proyectada para terminar su contenido en un semestre o cuatrimestre según sea el caso. El material es básico para estudiantes de Ciencias, Ingeniería, Matemáticas o cualquier licenciatura que utilice como herramienta el cálculo. En ella se presentan diversas técnicas para involucrarnos de forma involuntaria al mundo del cálculo; que bien es cierto, es odiado por muchos.

Consideramos que los estudiantes de matemáticas encontrarán aquí un libro de texto tan ameno como cualquier historieta; ya que se hizo el más grande esfuerzo por no complicar el texto, evitando demostraciones y teoremas que son importantes, pero que en ocasiones terminan confundiéndonos, dejándonos peor que al principio; sin dejar de explicar lo mas importante de cada tema, pero con palabras mas simples.

El capitulo uno comienza con la descripción y definición sobre funciones; los cuales son de mucha importancia en el estudio del cálculo. El capitulo dos aborda temas un poco mas profundos; conduciéndonos de forma sencilla pero precisa al inicio del cálculo, con el tema de límites. Cabe señalar que en este texto se presentan tres métodos para el cálculo de ellos. El capitulo tres aborda ya las famosas derivadas; se dice famosas porque mas de un estudiante pregunta de forma temerosa: ¿Ya vamos a empezar con las derivadas?, aunque debe mencionarse también que en este texto se abordan de forma sencilla pero rigurosa. El capitulo cuatro es talvez lo mas importante de esta obra; ya que en este capitulo se presenta la aplicación de las derivadas, cosa que muy pocos alcanzan a estudiar por cuestión de tiempo o algunos otros factores. Como consejo les podemos asegurar lo siguiente “si no estudian las aplicaciones de las derivadas, no estudian cálculo”

CARACTERISTICAS DIDACTICAS

- Todos los temas ponen especial atención en los ejemplos, ya que muchas veces de ello depende el entendimiento del tema en cuestión; por tal motivo, se remarcaron para no perderlos de vista.
- Los pocos teoremas y reglas que se demuestran, son encerradas en recuadros para facilitar su comprensión y no perderse con las explicaciones de los párrafos.
- Cada fin de tema, se presenta una serie de ejercicios e investigaciones para poner en práctica la parte teórica y de esa manera corroborar que el tema esta entendido.
- Los temas importantes se indican por medio de encabezados con letras negritas para una mejor distinción.
- Cada tema comienza con un objetivo para saber a donde queremos llegar.
- Cada unidad comienza con su tabla de contenido y una pequeña introducción al material que se expone

En el capitulo 1 se comienza con definiciones muy básicas del término función, progresando paso a paso hasta llegar a una definición más formal del mismo, dando la interpretación geométrica. Seguido de esto, se ejemplifican los términos para una mejor comprensión. Después de presentar los conceptos más importantes, seguimos con algunos conceptos indispensables para abordar de lleno el tema sobre funciones, como lo son Dominio y Contradominio. El siguiente paso es dar una clasificación de funciones; el cual se realiza de forma bastante amplia y detallada.

El capitulo 2 retoma mucho de lo expuesto en el capitulo anterior para una mejor comprensión del tema. Exponiendo aquí el inicio del cálculo, presentando primeramente la definición más básica de límite, así como su interpretación geométrica. Seguido de esto, se exponen los métodos para el calculo de los mismos, los cuales son: el método numérico, método grafico y método analítico. Estos métodos son aplicables para encontrar el límite tanto de funciones algebraicas como el de las funciones trigonométricas.

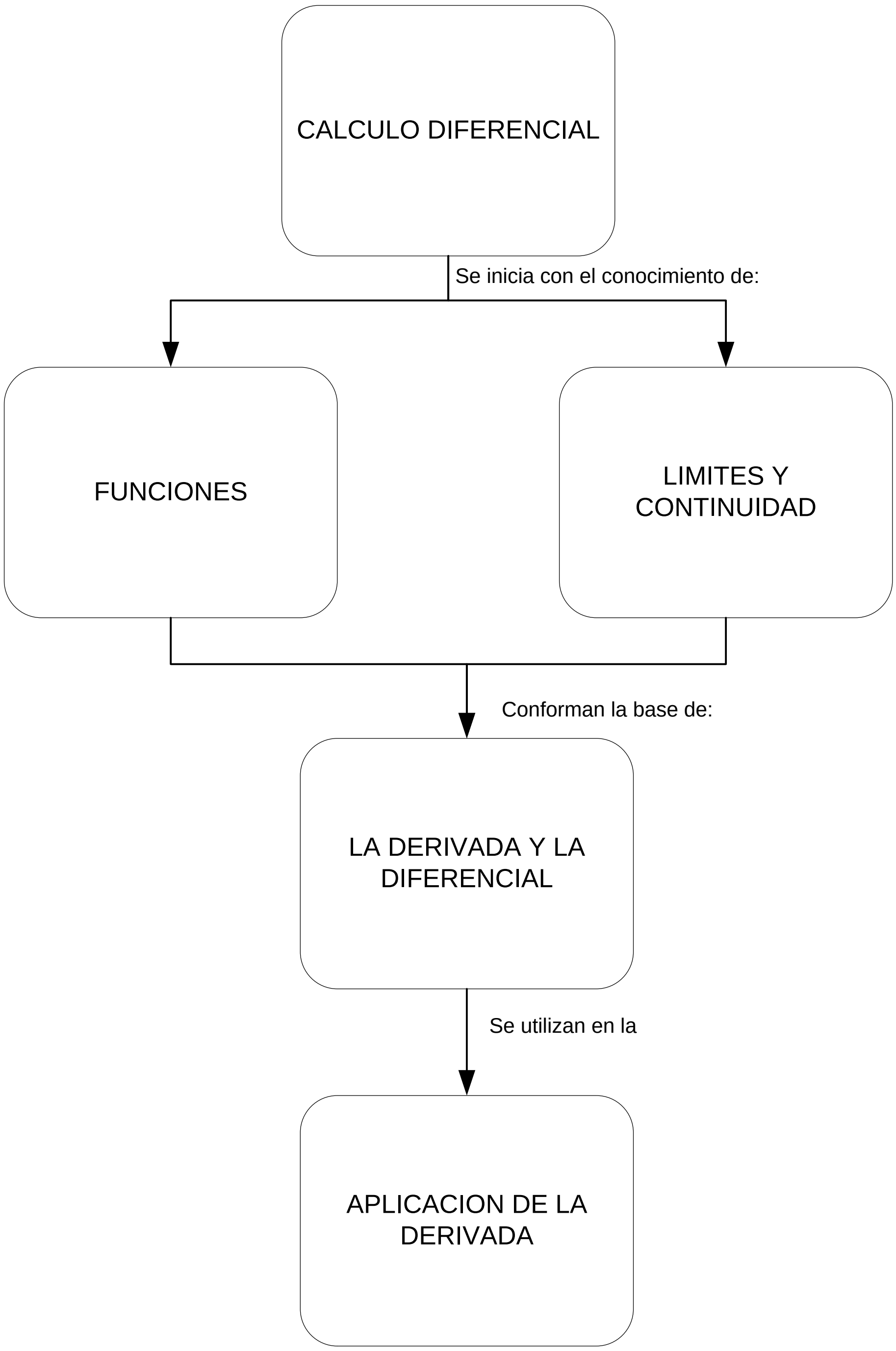
El capitulo 3 comienza de lleno con la definición y la interpretación geométrica de la derivada; parte clave para el entendimiento de la derivada. La forma de cómo se aborda el tema sobre las derivadas, es tan sencilla, que el lector prestara tanta atención al tema que cuando se de cuenta de lo que esta leyendo no podrá creer que tan maravilloso y simple es el mundo del cálculo. Comenzando así una nueva etapa en su carrera como estudiante y más tarde talvez como profesor.

El capitulo 4 es sin duda la parte donde se pide una especial atención; ya que es aquí donde realmente se aplica todo lo aprendido en los capítulos anteriores. En pocas palabras, se les preparó para este momento, para entender realmente cual es la verdadera aplicación del cálculo en la vida real. Resolviendo problemas reales de la vida cotidiana. Este capítulo es la última unidad de esta obra, que sin duda alguna será de gran provecho para cada lector.

El glosario presenta algunas palabras talvez no muy conocidas para el lector; así que si en un párrafo no se le entiende alguna palabra, es sencillo ir al final del texto y consultar su definición e hilar de una mejor manera la definición o explicación del tema en cuestión.

INDICE

MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA

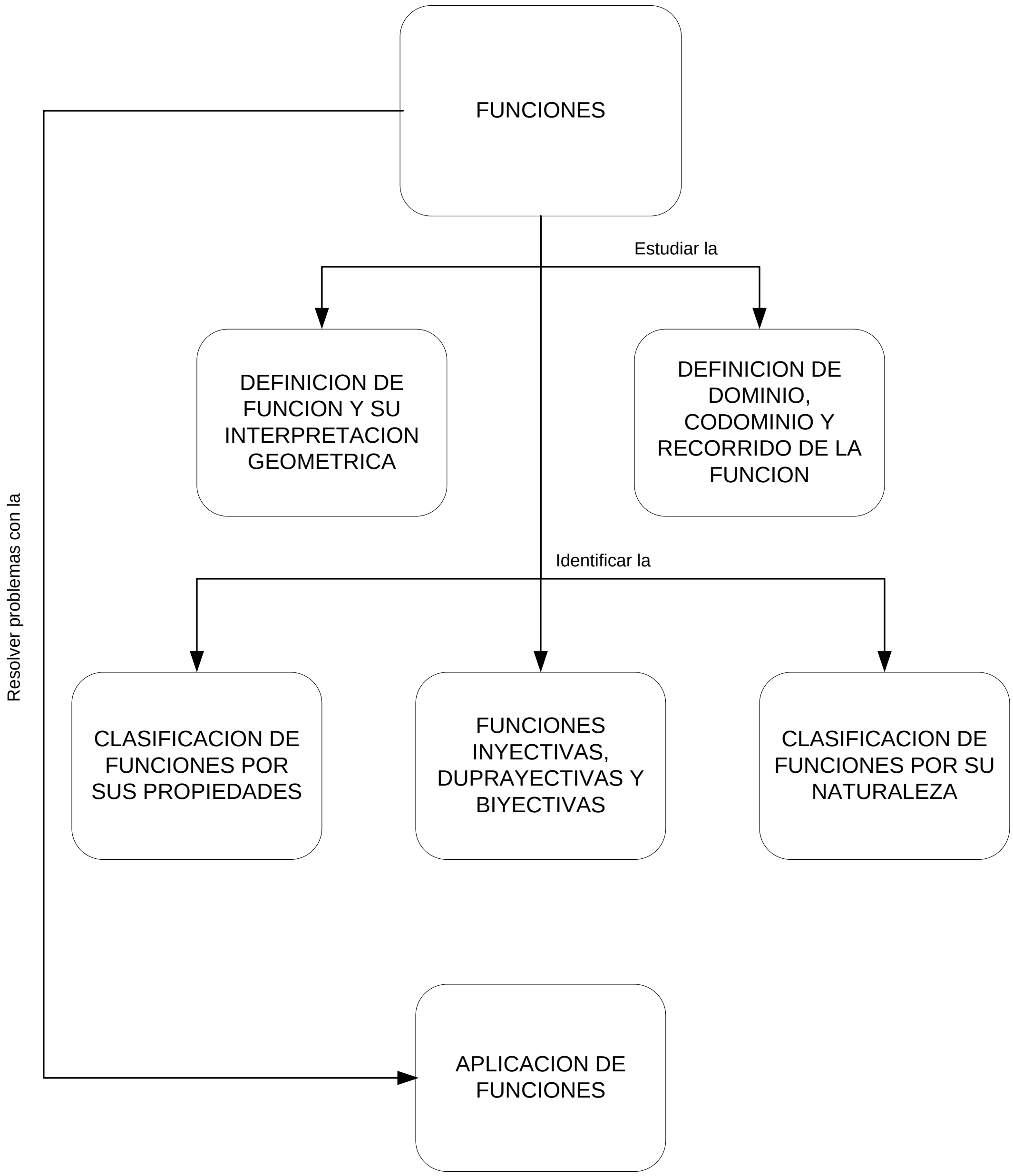


UNIDAD 1. FUNCIONES

OBJETIVO

Definir el concepto de función y explicar sus características principales para aplicarlos en la formulación y desarrollo de modelos matemáticos.

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



TEMARIO

UNIDAD 1. FUNCIONES

1.1 Definición de función y su interpretación geométrica.

1.2 Definición de dominio, codominio y recorrido de la función.

1.3 Funciones Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas

1.4 Clasificación de funciones por su naturaleza

1.5 Clasificación de funciones por sus propiedades

1.6 Aplicaciones de funciones

INTRODUCCION

Las funciones están presentes en la vida cotidiana, aunque en ocasiones no nos damos cuenta en que forma; por ejemplo, la distancia que recorre un móvil en función del tiempo, el crecimiento de una planta en función del tiempo, el aumento o disminución de la temperatura del agua en función del tiempo. Los ejemplos mencionados anteriormente, son solo algunos; aquí utilizamos la palabra en función de, pero también pudo haberse utilizado la palabra respecto a o con respecto a; pero decidimos utilizar la palabra en función de. Esta palabra es muy utilizada en cálculo, y es seguro que se encontrará en muchas ocasiones con esta frase, es por ello que es de vital importancia la definición concisa de éste término al inicio de este curso.

1.1 DEFINICION DE FUNCION Y SU INTERPRETACION GEOMETRICA

OBJETIVO

Comprender el significado de función; debido a que en este curso es de vital importancia este concepto, porque a partir de este, encuentran aplicación los temas siguientes.

Una función relaciona una entrada con una salida.

Fig. 1.1.1

Por ejemplo este árbol crece 25 cm. cada año, si se desea saber cuantos centímetros crecerá en 30 años la operación debe ser la siguiente:

$$25cm * 30 = 750cm$$

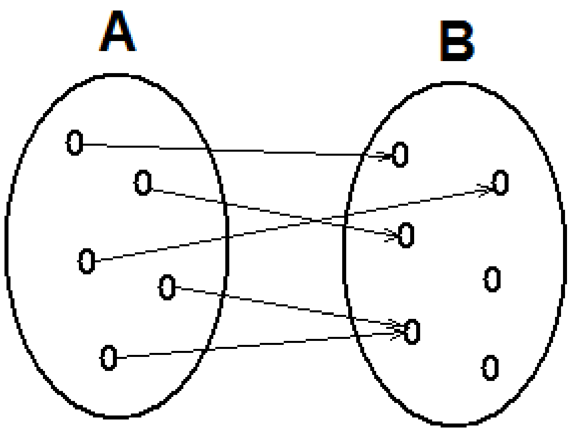
Este ejemplo nos ayuda a comprender el concepto de función. Aquí podemos afirmar que el crecimiento del árbol depende del tiempo. Si llamamos "x" al número de años y "y" al resultado de multiplicar los centímetros que crece el árbol por la cantidad de años que se desee, tenemos lo siguiente:

$$y = 25x$$

en ese momento habremos formado una función; ya que a simple vista puede verse que "y" depende de "x"; que también puede escribirse como $f(x)$, que se lee "f de x", o la función depende de "x", o que f transforma a x en y.

Podemos enunciar entonces una definición más formal del término función:

"Una función, es una regla de correspondencia, en el que a cada valor de la variable "x", le corresponde exactamente un valor a la variable "y", o bien, "Una función relaciona cada elemento de un conjunto A, con exactamente un elemento de otro conjunto B".



Aquí se observan dos valores o variables, una es la variable independiente y otra, la variable dependiente.

Llamaremos a la variable "x" variable independiente y a la variable "y", variable dependiente.

Ejemplo

Evaluar la función $f(x) = x^2 - 1$, en los puntos indicados

Solución:

$f(1) = (1)^2 - 1 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 3$

$f(3) = (3)^2 - 1 = 8$

$f(4) = (4)^2 - 1 = 15$

$f(5) = (5)^2 - 1 = 24$

Por lo tanto, los pares ordenados son:

(1,0), (2,3), (3,8), (4,15), (5,24)

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 1.1.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del sobre evaluación de funciones. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas.

Evaluar las siguientes funciones

1. Si $f(x) = x^2 - 5x$ Hallar
   a) $f(0)$
   b) $f(1)$
   c) $f(-3)$
   d) $f(a)$
   e) $f(a+b)$

2. Si $f(x) = x^3 - 3x^2$ Hallar
   a) $f(0)$
   b) $f(1)$
   c) $f(-3)$
   d) $f(a)$
   e) $f(a+b)$

3. Si $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2}$ Hallar
   a) $f(-2)$
   b) $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

c) $f(3)$

d) $f(b)$

e) $f(a-b)$

4. Si $f(x)=3x^2-4x$ Hallar

a) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

b) $f(-1)$

c) $f(3)$

5. Si $f(x)=\sqrt{x}$ Hallar

a) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

b) $f(-1)$

c) $f(3)$

6. Si $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ Hallar

a) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

b) $f(-1)$

c) $f(3)$

1.2 DEFINICIÓN DE DOMINIO, CODOMINIO Y RECORRIDO DE LA FUNCIÓN

OBJETIVO

Comprender el significado de dominio, codominio y recorrido de la función para poder resolver problemas relacionados con estos términos; y de esa forma comprender las bases del cálculo.

Como se mencionó anteriormente; para que una función exista, se deben tener valores de entrada y valores de salida. Los valores que puede aceptar una función se le llama *dominio*. Los valores posibles a obtener de la función se le conoce como *codominio*; y a los valores que realmente resultan de la función al evaluarlos se le conoce como *imagen* o recorrido de la función.

De la figura 1.2.1 el conjunto "X" es el dominio, el conjunto "Y" es el codominio, y los elementos de Y a los que llegan flechas (los valores producidos realmente por la función) son el rango.

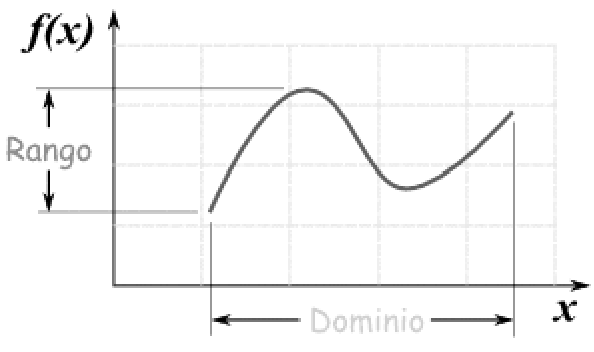


Fig. 1.2.1

En la figura 1.2.1, se observa que el dominio son todos los valores permitidos a "x", y el rango o imagen, son todos los valores que obtiene "y" o $f(x)$ al ser evaluados; dicho de otra forma, la imagen o rango de la función son los valores del dominio pero transformados por la función.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 1.2.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Encontrar el Dominio y contradominio de las siguientes funciones y graficar. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas.

1. $f(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = \sqrt{(x-2)}$
3. $f(x) = \sqrt{(x^2-2)}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = sen(x)$
6. $f(x) = \cos(x)$
7. $f(x) = \sqrt{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

1.3 FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

OBJETIVO

Comprender el significado las funciones inyectivas, funciones suprayectivas y funciones biyectivas; porque son de gran importancia en el análisis de funciones.

Función Inyectiva

Una función es *inyectiva* o *uno a uno*, si para cada elemento del conjunto A, existe solo un elemento del conjunto B; y los elementos de B, no se repiten. A este tipo de funciones también se le conoce como función *biunívoca*.

Para determinar si una función es inyectiva, graficamos la función por medio de una tabla de pares ordenados. Luego trazamos líneas horizontales para determinar si los elementos de cada conjunto no se repiten. A continuación se demuestra lo antes mencionado.

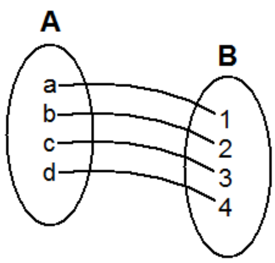


Fig. 1.3.1

Función Suprayectiva

Una función es suprayectiva, si cada elemento del contra dominio es imagen de cuando menos un elemento del dominio. A la función suprayectiva también se le conoce como función sobreyectiva o simplemente función sobre.

Función Biyectiva

Una función es biyectiva cuando presenta las características de la función inyectiva y las de la función suprayectiva.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 1.3.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Investigar los conceptos de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas del apartado 1.3.1. Entregar investigación la próxima sesión en la libreta.

APARTADO 1.3.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Clasificar las siguientes funciones en funciones inyectivas que no son sobreyectivas, funciones sobreyectivas que no son inyectivas, funciones ni inyectivas ni sobreyectivas y funciones biyectivas. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas

1. Sean $A=\{1,2,3\} \quad y \quad B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

   $f: A \to B \quad f=\{(x,y) \mid y=2x+3\}$

2. Sean $A=\{2,4,6,8\} \quad y \quad B=\{2,4,6,8\}$

   $f: A \to B,$ definida como $f(x)=x$

3. Sean $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{digitos\}$

   $f: A \to B,$ definida como $f(x)=x^2$

4. Sean $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{0,1,8,27\}$

   $f: A \to B,$ definida como $f(x)=x^3$

5. Sean $A=\{0,1,4\}$, $B=\{0,1,2,3\}$

   $f: A \to B,$ definida como $f(x)=\sqrt{x}$

6. Sean $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{0,1\}$

   $f: A \to B,$ definida como $f(x)=x^2$

7. Sean $A=\{Estados\ de\ la\ Republica\ Mexicana\}$, $B=Z$

   $f: A \to B \quad f=\{(x,y) \mid y\ es\ el\ numero\ de\ habitantes\quad del\ Estado\ x\}$

1.4 CLASIFICACION DE FUNCIONES POR SU NATURALEZA

OBJETIVO

Clasificar a las funciones por su naturaleza para aplicaciones futuras; ya que de estas depende en gran parte, que en aplicaciones futuras, el problema se simplifique o complique.

La noción moderna de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Mención especial merece Leonhard Euler, a quien debemos la notación $y = f(x)$. Hacia finales del siglo XVIII, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos de la vida real podían representarse mediante modelos matemáticos, construidos a partir de una colección de funciones denominadas **funciones elementales**. Estas funciones se dividen en tres categorías.

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Otra clasificación derivada de la misma puede ser la siguiente:

Clasificación de funciones por su naturaleza

- Función polinomial
- Función racional
- Función raíz
- Función trignonométrica
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Función inversa
- Funcion definida parte por parte
- Función implícita

Funciones polinomiales

Las funciones mas sencillas son las potencias de x con exponentes enteros no negativos $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, ..., x^n)$, si un número infinito de ellas se multiplica por constantes y se suman, el resultado nos daría un polinomio de la forma general:

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad a_n \neq 0$$

donde el entero positivo n es el grado de la función polinómica; debido a que es el mayor exponente que se encuentra en la función.

Con frecuencia utilizamos funciones más sencillas como las siguientes

$f(x) = a$	Grado cero o función constante
$f(x) = ax + b$	Grado uno o función de primer grado (función lineal)
$f(x) = ax2 + bx + c$	Grado dos o función cuadrática
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Grado tres o función cúbica

Funciones racionales

Del mismo modo que un número racional puede escribirse como el cociente de dos números enteros, una **función racional** puede expresarse como el cociente de dos polinomios. De manera especifica, una función f es racional si tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

si $\quad p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

y $\quad q(x) = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + ... + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$

entonces

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + ... + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n}$$

Algunos ejemplos de función racional pueden ser los siguientes:

a) $h(x) = \dfrac{x - x^2 + 4x^7}{2x - x^5}$

b) $g(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2}{2x}$

c) $q(x) = x - \dfrac{x^4}{4x^2 + 3x}$

Funciones algebraicas

Las funciones polinomiales y las funciones racionales son parte de las funciones algebraicas; sin embargo, es mas común utilizar el termino cuando una función contiene exponentes fraccionarios o radicales como a continuación.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = x - \dfrac{x^4}{\sqrt{4x^2 + 3x}}$

c) $g(x) = (x-1)^{-1/5} - \dfrac{x^4}{(4x^2 + 3x)^{2/7}}$

Funciones trascendentes

Las funciones no algebraicas se les denominan funciones **trascendentes.** Por ejemplo, las funciones trigonométricas, funciones exponenciales, funciones logarítmicas, funciones hiperbólicas, etc.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = e^{x^2 - 5x + 1}$

c) $f(x) = \ln(7x - 5)$

d) $f(x) = \cosh(x^2 - 3)$

e) $f(x) = \tan^{-1}(2x + 3)$

OPERACIONES CON FUNCIONES

Es común encontrar funciones más complejas, pero dichas funciones son el resultado de la unión de funciones más simples.

Ejemplo

Si $g(x) = (x-1) - \dfrac{x^4}{4x^2 + 3x}$ y $p(x) = \sqrt{x^4 - 7x^3}$, hallar

a) $f(x) = g(x) + p(x)$

b) $f(x) = g(x) - p(x)$

c) $f(x) = \dfrac{p(x)}{g(x)}$

Solucion :

a) $f(x)=(x-1)-\dfrac{x^4}{4x^2+3x}+\sqrt{x^4-7x^3}$

b) $f(x)=(x-1)-\dfrac{x^4}{4x^2+3x}-\sqrt{x^4-7x^3}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-7x^3}}{(x-1)-\dfrac{x^4}{4x^2+3x}}$

Al igual que dos números a y b pueden sumarse para producir un nuevo numero $a+b$, también dos funciones f y g pueden sumarse para producir una nueva función $f+g$ .Y si dos números pueden también restarse, multiplicarse y dividirse; también las funciones.

Reglas para composición de funciones

- suma $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- diferencia $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- multiplicacion $(f\circ g)(x)=f(x)\circ g(x)$
- division $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Considere las funciones: $f(x)=\frac{x-3}{2}$ y $g(x)=\sqrt{x}$

Hallar:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-3}{2}+\sqrt{x}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x-3}{2}-\sqrt{x}$$

$$(f\circ g)(x)=f(x)\circ g(x)=\frac{x-3}{2}\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x-3}{2}}{\sqrt{x}}=\frac{x-3}{2\sqrt{x}}$$

GRÁFICAS DE FUNCIONES

Generalmente para construir la gráfica de una función se emplea el sistema de coordenadas rectangulares, los valores del dominio se ubican en el eje horizontal (eje $"x"$) y los valores del contradominio se ubican el eje vertical (eje $"y"$).

La gráfica es el conjunto de puntos cuyas coordenadas son valores correspondientes a la variable independiente (dominio) y de la variable dependiente (contradominio); o los pares ordenados (x,y) o $(x,f(x))$.

Para graficar una función es necesario construir una tabla y asignarle valores a la variable independiente x.

Graficar la función $f(x) = 2x - 1$ Resultan los siguientes Pares ordenados $(x, f(x))$

x	$y = f(x)$
-3	-7
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5

$f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$ (-3,-7)

$f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$ (-2,-5)

$f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$ (-1,-3)

$f(0) = 2(0) - 1 = -1$ (0,-1)

$f(1) = 2(1) - 1 = 1$ (1,1)

$f(2) = 2(2) - 1 = 3$ (2,3)

$f(3) = 2(3) - 1 = 5$ (3,5)

Estos datos al representarlos en el sistema de coordenadas rectangulares nos arrojan lo siguiente

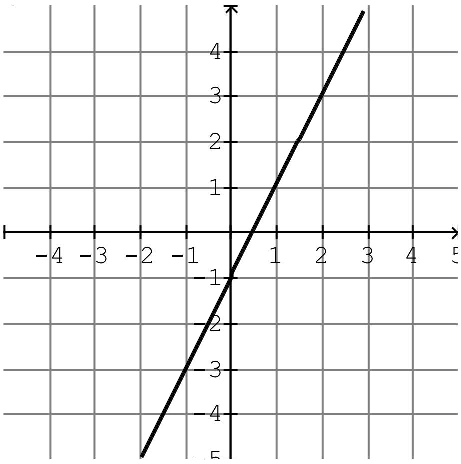
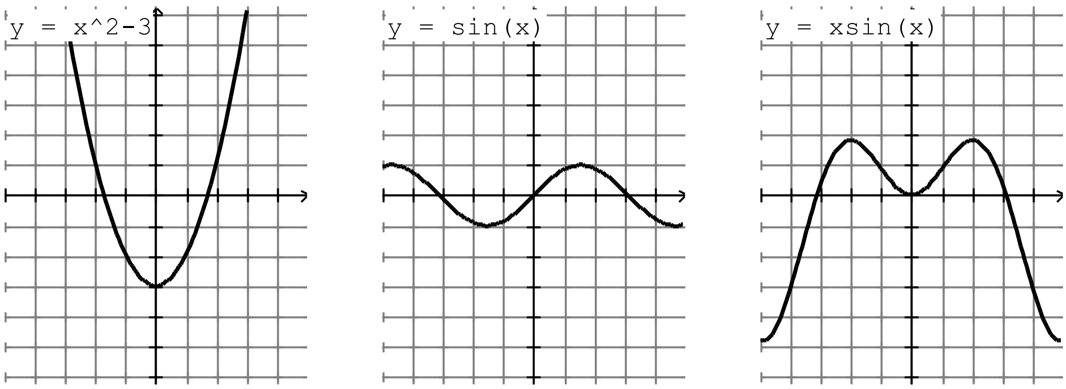


Fig. 1.4.1

Enseguida se presentan una serie de graficas, en donde se emplea la misma metodología



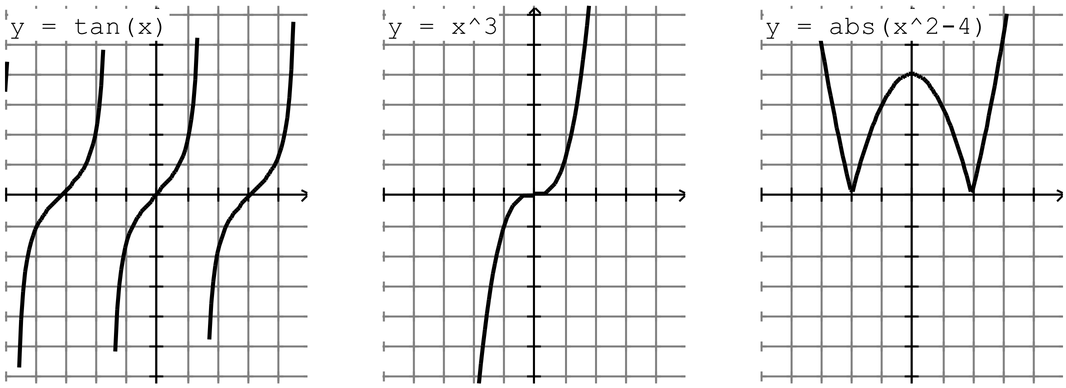


Fig. 1.4.2

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 1.4.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Investigar la clasificación de las funciones por su naturaleza del apartado 1.4.1. Entregar investigación la siguiente sesión en la libreta.

1.5 CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES POR SUS PROPIEDADES

OBJETIVO

Clasificar a las funciones por su naturaleza para aplicaciones futuras; ya que de estas depende en gran parte, que en aplicaciones futuras, el problema se simplifique o complique.

Clasificación de funciones por sus propiedades

- Función creciente y decreciente
- Función simétrica
- Función par e impar
- Función periódica

Función creciente y decreciente

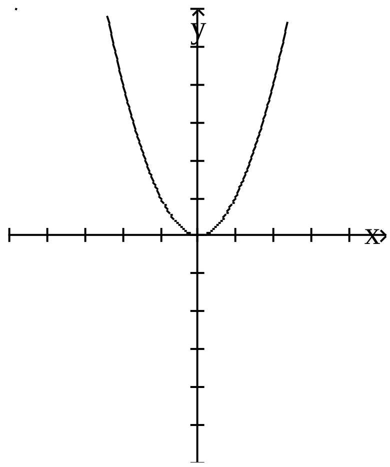
Una función es creciente si al evaluar la función para un punto, la pendiente es positiva. Por otra parte, se dice que una función es decreciente, si al evaluar la función para algún punto en un intervalo, la pendiente es negativa.

Función simétrica

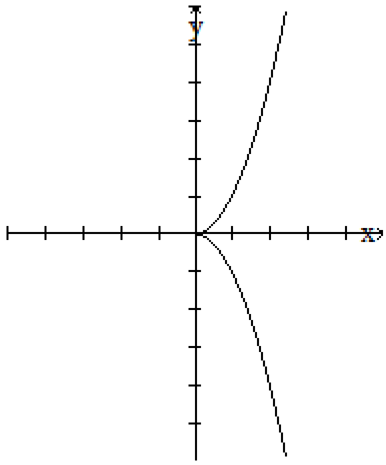
Para entender que es una función simétrica, primero debemos tener en mente el termino simetría. La simetría en su definición más simple, puede definirse como los “puntos similares unos respecto de otros”.

Es útil conocer la simetría de una gráfica antes de intentar trazarla, puesto que solo se necesitan la mitad de los puntos para hacerlo. Los tres tipos siguientes de simetrías pueden servir de ayuda para dibujar una gráfica.

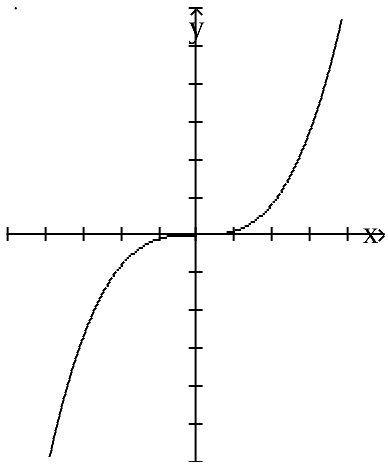
1. Una gráfica es simétrica respecto al eje y si, para cada punto (x,y) de la gráfica, el punto (-x,y) pertenece a la grafica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la situada a la derecha de dicho eje. La gráfica que se muestra a continuación es un ejemplo



2. Una gráfica es simétrica respecto al eje x si, para cada punto (x,y) de la gráfica, el punto (x,-y) también pertenece a la gráfica. Esto quiere decir que la porción de la gráfica situada sobre el eje x es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje. La gráfica que se muestra a continuación es un ejemplo



3. Una gráfica es simétrica respecto al origen si, para cada punto (x,y) de la gráfica, el punto (-x,-y) también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° respecto al origen. La gráfica que se muestra a continuación es un ejemplo



Funciones pares e impares

En la terminología de funciones, se dice que una función es **par,** si su gráfica es simétrica respecto al eje y, y se dice que es **impar,** si su gráfica es simétrica con respecto al origen; y tienen que cumplir con la siguiente condición:

La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$

La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 1.5.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Investigar la clasificación de las funciones por sus propiedades del apartado 1.5.1. Entregar investigación la siguiente sesión en la libreta.

1.6 APLICACION DE FUNCIONES

OBJETIVO

Emplear los conocimientos previos para resolver problemas reales; y poder comprender el significado real del término función.

Una de las premisas básicas de la ciencia, es que gran parte de la realidad física puede describirse matemáticamente, y que muchos de los fenómenos físicos son predecibles. Esta perspectiva constituyó parte de la revolución científica que tuvo lugar en Europa a finales del siglo XV.

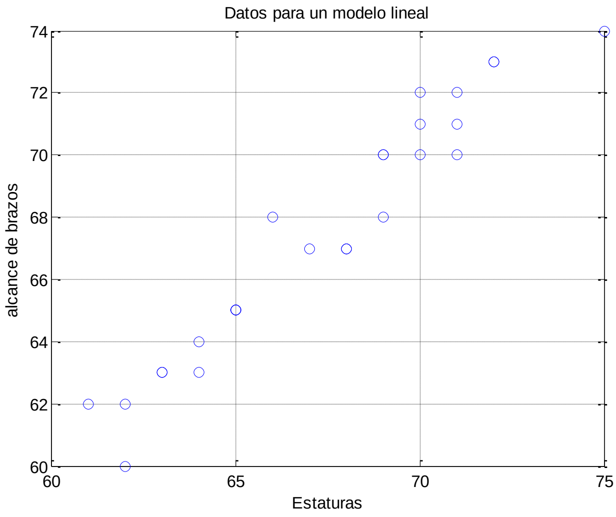
Una técnica fundamental de las ciencias modernas consiste en recopilar datos y luego describirlos por medio de un modelo matemático.

Ejemplo

Un grupo de 28 alumnos recopiló los siguientes datos, que representan sus estaturas "x" y sus alcances con sus brazos extendidos "y"(redondeadas a la pulgada más cercana):

(60,61),(65,65),(68,67),(72,73),(61,62),(63,63),(70,71)
(75,74),(71,72),(62,60),(65,65),(66,68),(62,62),(72,73)
(70,70),(69,68),(69,70),(60,61),(63,63),(64,64),(71,71)
(68,67),(69,70),(70,72),(65,65),(64,63),(71,70),(67,67)

La gráfica de los datos anteriores es el siguiente



Existen varias maneras de representar estos datos mediante una ecuación. La más sencilla sería observar que x y y son casi iguales y tomar como modelo $y = x$, o mejor aun $f(x) = x$. Un análisis más cuidadoso consistiría en recurrir a un procedimiento de la estadística denominada regresión lineal. Al hacer éesto, el resultado o la función resultante sería

$$y = f(x) = 1.006x - 0.23$$

Que es la recta de regresión por mínimos cuadrados.

La gráfica de ésta función es la que aparece sobre los puntos, y se dice que es la mejor recta que puede trazarse para esos puntos. Ver Figura 1.4.1.

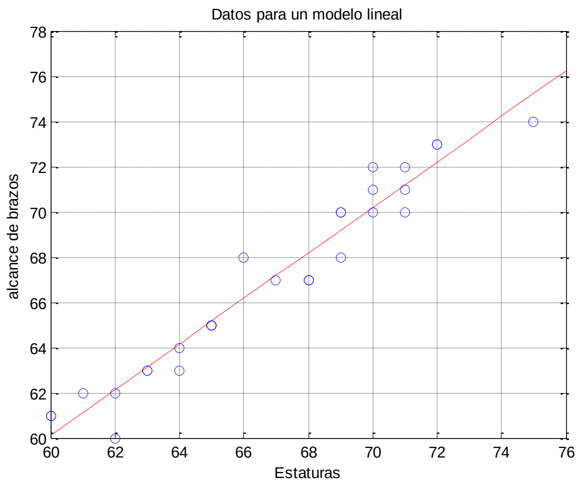


Fig. 1.4.1

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 1.6.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los siguientes ejercicios sobre aplicación de funciones. Entregar en la siguiente sesión en hojas blancas.

1. Recopilar la edad y altura en centímetros de cada integrante del grupo. Organizar la edad en forma ascendente y trazar los puntos en el plano cartesiano, edad contra altura. Observar a cual de las funciones descritas en el capitulo se asemeja.

2. Recopilar la edad y altura en centímetros de cada integrante del grupo. Organizar la altura en forma ascendente y trazar los puntos en el plano cartesiano, altura contra edad. Observar a cual de las funciones descritas en el capitulo se asemeja.

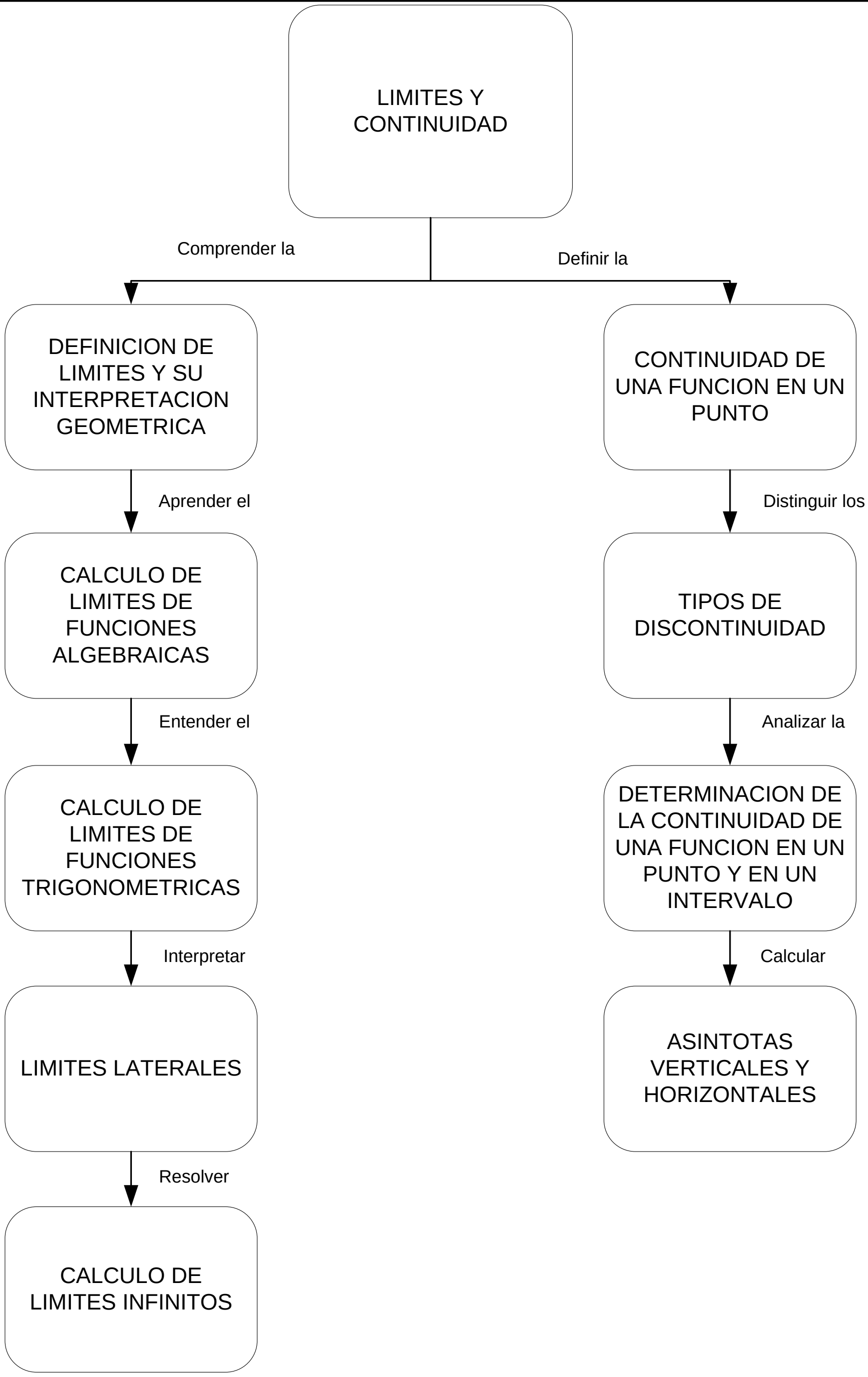
3. Medir la temperatura de un día en particular desde las seis de la mañana a cada media hora hasta el medio día. Trazar los puntos obtenidos en el plano cartesiano y anotar las observaciones; si fuera posible hacer una medición cada periodo de tiempo más corto

UNIDAD 2. LÍMITES Y CONTINUIDAD

OBJETIVO

Definir el concepto de límite, ya que es quien hace distinguir al cálculo de las otras ramas de las matemáticas.

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



TEMARIO

UNIDAD 2. LIMITES Y CONTINUIDAD

INTRODUCCION

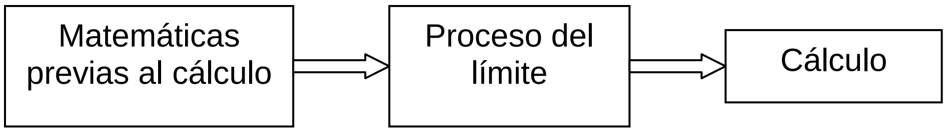
A manera de introducción, podemos empezar preguntándonos ¿Qué es el cálculo?, muchas veces nos adentramos al tema sin tener bien definidos los conceptos básicos. Respondamos a la pregunta.

El cálculo es la matemática de los cambios (velocidades y aceleraciones). También son objeto del cálculo las rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, centroides, curvaturas y una gran cantidad de conceptos que han permitido a científicos, ingenieros y economistas elaborar modelos para situaciones de la vida real.

Aunque las matemáticas previas al cálculo también tratan con velocidades, aceleraciones, rectas tangentes, pendientes y demás, existe una diferencia fundamental entre ellas y el cálculo. Mientras que las primeras son más estáticas, el cálculo es más dinámico. A continuación se presentan algunos ejemplos.

- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para analizar la velocidad de un objeto sometido a aceleración es necesario recurrir al cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar la pendiente de una recta, pero para analizar la pendiente de una curva es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar la recta tangente a un círculo, pero para analizar una recta tangente a una gráfica en general es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar el área de un rectángulo, o de áreas de figuras regulares, pero para analizar el área bajo una curva general es necesario el cálculo.

Cada una de estas situaciones implica la misma estrategia general: la reformulación de las matemáticas previas al cálculo a través de un proceso de límite. De modo que una manera de responder la pregunta “Que es el cálculo” consiste en decir que el cálculo una “maquina de límites” que funciona en tres etapas. La primera la constituyen las matemáticas previas al cálculo, con nociones como la pendiente de una recta o el área de un rectángulo. La segunda es el proceso de límite, y la tercera es la nueva formulación propia del cálculo, en términos de derivadas e integrales.



Desafortunadamente, algunos estudiantes tratan de aprender el cálculo como si se tratara de una simple recopilación de fórmulas nuevas.

Si se reduce el estudio del cálculo a la memorización de las fórmulas de derivación y de integración, su comprensión será deficiente, el estudiante perderá confianza en sí mismo y no obtendrá ninguna satisfacción.

2.1 DEFINICION DE LÍMITES Y SU INTERPRETACION GEOMÉTRICA

OBJETIVO

Definir el concepto de límite de forma sencilla, utilizando su interpretación geométrica para una mejor visión del concepto; ya que la noción de límite es fundamental en el estudio del cálculo.

El concepto de límite en Matemáticas tiene el sentido de “lugar” hacia el que se dirige una función en un determinado punto o en el infinito.
Veamos un ejemplo: Consideremos la función dada por la gráfica de la figura 2.1.1 y fijémonos en el punto $x = 2$ situado en el eje de abscisas (eje x):

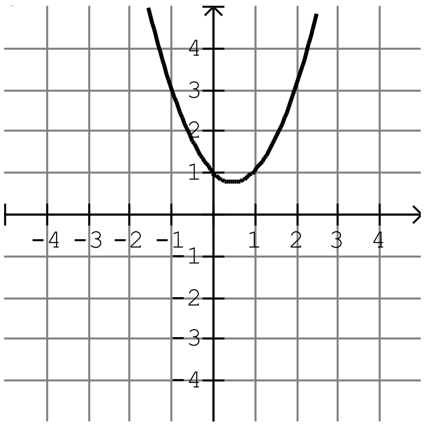


Fig. 2.1.1

¿Qué ocurre cuando nos acercamos al punto 2 moviéndonos sobre el eje x?

Tomemos algunos valores como 2.5, 2.4, 2.3, 2.1, 2.01, 2.001.
Vemos en la figura que en este caso las imágenes (los valores de y) de dichos puntos sobre la curva, $f(2.5), f(2.4), \ldots, f(2.1), f(2.01), f(2.001)$, se acercan a su vez a un valor situado en el eje y, el valor $y = 3$. Si nos acercamos a 2 por la otra parte, es decir, con valores como 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.99, 1.999, en este caso las imágenes (los valores de y)

$f(1.5), f(1.6), \ldots, f(1.9), f(1.99), f(1.999)$ se acercan también al mismo valor, $y = 3$.

Concluimos que el límite de la función $f(x)$ cuando nos acercamos a $x = 2$ es 3, lo cuál expresamos como:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

2.2 CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES ALGEBRÁICAS

OBJETIVO

Comprender la metodología para el cálculo de límites de funciones algebraicas; teniendo presente el concepto fundamental de límite.

Existen básicamente tres métodos para el cálculo de límites de funciones

- Método numérico
- Método gráfico
- Método analítico

Método numérico para el cálculo de límites

Este método consiste en asignarle valores a la variable independiente x y observar los valores de la variable dependiente y para corroborar la existencia de límite en la función en el valor indicado.

Para observar la efectividad del método, a continuación además de la tabla de valores que se construye para el método numérico, dibujaremos una gráfica. Ver Figura 2.2.1

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

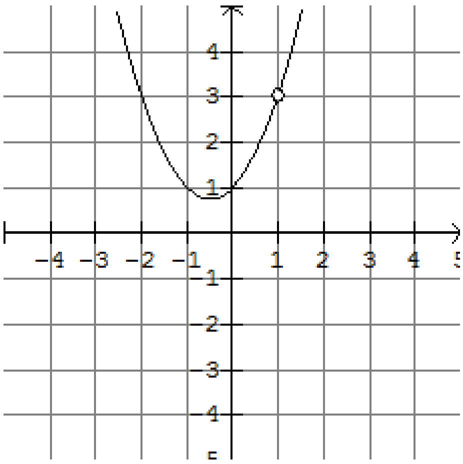


Fig. 2.2.1

Para todos los valores distintos de $x=1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo en $x=1$, no está claro qué esperar. Para tener una idea del comportamiento de la gráfica cerca de $x=1$, se puede usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha como se ilustra en la tabla.

x se aproxima a 1 por la izquierda → ← *x* se aproxima a 1 por la derecha

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

f(x) se aproxima a 3 → ← *f(x)* se aproxima a 3

Como se muestra en la figura 2.2.1, la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ es una parábola con un hueco en el punto (1,3). A pesar de que x no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y en consecuencia, $f(x)$ se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Esto se lee "el limite de $f(x)$ cuando x se aproxima 1 es 3".

Esta técnica de elaborar una tablita con valores próximos al valor de x donde se pide encontrar el límite se llama **método numérico** para el cálculo de límites.

Cabe señalar que el límite de una función existe si "tanto por la derecha como por la izquierda de algún valor $x = a$, $f(x)$ se aproxima a un mismo valor L ", como el ejemplo anterior.

Método gráfico para el cáculo de límites

Esta técnica sugiere la elaboración de la gráfica de la función a mano, o con la ayuda de algún dispositivo tecnológico como calculadoras graficadoras, o un software de aplicaciones matemáticas.

Ejemplo 1

Encontrar el límite de la función cuando x se acerca a 1.

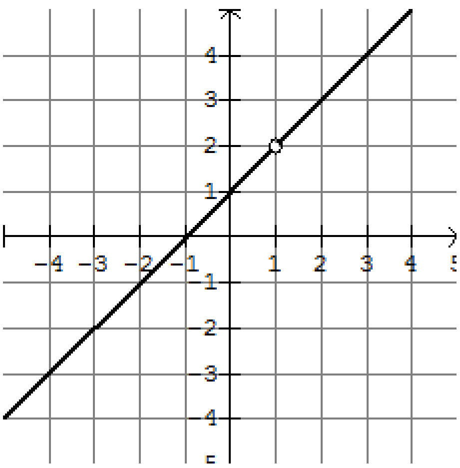


Fig. 2.2.2

Solución:

Analizando la Figura 2.2.2, se puede llegar a la conclusión de que el límite de la función cuando x se acerca a 1 es 2; esto porque tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ se acerca a un mismo valor 2. Y se puede escribir así

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Ejemplo 2

Encontrar el límite de la función cuando x se acerca a 3.

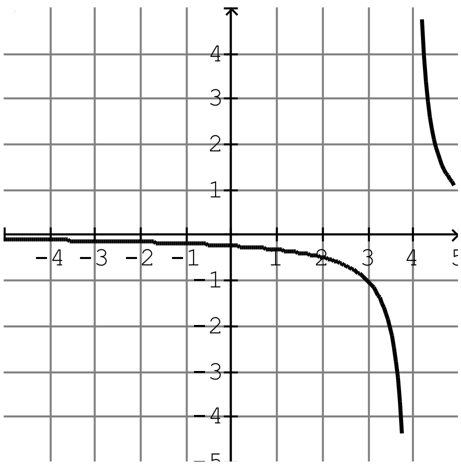


Fig. 2.2.3

Solución:

Analizando la Figura 2.2.3 se puede llegar a la conclusión de que el límite de la función cuando x se acerca a 3 es -1; esto porque tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ se acerca a un mismo valor -1; Además el punto existe; algo que en el ejemplo anterior no pasaba. Y se puede escribir así

$$\lim_{x \to 3} f(x) = -1$$

Ejemplo 3

Encontrar el límite de la función cuando x se acerca a 0.

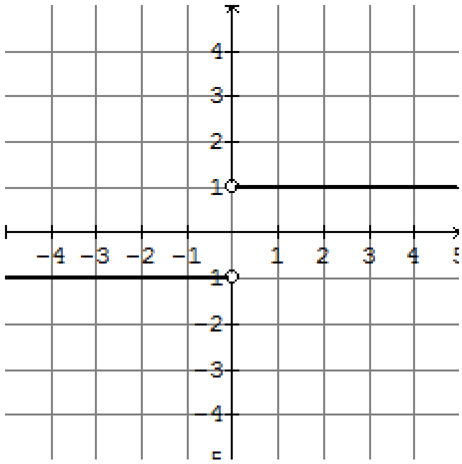


Fig. 2.2.4

Solución:

Analizando la gráfica 2.2.4 se puede llegar a la conclusión de que el límite de la función cuando x se acerca a 0 no existe; esto porque tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ se acerca a un valores diferentes, por la izquierda se acerca a -1 y por la derecha se carca1; y el punto no. Y se puede escribir así

$$\lim_{x \to 0} f(x) = no\ existe$$

Método analítico para el cálculo de límites

Para este método es necesario conocer algunas propiedades básicas

Si b y c son números reales y n un entero positivo:

1. $\lim\limits_{x \to c} b = b$ 2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$ 3. $\lim\limits_{x \to c} x^n = c^n$

Ejemplo 1

Evaluar los siguientes límites

a). $\lim\limits_{x \to -2} 7 = 7$ b). $\lim\limits_{x \to -5} x = -5$ c). $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$

Para evaluar límites de funciones más complejas se tiene que tener en cuenta las siguientes propiedades de los límites.

Si b y c son números reales y n un entero positivo; f y g funciones con los límites siguientes:

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = K$

1. Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x \to c} \left[bf(x) \right] = bL$
2. Suma o diferencia: $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L \pm K$
3. Producto: $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x)g(x) \right] = LK$
4. Cociente: $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$

5. Potencias:	$\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

Ejemplo 2

Hallar $\lim_{x \to 2} (7x^3 + 3x - 4)$

Solución:

$$\lim_{x \to 2} (7x^3 + 3x - 4) = \lim_{x \to 2} 7x^3 + \lim_{x \to 2} 3x - \lim_{x \to 2} 4$$

$$= 7\left(\lim_{x \to 2} x^3\right) + 3\left(\lim_{x \to 2} x\right) - \lim_{x \to 2} 4$$

$$= 7(2^3) + 3(2) - 4$$

$$= 58$$

En algunas ecuaciones no será posible encontrar el límite de una función racional, mediante la sustitución directa como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Hallar $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)$

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \frac{\lim_{x \to 2} (x^2 - 4)}{\lim_{x \to 2} (x - 2)} = \frac{0}{0} = ?$$

Existen varias técnicas para resolver este problema, una de ellas es emplear el método numérico dando valores cercanos a $x=2$, como se explicó anteriormente. Pero no es una forma práctica, de modo que utilizaremos el método analítico.

Visualizando la función se concluye que la parte del numerador es una diferencia de cuadrados, así que se puede factorizar y lo demás solo es cuestión de práctica

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right] \\
&= \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 \\
&= 2+2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Si el lector desea comprobar que el resultado es correcto mediante la técnica numérica, se sugiere emplear el valor de $x=1.999$, por la izquierda y $x=2.001$ por la derecha. Otra técnica sería utilizar el teorema de L’Hópital, el cual es posible abordar después de derivadas de funciones.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 2.2.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Para los siguientes ejercicios, utilizar la tabla para estimar el límite de la función. Entregar en la siguiente sesión en hojas blancas.

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
$f(x)$									

2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

x	0.8	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x)$									

3. $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

x	-2.2	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9	-1.8
$f(x)$									

4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$

x	0.8	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x)$									

5. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
$f(x)$									

6. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

x	0.8	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x)$									

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2-x-2}$

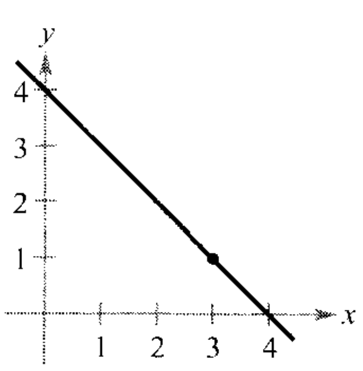
x	0.8	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x)$									

8. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}$

x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
$f(x)$									

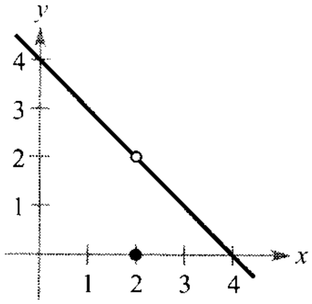
Utilizar la gráfica para determinar si existe el límite de las siguientes funciones

9. $\lim_{x\to 3}(4-x)$

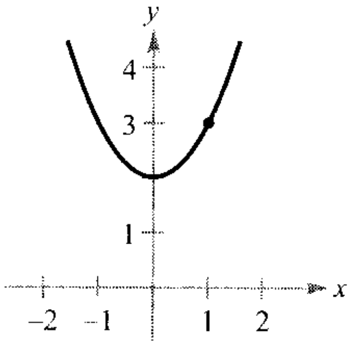


$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

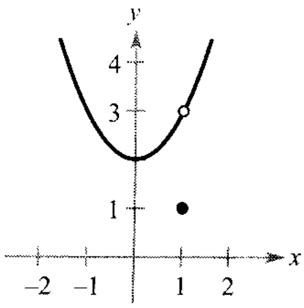
10. 

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 2)$$

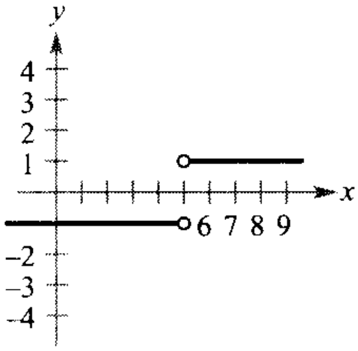
11. 

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

12. 

13. $\lim_{x \to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$



Para los siguientes ejercicios, utilizar el método analítico para encontrar el límite de la función

14. $\lim_{x \to 3} 5$

15. $\lim_{x \to 3} 5x - 4$

16. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2 - x - 2}$

17. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2 - 4}$

18. $\lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x^4 - 1}$

19. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^4 - 1}$

2.3 CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVO

Comprender la metodología para el cálculo de límites de funciones trigonométricas; teniendo presente el concepto fundamental de límite y además el cálculo de límites de funciones algebraicas.

Al igual que al calcular límites de funciones algebraicas, es conveniente conocer algunas propiedades interesantes acerca de los límites de funciones trigonométricas.

Para evaluar límites de funciones trigonométricas se tiene que tener en cuenta las siguientes propiedades de los límites.

Sea c un número real en el dominio de una función trigonométrica dada.
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = K$
1. $\lim\limits_{x \to c} senx = senc$ 2. $\lim\limits_{x \to c} \cos x = \cos c$
3. $\lim\limits_{x \to c} \tan x = \tan c$ 4. $\lim\limits_{x \to c} \cot x = \cot c$
5. $\lim\limits_{x \to c} \sec x = \sec c$ 6. $\lim\limits_{x \to c} \csc x = cs\,c\,c$

Dos límites trigonométricos especiales
1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{x} = 1$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

Ejemplo

Hallar el límite de las siguientes funciones trigonométricas

a) $\lim_{x \to 0} \tan x = \tan 0 = 0$

b) $\lim_{x \to \pi} (x \cos x) = \left(\lim_{x \to \pi} x \right) \left(\lim_{x \to \pi} \cos x \right) = \pi \cos \pi$

c) $\lim_{x \to 0} sen^2 x = \lim_{x \to 0} (senx)^2 = 0^2 = 0$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 2.3.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los siguientes ejercicios sobre límites de funciones trigonométricas. Entregar en la siguiente sesión en hojas blancas.

1. $\lim_{x \to \pi/2} \sin x$
2. $\lim_{x \to \pi} \tan x$
3. $\lim_{x \to 2} \cos \frac{\pi x}{3}$
4. $\lim_{x \to 1} \sin \frac{\pi x}{2}$
5. $\lim_{x \to 0} \sec 2x$
6. $\lim_{x \to \pi} \cos 3x$
7. $\lim_{x \to 5\pi/6} \sin x$
8. $\lim_{x \to 5\pi/3} \cos x$

2.4 LIMITES LATERALES

OBJETIVO

Estudiar el concepto de límites laterales para comprender el concepto de continuidad en un intervalo cerrado.

El límite por la derecha significa que x se aproxima a c por valores superiores a c.

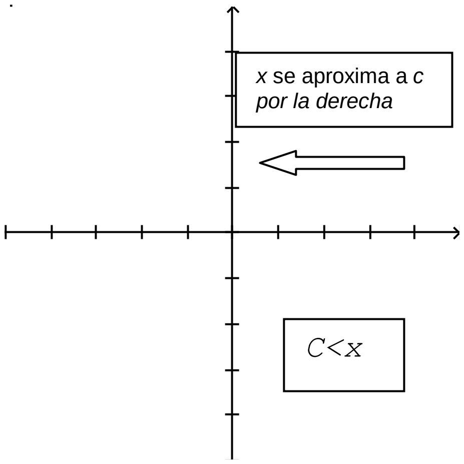


Fig. 2.4.1 Limite por la derecha

Este límite se denota

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \qquad \text{Limite por la derecha}$$

Del mismo modo, el limite por la izquierda significa que x se aproxima a c por valores inferiores a c.

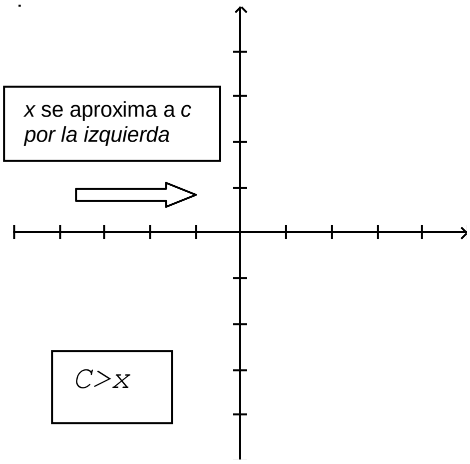


Fig. 2.4.2 Límite por la izquierda

Este límite se denota

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \qquad \text{Limite por la izquierda}$$

Ejemplo

Encontrar el límite de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ cuando x se aproxima a -2 por la derecha.

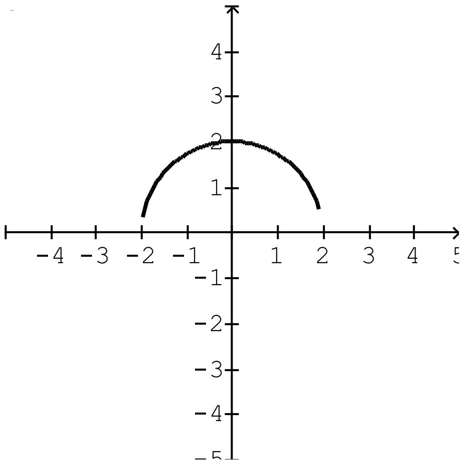


Fig. 2.4.3

Solución:

Como se muestra en la figura 2.4.3, el límite cuando x se aproxima a -2 por la derecha es,

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0$$

Los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de las funciones escalón. Un tipo común de función escalón es la función parte entera o mayor entero $[\![x]\!]$.

2.5 CALCULO DE LÍMITES INFINITOS

OBJETIVO

Comprender el significado de límites infinitos y aplicarlos en la solución de problemas que se requieran.

Para comprender el significado de límites infinitos, analizaremos la siguiente función.

Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

Graficando la función se observa

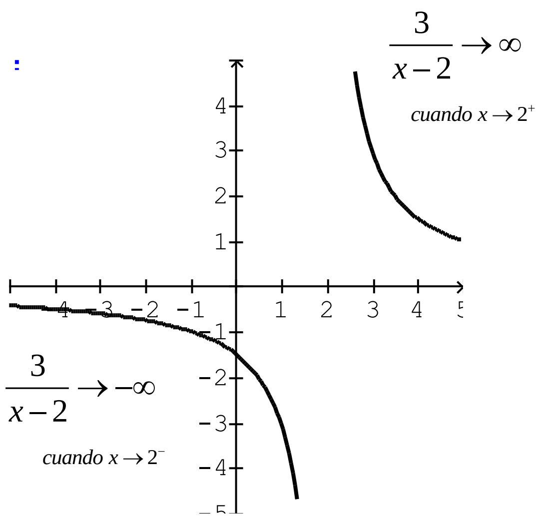


Fig. 2.5.1

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$$ $f(x)$ decrece sin cota o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la izquierda.

y,

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty$$ $f(x)$ crece sin cota o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la izquierda.

Mediante la tabla se observa

x se aproxima a 2 por la izquierda

x se aproxima a 2 por la derecha

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	-6	-30	-300	-3000	?	3000	300	30	6

f(x) decrece sin cota o sin limite.

f(x) crece sin cota o sin limite.

Si $f(x)$ crece o decrece sin cota o sin limite cuando x se aproxima a c se dice que el **límite de** $f(x)$ **en** c **es infinito.**

Límites al infinito

Considere la función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, cuya grafica se muestra a continuación

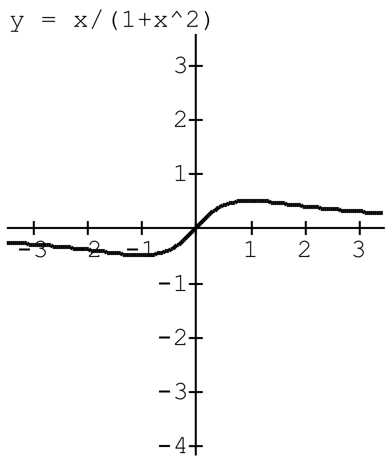


Fig. 2.5.2

Ahora preguntémonos ¿Qué le sucede a $f(x)$ cuando x se hace cada vez más grande?. En símbolos matemáticos preguntamos el mismo caso de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Dónde el símbolo $x \to \infty$ se utiliza como una forma breve de decir que x se hace cada vez más grande, o que crece sin cota; esto lo podemos visualizar en la siguiente tabla

x	10	100	1000	10000	$\cdots\infty$
$f(x)$	0.099	0.010	0.001	0.0001	$\cdots ?$

Parece que $f(x)$ se hace cada vez mas pequeño conforme x se hace cada vez más grande. Esto en términos matemáticos se escribe como sigue

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Al experimentar con números negativos cada vez más lejanos del cero nos conduciría a escribir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Determinación de límites

- Límites de polinomios:

  El límite de cualquier polinomio cuando $x \to \infty$ siempre es $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del coeficiente del termino de mayor grado del polinomio:

  Ejemplo

  Encontrar el límite de los siguientes polinomios

  $$\lim_{x\to\infty}(2x^6 - 3x^3 + 3x - 5) = \infty$$

  $$\lim_{x\to\infty}(-2x^6 - 3x^3 + 3x - 5) = -\infty$$

  Esto porque en el primer caso el de coeficiente de x^6 es positivo. En el segundo caso el coeficiente de x^6 es negativo.

- Límites de funciones racionales:

Aquí se presentan tres casos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\begin{cases}\pm\infty, & si\ el\ grado\ de\ p(x)>q(x)\\ \dfrac{a}{b}, & si\ el\ grado\ de\ p(x)=q(x)\\ 0, & si\ el\ grado\ de\ p(x)<q(x)\end{cases}$$

Dónde el signo depende de los coeficientes .

La técnica para el cáculo de estos límites es dividir tanto el numerador como el denominador entre la potencia más alta de x (o de la variable usada en la expresión) que aparece en el denominador.

Ejemplo

Demuestre que $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$

Solución: Aquí el exponente mayor del denominador es x^2

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}1}=\frac{0}{0+1}=0$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 2.5.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los siguientes ejercicios sobre límites infinitos. Entregar en la próxima sesión en hojas blancas.

1. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-1}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$
5. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2-3x}{x-1}$
6. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-3x}{x-1}$

2.6 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

OBJETIVO

Comprender el significado de continuidad de una función en un punto para poder resolver ejercicios relacionados al tema

En matemáticas, el término continuo tiene el mismo significado que en su uso cotidiano. Decir, de manera informal, que una función es continua en $x = c$ significa que no hay interrupción de la grafica de f en c. Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en c.

En la figura 2.6.1, se identifican tres valores de x en los que la grafica de f *no es continua.* En los demás puntos del intervalo (a,b), la gráfica de f no sufre interrupciones y es **continua**.

Existen tres condiciones para las que la gráfica de f no es continua en $x = c$

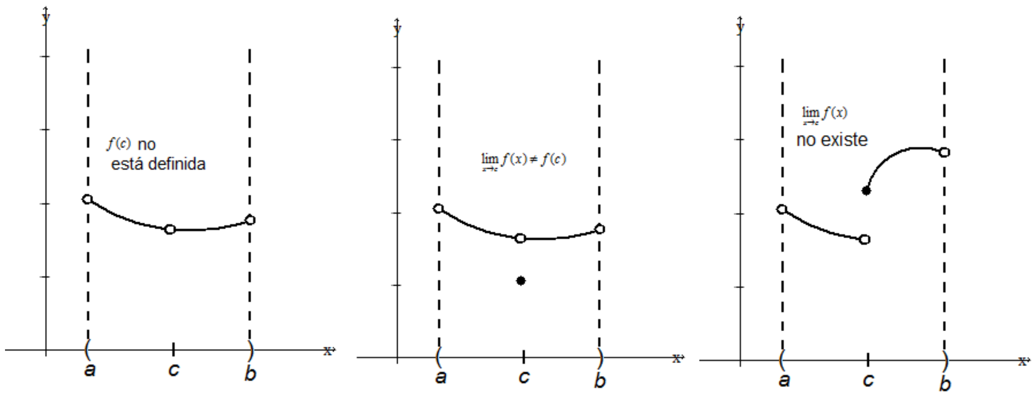


Fig. 2.6.1

En esta figura, parece que la continuidad en $x = c$ puede destruirse mediante cualquiera de las siguientes condiciones.

1. La función no esta definida en $x = c$
2. No existe el limite de $f(x)$ **en** $x = c$.
3. El limite de $f(x)$ **en** $x = c$ existe, pero no es igual a $f(c)$.

Si no se da ninguna de las tres condiciones anteriores, se dice que la función f es **continua en** c, como lo señala la importante definición que sigue.

Definición de continuidad

Continuidad en un punto: Una función es continua en c si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está definida
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

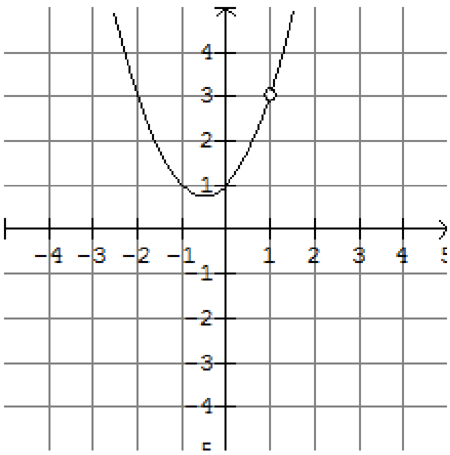
Continuidad en un intervalo abierto: Una función es **continua en un intervalo abierto (a,b)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta de los números reales enteros $(-\infty, \infty)$ es **continua en todas partes.**

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

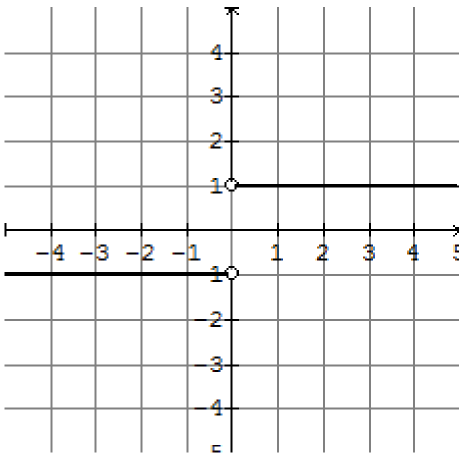
APARTADO 2.6.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

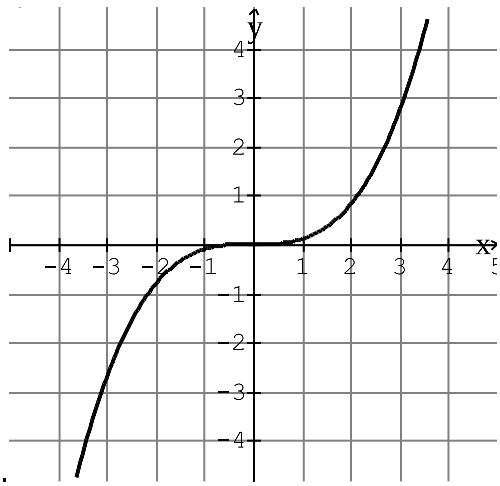
Analizar la continuidad de la función de las siguientes gráficas. Entregar la próxima sesión en hojas blancas.



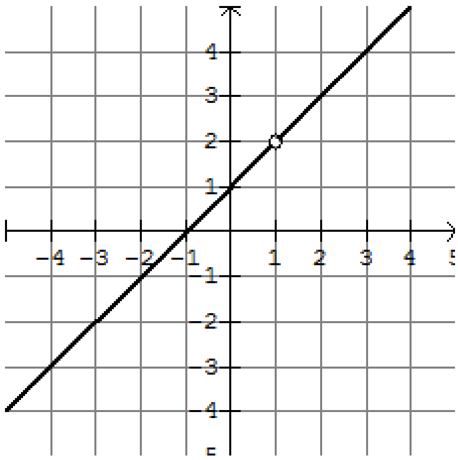
1.



2.



3.



4.

2.7 TIPOS DE DISCONTINUIDAD

OBJETIVO

Entender la clasificación de los tipos de discontinuidad, para una aplicación posterior.

Considere un intervalo abierto I que contiene un número real c. Si una función f esta definida en I (excepto, posiblemente en c) y no es continua en c, se dice que f tiene una **discontinuidad** en c. Las discontinuidades se clasifican en dos categorías:

1. *Evitables y removibles*
2. *Inevitables y no removibles*

Se dice que una discontinuidad en c es evitable o removible si f se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) apropiadamente $f(c)$. A continuación se presentan un par de gráficas en las que se presentan discontinuidades evitables o removibles en c.

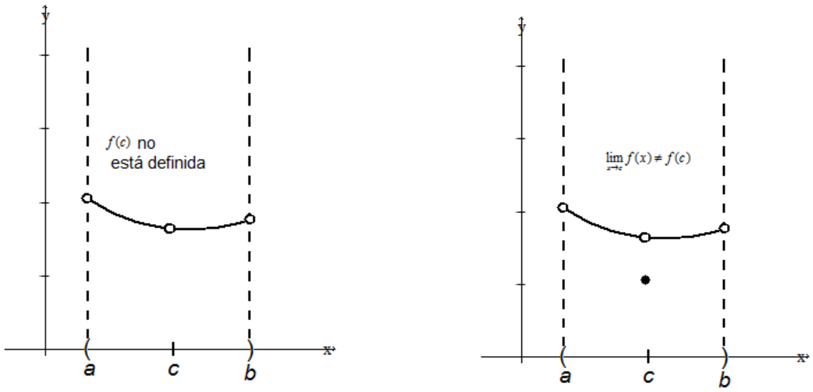


Fig. 2.7.1

En la gráfica siguiente, a diferencia de las gráficas de la Fig. 2.7.1, se presenta una discontinuidad inevitable o no removible en c.

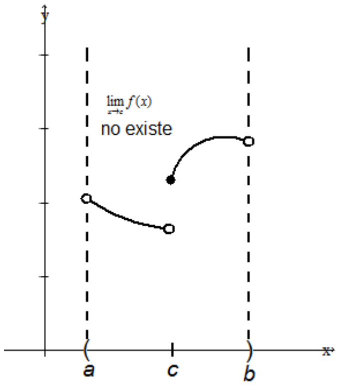


Fig. 2.7.2

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 2.7.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Investigar los tipos de discontinuidad que presentan las funciones con ayuda del apartado 2.7.1. Entregar investigación la próxima sesión en la libreta.

APARTADO 2.7.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Encontrar los valores de x (si existe alguno) en los que f no es continua. ¿Qué discontinuidades son evitables o removibles?. Entregar la próxima sesión en hojas blancas.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
3. $f(x) = 3x - \cos x$
4. $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$
7. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$
8. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x - 2}$

2.8 DETERMINACION DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO Y EN UN INTERVALO

OBJETIVO

Determinar la continuidad de una función en un punto y en un intervalo.

A continuación se presentan algunas gráficas, y con ellas la determinación de continuidad.

Ejemplo 1

Analizar la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

La gráfica de la función es la siguiente

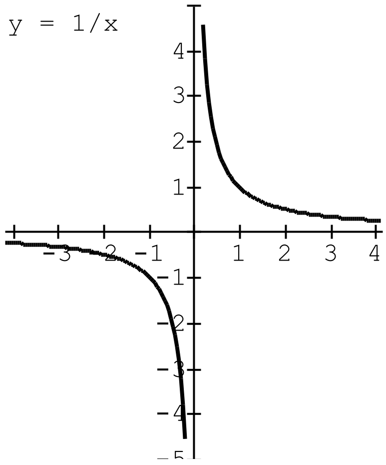


Fig. 2.8.1

En la Figura 2.8.1, se observa que existe una discontinuidad inevitable o no removible en $x = 0$

Ejemplo 2

Analizar la continuidad de la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

La gráfica de esta función es la siguiente

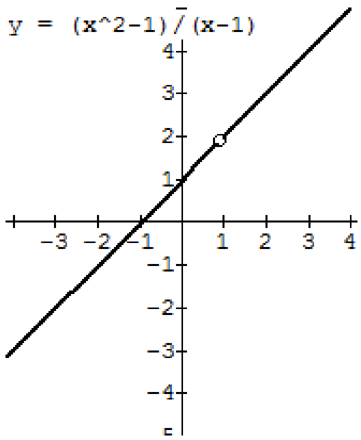


Fig. 2.8.2

Esta gráfica es similar a la mostrada en la figura 2.7.1; por tanto se dice que es una discontinuidad evitable y removible. Esto es cierto cuando factorizamos el numerador como a continuación:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=(x+1)$$

Por lo tanto la función queda redefinida como

$$f(x)=x+1$$

que ahora es continua en toda la recta real (para cualquier valor de x).

Ejemplo 3

Considere la función

$$f(x) = sen(x)$$

La gráfica demuestra lo siguiente

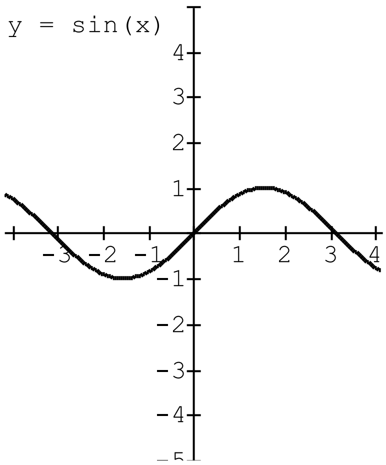


Fig. 2.8.3

Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Una función f es **continua en un intervalo cerrado [a,b]** si es continua en el intervalo abierto (a,b) y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

La función es **continua por la derecha** en a y **continua por la izquierda** en b (como se indica en la siguiente figura).

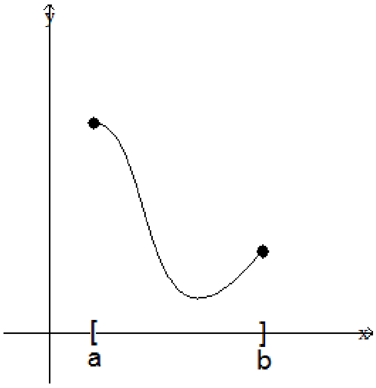


Fig. 2.8.4

Ejemplo

Continuidad de una función en un intervalo cerrado

Analizar la continuidad de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Solución:

El dominio de f es en el intervalo cerrado [-1,1]. En todos los puntos del intervalo abierto (-1,1). Dado que

$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$$ Continua por la derecha

y

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$$ Continua por la izquierda

Se puede concluir que f es continua en el intervalo cerrado [-1,1], como se ilustra en la Figura 2.8.5

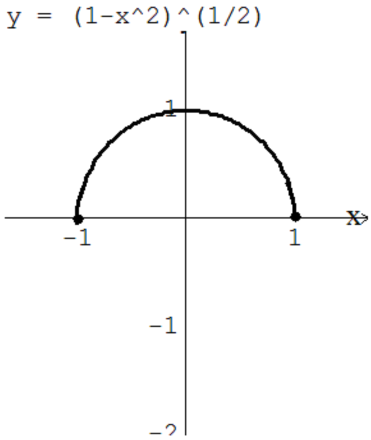


Fig. 2.8.5

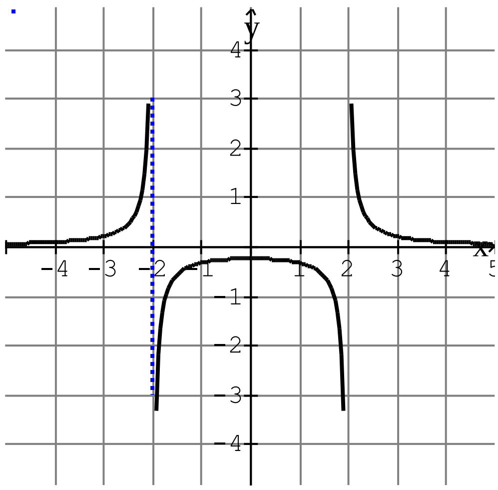
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 2.8.2

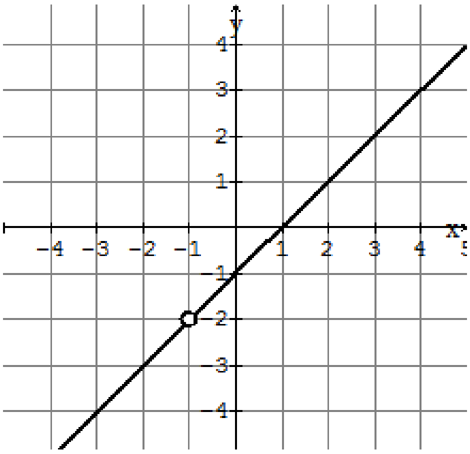
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Analizar la continuidad de cada función. Entregar los ejercicios resueltos la siguiente sesión en hojas blancas.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$



2. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$



En los siguientes ejercicios analizar la continuidad de la función en el intervalo cerrado

Función	Intervalo
3. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$	$[-5,5]$
4. $g(x)=\sqrt{25-x^2}$	$[-5,5]$
5. $f(t)=3-\sqrt{9-t^2}$	$[-3,3]$
6. $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x\leq 0 \\ 3+\frac{1}{2}x, & x>0 \end{cases}$	$[-1,4]$
7. $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$	$[-1,2]$

2.9 ASINTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

OBJETIVO

Entender el concepto de asíntotas y como poder determinarlos en una función.

Para comprender el concepto de asíntota, y tener un concepto más amplio, es necesario visualizar una función que presente lo antes mencionado (una asíntota).

ASINTOTAS VERTICALES

Por tal motivo nos concentremos en la siguiente figura.

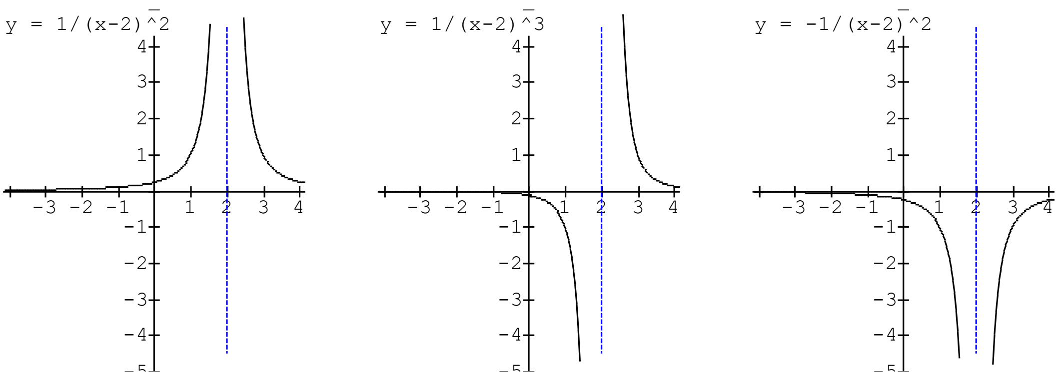


Fig. 2.6.1

Si fuera posible extender la gráfica de la figura hasta el infinito, positivo o negativo, se vería que ambas se acercan arbitriamente a la recta vertical $x = 2$. Esta recta es una **asíntota vertical** de la grafica de f.

Definición de asíntota vertical
Si $f(x)$ tiende al infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la grafica de f .

Para el cálculo de las asíntotas verticales, es necesario tener en cuenta lo siguiente.

Asintotas verticales
Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$, entonces la gráfica de la función $$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$ tiene una asíntota vertical en $x = c$.

Ejemplo

Cálculo de asíntotas verticales

Determinar todas las asíntotas verticales de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$ b) $f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2-1}$

Solución:

La técnica es igualar el denominador a cero y encontrar cada valor de x.

a) $2x - 4 = 0$, $2x = 4$, $x = \dfrac{4}{2}$, $x = 2$

La gráfica de la función es la siguiente

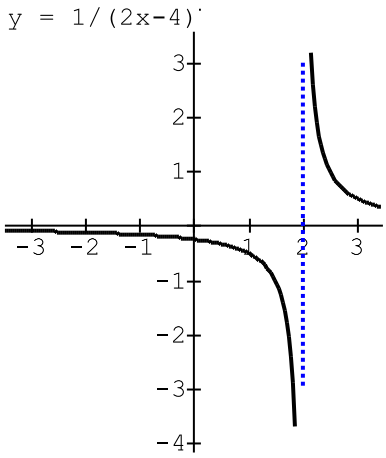


Fig. 2.6.2

Esta figura también nos muestra lo mismo, existe una asíntota vertical en $x = 2$

b) $x^2 - 1 = 0$, aquí hay dos formas de encontrar el valor de x, una de ellas es factorizando y otra es resolviendo la ecuación cuadrática con la formula general. De allí se encuentran dos valores $x = 1$ y $x = -1$; el cual nos indica que existen dos asintotas verticales.

Graficando la ecuación se tiene lo siguiente:

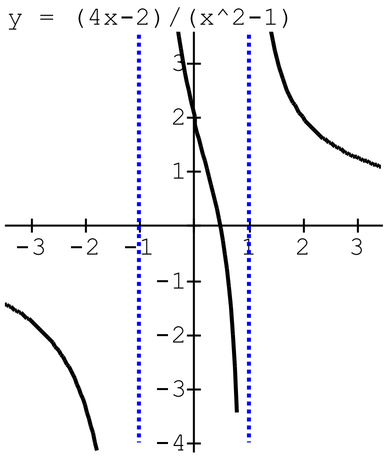


Fig. 2.6.3

ASINTOTAS HORIZONTALES

Al igual que para las asíntotas verticales, la función tiene que cumplir con ciertos requisitos para que tenga asíntota horizontal; para este caso el requisito es el siguiente.

Definición de asíntota horizontal
La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la grafica de f si $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$

La técnica de solución es la misma que la empleada para calcular límites en el infinito.

Ejemplo

Determinar la asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Solución :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

De ésta forma sabemos que la **asíntota horizontal** es en $x = 2$; además el lector debe visualizar que igualando el denominador a cero tenemos una **asíntota vertical**, y esto es en $x = -1$.

Grafiquemos la ecuación para comprobar los resultados obtenidos.

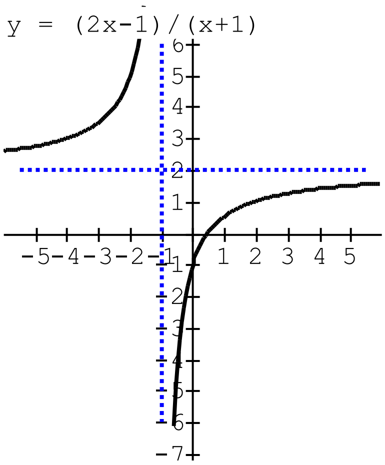


Fig. 2.6.4

En la gráfica se puede observar que los valores calculados son correctos

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 2.9.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Encontrar todas las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones. Entregar los ejercicios resueltos la siguiente sesión en hojas blancas.

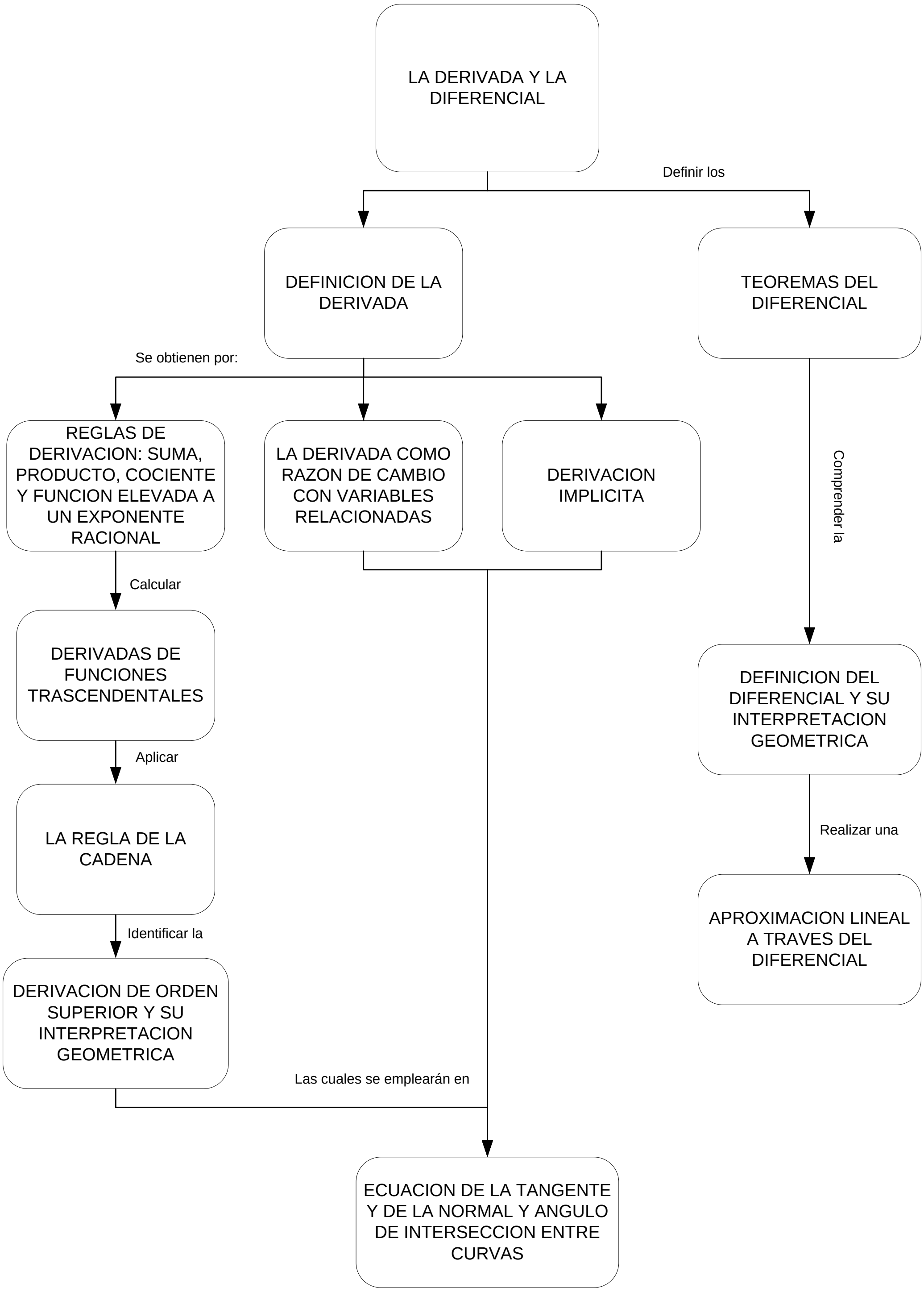
1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$
3. $f(x) = \frac{x^2 - x}{(x^2 + 1)(x - 1)}$
4. $f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$
5. $f(x) = \frac{2 + x}{x^2(1 - x)}$
6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$
7. $g(t) = \frac{t - 1}{t^2 + 1}$
8. $f(t) = \frac{t}{t^2 + t - 2}$

UNIDAD 3. LA DERIVADA Y LA DIFERENCIAL

OBJETIVO

Analizar el concepto de la derivada y sus interpretaciones físicas y geométricas; encontrar las derivadas de las diferentes funciones utilizando las propiedades y teoremas y definir la diferencial utilizando el concepto como una aproximación lineal de las funciones.

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



TEMARIO

UNIDAD 3. LA DERIVADA Y LA DIFERENCIAL

3.1 Definición de la derivada

3.2 Reglas de derivación: suma, producto, cociente y función elevada a un exponente racional

3.3 La regla de la cadena

3.4 Derivadas de funciones trascendentales

3.5 Derivación implícita

3.6 Derivación de orden superior y su interpretación geométrica

3.7 Ecuación de la tangente y la normal, ángulo de intersección entre curvas

3.8 La derivada como razón de cambio con variables relacionadas

3.9 Definición del diferencial y su interpretación geométrica

3.10 Teoremas del diferencial

3.11 Aproximación lineal a través del diferencial

INTRODUCCION

En una gran cantidad de procesos donde se relacionan dos o más variables, frecuentemente el cambio en una de ellas induce un cambio en el valor de las otras. Para poder comprender y manejar tales procesos, la derivada se ha convertido en herramienta fundamental, puesto que permite tanto determinar como predecir el comportamiento de las diversas variables involucradas en un fenómeno.

Al estudiar la presente unidad podrás identificar el concepto de derivada y aplicarlo al análisis de la razón de cambio de una variable con respecto a otra. Asimismo, relacionarás a la derivada con su expresión geométrica, entendiéndola como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto específico.

Por otro lado, la interpretación física de la derivada te permitirá analizar la velocidad media y la razón de cambio instantánea para describir con precisión el desplazamiento de un móvil.

Se estudiará la llamada regla de la cadena para derivar funciones compuestas. Y en la parte dedicada a las derivadas de orden superior, comprenderás qué son las derivadas sucesivas, los procedimientos matemáticos para obtenerlas y algunas de sus aplicaciones, identificarás qué es la primera y segunda derivada y sus significados físicos.

En esta unidad te permitirá determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a una curva, y la normal correspondiente. También aprenderás cómo se utiliza la diferencial para el cálculo aproximado de raíces y cómo determinar los errores cometidos en materiales de medición.

3.1 DEFINICION DE LA DERIVADA

OBJETIVO

Comprender el concepto de la derivada; su interpretación geométrica y física. Desarrollar la capacidad de derivar funciones algebraicas mediante la definición de la derivada, utilizando el método de los cuatro pasos.

Sea la función $y = f(x)$ como se sabe, al darle a x un incremento Δx en un punto x_0 , le corresponderá a y un incremento.

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ suele llamársele cociente incremental o cociente de los incrementos.

Se define como la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto x_0 al límite, si existe, del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero.

Defínción de la derivada

La derivada se define como el límite del cociente del incremento de la variable dependiente entre el incremento de la variable independiente, cuando éste tiende a cero y se puede denotar por $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ejemplo

Dada la función $f(x) = x^2$, encontrar su derivada en el punto $x_0 = 3$:

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Al evaluar la derivada en el punto $x_0 = 3$, se tiene:

$$f'(3) = 2(3) = 6$$

Con esto se observa que el valor de la derivada de una función, depende del punto en donde se calcule.

Interpretación física de la derivada:

Supóngase que se deja caer un cuerpo desde una altura de 25 metros y que se desea conocer la velocidad del móvil cuando ha transcurrido un segundo.

La altura del cuerpo $y = f(t)$ será según las ecuaciones de caída libre:

$f(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

Considerando:

$$g = 9.82\, m/s^2;\;\; y_0 = 25m$$

Nos queda:

$$f(t) = 25 - 4.905\, t^2$$

El problema consiste en encontrar la velocidad en un instante determinado. Para esto hay que entender primeramente, lo que es la velocidad media durante un intervalo de tiempo, o sea, desde el instante t hasta $t + \Delta t$, definiéndola como el cociente:

$$V_m = \frac{diferencia\ de\ distancias\ en\ el\ tiempo\ transcurrido}{tiemo\ trancurrido}$$

$$V_m = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Considerando el instante $t = 1\ s$; la distancia recorrida después de 0.5 s es:

$$f(1.5) - f(1) = [25 - 4.905(1.5)^2] - [25 - 4.905(1)^2] = -6.13$$

(El signo del resultado significa que el cuerpo está bajando).

Así la velocidad media en el intervalo [1,1.5] será:

$$V_m = \frac{-6.13}{0.5} = -12.26\, m/s$$

Ahora, considerando el instante $t = 1\ s$ y después de haber transcurrido Δt segundos, la distancia será:

$$V_m = \frac{-9.81\Delta t - 4.905(\Delta t)^2}{\Delta t} = -9.81 - 4.905\Delta t$$

Tomando valores de Δt cada vez menores, la velocidad media se acerca cada vez más a $-9.81\, m/s$. Por ejemplo si $\Delta t = 0.1$, la velocidad es $-10.30\, m/s$. Si $\Delta t = 0.01$ será$-9.86\, m/s$.

Lo importante es que se puede obtener la velocidad media tan cerca de $-9.81\, m/s$ cómo se desee, con sólo tomar a Δt lo suficientemente pequeño. O sea que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} (-9.81 - 4.905\Delta t) = -9.81\, m/s$$

Y es lógico llamar a este límites, velocidad instantánea en $t = 1\, s$

Con esto se puede concluir que, para obtener una velocidad instantánea en cualquier instante t, bastará obtener el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$.

Interpretación física de la derivada

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a t y además existe el límite

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Entonces, la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada del espacio respecto al tiempo.

Interpretación geométrica de la derivada:

Uno de los problemas históricos que dieron origen al cálculo infinitesimal es muy antiguo, data del gran científico griego Arquímedes es el llamado: problema de las tangentes y que se describe a continuación.

El trazo de la recta tangente a una curva en un punto dado de ella, es una herramienta importante en la resolución de muchos problemas geométricos y matemáticos en general.

Antes de la invención del cálculo diferencial, el problema de trazo de la recta tangente pudo ser resuelto sólo para algunos casos especiales. Por ejemplo, La recta tangente a una circunferencia en un punto de ella se llegó a trazar. Sabiendo que ésta era perpendicular al radio correspondiente en dicho punto. Sin embargo par otro tipo de curvas la solución al problema no había sido satisfactoria.

Fue hasta la aparición del matemático francés Pierre de Fermat, cuando se concibió la recta tangente a una curva, como la posición límite de la recta secante a dicha curva cuando los dos puntos de intersección de la secante con la curva se aproximan uno al otro.

Considerando una curva cuya ecuación referida al plano cartesiano viene dada por $y = f(x)$. Figura 3.1.1.

Sea P un punto fijo de la curva y sea Q un punto móvil de la curva y próximo a P. La recta en rojo que pasa por P y Q se denomina: recta secante.

Cuando el punto Q se mueve hacia P sobre la curva, adoptando posiciones sucesivas: Q_1, Q_2, Q_3,…Q_n, entonces, la posición límite (si existe) de la secante, se denomina: la recta tangente a la curva en P.

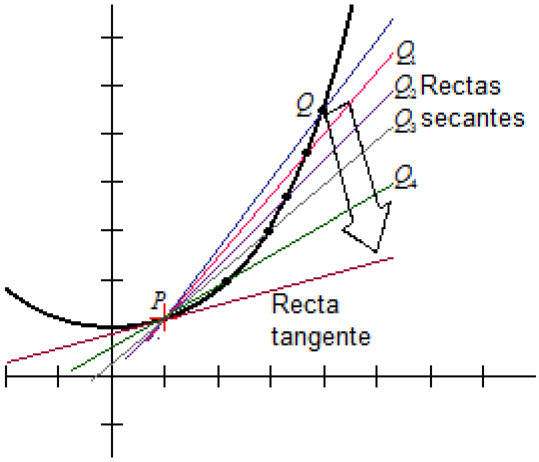


Fig. 3.1.1. Cuando Q se acerca a P, las rectas secantes
Se van aproximando a la recta tangente

De la Figura 3.1.2, se observa que si el punto Q se mueve sobre la curva $f(x)$, el ángulo de inclinación θ de la secante PQ es variable. Si Q se acerca a P, entonces el ángulo θ se aproxima al ángulo de inclinación α de la recta tangente PT. Lo anterior se puede escribir simbólicamente como:

$$\lim_{Q \to P} \theta = \alpha$$

Que se lee:

El ángulo θ tiende al valor del ángulo α cuando el punto Q tiende a la posición de P.

El hecho de que Q tienda a P implica que x tienda a x_0 , es decir:

$$Q \to P \quad \leftrightarrow \quad x \to x_0$$

Considerando el triángulo rectángulo PQM se tiene:

$$m_{sec\overline{PQ}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \tan\theta$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se tendrá:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \tan\theta$$

Considerando que la función tangente es continua en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se tendrá:

$$\lim_{x \to x_0} \tan \theta = \tan \alpha = m_T$$

Lo cual significa que la tangente tiende del ángulo de inclinación de la recta secante, o sea la pendiente de PQ tiende a la pendiente de la recta tangente PT si el punto Q tiende a P.

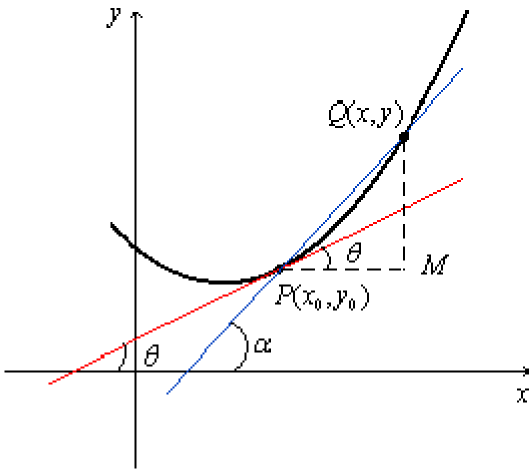


Figura 3.1.2

Interpretación geométrica de la derivada

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a x y además existe el límite

$$m_T = \lim_{P \to Q} m_{sec\,\overline{PQ}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$

Lo que significa que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Ejemplo

Hallar la pendiente y la inclinación de la tangente para la siguiente curva en el punto cuya abscisa se indica.

$y = x^2 - 6x + 3$, siendo $x = 2$

Solución:

Aplicando la definición de la derivada, tenemos:

$$f'(x) = m_T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 3 - (x^2 - 6x + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 6x - 6\Delta x + 3 - x^2 + 6x - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 6)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x - 6 = 2x - 6 \\ f'(x) &= 2x - 6 \end{aligned}$$

Evaluando la derivada en el punto indicado, se tiene:

$$m_T = f'(2) = 2(2) - 6 = 4 - 6 = -2$$

El ángulo de inclinación se encuentra despejando el ángulo de la siguiente fórmula:

$$m_T = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1} m_T$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-2) = -63^o$$

Como el ángulo es negativo, se le suma 180^o, por tanto,

El ángulo de inclinación es: $\alpha = 180 - 63^o = 116.33^o$

Notaciones:

Hasta el momento se ha utilizado como notación para la derivada de una función $f(x)$, a $f'(x)$. Pero existen otras notaciones las cuales indican lo mismo. Así la derivada de una función $y = f(x)$ se puede escribir:

Notaciones de las derivada	
Notación de Lagrange	y' o $f'(x)$
Notación de Leibniz	$\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d[f(x)]}{dx}$
Notación de Cauchy	$D_x y$ o $D_x[f(x)]$
Notación de Newton	$\dot{y}$ ó $\dot{f}(x)$

La notación de Lagrange sugiere que al derivar una función $y = f(x)$ en todos los puntos de su dominio, se obtiene otra función$y' = f'(x)$, cuyo dominio está constituido por todos los puntos del dominio de la función $y = f(x)$ para los cuales existe la derivada.

La notación de Cauchy permite representar el proceso de obtención de la derivada de una función como un operador (Dx) que aplicado a la función $y = f(x)$ la transforma en la función $y' = f'(x)$:

$$Dxf(x) = f'(x)$$

Respecto a la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, aunque tiene la forma de un cociente, por ahora se considerará que dicho cociente representa un solo ente.

Esta notación también permite representar el proceso de derivación con el operador $\frac{d}{dx}$, que aplicado a una función, la transforma en su derivada.

$$\frac{d}{dx}f(x) = f^{'}(x)$$

Newton utilizó su notación primordialmente en problemas físicos, donde la variable independiente es el tiempo, por lo que por costumbre, esta notación se usa frecuentemente en mecánica y en general en problemas donde el tiempo es la variable independiente.

En el desarrollo de los temas siguientes se emplearán indistintamente las notaciones anteriores según la conveniencia que presenta cada una.

Cálculo de la derivada a partir de la definición:

Como se ha visto, la derivada de una fu0f'nción $y = f(x)$, es:

$$y^{'} = f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por lo que para obtener la derivada de una función, es necesario calcular el límite anterior. Una forma de hacerlo es sustituir los elementos necesarios dentro de la expresión de la definición, hacer las simplificaciones adecuadas y calcular el límite.

Método de los cuatro pasos:

Partiendo de la regla de correspondencia:

$$y = f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

Paso 1: Se incrementa en Δx el valor de la variable independiente, resultando incrementada la variable dependiente y, en Δy.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Paso 2: Se calcula el incremento de la variable dependiente, restando ordenadamente la expresión (1) de la (2).

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Paso 3: Se calcula el cociente de los incrementos, dividiendo la expresión (3) entre Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Paso 4: Se calcula el límite del cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando el incremento Δx tiende a cero.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo 1

Hallar la derivada de la función $y = x^2 + 3$

Solución:

1. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3$$

2. $-\,y \qquad = -x^2 - 3$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$\Delta y = \Delta x(2x + \Delta x)$$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$
4. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x + 0 = 2x$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Ejemplo 2

Hallar la derivada de la función $y = \frac{x+2}{x}$

Solución:

1. $y + \Delta y = \frac{x+\Delta x+2}{x+\Delta x}$
2. $- y \quad = - \frac{x+2}{x}$

$$\Delta y = \frac{x + \Delta x + 2}{x + \Delta x} - \frac{x + 2}{x}$$

$$\Delta y = \frac{x[(x + \Delta x) + 2] - (x + \Delta x)(x + 2)}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + x\Delta x + 2x - x^2 - 2x - x\Delta x - 2\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{-2\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x}{x\Delta x(x+\Delta x)} = \frac{-2}{x(x+\Delta x)}$
4. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{x(x+\Delta x)} = -\frac{2}{x(x+0)} = -\frac{2}{x^2}$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$$

Es conveniente, observar que este procedimiento para el cálculo de la derivada, es la reafirmación del concepto de derivada, y no es un método práctico para derivar. Más adelante se encontrarán fórmulas de derivación generalizadas para cualquier tipo de función, mismas que se deducen a partir de la definición.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.1.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Investigar el apartado 3.1.1 para comprender cómo nace la derivada, resumir la vida de sus precursores y dar una interpretación geométrica y física de la derivada. Entregar en libreta, en la siguiente sesión.

3.2 REGLAS DE DERIVACION: SUMA, PRODUCTO, COCIENTE Y FUNCION ELEVADA A UN EXPONENTE RACIONAL

OBJETIVO

Aplicar las fórmulas de derivación deducidas de la definición de la derivada para adquirir la habilidad y destreza en derivadas de funciones algebraicas, tales como la suma, el producto, el cociente y una función potencia.

Hasta ahora hemos derivado funciones algebraicas y trigonométricas utilizando la definición de la derivada (la regla de los cuatro pasos), y se ha constatado que el procedimiento es laborioso y tedioso, por consiguiente, se presentan a continuación las reglas o fórmulas de derivación deducidas de la regla general; lo que permitirá simplificar la derivación y calcular mecánicamente la derivada de las funciones algebraicas tales como la función constante, la función suma, la función producto, la función cociente y la función potencia.

Fórmulas fundamentales de derivación

1. Derivada de una constante

Empleando el método de los cuatro pasos:

Si $y = f(x) = c$ siendo c una constante, tenemos que:

$$\frac{d}{dx}(c) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Por tanto, la derivada de una constante es cero.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = -7$

Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(-7) = 0$$

2. **Derivada de la variable independiente (Función idéntica o identidad)**

   Si $y = f(x) = x$

$$\frac{d}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

   Por tanto, la derivada de la variable independiente o con respecto a ella misma, es igual la unidad.

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

3. **Derivada del producto de una constante por la variable independiente**

   Si $y = f(x) = cx$

$$\frac{d}{dx}(cx) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x + \Delta x) - cx}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cx + c\Delta x - cx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c = c$$

   Por tanto, la derivada de la variable del producto de una constante por la variable independiente es igual a la constante.

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = \frac{3}{4}x$

Solución:

$$f\,'(x) = \frac{3}{4}\frac{d}{dx}(x) = \frac{3}{4}(1) = \frac{3}{4}$$

4. La derivada de suma de funciones

Si $y = f(x) = u + v - w$ donde $u = f(x),\ v = f(x),\ w = f(x)$

$$\frac{d}{dx}(u + v - w\,) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u + v + \Delta v - w\Delta w) - (u + v - w)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v - \Delta w}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Por tanto, la derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 3$

Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(8x^3 - 3x^2 - 3) = \frac{d}{dx}(8x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(3)$$
$$f'(x) = 8\frac{d}{dx}(x^3) - 3\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(3) = 8(3x^2) - 3(2x) - 0$$
$$f'(x) = 24x^2 - 6x$$

5. La derivada de la potencia

Si $y = f(x) = x^n$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right) - (x^n)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}$$
$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(0) + \cdots + (0)^{n-1} = nx^{n-1}$$

Por tanto, la derivada de una potencia es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = \frac{4}{x^3} + 5x^3$

Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4}{x^2} + \frac{d}{dx}5x^3 = 4\frac{d}{dx}x^{-3} + 5\frac{d}{dx}x^3$$

$$f'(x) = 4(-3x^{-4}) + 5(3x^2) = -12x^{-4} + 15x^2$$

$$f'(x) = -\frac{12}{x^{-4}} + 15x^2$$

6. La derivada de un producto

Si $y = f(x) = uv$

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$$

El límite del producto $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x} = 0$, de donde:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\Delta u}{\Delta x} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Por tanto, la derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera función.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = (x^2 - 5)(3x + 7)$

Solución:

La función dada puede escribirse como un producto $y = uv$

Si hacemos $u = (x^2 - 5)$ y $v = (3x + 7)$ y aplicando la regla del producto, obtenemos,

$$f'(x) = (x^2 - 5)\ \frac{d}{dx}(3x + 7) + (3x + 7)\frac{d}{dx}(x^2 - 5)$$

$$f'(x) = (x^2 - 5)\ \left[\frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(7)\right] + (3x + 7)\left[\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(5)\right]$$

$$f'(x) = (x^2 - 5)(3) + (3x + 7)(2x)$$

Desarrollando y simplificando operaciones obtenemos,

$$f'(x) = 3x^2 - 15 + 6x^2 + 14x$$

$$f'(x) = 9x^2 + 14x - 15$$

7. La derivada de un cociente

Si $y = f(x) = \frac{u}{v}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x v(v + \Delta v)}$$

Dividiendo el numerador y denominador por Δx y aplicando las propiedades de los límites, resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x}}{\frac{\Delta x v(v + \Delta v)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{v\Delta u}{\Delta x} - \frac{u\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\frac{vdu}{dx} - \frac{udv}{dx}}{v^2}$$

Por tanto, la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$f'\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = \frac{3x^3+4}{x^2-3}$

Solución:

La función dada puede escribirse como un cociente $y = \frac{u}{v}$

Si hacemos $u = 3x^3 + 4$ y $v = x^2 - 3$ y aplicando la regla del cociente, obtenemos,

$$f'(x) = \frac{(x^2-3)\,\frac{d}{dx}\,(3x^3+4) - (3x^3+4)\frac{d}{dx}\,(x^2-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-3)\left[\frac{d}{dx}\,(3x^3) - \frac{d}{dx}(4)\right] - (3x^3+4)\left[\frac{d}{dx}\,(x^2) - \frac{d}{dx}(-3)\right]}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-3)(9x^2)\ - (3x^3+4)(2x)}{(x^2-3)^2}$$

Desarrollando y simplificando operaciones obtenemos,

$$f'(x) = \frac{9x^4 - 27x^2\ - (6x^4 + 8x)}{(x^2-3)^2} = \frac{9x^4 - 27x^2 - 6x^4 - 8x}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = 3x^4 - 27x^2 - 8x$$

A continuación resumimos en una tabla las fórmulas de las funciones algebraicas.

Derivadas de funciones algebraicas:

Función	Derivada
$\frac{d}{dx}(c)$	0
$\frac{d}{dx}(x)$	1
$\frac{d}{dx}(cx)$	c
$\frac{d}{dx}(u+v-w)$	$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$
$\frac{d}{dx}(x^n)$	nx^{n-1}
$\frac{d}{dx}(uv)$	$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$	$\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.2.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Investigar el apartado 3.2.1 para demostrar los teoremas para la obtención de las derivadas de una suma, un producto, un cociente y una función elevada a un exponente racional. Entregar en la siguiente sesión en la libreta.

APARTADO 3.2.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 3.2.2 para derivar las funciones algebraicas utilizando las fórmulas de derivación. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas en carpeta.

Hallar la derivada de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente respectiva:

1. $f(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$
2. $h(s) = ms^8 - n$
3. $f(x) = -\frac{6}{x^2} + \frac{9}{4x^3}$
4. $g(u) = (2u^2 + 5)(4u - 1)$
5. $h(t) = (t^3 - 3t)(2t^2 + 3t + 5)$
6. $f(p) = \frac{p-1}{p+1}$

7. $h(x) = \frac{x^2-x-3}{x^2+1}$

8. $g(t) = \left(\frac{t+1}{t+2}\right)(2t-5)$

3.3 REGLA DE LA CADENA

OBJETIVO

Aplicar el método de la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

Las reglas de la derivación presentadas en las secciones anteriores se pueden usar solamente para una suma, una resta, un producto y un cociente de expresiones de la forma x^n , donde n es un número entero. Cuando se nos presentaba una función potencia, en donde su base era una composición de funciones y su potencia un número entero positivo $n = 2$ ó 3, Se procedía a desarrollar el producto indicado y después derivar cada término resultante, ejemplo:

$$f(x) = (2x^2 + 3)^3 = 8x^6 + 36x^4 + 54x^2 + 3$$
$$f'(x) = 48x^5 + 144x^3 + 108x$$

Factorizando $f'(x)$:

$$f'(x) = 12x(4x^4 + 12x^2 + 9) = 12x(2x^2 + 3)(2x^2 + 3) = 12x(x^2 + 3)^2$$

Este desarrollo es muy complicado para potencias mayores a 3, o potencias negativas o para potencias radicales, como por ejemplo:

$$(x^2 + 1)^{10}, (3x^{1/2} + 1)^{-5}, (3x^4 - 2x + 1)^{1/3}$$

Para derivar estos tipos de funciones compuestas, se utilizará un método más sencillo, “la regla de la cadena”.

Si se tienen las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$, y $g(x)$ está en el dominio de f entonces se puede escribir $y = f(g(x))$, es decir, y es una función de x , lo que se le conoce como la función compuesta $f o g$.

Para hallar la fórmula de la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función compuesta $y = f(g(x))$, se presenta el siguiente teorema:

Sean las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$, derivables, tales que:

$y = f\big(g(x)\big)\ \forall\, x\ \in Dg$ que hace $g(x) \in Df$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x) = f'(u).g'(x) \qquad \text{Teorema 3.3.1}$$

Haciendo la sustitución:

$$f'(u) = \frac{dy}{du} \quad \text{y } g'(x) = \frac{du}{dx}$$

Nos resulta la notación de Leibniz para la regla de la cadena:

Teorema 3.3.2 La Regla de la Cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Procedimiento para aplicar la regla de la cadena:

1. Descomponer la función original en dos funciones que llamaremos:

   $y(u)$ y $u(x)$
2. Derivar las nuevas funciones para encontrar: $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$
3. Aplicar la fórmula de la regla de la cadena: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$
4. Sustituir la variable u en el resultado final.

Ejemplo 1

Retomado el ejercicio anterior: $f(x) = (2x^2 + 3)^3$

Solución:

1. Haciendo: $y = u^3$ y $u = 2x^2 + 3$

2. Derivando ambas funciones:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 , \qquad \frac{du}{dx} = 4x$$

3. Aplicando la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2)(4x) = 12xu^2$$

4. Sustituyendo el valor de u:

$$\frac{dy}{dx} = 12xu^2 = 12x(2x^2 + 3)^2$$

De ésta manera comprobamos que llegamos al mismo resultado que el ejercicio anterior, pero debe recordarse que cuando la potencia de la función compuesta es superior a 3 o es una función racional o una potencia negativa, el paso a seguir será utilizar la regla de la cadena.

Ejemplo 2

En el siguiente problema, determinar $\frac{dy}{dx}$ de la función $f(x) = sen\ (3x + 5)$.

Solución:

1. Haciendo: $y = sen\, u$ y $u = 3x + 5$

2. Derivando ambas funciones:

$$\frac{dy}{du} = \cos u \quad , \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

3. Aplicando la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos u)(3) = 3 \cos u$$

4. Sustituyendo el valor de u:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cos u = 3 \cos(3x + 5)$$

Generalización de la regla de la potencia:

Retomando el teorema 3.3.1, $\frac{dy}{dx} = f^{'}\big(g(x)\big)g^{'}(x) = f^{'}(u). g^{'}(x)$, si hacemos $g^{'}(x) = \frac{du}{dx}$, se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = f^{'}(u). \frac{du}{dx} \qquad \text{Teorema 3.3.3}$$

Sea $f^{'}(u) = u^n$ en el teorema 3.3.3, donde n es un entero. Como $f^{'}(u) = nu^{n-1}$, obtenemos la versión de la regla de cadena para la regla de la potencia.

Teorema 3.3.4 La Regla de la Cadena para la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}\,(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = (x^4 - 3x + 5)^8$

Solución:

Aplicando la regla de la cadena, (teorema 3.3.4) con $u = x^4 - 3x + 5$ y $n = 7$, se tiene:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4 - 3x + 5)^8 = 8(x^4 - 3x + 5)^{8-1}\frac{d}{dx}(x^4 - 3x + 5)$$
$$f'(x) = 8(x^4 - 3x + 5)^7\left(\frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}5\right)$$
$$f'(x) = 8(x^4 - 3x + 5)^7(4x^3 - 3)$$

Ejemplo 2

Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = \frac{4}{(3x^3-6)^8}$

Solución:

Para poder aplicar la regla de la cadena, (teorema 3.3.4) primero se reescribe la función, subiendo la función potencia en el denominador, utilizando la propiedad de potencias: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

$$f(x) = (3x^3 - 6)^{-8}$$

Haciendo $3x^3 - 6$ y $n = -8$, se tiene:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^3 - 6)^{-8} = -8(3x^3 - 6)^{-8-1}\frac{d}{dx}(3x^3 - 6)$$
$$f(x) = -8(3x^3 - 6)^{-9}\left[\frac{d}{dx}3x^3 - \frac{d}{dx}(6)\right]$$
$$f'(x) = -8(3x^3 - 6)^{-9}(9x^2) = -72x^2(3x^3 - 6)^{-9}$$

Utilizando la misma propiedad de potencias, hacemos positiva la función potencia pasando la expresión $(3x^3-6)^{-9}$ en el denominador.

$$f'(x) = -\frac{72x^2}{(3x^3-6)^9}$$

Ejemplo 3

Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{3x+1}}$

Solución:

Aplicando la regla de la cadena, (teorema 3.3.4) con $u = \frac{2x+1}{3x+1}$ y $n = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(3x+1)\ \frac{d}{dx}\ (2x+1) - (2x+1)\frac{d}{dx}\ (3x+1)}{(3x+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{(3x+1)\ \left[\frac{d}{dx}\ (2x)\ + \frac{d}{dx}(1)\right] - (2x+1)\left[\frac{d}{dx}\ (3x) + \frac{d}{dx}(1)\right]}{(3x+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(3x+1)\ (2) - (2x+1)(3)}{(3x+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{6x+2-6x-3}{(3x+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{-1}{(3x+1)^2}\right]$$

Pasando el término con potencia negativa en el denominador y simplificando términos, se tiene:

$$f'(x) = -\frac{1}{2\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{1/2}(3x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)^{1/2}(3x+1)^{3/2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(2x+1)(3x+1)^3}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.3.1

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 3.3.1 para derivar funciones compuestas por la regla de la cadena. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas.

1. En los siguientes problemas, determinar $\frac{dy}{dx}$.
    1. $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^3$
    2. $f(x) = (2 - 4x)^4 (3 + 7x)^7$
    3. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7$
    4. $f(x) = cos(1 + senx)$

2. Expresar la derivada $\frac{dy}{dx}$ en términos de x
    1. $y = (u + 1)^3$ y $u = \frac{1}{x^2}$
    2. $y = (u)^5$ y $u = \frac{1}{3x-2}$
    3. $y = u^2(u - u^4)^3$ y $u = \frac{1}{x^2}$
    4. $y = \sqrt{1 + u}$ y $u = \sqrt{x}$

3.4 DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

OBJETIVO

Aplicar las fórmulas de derivación deducidas de la definición de la derivada para adquirir la habilidad y destreza en derivadas de funciones trascendentales, tales como funciones trigonométricas directas, funciones trigonométricas inversas, función exponencial y la función logaritmo.

En las matemáticas cobran especial importancia las funciones trascendentes. Entre ellas tenemos a las funciones trigonométricas directas o circulares y sus inversas, así como a las funciones exponenciales y sus inversas correspondientes: las funciones logarítmicas.

En la Física, Química, Biología, Economía, Demografía, etc., las funciones exponenciales y logarítmicas describen los crecimientos y decaimientos exponenciales de fenómenos tales como el crecimiento poblacional, la rapidez de crecimiento de un tumor, las multiplicaciones de bacterias en un cultivo, las velocidades de reacción química de un determinado proceso, etcétera.

Por otro lado, las derivadas de las funciones trigonométricas circulares y sus inversas parecieran no tener aplicación en la vida real. Sin embargo, ocupan lugar importante en el diseño de maquinarias de relojería, en el estudio del movimiento de proyectiles, para la producción de herramientas y tornillos especiales, etcétera.

El estudio de la presente unidad permitirá aprender las reglas de derivación de las funciones trascendentes. En primer lugar, se estudiará las reglas de derivación de funciones circulares directas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

En la segunda parte de esta unidad se darán a conocer las reglas o fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas circulares inversas: arcseno, arccoseno, arctangente, arccotangente, arcsecante, arccosecante.

En la última parte, se aprenderá a derivar los logaritmos naturales y se estudiará la derivación de funciones exponenciales de base “e”.

Derivadas de funciones trigonométricas circulares:

Derivadas de funciones trigonométricas circulares:

Función	Derivada	Función compuesta	Derivada
$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u$	$\cos u\, D_x u$
$\frac{d}{dx}\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\frac{d}{dx}\cos u$	$-\operatorname{sen} u\, D_x u$
$\frac{d}{dx}\tan x$	$\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}\tan u$	$\sec^2 u D_x u$
$\frac{d}{dx}\cot x$	$-\csc^2 x$	$\frac{d}{dx}\cot u$	$-\csc^2 u\, D_x u$
$\frac{d}{dx}\sec x$	$\sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}\sec u$	$\sec u \tan u D_x u$
$\frac{d}{dx}\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx}\csc u$	$-\csc u \cot u D_x u$

Demostración:

Para efectuar la demostración de las derivadas de funciones trigonométricas, se utilizarán las siguientes definiciones de límites trigonométricos vistos en la unidad 2.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Y las fórmulas para la suma:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

Para derivar $f(x) = \operatorname{sen} x$, comenzamos con la definición de la derivada,

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen}(x)}{\Delta x}$$

Aplicando la fórmula de la suma para el seno y las propiedades de los límites, se obtiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[(\cos x) \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} - (\operatorname{sen} x) \frac{1-\cos x}{\Delta x} \right] \\
&= (\cos x) \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right) - (\operatorname{sen} x) \left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\Delta x} \right) \\
&= (\cos x)\,(1) - (\operatorname{sen} x)(0) = \cos x \\
f'(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$. La demostración para la función $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$ es similar a la función seno. Queda como ejercicio para el alumno.

Para las funciones trigonométricas restantes, es fácil demostrar su fórmula, pues se pueden expresar en términos de las funciones seno y coseno:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Cada una de éstas fórmulas son válidas, excepto cuando el denominador se anula. Así, $\tan x$ y $\sec x$ no están definidas cuando x es un múltiplo entero impar de $\pi/2$, mientras que $\cot x$ y $\csc x$ no están definidas cuando x es un múltiplo entero de π .

Para demostrar la fórmula $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$, se utiliza la regla del cociente y las derivadas de las funciones seno y coseno.

Como $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{(\cos x)\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} \mathrm{x}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)\,(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = sec^2 x$$

Como ejercicio, obtenga de manera similar, las fórmulas de derivación para las funciones: cotangente, secante y cosecante.

Ejemplo 1

Derivar la función: $f(\theta) = \frac{1}{4} sen^2 2\theta$

$$f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{4} sen^2 2\theta\right) = \frac{1}{4}\frac{d}{d\theta}\left(sen^2 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{d\theta}\left(sen 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4}\left[2 sen(2\theta)^{2-1}\frac{d}{d\theta} sen 2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2} sen(2\theta)\cos(2\theta)\frac{d}{d\theta}\left(2\theta\right) = sen(2\theta)\cos(2\theta) = \frac{1}{2} sen(4\theta)$$

Ejemplo 2

Derivar la función: $y=\dfrac{senx}{\sec x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{senx}{\sec x}\right)=\frac{\sec x\dfrac{d}{dx}(senx)-senx\dfrac{d}{dx}\left(\sec x\right)}{(\sec x)^2}$$

$$=\frac{\sec x\cos x-senx\sec x\tan x}{\sec^2 x}=\frac{\dfrac{1}{\cos x}\cos x-senx\dfrac{1}{\cos x}\dfrac{senx}{\cos x}}{\sec^2 x}$$

$$=\frac{1-\dfrac{sen^2x}{\cos^2 x}}{\sec^2 x}=\frac{1-\tan^2 x}{\sec^2 x}=\frac{1}{\sec^2 x}(1-\tan^2 x)$$

$$=\cos^2 x(1-\tan^2 x)=\cos^2 x\left(1-\frac{sen^2x}{\cos^2 x}\right)$$

$$=\cos^2 x-\frac{sen^2x\cos^2 x}{\cos^2 x}=\cos^2 x-sen^2x$$

Otra forma y más cómoda pudo haber sido

$$y=\frac{senx}{\sec x}=\frac{senx}{\dfrac{1}{\cos x}}=senx\cos x$$

nuestra nueva función a derivar es

$$y=senx\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(senx\cos x)=senx\frac{d}{dx}\cos x+\cos x\frac{d}{dx}senx$$

$$=senx(-senx)+\cos x\cos x$$

$$=\cos^2 x-sen^2x$$

Derivadas de funciones trigonométricas circulares inversas:

Se llama función inversa de $y=f(x)$ a la que se obtiene despejando a x.

Ejemplos:

- Función inversa de $y=3x-4$ es $x=\frac{y+4}{3}$.
- La inversa de $\operatorname{sen} x$ es $\operatorname{arcsen} y$, que se lee, ángulo cuyo seno es y.

Si consideramos el arco en vez del ángulo se usa la notación, $\mathrm{x} = \operatorname{arcsen} y$; que se lee, x igual a un arco cuyo seno es y perpendicular, x con y, en la expresión anterior queda, $\mathrm{y} = \operatorname{arcsen} x$ que es la función inversa del $\operatorname{sen} x$.

Algunos autores escriben la expresión $\mathrm{y} = \operatorname{arcsen} x$en la forma siguiente:
$\mathrm{y} = \sin^{-1} x$ que se lee; el seno inverso de x, lo cual, es lo más usual en nuestro medio por que $\sin^{-1} x$, así escrito podría leerse como $(sen\ x)^{-1}$ con exponente –1. En nuestro estudio usaremos las expresiones en que se consideran el arco y ángulo.

Las funciones trigonométricas inversas son multiformes, es decir que a cada valor de la variable independiente le corresponde dos o más valores a la función.

A continuación presentamos las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas y la demostración de una de ellas.

Reglas de las Derivadas de funciones trigonométricas circulares inversas:

Función	Derivada	Función compuesta	Derivada
$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\mathrm{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}u$	$\frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$
$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\cos^{-1}u$	$-\frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$
$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u$	$\frac{D_x u}{1+u^2}$
$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\cot^{-1}u$	$-\frac{D_x u}{1+u^2}$
$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}\sec^{-1}u$	$\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$
$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}\csc^{-1}u$	$-\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$

A continuación se hará la demostración de la fórmula del $\operatorname{arcsen} x$, y se deja al alumno como ejercicio demostrar el resto de las reglas.

Demostración:

Si $\mathrm{y} = \operatorname{arcsen} x$, $\mathrm{x} = \operatorname{sen} y$; derivando implícitamente con respecto a x , resulta:

$$\operatorname{sen} y = x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\operatorname{sen} y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Haciendo uso de la identidad pitagórica:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$$
$$\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$$
$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

Al sustituir en la ecuación de derivación, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}}$$

Como $\mathrm{x} = \operatorname{sen} y$, tal que $\mathrm{x}^2 = \operatorname{sen}^2 y$, al sustituir en la última expresión, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Lo que demuestra que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejemplo

Derivar la función $y = \sin^{-1} x^2$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x^2 = \frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales:

En este apartado solo daremos a conocer las reglas de derivación de las funciones exponenciales y logarítmicas y se darán ejemplos de ellas.

Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas:			
Función	Derivada	Función compuesta	Derivada
$\frac{d}{dx} ln\, x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} ln\, u$	$\frac{D_x u}{u}$
$\frac{d}{dx} \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$	e^{x}	$\frac{d}{dx} \mathrm{e}^{\mathrm{u}}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{u}} D_x u$

Ejemplo 1

Derivar la siguiente función: $y = \ln(1 + x^2)$

Solución:

$$\frac{d}{dx}[\ln(1 + x^2)] = \frac{Dx(1 + x^2)}{(1 + x^2)}$$

$$y' = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Ejemplo 2

Derivar la siguiente función: $y = e^{\sqrt{x}}$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$y' = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.4.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 3.4.2 que implican derivar funciones transcendentales. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas.

1. Hallar la derivada para las siguientes funciones trigonométricas directas

    1. $y = \sin\sqrt{1 - x^2}$
    2. $y = \sqrt{\csc ax^2}$
    3. $y = 2\mathrm{x}^2 \cos x^2$
    4. $y = \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + x$
    5. $y = \frac{\sin\ 2x}{\cos\ 3x}$
    6. $y = \tan(x + 3x^2)$
    7. $y = \sqrt{\frac{1+\cos\ x}{1-\cos\ x}}$

2. Hallar la derivada para las siguientes funciones trigonométricas inversas

    1. $y = \sin^{-1}(ax^2 + bx + c)$
    2. $y = \csc^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$
    3. $y = x\cos^{-1} 2x$
    4. $y = \frac{1}{\sin^{-1} 2x}$
    5. $y = (\tan^{-1} 3x^2\ )^3$
    6. $y = \cos 2ax + \frac{2ax}{1-4a^2x^2}$
    7. $y = \sin^{-1}(\cos 4x)$

3. Hallar la derivada para las siguientes funciones logarítmicas y exponenciales

1. $y = \ln(2x^2 + 3x - 5)$
2. $y = \ln(x^2 + 1)^3$
3. $y = \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$
4. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)$
5. $y = 2e^{x^2}$
6. $y = x^3 e^{-4x^2}$
7. $y = e^x \ln e^x$

3. 5 DERIVACION IMPLICITA

OBJETIVO

Reconocer cuándo una función se encuentra escrita de forma explícita o en forma implícita. Aprender el procedimiento de derivación de una función implícita y calcular su pendiente en cualquier punto.

Una función puede expresarse de forma explícita o implícita. La forma explícita es la que hemos estado manejando hasta ahora, es decir, una de las dos variables se da explícitamente en términos de la otra; por ejemplo:

$a)\ y = x^2 - 4x + 4$ $\quad b)\ u = 8 - 3v$ $\quad c)\ s = \sqrt{3t - 5}$

Como podemos ver, las ecuaciones están resueltas para y, u, s como funciones explícitas de x, v, t, respectivamente. Cuando se presenta una relación entre dos variables por medio de una ecuación no explícita para ninguna de las variables, entonces una de ellas es función implícita de la otra; por ejemplo:

$a)\ \cos(xy) = 4$ $\quad b)\ x^2 + y^2 = r^2$ $\quad c)\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{a}$

Las ecuaciones anteriores se definen como:

1. y función implícita de x o
2. x función implícita de y.

Por convención, utilizaremos la primera opción para utilizar la técnica de derivación implícita.

Existen dos estrategias para resolver las funciones escritas en forma implícita:

1. Despejar una variable con respecto a la otra, para dar lugar a una función explícita y luego derivamos con las fórmulas establecidas en el tema 3.2, 3.3, 3.4. Esta estrategia funciona siempre y cuando la variable pueda despejarse; por ejemplo:

$$y + xy = 1 \quad \Rightarrow \quad y(1 + x) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{(1 + x)}$$

Utilizando la regla del cociente para resolver la derivada, tenemos:

$$y' = -\frac{1}{(1 + x)^2}$$

Cuando se nos presenta funciones del índole:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = 5 \text{ ó } \tan(x - y) = xy$$

Nos resulta muy difícil de despejar a y, en tales situaciones utilizamos la estrategia 2, llamada derivación implícita.

2. En la derivación implícita, es preciso tomar en cuenta que la derivación se efectúa con respecto de x. Lo que implica que si derivamos a términos que sólo contienen a x, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando se tenga que derivar un término donde aparezca la y, es necesario aplicar la regla de la cadena.

Pasos de la derivación implícita:

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás términos a la derecha.
3. Sacar factor común $\frac{dy}{dx}$ en la izquierda.
4. Despejar $\frac{dy}{dx}$, dividiendo la ecuación por su factor acompañantes en la parte izquierda.

Ejemplo 1

Hallar y' de la función $x^3 - 2xy + y^3 = 8$

Solución :

1. Derivando ambos lados:

$$\frac{d[x^3]}{dx} \quad - \quad \frac{d[2xy]}{dx} \quad + \quad \frac{d[y^3]}{dx} \quad = \quad \frac{d[8]}{dx}$$

Regla de la potencia Regla del producto Regla de la cadena Regla de una constante

$$\frac{d[x^n]}{dx} = nx^{n-1} \quad \frac{d[uv]}{dx} = uv' - vu' \quad \frac{d[u^n]}{dx} = nu^{n-1}\, u' \quad \frac{d[c]}{dx} = 0$$

$$3\,x^2 \quad - \quad \left[2x\frac{d[y]}{dx} + y\frac{d[2x]}{dx}\right] \quad + \quad 3y^2\,\frac{d[y]}{dx} \quad = \quad 0$$

$$3\,x^2 - \left[2x\frac{dy}{dx} + y(2)\right] + 3y^2\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3\,x^2 - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 3y^2\,\frac{dy}{dx} = 0$$

2. Agrupando términos $\frac{dy}{dx}$:

$$-\,2x\frac{dy}{dx} + 3y^2\,\frac{dy}{dx} = -3\,x^2 + 2y$$

3. Sacando factor común $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}[-\,2x + 3y^2] = -3\,x^2 + 2y$$

4. Despejando $\frac{dy}{dx}$, se encuentra finalmente la derivada.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-3\,x^2 + 2y}{-\,2x + 3y^2}$$

Pendiente de una funcion implicita:

Se utiliza la misma interpretación que para una función explícita, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = m \quad \text{en} \;\; P(x,y)$$

Lo que implica derivar la función implícita según las estrategias mencionadas anteriormente y luego evaluar en el punto indicado.

Ejemplo 1

Retomando el ejercicio anterior, calcular la pendiente de la recta tangente en el punto P(1,2).

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,2)} = \frac{-3\,x^2 + 2y}{-\,2x + \;3y^2} = \frac{-3\,(1)^2 + 2(2)}{-\,2(1) + \;3(2)^2} = \frac{1}{10}$$

La pendiente de la función $x^3 - 2xy + y^3 = 8$ en el punto P(1,2) es:

$$m = \frac{1}{10}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.5.1

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 3.5.1 para derivar funciones implícitamente y calcular la pendiente de las funciones implícitas dada en el punto indicado.
Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas.

1. Hallar $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones por derivación implícita:

    1. $x^2 - y^2 = 25$
    2. $\sqrt{xy} = x - 2y$
    3. $y = sen(xy)$
    4. $2senxcosy = 1$

2. Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto propuesto.

    1. $(x^2 + 4)^2 = 8$ en P(2,1)
    2. $(x^2 + y^2)^2 = 4\,x^2\,y$ en P(1,1)
    3. $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ en P$\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3},\right)$

3.6 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR Y SU INTERPRETACION GEOMETRICA

OBJETIVO

Comprender y calcular las derivadas de orden superior a funciones explícitas e implícitas. Conocer el significado que tienen las derivadas sucesivas.

Si una función es diferenciable en el intervalo [a,b], entonces su derivada se le llama **primera derivada** de $f(x)$ y se le denota como $f^{'}(x)$. Esta derivada es una nueva función de $f(x)$, la cual podemos pensar en obtener su derivada. Si la función $f^{'}(x)$ es también diferenciable, le llamaremos **segunda derivada** de $f(x)$ y se denota por $f^{''}(x)$. Si continuamos derivando n veces, entonces la derivada es llamada ***n*-ésima derivada** de $f(x)$, denotada como $f^{n}(x)$. El entero n se denomina **orden** de la derivada $f^{n}(x)$. La función $f(x)$ puede representarse como $f^{0}(x)$.

A continuación se presentan las distintas notaciones para las derivadas de orden superior.

Notaciones de las derivadas de orden superior

Orden	Nombre	Notación de Lagrange	Notación de Leibniz	Notación de Cauchy
1	Primera derivada	y' o $f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d[f(x)]}{dx}$	$D_x y$ o $D_x[f(x)]$
2	Segunda derivada	y'' o $f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$ o $\frac{d^2[f(x)]}{dx^2}$	$D_x^2 y$ o $D_x^2[f(x)]$
3	Tercera derivada	y''' o $f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$ o $\frac{d^3[f(x)]}{dx^3}$	$D_x^3 y$ o $D_x^3[f(x)]$
4	Cuarta derivada	$y^{(4)}$ o $f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$ o $\frac{d^4[f(x)]}{dx^4}$	$D_x^4 y$ o $D_x^4[f(x)]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n-ésima derivada	$y^{(n)}$ o $f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$ o $\frac{d^n[f(x)]}{dx^n}$	$D_x^n y$ o $D_x^n[f(x)]$

Interpretación:

La primera derivada de una función $f(x)$ puede representar:

i) La pendiente de una recta tangente.
ii) La velocidad instantánea en cualquier tiempo t.

La segunda derivada de una función $f(x)$ puede representar:

i) La razón de cambio de la pendiente de la recta tangente con respecto a x en el punto (x, y).
ii) La aceleración instantánea de una partícula.

Las derivadas de primer orden y de segundo orden, serán de gran utilidad en la unidad 4, para el análisis del comportamiento de una función. Permitirá definir si una función es creciente o decreciente; definir sus extremos y calcular su concavidad y puntos de inflexión.

Las derivadas siguientes son menos fáciles de entender desde un punto de vista intuitivo. No obstante, poseen un valor determinado en niveles más altos del análisis matemático.

La Figura 3.6.1, nos muestra las gráficas de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$

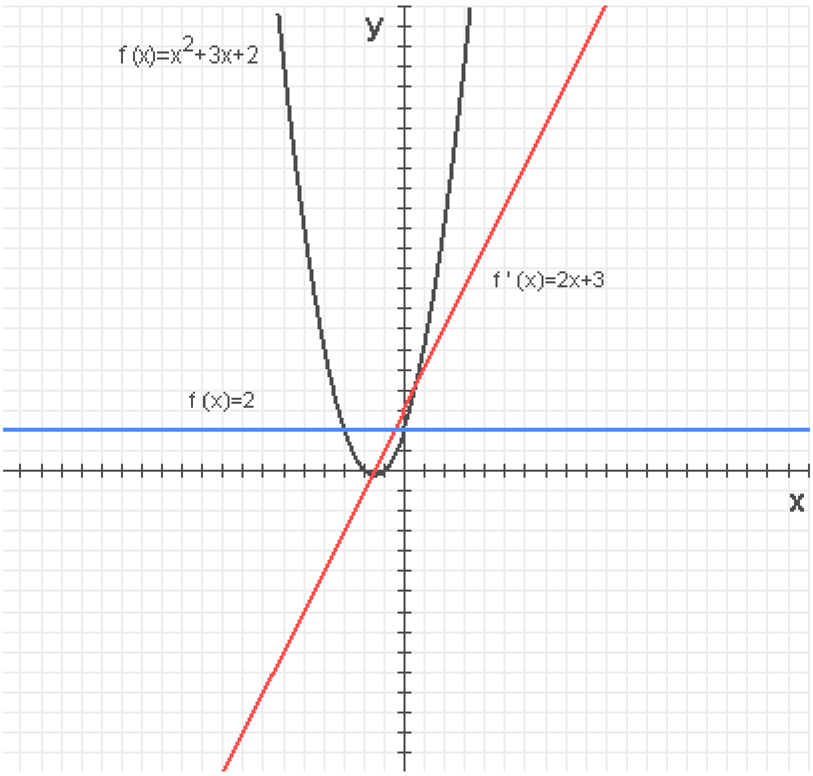


Fig. 3.6.1

Observamos, que al derivar el polinomio dado, su grado disminuye conforme aumenta el orden de la derivada. Lo que nos permite concluir que para funciones polinomiales de grado n, la primera derivada es una función polinomial de grado n -1. En general, cada derivada sucesiva es una función polinomial de un grado menos que la derivada anterior. (Hasta que el grado de una derivada sea cero).

Las derivadas de orden superior utilizan las mismas reglas y fórmulas de derivación establecidas en el tema 3.2, 3,3, 3,4 y 3.5. De tal manera que para calcular la derivada de orden n, ($f^n(x)$) se debe pasar por $f^{'}(x)$, $f^{''}(x)$ y así sucesivamente.

Ejemplo 1

Hallar $f^5(x)$ de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x$.

Solución:

$$\begin{aligned} y^{'} &= 5x^4 + 8x^3 - 3 \\ y^{''} &= 20x^3 + 24x^2 \\ y^{'''} &= 60x^2 + 48x \\ y^4 &= 120x + 48 \\ y^5 &= 120 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallar $f^3(x)$ de $x^2 + y^2 = r^2$.

Solución:

Derivando implícitamente, tenemos:

$$2x + 2yy^{'} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2yy^{'} = -2x \quad \Rightarrow \quad y^{'} = \frac{-2x}{2y} \quad \Rightarrow$$

$$y^{'} = -\frac{x}{y}$$

$$y^{''} = -\left[\frac{y - xy'}{y^2}\right] = -\left[\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right] = -\left[\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2}\right] = -\left[\frac{y^2 + x^2}{y^3}\right]$$

$$y^{''} = -\frac{r^2}{y^3}$$

$$y^{'''} = -\left[\frac{y^3(2yy^{'} + 2x) - (y^2 + x^2)(3y^2y^{'})}{(y^3)^2}\right]$$

$$y''' = -\left[\frac{2y^4y' + 2xy^3 - 3y^4y' - 3x^2y^2y'}{y^6}\right]$$

$$y''' = -\left[\frac{2xy^3 - y^4y' - 3x^2y^2y'}{y^6}\right]$$

$$y''' = -\left[\frac{2xy^3 - y'(y^4 - 3x^2y^2)}{y^6}\right] = -\left[\frac{2xy^3 - \left(-\frac{x}{y}\right)(y^4 - 3x^2y^2)}{y^6}\right]$$

$$y''' = -\left[\frac{2xy^3 + xy^3 + 3x^3y)}{y^6}\right] = -\left[\frac{3xy^3 + 3x^3y)}{y^6}\right] = -\left[\frac{3xy(x^2 + y^2)}{y^6}\right]$$

$$y''' = -\frac{3xr^2}{y^5}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.6.1

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 3.6.1 para encontrar las derivadas sucesivas de las funciones dadas. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas.

1. Calcular $f^4(x)$ de las siguientes funciones explícitas.

    1. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x - 17$
    2. $f(t) = (3t - 2)^4$
    3. $f(\theta) = sen3\theta$

2. Calcular $f^2(x)$ de las siguientes funciones implícitas.

    1. $x^3 - y^2 = 4$
    2. $seny = xy$

3.7 ECUACION DE LA TANGENTE Y LA NORMAL, ANGULO DE INTERSECCION ENTRE CURVAS

OBJETIVO

Aplicar el concepto de la derivada como pendiente para encontrar las ecuaciones de la tangente y de la normal en cualquier punto de una función así como ángulos entre dos curvas que se interceptan.

En el tema 3.1, se vio que la interpretación geométrica de la derivada, representa la pendiente de la recta tangente a la curva en estudio en cualquier punto. Esto es:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = m \quad \text{en } P(x,y)$$

Una aplicación geométrica de la derivada, en la que se aprecia claramente su interpretación como la pendiente de la tangente, es aquélla en la que se buscan las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a una curva en un punto dado, así como determinar el ángulo que forman dos curvas.

Ecuación de la Tangente y la Normal:

En la figura 3.7.1, se representa una función $f(x)$ y un punto de ella $P(x_0, y_0)$. La derivada en ese punto P, es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto y la recta perpendicular a la tangente que pasa por el mismo punto P es la recta normal.

La ecuación de la recta tangente, queda definida mediante la siguiente ecuación:

$$y - y_0 = m_T(x - x_0) \qquad \text{Ec. 3.7.1}$$

En donde:

$$m_T = \left.\frac{dy}{dx}\right]_P \qquad \text{Ec. 3.7.2}$$

Sabemos que las pendientes de las rectas perpendiculares son recíprocas y de signo contrario, así, la pendiente de la recta normal viene dada por:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} \qquad \text{Ec. 3.7.3}$$

Con este valor y el punto P, la ecuación de la recta normal a la curva queda definida a partir de la ecuación:

$$y - y_0 = m_N(x - x_0) \qquad \text{Ec. 3.7.4}$$

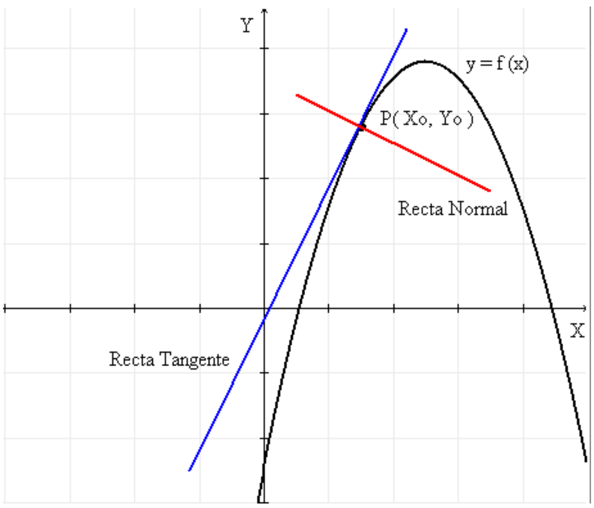


Figura 3.7.1

Ejemplo 1

Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto P(4,3).

Solución:

De la ecuación 3.7.2 tenemos:

$$m_T = \left.\frac{dy}{dx}\right]_P = \frac{d(x^2 - 4x + 3)}{dx} = 2x - 4$$

Evaluando m_T en x=4, resulta: $m_T = 2(4) - 4 = 4$

Sustituyendo el valor de la pendiente y el punto dado en la ecuación 3.7.1, nos queda:

$$y - 3 = 4(x - 4)$$
$$y - 3 = 4x - 16$$

$4x - y - 13 = 0$ (Ecuación de la tangente.)

De 3.7.3, $m_N = -\frac{1}{4}$

Por lo que, utilizando la ecuación 3.7.4:

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 4)$$
$$4y - 12 = -x + 4$$

$x + 4y - 16 = 0$ (Ecuación de la normal.)

Angulo de intersección entre dos curvas:

Cuando dos curvas se dibujan en un mismo sistema de ejes cartesianos, existe la posibilidad que se intercepten en uno o más puntos. En la Figura 3.7.2, se puede apreciar el ángulo β formado por las tangentes de las curvas $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$.

Las pendientes de cada una de las funciones esta dada como sigue:

$$m_1 = \tan\theta_1 = f_1{}'(x_0)\,; \qquad m_2 = \tan\theta_2 = f_2{}'(x_0)$$

De la Figura 3.7.2, podemos observar que $\beta = \theta_2 - \theta_1$. Con lo que el ángulo β puede determinarse por medio de las derivadas de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ mediante la fórmula:

$$tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

De donde:

$$\beta = \tan^{-1}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad \text{Ec. 3.7.5}$$

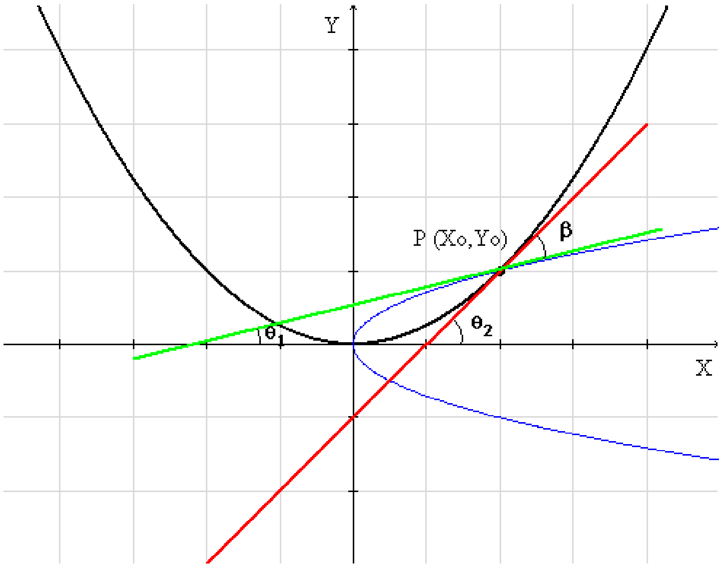


Figura 3.7.2

Procedimiento para calcular ángulos de intersección:

1. Determinar el punto o los puntos de corte de las dos curvas. Igualando las dos ecuaciones y resolviendo el sistema de ecuaciones formado.
2. Calcular las tangentes a las dos curvas en esos puntos. Derivar ambas funciones y evaluarlas en el punto o los puntos de corte.

3. Si las dos pendientes son iguales las curvas son paralelas en ese punto. Si una pendiente $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ las dos curvas son perpendiculares. En otro caso el ángulo de intersección está dada por la ecuación 3.7.5

Ejemplo 1

Hallar el ángulo de intersección de las funciones siguientes:

$$1.\ y^2 = \frac{x}{2} \qquad\qquad 2.\ y = \frac{x^2}{4}$$

Solución:

1. Igualar 1 y 2: (La ecuación 2 se puede reescribir como $y^2 = \frac{x^4}{16}$)

$$\frac{x}{2} = \frac{x^4}{16}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos:

$$x^4 - 8x = 0 \ \rightarrow \ x(x^3 - 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad y \qquad x_2 = 2$$

Sustituyendo estos valores en las funciones 1 ó 2, resulta:

En 2, obtenemos:

$$y_1(0) = \frac{0^2}{4} = 0 \qquad\qquad y \qquad\qquad y_2(2) = \frac{2^2}{4} = 1$$

Por lo tanto los puntos de intersección son: $P_1(0,0)$ y $P_2(2,1)$

2. Calcular derivadas de ambas funciones y evaluarlo en los puntos de intersección $P_1(0,0)$ y $P_2(2,1)$

La función 1. $y^2 = \frac{x}{2}$ se deriva implícitamente:

$$2yy' = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4y} = m_1$$

La función 2. $y = \frac{x^2}{4}$ se deriva explícitamente:

$$y' = \frac{x}{2} = m_2$$

Para $P_1(0,0)$: $\quad m_1 = \frac{1}{4y} = \frac{1}{4(0)} = \infty \qquad m_2 = \frac{x}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Para $P_2(2,1)$: $\quad m_1 = \frac{1}{4y} = \frac{1}{4(1)} = \frac{1}{4} \qquad m_2 = \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1$

3. Aplicar la ecuación 3.7.5: En el punto $P_1(0,0)$ las parábolas se cortan en el origen y sus tangentes son sus propios ejes coordenados.

   En el punto $P_2(2,1)$, el ángulo de intersección es:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \tan^{-1} \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + (1)(\frac{1}{4})} = \tan^{-1} \frac{3}{5} = 30.58^o$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.7.1

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 3.7.2 para analizar las ecuaciones de rectas tangenciales y normales a una función y el ángulo de intersección entre curvas aplicando su derivada. Entregar en la sesión siguiente en hojas blancas.

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal para las siguientes curvas en el punto indicado:

    1. $y^2 = x^3$ en P(2,3)
    2. $y = 3x^2 - 5x$ en P(0,16)
    3. $y = \frac{3}{2x-1}$ en P(2,2)

2. Hallar el ángulo de intersección entre las siguientes curvas:
    1. $8x^3 - y = 0$ y $3x^2 + 4y^2 = 12$
    2. $y = -\frac{4}{x-4}$ y $y = \frac{2}{x+2}$
    3. $x = (y-1)^2$ y $x^2 + y^2 = 25$

3.8 LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO CON VARIABLES RELACIONADAS

OBJETIVO

Entender el concepto de razón de cambio y calcular mediante la derivada situaciones que involucren una tasa de variación.

En las definiciones de la derivada, se ha dicho que el límite cuando $\Delta x \to 0$ de un cociente entre la variación de la variable dependiente (función) y la variación experimentada por la variable independiente, es la razón instantánea de cambio o tasa de cambio.

La razón de cambio se refiere por lo general a cambio respecto al tiempo, ejemplos:

- Los precios con respecto al tiempo
- La temperatura con respecto a los meses
- Crecimiento de un árbol respecto a los años´
- La distancia recorrida por un móvil en un tiempo determinado
- La eficiencia de un antivirus con respecto al tiempo
- Distancia alcanzada por un objeto lanzado hacia arriba
- Tiempo en que tarda un objeto en llegar al suelo, etc.

Sin embargo, se puede buscar la razón de cambio respecto de cualquier variable relacionada, ejemplos:

- Cuánto aumenta mi producción si contrato un nuevo empleado

- Si aumento la cantidad de abono a mi sueldo, en cuanto aumenta la cosecha
- Si el dólar sube, cómo afecta mis acciones
- Volumen de un globo conforme su radio aumenta, etc.

Para encontrar la razón de cambio se debe determinar en primer lugar la relación entre las variables mediante una función y posteriormente obtener su derivada.

Ejemplo 1

Se vierte agua en un estanque cilíndrico de 2 metros de radio basal y 4 metros de altura a razón de 50 litros por minuto. ¿Con que rapidez asciende el nivel del agua?

Solución:

Llamando **h** a la altura del nivel de líquido en cualquier momento, se puede expresar el volumen del contenido en función de **h** de la forma: $V = \pi r^2 h$, despejando **h** se tiene:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Donde π y r, son constante.

Derivando la función $h = \frac{V}{\pi r^2}$, resulta:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Pero dado que ingresa agua a razón de 50 litros por minuto $(\frac{dV}{dt} = 50)$ entonces:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi(2)^2}(0.050) = 0.0398\, m/min$$

Por tanto el nivel de agua asciende con una rapidez de $0.0398\ m/min$.

Ejemplo 2

Un hombre de 6 pies de altura camina con una velocidad de 8 pies/seg, alejándose de un farol de la calle que está en el extremo de un poste de 18 pies. ¿Qué tan rápido se mueve la punta de su sombra a los largo del piso cuando la persona está a 100 pies del poste de luz?

Solución:

Sea x la distancia del hombre al poste y z la distancia de la punta de su sombra a la base del poste. Se tiene que $\frac{dx}{dt} = 8$ (pies/seg); se desea determinar $\frac{dz}{dt}$ cuando $x = 100$ (pies). Igualando las razones de los lados correspondientes de los dos triángulos semejantes de la figura 3.8.1 se tiene:

$$\frac{z}{18} = \frac{z - x}{6} \Rightarrow 2z = 3x$$

Derivando implícitamente, se tiene:

$$2\frac{dz}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$$

Por lo tanto $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3}{2}.\frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo el valor de $\frac{dx}{dt} = 8$ resulta:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3}{2}.(8) = 12\ pies/seg$$

De modo que la punta de la sombra del hombre se mueve a 12 pies/seg.

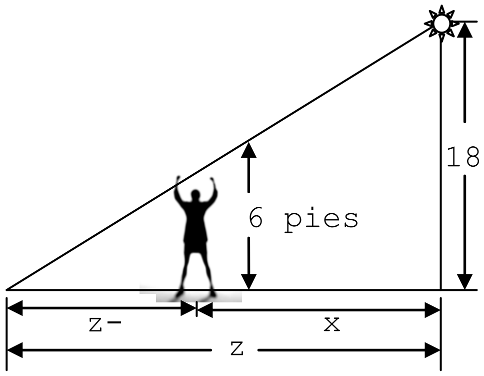


Figura 3.8.1

Ejemplo 3

Un avión vuela (horizontalmente) a 8 km/h de altura, pasa justo sobre una antena de radar. Cuando el avión está a 15 Km de la antena, el rada detecta que la distancia está cambiando a razón de 350 Km/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?

Solución:

Sea x la distancia horizontal al radar y s la distancia entre el avión y el radar, como muestra la Figura 3.8.2. Observamos que se forma un triángulo rectángulo, de donde resulta:

Cuando $s = 15$, $x = \sqrt{(15)^2 - (8)^2} = 12.69$

El ritmo dado es: $\frac{ds}{dt} = 350$ cuando $s = 15$,

Se debe hallar: $\frac{dx}{dt}$ cuando $s = 15$ y $x = 12.69$

Utilizando el teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente función:

$$x^2 + 8^2 = s^2$$

Derivar implícitamente con respecto al tiempo t:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}$$

Por lo tanto $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}.\frac{ds}{dt}$$

Sustituyendo los valores de: $\frac{ds}{dt} = 15,\ s = 15$ y $x = 12.69$ resulta:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{15}{12.69}.(350) = 413.71\ Km/h$$

Por tanto su velocidad es de $413.71\ Km/h$.

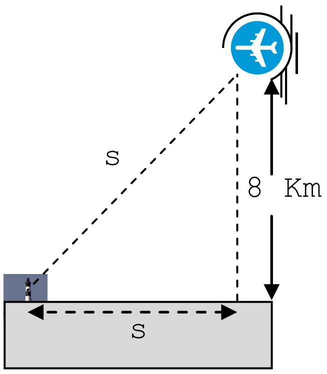


Figura 3.8.2

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.8.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Investigar el apartado 3.8.1 para exponer situaciones de aplicación de los conceptos de razón de cambio, promedio e instantánea, en el área de informática y redes. Transcribir los ejercicios en la libreta para la siguiente sesión.

APARTADO 3.8.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 3.8.2 para encontrar la razón de cambio de una función. Entregar en la próxima sesión en hojas blancas.

1. Un avión vuela por una trayectoria que le llevará a la vertical de una estación de radar. Si s está decreciendo a razón de 400 millas/h cuando s= 10 millas, ¿Cuál es la velocidad del avión?

2. Un tanque tiene la forma de un cono invertido. La altura de dicho tanque es de 16 pies y el radio de su base es de 4 pies. Una llave de agua llena el tanque a razón de 2 pies 3/min. ¿qué tan rápido crece el nivel cuando el agua tiene 5 pies de profundidad?

3. Una escalera de 25 pies de largo se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se desliza horizontalmente, alejándose de la pared a 3 pies/seg. ¿qué tan rápido se desliza la parte superior de la escalera, cuando la base se encuentra a 15 pies de la pared?

3.9 LA DEFINICION DEL DIFERENCIAL Y SU INTERPRETACION GEOMETRICA

OBJETIVO

Interpretar geométricamente el concepto de diferencial en x (dx) y la diferencial en y (dy). Observar la diferencia entre el incremento en y (Δy) y (dy).

Existen muchas situaciones, dentro y fuera de las matemáticas, en que necesitamos estimar una diferencia, como por ejemplo en las aproximaciones de funciones de valores de funciones, en el cálculo de errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado) o simplemente al calcular variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente varía un poco, etc. Utilizando a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia, aproximaremos esta DIFERENCIA con la diferencia sobre la recta, a la que llamaremos EL DIFERENCIAL de la función en el punto.

En la unidad 3.1, se definió el concepto de la derivada de una función $y = f(x)$ como la pendiente de la recta tangente, representada por el límite de la razón de incrementos Δy de la variable dependiente al incremento Δx de la variable independiente, cuando Δx tiende a cero [1] Cálculo con geometría analítica, Earl W. Swokowski, esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La definición de la derivada $f'(x)$ se puede expresar como el cociente de dos diferenciales de la siguiente manera :

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

El símbolo $\frac{dy}{dx}$ no se considera como una fracción ordinaria con dy en el numerador y dx en el denominador, sino que se ha tomado como un operador que indica derivar.

En ocasiones resulta importante para algunos problemas de interés, considerar por separado a dx y a dy, lo que da pauta para el estudio de un nuevo concepto conocido como la diferencial.

La diferencial nos será de gran ayuda para aproximar funciones por medio de la recta tangente y de estimar errores propagados a partir de los cometidos por los aparatos de medida.

En muchas aplicaciones la variable independiente x puede cambiar ligeramente y es necesario encontrar el cambio correspondiente de la variable dependiente y. El cambio en x es el incremento Δx, de modo que x cambia su valor original al nuevo valor $x+\Delta x$. El cambio en la variable y es el incremento Δy, calculado al restar el valor anterior de y de su nuevo valor:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \qquad \text{Ec. (3.9.1)}$$

En la Fig. 3.9.1 se representan geométricamente los incrementos Δx y Δy

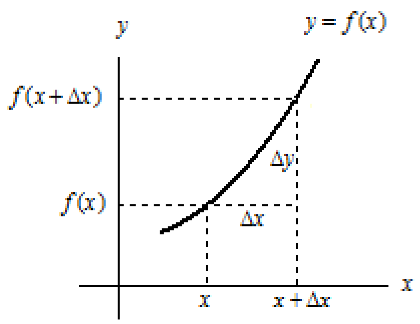


FIG. 3.9.1 Los incrementos Δx y Δy

Retomado la gráfica anterior, si aproximamos la función dada usando la recta tangente en el punto (x,y), observamos que cuando la variable independiente cambia de x a $x+\Delta x$, se obtienen dos valores: el incremento en y (Δy) y la diferencial de y (dy). El valor de dy es el cambio en altura de un punto que se mueve sobre la recta tangente en el punto (x,y) y Δy el la altura en el punto (x,y) sobre la curva $y=f(x)$. Como se muestra en la Fig. 3.9.2. El valor de Δy se determina por la Ecuación 3.9.1, y la diferencial de y, se calcula por la siguiente expresión dada :

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{Ec. (3.9.2)}$$

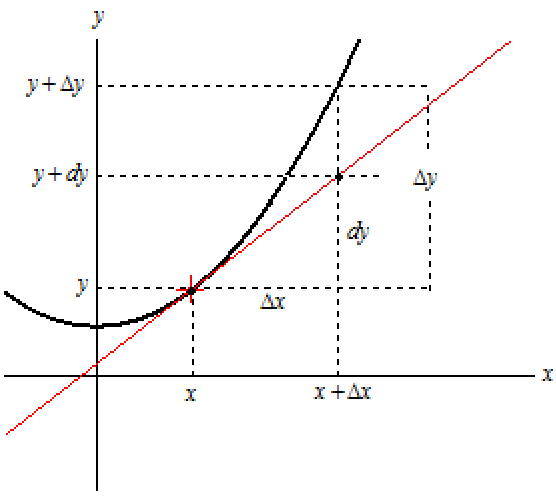


FIG. 3.9.2 La estimación dy del incremento real Δy

Esta expresión nos permite establecer las siguientes definiciones:

Definición de la diferencial

Sea $y=f(x)$, donde f es una función derivable, y sea Δx un incremento de x.

i) La diferencial de dx de la variable independiente x es igual al incremento en x, esto es :

$$dx = \Delta x.$$

ii) La diferencial dy de la variable dependiente y es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, esto es :

$$dy = f'(x)dx$$

Interpretación geométrica

Para un incremento $\Delta x \neq 0$ existe un valor $x + \Delta x$ del dominio de la función al cual le corresponde un valor $f(x + \Delta x)$ del recorrido, por lo que se tiene el punto Q de coordenadas $(x + \Delta x\,,\ f(x + \Delta x))$. Ver Figura 3.9.3.

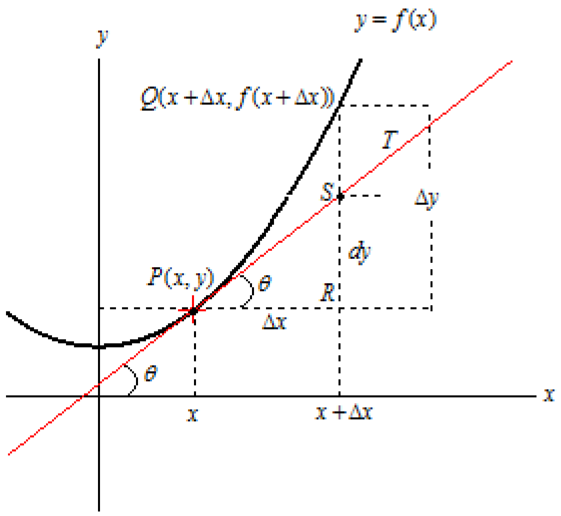


FIGURA 3.9.3 Interpretación geométrica del diferencial

Al trazar la recta tangente T a la curva $y = f(x)$ en el punto P, su ángulo de inclinación queda determinada por : $tan\theta = f'(x)$.

Si se considera el triángulo PRS formado por T, la pendiente de la recta viene dada por:

$$\tan\theta = \frac{|RS|}{|PR|}$$

Pero $tan\theta = f'(x)$ y la magnitud de la recta $|PR| = \Delta x$, la expresión anterior queda como:

$$f'(x) = \frac{|RS|}{\Delta x}$$

De donde:

$$|RS| = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

Y por definición:

$$dy = \mathrm{f}^{'}(\mathrm{x})dx$$

Se tiene que:

$$dy = |RS|$$

Además, el incremento Δy es: $\Delta y = |RQ| = f(x + \Delta x) - f(x)$

Se observa de la Figura 3.9.3 que:

1. Δy , es el incremento en y medido sobre la curva $f(x)$.
2. dy, es el incremento en medido sobre la recta tangente.

Cuando x se incrementa de un paso Δx, el incremento Δy es diferente a la diferencial dy. La magnitud de la diferencial depende de cuánto se separe la curva de su tangente, es decir, que $dy \approx \Delta y$ cuando Δx es pequeño.

En conclusión:

i) Si la ecuación $y = f(x)$ corresponde a una línea recta, entonces $dy = \Delta y$ para cualquier x del dominio.

ii) Puesto que $dy = \mathrm{f}^{'}(\mathrm{x})dx$, si $dx \neq 0$, entonces al dividir ambos miembros de la última igualdad por dx, se tiene $\frac{dy}{dx} = f^{'}(x)$ y se puede de ésta forma interpretar la derivada de una función como el cociente de dos diferenciales.

iii) De acuerdo con la observación ii, todas las reglas de diferenciales se deducen de las reglas de derivación vistas en el capítulo 3.2. multiplicando ambos miembros de estas ultimas por dx . tal como veremos en el siguiente tema.

3.10 TEOREMAS DEL DIFERENCIAL

OBJETIVO

Traducir cada una de las reglas de derivación en términos de diferenciales.

La notación de la diferencial nos proporciona una forma conveniente para escribir las fórmulas de las derivadas. Las reglas de derivación se pueden escribir en forma diferencial sin tener la necesidad de identificar a la variable independiente.

En la tabla siguiente aparecen las principales reglas de diferenciales deducidas de las reglas correspondientes de derivación.

Regla de la derivada	Regla de la diferencial
$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$dc = 0$
$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$	$dcu = cdu$
$\frac{d\ (x)}{dx} = 1$	$dx = 1$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$dx^n = nx^{n-1}dx$
$\frac{d}{dx}(ux^n) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$	$du^n = nu^{n-1}du$
$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$\frac{d}{dx}(u.v) = u.\frac{d}{dx}(v) + v.\frac{d}{dx}(u)$	$d(u.v) = vdu + udv$
$\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{v.\frac{d}{dx}(u) - u.\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}$

$\frac{d}{dx}(sen\, u) = \cos u \frac{d}{dx}(u)$	$d(\sin u) = \cos u du$
$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{d}{dx}(u)$	$d(\cos u) = -\sin \mathrm{u}\, du$
$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{d}{dx}(u)$	$d(\tan u) = \sec^2 udu$
$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{d}{dx}(u)$	$d(\cot u) = -\csc^2 u\, du$
$\frac{d}{dx}(\sec u) = (\sec u \tan u) \frac{d}{dx}(u)$	$d(\sec u) = (\sec u \tan u)\, du$
$\frac{d}{dx}(\csc u) = -(\csc u \cot u) \frac{d}{dx}(u)$	$d(\csc u) = -(\csc u \cot u) du$

Ejemplo 1

Sea $y = 4x^2 - 6x + 3$, encontrar su diferencial.

Solución:

Primero, encontramos la derivada de la función dada.

$$\frac{dy}{dx} = (8x - 6)$$

Segundo, multiplicamos ambos miembros de la derivada por dx.

$$dy = (8x - 6)dx$$

Ejemplo 2

Sea $y = \cos 3x$, encontrar su diferencial.

Solución:

Primero, encontramos la derivada de la función dada.

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin 3x)\frac{d}{dx}(3x) = -3 \sin 3x$$

Segundo, multiplicamos ambos miembros de la derivada por dx.

$$dy = -3\sin 3x\,dx$$

Ejemplo 3

Sea $4xy - y^2 = 4x^2 - 3y + 5$, encontrar su diferencial.

Solución:

Para encontrar la diferencial de una función implícita, derivamos cada uno de los términos sin importar la variable independiente.

$$4xdy + y4dx - 2ydy = 8xdx - 3dy + 0$$
$$4xdy + 4ydx - 2ydy = 8xdx - 3dy + 0$$

Agrupamos los términos que contienen dy en el miembro izquierdo y los que tienen dx en el miembro derecho.

$$4xdy + 3dy - 2ydy = 8xdx - 4ydx$$
$$dy(4x + 3 - 2y) = (8x - 4y)dx$$

Despejamos dy para encontrar la diferencial:

$$dy = \frac{(8x - 4y)}{4x + 3 - 2y}dx$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.10.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Enlistar los teoremas del diferencial que se encuentran en el apartado 3.10.1. Entregar en la libreta en la próxima sesión.

APARTADO 3.10.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver ejercicios del apartado 3.10.2 aplicando los teoremas del diferencial. Entregar en la próxima sesión en hojas blancas.

1. Escriba dy en términos de x y dx en los siguientes problemas:

    1. $y = 3x^2 - \frac{4}{x^2}$
    2. $y = 3x^2(x-3)^{3/2}$
    3. $y = \frac{x}{x^2-6}$
    4.. $y = sen\ 2xcos2x$
    5. $y = cos^3 3x$
    6. $x^3 + y^3 = 3xy$
    7. $xseny = 1$

3.11 APROXIMACION LINEAL A TRAVES DEL DIFERENCIAL

OBJETIVO

Aproximar una función por el método del diferencial y evaluar errores de cálculo provenientes de errores de medición.

En este tema, veremos como las diferenciales se pueden utilizar para aproximar valores de funciones o calcular errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado.

Cuando se da a x un incremento Δx, la variable x recibe un incremento Δy , que puede considerarse como un valor aproximado de dy. Por lo tanto, el valor aproximado de $f(x+\Delta x)$ es:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f^{'}(x)\Delta x = f(x) + f^{'}(x)dx \qquad Ec.\ 3.11.1$$

Esta ecuación es la fórmula de aproximación lineal que utilizaremos en los siguientes ejemplos.

Si reemplazamos x con a en la Figura 3.11.1, obtenemos la aproximación

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + dy = f(a) + f^{'}(a)\Delta x = f(a) + f^{'}(a)dx \qquad Ec. 3.11.2$$

Si $\Delta x = x - a \quad \Rightarrow \quad x = a + \Delta x$, la ecuación 3.11.2 nos queda:

$$f(x) \approx f(a) + dy = f(a) + f^{'}(a)(x-a) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) \qquad Ec. 3.11.3$$

El resultado nos da una nueva ecuación para la aproximación lineal a la función cerca del punto.

A continuación presentamos diferentes casos en donde se aplican el concepto del diferencial:

Problemas del tipo I: Obtención del incremento o decremento que sufre una función a partir de la comparación del incremento Δy con el diferencial dy.

Problemas del tipo II: Estimación del error de medición de algunas magnitudes.

Problemas del tipo III: Calcular aproximaciones de funciones.

PROBLEMAS DEL TIPO I

Ejemplo 1

Sea $y = x^2$. Calcular dy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$. Comparar ese valor con Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$.

Solución:

Aplicando la ecuación 3.9.2: $dy = \mathrm{f}'(\mathrm{x})dx$, resulta:

$$\mathrm{dy} = 2\mathrm{xdx}$$

Sustituyendo los valores dados:

$$\mathrm{dy} = 2(1)(0.01) = 2(0.01) = 0.02$$

Aplicando la ecuación 3.9.1: $\Delta \mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x} + \Delta \mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})$, tenemos:

$$\mathrm{x} + \Delta \mathrm{x} = 1 + 0.01 = 1.01$$

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - (1)^2 = 0.0201$$

Al comparar los valores de y y Δy , encontramos:

$$\Delta y - y = 0.0201 - 0.02 = 0.0001$$

Este último valor nos indica que si dy se utiliza para estimar Δy cuando x cambia de 1 a 1.01, el error que se comete es de 0.0001, aproximadamente.

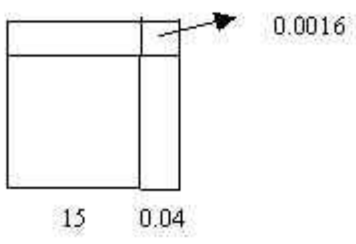
Ejemplo 2

Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumenta 0.04 cm. ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área?.

Solución:

Con el fin de ilustrar una situación que se presentará en todos los demás problemas y por la simplicidad de éste en particular, sólo en este caso calcularemos la diferencia de áreas ΔA y la compararemos con dA.

Nótese que originalmente teníamos una placa de 15 x 15, después de calentarla tenemos la placa de 15.04 x 15.04, como se muestra en la figura.



En este caso la función es $A(l) = l^2$, la longitud $l = 15$ y su incremento es $\Delta l = dl = 0.04$.

$$\Delta A = f(x + \Delta x) - f(x) = f(15.04) - f(15) = 15.04^2 - 15^2 = 1.2016$$

$$dA = f'(l)dl = 2l dl = 2(15)(0.04) = 30(0.04) = 1.2$$

En consecuencia, cuando el lado se incrementa en 0.04 cm, el área aumenta aproximadamente 1.2 cm^2. (El valor exacto del incremento es 1.2016)

Generalmente este tipo de variaciones se miden en porcentajes, es decir, como 0.04 es el 0.2666% de 15 y 1.2 es el 0.5333% de 225 = $(15)^2$, decimos que si el lado de la placa se incrementa en un 0.266%, el área se incrementará aproximadamente en un 0.5333%.

PROBLEMAS DEL TIPO II.

En los siguientes ejemplos utilizaremos el diferencial para estimar errores en la medición de algunas magnitudes.

Ejemplo 1

La medida del radio de una bola de cojinete resulta ser 0.7 pulgadas. Si ese aparato de medida comete un error no superior a 0.01 pulgadas, estimar el error propagado en el volumen de la bola.

Solución:

La fórmula para el volumen de una bola es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Podemos escribir:

$r = 0.7$ radio medido y,

$-0.01 \leq \Delta r \leq 0.01$ Posible error

Para aproximar el error propagado en el volumen, utilizamos la aproximación: $\Delta V \approx dV$

$$dV = f'(r)dr = 4\pi r^2 dr = 4\pi(0.7)^2(\pm 0.01) \approx \pm 0.06158$$

Por tanto, el volumen tiene un error propagado de unas 0.06 pulgadas cúbicas. Como éste error propagado no nos indica si es grande o pequeño, la respuesta se expresará en términos relativos, comparando dV con V.

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3dr}{r} \approx \frac{3(\pm 0.01)}{0.7} \approx \pm 0.0429$$

Este valor encontrado se le llama error relativo, lo que nos indica que el error en la medición del volumen es, en promedio, $\pm 0.0429\ pulg^3$ por $pulg^3$ del volumen calculado. Su error porcentual esta definido como el error relativo (error medido) multiplicado por 100%.

Error porcentual: $(\pm 0.0429)(100\%) = 4.29\%$

PROBLEMAS DEL TIPO III.

A continuación utilizaremos el diferencial para calcular valores aproximados de funciones.

Ejemplo 1

Encuentre un valor aproximado para, $\sqrt{16.3}$ utilizando la recta tangente.

Solución:

Para resolver estos tipos de problemas utilizaremos la ecuación de aproximación lineal a una función dada por la ecuación 3.11.3

$$f(x) \approx f(a) + f^{'}(a)(x-a)$$

El valor dado se representará por medio de la función: $f(x) = \sqrt{x}$. Para encontrar el punto a se busca un valor cercano a 16.3 (valor dado) que tenga raíz cuadrada exacta. En este caso es el 16 y su raíz cuadrada es 4. Por lo tanto: $a = 16$ y $\Delta x = x - a \ = 16.3 - 16 = 0.3$

Aplicando la ecuación 3.11.3, resulta:

$$f(a) = \sqrt{a} = \sqrt{16} = 4$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

$$f'(a)(x - a) = \frac{1}{8}(16.3 - 16) = \frac{1}{8}(0.3) = 0.0375$$

Por lo tanto:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \approx 4 + 0.0375 = 4.0375$$

Ejemplo 2

Determinar la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1 + x}$ cerca del punto $a = 0$.

Solución:

$$f(a) = f(0) = \sqrt{1 + 0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}}$$

Por tanto:

$$f'(a) = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando la ecuación 3.11.3, resulta:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$f(x) \approx 1 + \tfrac{1}{2}(x - 0)$$

$$f(x) \approx 1 + \tfrac{1}{2}x$$

Es decir,

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

Esta aproximación es precisa sólo si x es cercana a cero.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 3.11.1

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Aproximar las funciones del apartado 3.11.1 utilizando el diferencial. Entregar en la próxima sesión en hojas blancas.

1. En los siguientes problemas, utilizar una aproximación lineal a una función adecuada, con el valor adecuado de a, para estimar el número dado.
    1. $\sqrt[3]{25}$
    2. $\sqrt{102}$
    3. $\sqrt[4]{15}$

1. Determine la aproximación lineal a la función dada cerca del punto $a = 0$.
    1. $f(x) = (1-x)^3$
    2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$
    3. $f(x) = \sin x$

2. Use las aproximaciones lineales para estimar el cambio en la cantidad dada.

    1. El área de un cuadrado, si la longitud de su lado disminuye de 10 a 9.8
    2. La circunferencia de un círculo, si su radio aumenta de 10 a 10.5
    3. El voltaje $W = RI^2$ de un foco con resistencia igual a 10 ohms, cuando la corriente I aumenta de 3 a 3.1 amperios.

UNIDAD 4. APLICACIÓN DE LA DERIVADA

OBJETIVO

Explicar los conceptos relativos a la variación de funciones y aplicarlos en la solución de problemas físicos y geométricos.

TEMARIO

UNIDAD 4. APLICACIÓN DE LA DERIVADA

4.1 Funciones crecientes y decrecientes

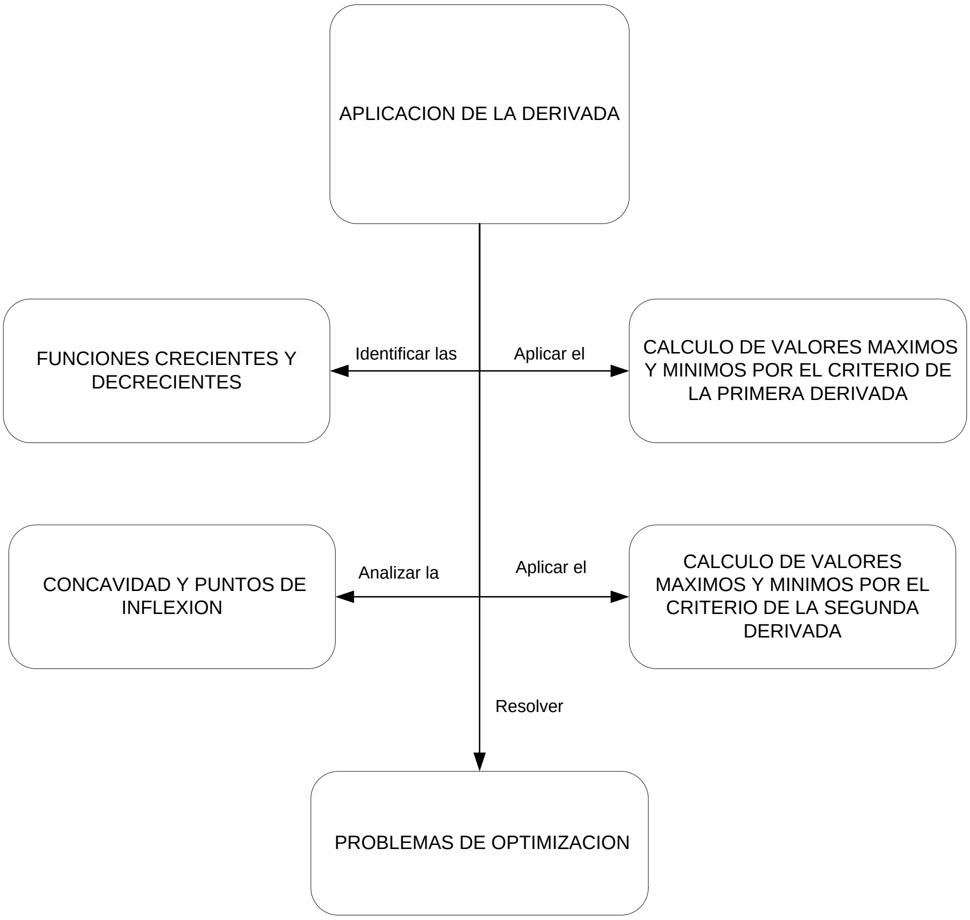
4.2 Cálculo de valores máximos y mínimos por el criterio de la primera derivada

4.3 Cálculo de valores máximos y mínimos por criterio de la segunda derivada

4.4 Concavidad y puntos de inflexión

4.5 Problemas de optimización

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



INTRODUCCION

En esta unidad se utilizará la derivada para obtener información sobre el comportamiento de una función sobre un intervalo. Se aplicará la primera derivada para determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo dado. Se utilizarán los criterios de la primera y de la segunda derivada para localizar máximos y mínimos de una función. Se definirá el sentido de concavidad y se calculará el punto de inflexión si los hay.

Conocer los parámetros mencionados en el párrafo anterior, permitirá representar gráficamente la función sin necesidad del uso de la tabulación.

En el último tema, se resolverán problemas de máximos y mínimos que son relevantes en la ingeniería, en las ciencias y en nuestra vida cotidiana.

4.1 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

OBJETIVO

Identificar a partir de la gráfica, cuándo la función es creciente o decreciente y comprobar con la primera derivada.

Sea f una función continua con ecuación $y = f(x)$, definida en el intervalo [a,b]. Su representación gráfica está dada en la Figura 4.1.1

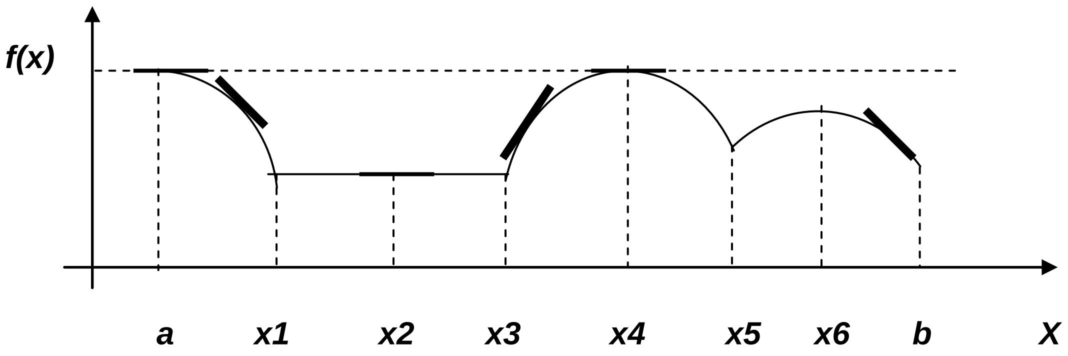


Fig. 4..1.1

Analizando la gráfica, se nos presenta las siguientes características:

1. La función es creciente en los intervalos [x3,x4],[x5,x6], es decir que cuando un punto se mueve en esos intervalos, los valores de la función aumentan, sube o asciende cuando x aumenta.
2. La función es decreciente en los intervalos [a,x1],[x4,x5],[x6,b], su gráfica disminuye o baja o desciende cuando x aumenta.
3. La función es constante en el intervalo [x1,x2], [x2,x3] y en los puntos (a,f(a)), (x4,f(x4)), (x6,f(x6)); la gráfica se mantiene constante cuando x aumenta.

Definición de funciones crecientes y decrecientes:

(i) Una función definida en un intervalo es creciente en ese intervalo si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

(ii) Una función definida en un intervalo es decreciente en ese intervalo si y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

(iii) Una función definida en un intervalo es constante en ese intervalo si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Observamos de la Figura 4.1.1, que cuando la pendiente de la recta tangente es positiva, la función f crece; y cuando la pendiente de la recta tangente es negativa, la función decrece, y por último, en los puntos en donde la recta tangente es horizontal, su pendiente es cero, lo que implica una función constante sobre esos puntos y/o intervalos.

Estas definiciones nos llevan al teorema siguiente:

Teorema 4.1.1 Definición de funciones crecientes y decrecientes

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo (a,b) :

1. Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a,b), entonces f es creciente en [a,b].
2. Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a,b), entonces f es decreciente en [a,b].
3. Si $f'(x) = 0$ para toda x en (a,b), entonces f es constante en [a,b].

Procedimiento para hallar los intervalos en donde la función es creciente o decreciente:

1. Hallar la primera derivada
2. Igualar a cero la primera derivada y calcular los valores críticos.

3. Evaluar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos que los valores críticos determinan sobre el eje de las abscisas.
4. Utilizar el teorema 4.1.1 para decidir si f crece o decrece en cada intervalo.

Ejemplo 1

Hallar los intervalos en los que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ es creciente o decreciente.

Solución :

1. Derivar la función : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

2. Igualar a cero la derivada y encontrar los valores críticos

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$(3x-3)(x-3) = 0$$

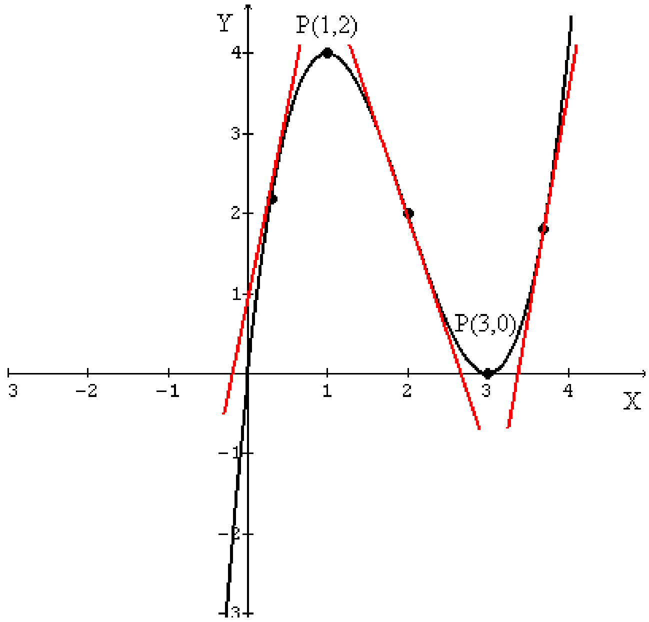
Los puntos críticos son : x= 1, 3

3. y 4. Recurrimos a la siguiente tabla para evaluar los puntos críticos en cada uno de los intervalos.

Intervalo	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Valor de prueba	-1	2	4
Signo de f(x)	$f'(-1) > 0$	$f'(2) < 0$	$f'(4) > 0$

Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

Representación gráfica :



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 4.1.1

INVESTIGACION DOCUMENTAL

Representar gráficamente una función creciente y decreciente y explicar el criterio de la primera derivada para identificar los intervalos en donde la función crece o decrece. Entregar en hojas blancas en la próxima sesión.

APARTADO 4.1.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los ejercicios del apartado 4.1 para saber si una función es creciente, decreciente o constante, utilizando el criterio de la primera derivada. Entregar el la próxima sesión en hojas blancas.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$
5. $f(x) = x^4 - 32x + 4$
6. $f(x) = 2x^3 + 32x^2 - 12x$
7. $f(x) = x^2 + 8x + 10$

4.2 CALCULO DE VALORES MAXIMOS Y MINIMOS POR EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

OBJETIVO

Calcular los máximos y mínimos relativos de cualquier función mediante el criterio de la primera derivada y comprobar por medio de su gráfica.

Con frecuencia, en muchas aplicaciones necesitamos determinar el valor máximo o el mínimo que puede alcanzar una cantidad específica. Por ejemplo:

1. ¿Cuánto aumenta mi producción si contrato un nuevo empleado?
2. Si aumento la cantidad de abono a mi sueldo, ¿en cuánto aumenta la cosecha?
3. Si el dólar sube, ¿cómo afecta mis acciones?
4. ¿Cuál es el máximo volumen que puedo obtener de esta lámina de zinc?
5. ¿Cuál es el punto más alto de esta función económica o matemática?
6. ¿Cuál es el mínimo volumen en que punto cambia su crecimiento?, ¿Cuál es la tangente a esa curva?
7. Etc.

Para responder a estas preguntas, utilizamos dos criterios, el de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada. En esta sección nos enfocaremos al criterio de la primera derivada.

Para determinar los máximos y mínimos de una función, por el método de la primera y segunda derivada se necesitan conocer los puntos críticos.

Puntos Críticos:

Para cualquier función f, un punto P en el dominio de f en donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida se llama punto crítico de la función.

En un punto crítico donde $f'(x) = 0$, la recta tangente a la gráfica de f en x es horizontal, ver Figura 4.2.1 y 4.2.3. En un punto crítico donde $f'(x)$ no está definido, no hay tangente horizontal a la gráfica, es decir, o la tangente es vertical o no existe en absoluto 4.2.2.

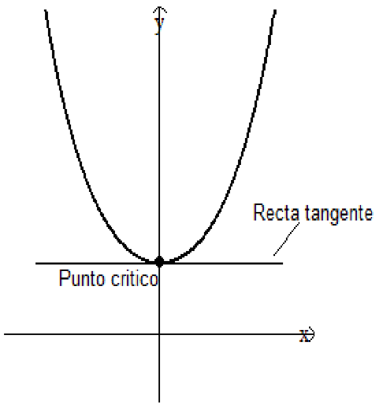


Fig. 4.2.1

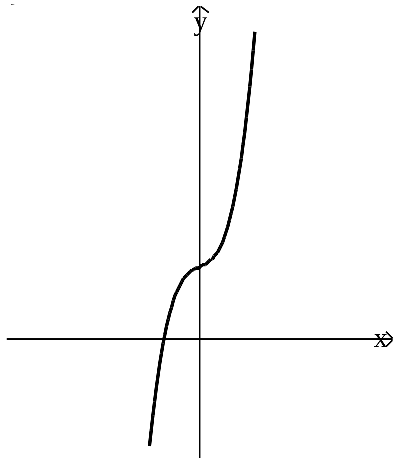


Fig. 4.2.2

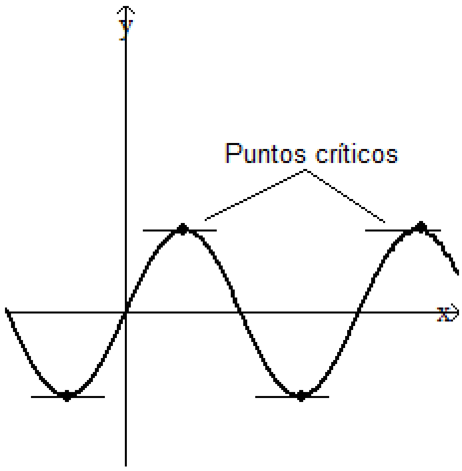


Fig. 4.2.3 Función seno.
Infinitos puntos críticos

Los puntos donde $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ o donde no $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ no está definida dividen el dominio de $\boldsymbol{f}$ en intervalos en los que el signo de la derivada permanece igual, ya sea positivo o negativo. Por lo tanto, entre dos puntos críticos sucesivos la gráfica de una función no puede cambiar de dirección; o sube o baja.

Definición:

Decimos que $f(c)$ es el valor máximo absoluto de una función f en un intervalo [a,b] que contiene a c, si $f(c) \geq f(x)\ \forall x\ \in [a, b]$. De manera análoga si $f(c) \leq f(x)\ \forall x\ \in [a, b]$, entonces $f(c)$ es el valor absoluto de $f(x)$ en ese intervalo.

Definición:

Decimos que $f(c)$ es un máximo relativo de una función f si existe un intervalo abierto (c – ε, c + ε), con ε >0, tal que $f(x)$ está definida y $f(x) \leq f(c)\ \forall x\ \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$.

Decimos que $f(c)$ es un mínimo relativo de una función f si existe un intervalo abierto (c – ε, c + ε), con ε >0, tal que $f(x)$ está definida y $f(x) \geq f(c)\ \forall x\ \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$.

Para decidir si, en el punto crítico x=c, el valor $f(c)$ es realmente un máximo o mínimo de $f(x)$, ya sea local o global se utilizará el criterio de la primera derivada la Figura 4.2.5 muestra como desarrollar éste criterio. Suponga que la función f es continua en c y que c es un punto interior del dominio de f. Si f es creciente inmediatamente a la izquierda de c y creciente inmediatamente a la derecha de c, entonces $f(c)$ debe ser un valor mínimo local de $f(x)$. Pero si f es creciente inmediatamente a la izquierda de c y decreciente inmediatamente a su derecha de c, entonces $f(c)$ debe ser un valor máximo local. Si $f(x)$ es creciente a ambos lados o decreciente a ambos lados, entonces $f(c)$ no es un valor mínimo ni un valor máximo de

$f(x)$. El criterio de la función creciente y decreciente visto en el tema 4.1 será de gran ayuda para establecer el primer criterio:

1. $f(x)$ es decreciente si $f'(x) < 0$
2. $f(x)$ es creciente si $f'(x) > 0$

Criterio de la Primera Derivada

1. Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de c y $f'(x) > 0$ a la derecha de c, entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de $f(x)$ en el intervalo.
2. Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ a la derecha de c, entonces $f(c)$ es un valor máximo local de $f(x)$ en el intervalo.
3. Si $f'(x) > 0$ a la izquierda y a la derecha de c; o bien si $f'(x) < 0$ a la izquierda y a la derecha de c, entonces $f(c)$ no es un valor mínimo ni máximo de $f(x)$.

Procedimiento para calcular máximos y mínimos de una función por el criterio de la primera derivada:

1. Hallar la primera derivada de la función.
2. Encontrar los puntos críticos, igualando a cero la derivada y resolviendo la ecuación resultante.
3. Considerar los puntos críticos uno a uno, con el fin de hallar los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primeramente (+) y después (-), la función presenta un MAXIMO para el valor crítico de la variable que se analiza; en el caso contrario de (-) a (+), se tiene un MINIMO. si el

signo de la primera derivada no cambia, la función no presenta ni máximo ni mínimo para el valor considerado.

A continuación se desarrollan ejercicios en donde se piden encontrar los máximos y mínimos de una función:

Ejemplo 1

Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x^2)$ en el intervalo cerrado [0,30]

Solución:

1. Hallar la primera derivada:

   $f'(x) = \frac{3}{5}(30 - 2x)$

2. Igualando a cero la primera derivada y resolviendo la ecuación resultante:

$$f'(x) = \frac{3}{5}(30 - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{30}{2} = 15$$

   El único punto crítico a analizar es: $x = 15$.

3. Analizando los signos de la primera derivada en los diferentes puntos críticos.

   Para $x = 15$:

   Dando un valor un poco menor a 15, tomamos $x = 10$:

$$f'(10) = \frac{3}{5}\big(30 - 2(10)\big) = 6$$

   Dando un valor un poco mayor a 15, tomamos $x = 17$:

$$f'(17) = \frac{3}{5}\big(30 - 2(17)\big) = -\frac{12}{5}$$

En conclusión, como la función primero crece (en $x = 10$) y luego decrece en ($x = 17$), entonces, el punto crítico encontrado en $x = 15$ es un máximo absoluto.

Las coordenadas en y del punto máximo se encuentra evaluando el punto crítico en la función original $f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x^2)$.

Asi, para $x = 15$, se tiene:

$$y = f(15) = \frac{3}{5}(15)(30 - (15)^2) = 135$$

El punto máximo está dado por las coordenadas: (15,135), como puede verse en la siguiente figura 4.2.4.

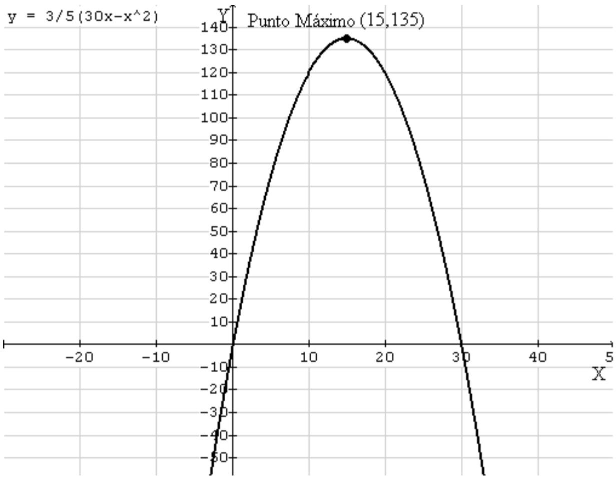


Fig. 4.2.4

Ejemplo 2

Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Solución:

1. Hallar la primera derivada:

$$f(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

2. Igualando a cero la primera derivada y resolviendo la ecuación resultante:

$$f^{'}(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \ 6(x^2 + x - 2) = 0$$

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

Factorizando el trinomio, nos queda:

$$(x+2)(x-1) = 0$$
$$x + 2 = 0 \qquad x - 1 = 0$$
$$x = -2 \qquad x = 1$$

Los puntos críticos a analizar son: $x = -2\ y\ x = 1$.

3. Analizando los signos de la primera derivada en los diferentes puntos críticos.

Para $x = -2$:
Dando un valor un poco menor a -2, tomamos $x = -3$:
$$f'(-3) = (-3)^2 + (-3) - 2 = 4$$
Dando un valor un poco mayor a 15, tomamos $x = -1$:
$$f'(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2$$

En conclusión, como la función primero crece (en $x = -3$) y luego decrece en ($x = -1$), entonces, el punto crítico encontrado en $x = -2$ es un máximo.

Las coordenadas en y del punto máximo se encuentra evaluando el punto crítico en la función original $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Asi, para $x = -2$, se tiene:
$$y = f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = 20$$
El punto máximo está dado por las coordenadas: (-2,20), como puede verse en la Figura 4.2.5.

Para $x = 1$:
Dando un valor un poco menor a 1, tomamos $x = -1$:
$$f'(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2$$
Dando un valor un poco mayor a 1, tomamos $x = 2$:

$$f'(-1) = (2)^2 + (2) - 2 = 4$$

En conclusión, como la función primero decrece (en $x = -1$) y luego crece en ($x = 2$), entonces, el punto crítico encontrado en $x = 1$ es un mínimo.

Las coordenadas en y del punto mínimo se encuentra evaluando el punto crítico en la función original $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Asi, para $x = 1$, se tiene:

$$y = f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = -7$$

El punto máximo está dado por las coordenadas: (-1,-7), como puede verse en la Figura 4.2.5.

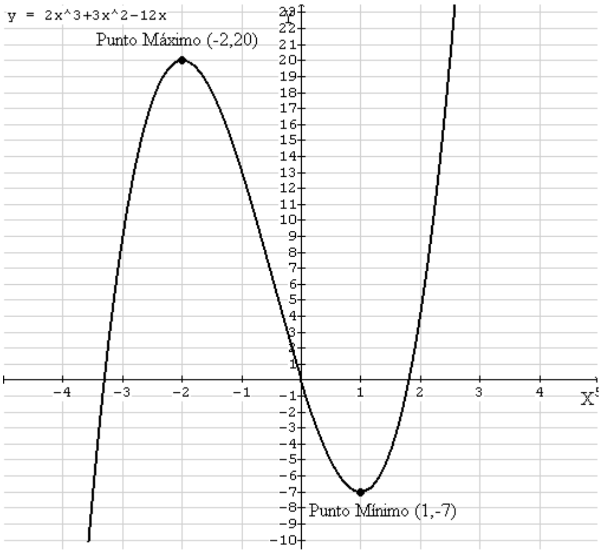


Fig. 4.2.5

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 4.2.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver ejercicios del apartado 4.2.2 para calcular mínimos y máximos con el criterio de la primera derivada. Entregar en la próxima sesión en hojas blancas.

1. Aplique el criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos locales de las funciones dadas a continuación:

    1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
    2. $f(x) = x^2(x-1)^2$
    3. $f(x) = x^3 - 3x^2$
    4. $f(x) = x + \frac{4}{x}$
    5. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
    6. $f(x) = \frac{x}{x-1}$
    7. $f(x) = \sin x$ en $(0,2\pi)$

4.3 CALCULO DE VALORES MAXIMOS Y MINIMOS POR EL CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

OBJETIVO

Calcular los máximos y mínimos relativos de cualquier función mediante el criterio de la segunda derivada y comprobar por medio de su gráfica.

Otro método para analizar la existencia de máximos y mínimos de una función es utilizar el criterio de la segunda derivada de la función. Lo anterior se basa en el hecho de que si una gráfica es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0$, $f(c)$ ha de ser un mínimo relativo de f. Del mismo modo si la gráfica de f es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0$, $f(c)$ ha de ser un máximo relativo de f. Ver Figura 4.3.1

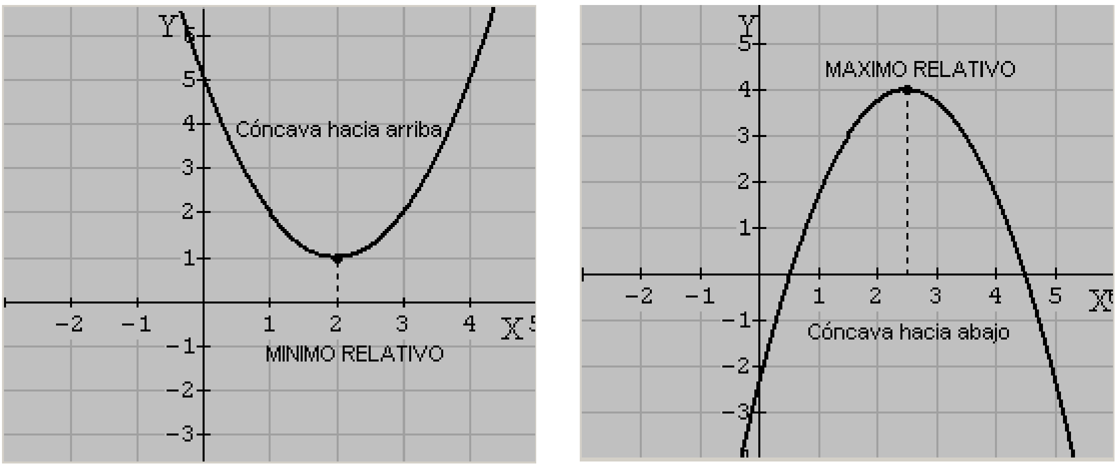


Figura 4.3.1

Criterio de la Segunda Derivada

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
2. Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

Si $f''(c) = 0$, el criterio no es aplicable, y debe recurrirse al criterio de la primera derivada.

Procedimiento para calcular máximos y mínimos de una función por el criterio de la segunda derivada:

1. Hallar la primera derivada de la función.
2. Encontrar los puntos críticos, igualando a cero la derivada y resolviendo la ecuación resultante.
3. Hallar la segunda derivada de la función dada.
4. Sustituir en la segunda derivada, los puntos críticos uno a uno, con el fin de hallar los signos de la segunda derivada. Si el valor resultante es negativo, la función presenta un MAXIMO para el valor crítico considerado; si el resultante es positivo, la función presenta un MINIMO para el valor considerado. Si la segunda derivada es igual a cero o no existe, en su lugar se aplica el primer método.

A continuación se desarrollan ejercicios en donde se piden encontrar los máximos y mínimos de una función utilizando el criterio de la segunda derivada.

Ejemplo 1

Utilice el criterio de la segunda derivada para encontrar los extremos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$

Solución :

1. La primera derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 - 15x) = 3x^2 - 12x - 15$$

2. Igualando a cero $f'(x)$, resulta:

$$3x^2 - 12x - 15 = 0$$

$$(3x + 3)(x - 5) = 0$$

$$3x + 3 = 0 \qquad x - 5 = 0$$

$$x = -1 \qquad x = 5$$

Los puntos críticos a analizar son: $x = -1$ y $x = 5$.

3. La segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x - 15) = 6x - 12$$

4. Evaluando los puntos críticos en $f''(x)$, se tiene:

Para $x = -1$

$$f''(-1) = 6(-1) - 12 = -18$$

Dado que $f''(-1) < 0$, se tiene un MAXIMO en $x = -1$. Las coordenadas en y del punto máximo se encuentra evaluando el punto crítico en la función original $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$.

Asi, para $x = -1$, se tiene:

$$y = f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 - 15(-1) = 8$$

El punto máximo está dado por las coordenadas: (-1,8), como puede verse en la Figura 4.3.2.

Para $x = 5$

$$f''(5) = 6(5) - 12 = 18$$

Dado que $f''(5) > 0$, se tiene un MINIMO en $x = 5$. Las coordenadas en y del punto mínimo se encuentra evaluando el punto crítico en la función original $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$.

Asi, para $x = 5$, se tiene:

$$y = f(5) = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) = -100$$

El punto máximo está dado por las coordenadas: (5, -100), como puede verse en la Figura 4.3.2.

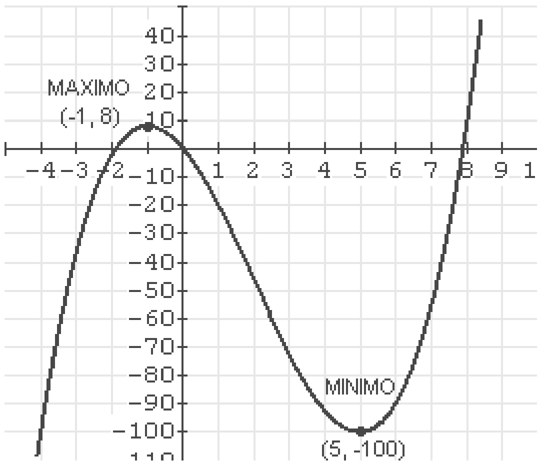


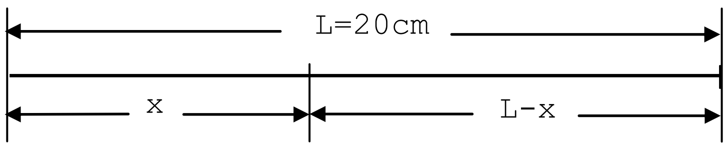
Figura 4.3.2

Ejemplo 2

Un pedazo de alambre de 20 cm de largo se corta en dos partes; una parte se dobla para formar un cuadrado y con la otra se forma una circunferencia. ¿Dónde se deberá hacer el corte para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea un mínimo?

Solución:

Primero interpretamos gráficamente el enunciado.



Con el primer segmento se construirá el cuadrado cuyo lado medirá x/4, con el resto se construye la circunferencia en que el radio medirá: $2\pi r = L - x$. Despejando al radio r, se tiene:

$$r = \frac{L - x}{2\pi}$$

Enseguida, procedemos a calcular las áreas con los datos proporcionados:

$$A_{cuadrado} = \frac{1}{16}x^2$$

y

$$A_{círculo} = \frac{(L - x)^2}{4\pi}$$

El área total será:

$$A_{total} = \frac{1}{16}x^2 + \frac{(L - x)^2}{4\pi}$$

Encontrada la función Area, procedemos a analizar el valor mínimo con el criterio de la segunda derivada.

1. Se halla la primera derivada, resultando:

$$\frac{dA}{dx}\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{(L-x)^2}{4\pi}\right)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{2\pi}(L-x)$$

2. Igualando $\frac{dA}{dx}=0$ y despejando el valor de x, queda:

$$\frac{1}{8}x-\frac{1}{2\pi}(L-x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{16L}{2(2\pi+8)}$$

Sustituyendo el valor de $L = 20\ cm$, encontramos el valor crítico.

$$x=\frac{16(20)}{2(2\pi+8)}=\frac{80}{\pi+4}=11.20$$

3. La segunda derivada es,

$$\frac{d^2A}{dx^2}\left[\frac{1}{8}x-\frac{1}{2\pi}(L-x)\right]=\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi}$$

4. En el resultado de la segunda derivada, se observa que no se tiene el valor de x, por tanto no se puede sustituir el valor crítico encontrado en el paso anterior, pero ambos términos son positivos, así que:

$$\frac{d^2A}{dx^2}>0, \quad \forall x$$

En consecuencia, el valor del área es un mínimo.

El valor de x es el punto crítico encontrado en el paso 3. Así $x = 11.20\ cm$.

En conclusión, el corte para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea un mínimo deberá realizarse a 11.20 cm. Quedando una longitud del radio: $2\pi r = L - x = 20 - 11.20 = 8.80\ cm$.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 4.3.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver ejercicios del apartado 4.3.2 para calcular mínimos y máximos con el criterio de la segunda derivada.

1. Aplique el criterio de la segunda derivada para determinar los máximos y mínimos locales de las funciones dadas a continuación:

   1. $f(x) = 2x^2 - 3x + +7$
   2. $f(x) = (x-4)^3(x+3)^2$
   3. $f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$

2. Encuentre el volumen de la mayor caja que se puede construir de un cuadrado de cartón de 30 cm de lado cortando cuadros iguales en cada esquina y doblando los lados hacia arriba.

4.4 CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

OBJETIVO

Aplicar la segunda derivada para indicar si la función dada presenta una concavidad hacia arriba o hacia abajo. Calcular el punto de inflexión a través del criterio de la segunda derivada.

Así como los puntos máximos y mínimos de una curva se caracterizan por ser puntos en los cuales la curva cambia de creciente a decreciente o viceversa, los llamados puntos de inflexión de una curva (cuando existen), se caracterizan por determinar un cambio en la concavidad de la curva.
Antes de presentar la definición precisa de concavidad, se harán algunas observaciones del tipo intuitivo.

Considere la función f cuya gráfica aparece en la Figura 4.4.1. Note en primer lugar que la curva que f representa, tiene tangente en todos sus puntos.

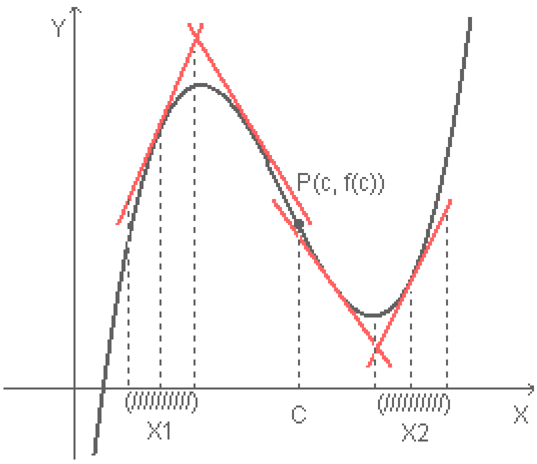


Figura 4.4.1

Se observa que en los puntos cercanos a x_1, pero diferentes de x_1 , la curva se encuentra por debajo de la recta tangente. Se dice en este caso que la curva es cóncava hacia abajo en el punto x_1.

Igualmente se observa que en los puntos cercanos a x_2, pero diferentes de x_2 , la curva se encuentra por encima de la recta tangente. Se dice en este caso que la curva es cóncava hacia arriba en el punto x_2.

El punto $(c, f(c))$ de la curva en el cual la concavidad cambia se conoce con el nombre de punto de inflexión de la curva.

Las ideas anteriores se precisan en las siguientes definiciones:

Definición:

1. Sea f derivable en c. Si la gráfica es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$, la gráfica queda por encima de la recta tangente en $(c, f(c))$ en algún intervalo abierto que contiene a c. Ver Figura 4.4.2.
2. Sea f derivable en c. Si la gráfica es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$, la gráfica queda por debajo de la recta tangente en $(c, f(c))$ en algún intervalo abierto que contiene a c. Ver Figura 4.4.3.

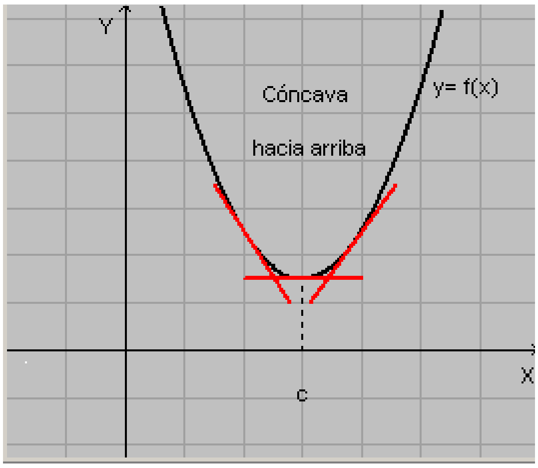


Figura 4.4.2

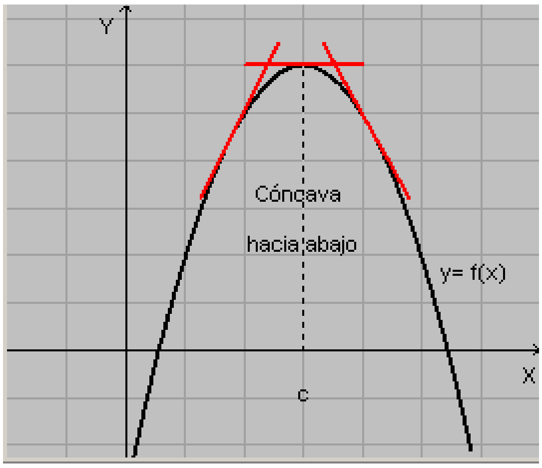


Figura 4.4.3

Para determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, utilizaremos el criterio de la segunda derivada, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1 Criterio de Concavidad

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x)0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia abajo en I.

Estas dos condiciones de concavidad, nos indican que para determinar los intervalos de concavidad de una función, será suficiente con estudiar el signo de $f''(x)$.

Puntos de Inflexión

Definición: Es un punto sobre la curva $f(x)$, en donde la curva cambia la concavidad. La Figura 4.4.4 muestra tres tipos diferentes de puntos de inflexión.

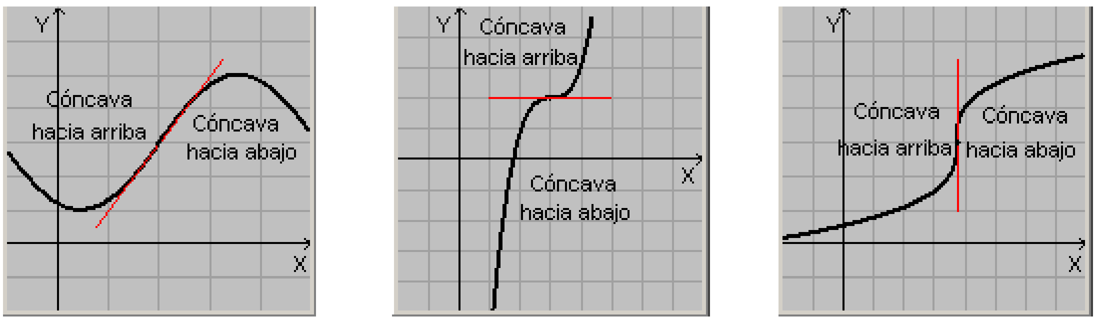


Figura 4.4.4

Observamos que en cada punto de inflexión la recta tangente cruza a la curva y el signo de la segunda derivada cambia en dichos puntos.

Para localizar los posibles puntos de inflexión basta determinar los valores de x donde $f''(x) = 0$ y aquellos en que $f''(x)$ no está definida.

Teorema 4.4.2 Puntos de Inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces o bien $f''(c) = 0$ ó $f''(x)$ no está definida en $x = c$.

Procedimiento para hallar el sentido de concavidad y los puntos de inflexión de una curva:

1. Calcular la segunda derivada $f''(x)$.
2. Igualar a cero la segunda derivada y resolver la ecuación resultante para encontrar los valores críticos, es decir los valores de x que anulen o hagan discontinua a $f''(x)$.
3. Si al pasar x por dichos valores hay un cambio de signo de $f''(x)$, entonces la curva tendrá un punto de inflexión para el valor de x considerado.
4. Si la segunda derivada es positiva, la curva es cóncava hacia arriba.
5. Si la segunda derivada es negativa, la curva es cóncava hacia abajo

Ejemplo 1

Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad para $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 6x$.

Solución:

1. Encontrar la segunda derivada de la función $f(x)$;

$$f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 6$$
$$f''(x) = 24x^2 - 36x$$

2. Igualando a cero $f''(x)$, resulta:

$$f''(x) = 24x^2 - 36x = 0$$
$$12x(2x - 3) = 0$$
$$12x = 0 \qquad 2x - 3 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 3/2$$

Los posibles puntos de inflexión pueden ocurrir en $x = 0$ y $x = 3/2$.

3. Se analizan los puntos para valores un poco menores y un poco mayores a los intervalos generados por esos puntos. Ver tabla siguiente.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0,3/2)$	$(3/2, \infty)$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Considerando la información obtenida de la tabla tenemos que en $x = 0$, si hay un punto de inflexión debido al cambio de signo en $f''(x)$ que va de positivo a negativo. De igual forma, en $x = 3/2$, existe un punto de inflexión debido al cambio de signo de $f''(x)$ que pasa de negativo a positivo.

Las coordenada en y, se encuentran sustituyendo los puntos de x que hacen cero $f''(x)$ en la función original $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 6x$.

Para $x = 0$: $\qquad y = f(0) = 2(0)^4 - 6(0)^3 + 6(0) = 0$

Para $x = 3/2$: $y = f(3/2) = 2(3/2)^4 - 6(3/2)^3 + 6\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8} = -1.125$

Los puntos de inflexión son: $(0{,}0)$ y $(\frac{3}{2}, -9/8)$. Ver Figura 4.4.5

4. Dado que, en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(3/2, \infty)$, $f''(x) > 0$, es decir la segunda derivada es positiva, entonces la curva es cóncava hacia arriba.

5. Finalmente, en el intervalo $(0{,}3/2)$, $f''(x) < 0$, es decir la segunda derivada es negativa entonces la curva es cóncava hacia abajo. Observar los resultados en la Figura 4.4.5.

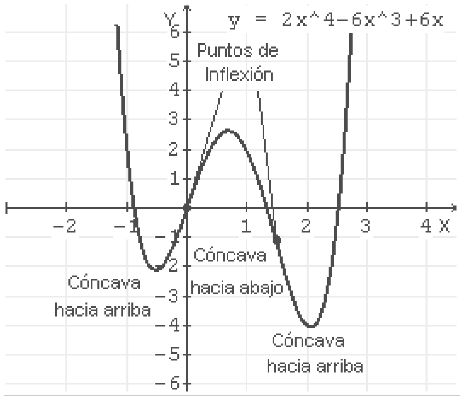


Fig. 4.4.5

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 4.4.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Realizar los ejercicios del apartado 4.4.2 para elaborar una tabla que permita el análisis de los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo y encontrar los puntos de inflexión. Entregar en la siguiente sesión en hojas blancas.

Dada las siguientes funciones, hallar:

a) Puntos de inflexión
b) Sentido de concavidad

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
2. $f(x) = x(x-4)^3$
3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$
4. $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$
5. $f(x) = x\sqrt{x+3}$

4.5 PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

OBJETIVO

Aplicar los conceptos de máximos y mínimos a problemas de la vida cotidiana, buscando una mejor optimización.

Dado que el mundo está lleno de problemas, tanto en la industria, la ingeniería, el comercio y cualquier otra área que requiera de poder calcular aquellos valores que les permitan determinar ganancias máximas o mínimos costos, menor cantidad de material para máximos volúmenes etc., es en donde se vuelven importantes los procesos de optimización y donde el calculo diferencial toma un papel relevante en la determinación de estos valores a partir de uno de sus conceptos mas importante que es el de la derivada en la obtención de máximos y mínimos a partir de una función.

Estos problemas pueden expresarse verbalmente o por escrito. Para resolverlos hay que hacer transformar sus enunciados en formulas, funciones o ecuaciones.

Pasos a seguir para resolver problemas de optimización:

1. Leer cuidadosamente el problema hasta comprender lo que se pide. Entender cuales son los hechos dados y cuales son las cantidades desconocidas que se tratan de encontrar.

2. Realizar si es posible un diagrama que incluya todos los datos, introduciendo variables para las cantidades desconocidas. Las palabras QUE, CUÁNTO, DONDE O CUANDO suelen estar asociadas a las cantidades desconocidas.

3. Construir un modelo (ecuación) de la situación del problema e identificar cual de las variables se desea encontrar el máximo o el mínimo, como pueden ser áreas, volúmenes, costos, dimensiones, etc. y expresarlo como una función en términos de una sola variable, utilizando los datos proporcionados.

4. Calcular los máximos y mínimos por los métodos vistos en el tema 4.2 y 4.3 y resolver el problema.

NOTA:

En los ejemplos que se presentan a continuación, se utilizarán conocimientos adquiridos en geometría, utilizando las fórmulas como, áreas, volúmenes y perímetros. Cuando aparezcan triángulos, es útil recordar el teorema de Pitágoras y las relaciones de semejanza.

Ejemplo 1

Determinar las dimensiones de un corral.

Un granjero tiene 200 yardas de barda con las que desea construir tres lados de un corral rectangular; una pared grande ya existente formará el cuarto lado. ¿Qué dimensiones maximizarán el área del corral?

Solución:

El área del rectángulo es $A = xy$ y su perímetro es $2x + y = 200$

Dado que la ecuación está en términos de dos variables x (altura), y y (base) es necesario expresarla en términos de una sola variable. Se puede despejar cualquiera de las dos variables y luego sustituirla en la ecuación del área:

Despejando a y, resulta: $y = 200 - 2x$

Despejando a x, resulta: $x = \frac{200 - y}{2}$

De los dos despejes, será más fácil trabajar con la función lineal que con la función racional, es por ello que elegimos en éste ejemplo el despeje de y.

De donde:

$A = xy = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$$A(x) = 200x - 2x^2$$

Esta ecuación expresa la variable dependiente A como función de la variable independiente x .

Calculado $\frac{dA}{dx}$, obtenemos:

$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}(200x - 2x^2) = 200 - 4x$

Utilizando el criterio de la segunda derivada para obtener máximos y mínimos:

Igualando la derivada a cero se obtienen los valores críticos:

$$200 - 4x = 0$$

Despejando $x \Rightarrow x = 50$, solo se tiene un valor crítico:

Calculando la segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{d}{dx^2}(200x - 4x) = -4$$

Sustituyendo valor crítico $x = 50$ yardas en la función área:

$$A(x) = 200x - 2x^2 = A(50) = 200(50) - 2(50)^2 = 5000$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo el valor crítico es un máximo.

Por lo tanto, el área máxima es 5000 yardas cuadradas. Para que el corral tenga área máxima, cada uno de los dos lados perpendiculares a la pared debe medir 50 yardas y el lado paralelo a la pared debe medir:

$y = 200 - 2x = 200 - 2(50) = 100$

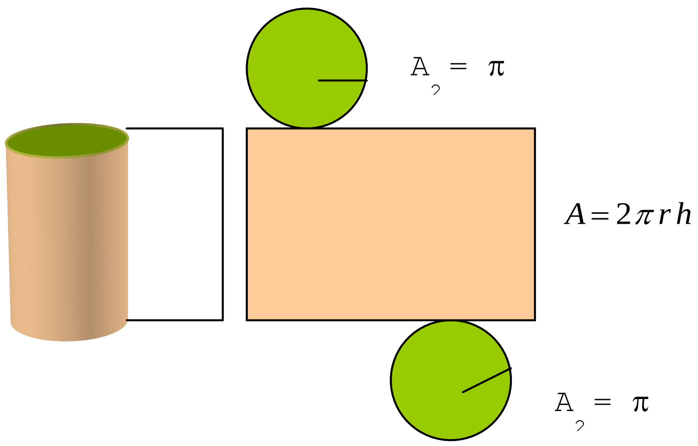
y =100 yardas.

Ejemplo 2

Determinar las dimensiones de una lata.

¿Cuáles son las dimensiones de una lata de aluminio con capacidad de 64 cm^3 de jugo, que utilice el mínimo de material (es decir, aluminio)?. La lata es cilíndrica y con tapa en ambos extremos.

Elaborando un dibujo de la situación, para calcular el área de aluminio se descompone la lata, considerando las tapas y el cuerpo del cilindro.



Solución:

El área de cada tapa es πr^2 y la del cuerpo del cilindro es $2\pi r h$ construyendo el modelo (ecuación).

$$A_{TOTAL} = \text{área de las tapas} + \text{área cilindro}$$

$$A_{TOTAL} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Dado que la ecuación está en términos de dos variables h (altura), r (radio) es necesario expresarla en términos de una sola variable, para lo cual es necesario recurrir al volumen dado del cilindro.

$$V_{CILINDRO} = \pi \ r^2 \ h$$

Como conocemos que V = 64 cm^3 sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$$64 = \pi \ r^2 \ h$$

Despejando la altura (h) resulta: $h = \dfrac{64}{\pi r^2}$

Sustituyendo en A_{TOTAL} queda: $A_{TOTAL} = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\dfrac{64}{\pi r^2}\right)$

Simplificando términos: $A_{TOTAL} = 2\pi r^2 + \dfrac{128}{r}$

Calculando $\dfrac{dA_{TOTAL}}{dr}$ obtenemos: $\dfrac{dA_{TOTAL}}{dr} = 4\pi r - \dfrac{128}{r^2}$

Utilizando el criterio de la segunda derivada para obtener máximos y mínimos:

Igualando la derivada a cero se obtienen los valores críticos:

$$4\pi r - \frac{128}{r^2} = 0$$

Despejando r: $r^3 = \dfrac{128}{4\pi}$ $\qquad r = \sqrt[3]{\dfrac{128}{4\pi}}$ $\qquad r = 2.16$ cm.

Calculando la segunda derivada

$$A''_{TOTAL} = 4\pi + \frac{256}{r^2}$$

Sustituyendo valor crítico r = 2.16 cm.

$$A''_{TOTAL} = 37.96$$

Como el signo de la segunda derivada es positivo el valor crítico es el mínimo.

Cómo r = 2.16 cm. Sustituyendo en $h = \frac{64}{\pi}(2.16)^2$

$$h = 4.36 \text{ cm.}$$

Por lo tanto las dimensiones de la lata para tener la cantidad mínima de material son:

$$r = 2.16 \text{ cm. y } h = 4.36 \text{ cm.}$$

Ejemplo 3

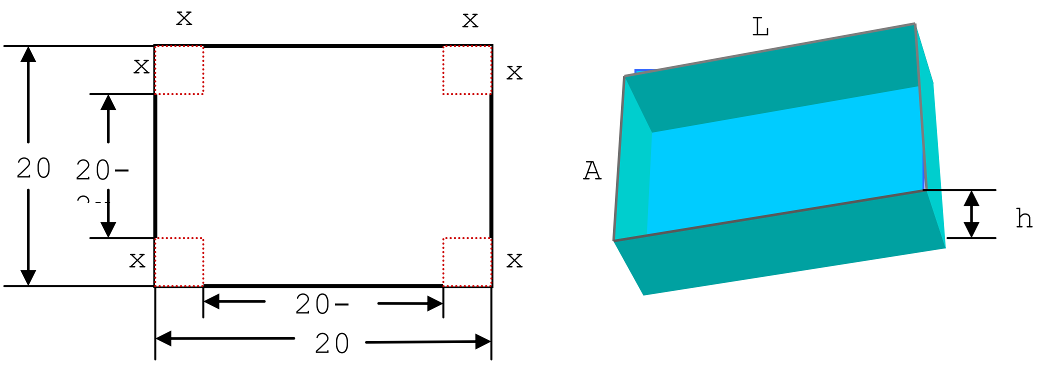
Construcción de una caja de máximo volumen.

Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 20 cm de ancho y 20 cm de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.

Solución:

Comenzamos trazando un croquis del cartón como se muestra en la Figura 4.5.2, en donde la letra x denota la longitud del lado del cuadrado que se va a recortar en cada esquina. Nótese que $0 \leq x \leq 10$.

La cantidad cuyo máximo hay que encontrar es el volumen V de la caja que se formará doblando a lo largo de las líneas de trazos (Ver Figura 4.5.3). Expresamos V como una función de la variable x. La fórmula para encontrar el volumen de una caja es: V=(largo)(ancho)(altura). De la Figura 4.5.2,



$$V = x(20-2x)(20-2x) = x(20-2x)^2 x(400-80x+4x^2)$$
$$V = 400x - 80x^2 + 4x^3$$

Se deriva la función volumen encontrada.

$$V'(x) = \frac{d}{dx}(400x - 80x^2 + 4x^3) = 400 - 160x + 12x^2$$

Igualar $\frac{dV}{dx}$ a cero para encontrar los valores críticos.

$$V'(x) = 400 - 160x + 12x^2 = 0$$

Factorizando la ecuación resultante, obtenemos:

$$(4x-40)(3x-10) = 0$$
$$4x - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$
$$3x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{3}$$

Los valores críticos a analizar son: $x = 10$ y $x = \frac{10}{3}$.

Utilizando el criterio de la segunda derivada, tenemos:

$$V''(x) = \frac{d}{dx}(400 - 160x + 12x^2) = 24x - 160$$

Sustituyendo los valores críticos en la segunda derivada, resulta:

$$V''(10) = 24(10) - 160 = +80$$

Como $V''(10) > 0$, V tiene un mínimo en $x = 10$

$$V''\left(\frac{10}{3}\right) = 24\left(\frac{10}{3}\right) - 160 = -80$$

Como $V''\left(\frac{10}{3}\right) < 0$, V tiene un máximo en $x = \frac{10}{3}$.

Por tanto, para obtener el máximo volumen, las medidas de la caja son:

- Altura= $x = \frac{10}{3}\ cm$
- Largo=Ancho= $20 - 2x = 20 - (2)\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3} = 13.33\ cm$

Nota: Para solucionar éste tipo de problemas se pueden utilizar los métodos de álgebra, gráficamente y con cálculo diferencial, posiblemente se inclinen por el método de cálculo diferencial, debido a que se pierde menos tiempo y no se desperdicia material como en el ensayo de prueba y error

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

APARTADO 4.5.2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resolver los problemas del apartado 4.5.2 de optimización utilizando el criterio de la primera o segunda derivada. Entregar la siguiente sesión en hojas blancas;

Resolver los problemas que a continuación se plantean.

1. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno y el izquierdo y derecho de 1 cm. ¿Cuáles serán las dimensiones de la hoja para las que el gasto de papel sea mínimo?

2. Una bala disparada verticalmente hacia arriba alcanza, al cabo de t segundos la altura $h = 500t - 5t^2$ metros. ¿Cuál será la altura máxima que pueda alcanzar?

3. Hallar dos números cuya suma sea 120 y que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo

BIBLIOGRAFIA

- STEWART James. Cálculo de una variable trascendente tempranas. Internacional Thomson Editores. México, 1998.

- EDWARDS Y PENNEY. Cálculo con geometría analítica Ed. Prentice-Hall. México, 1994.

- GRANVILLE, William A. Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Limusa. México, 1994.

- LARSON, Hosteller, Edwards. Cálculo con Geometría Analítica. Ed. McGraw-Hill. Tercera edición. México

- LEITHOLD, Louis. El Cálculo. Ed. Harla, sexta edición. México, 1992

- SWOKOWSKI, Earl y Cole, Jeffery. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamericana. México

- ZILL, Dennis G. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamericana. México 1997.

- LAZO, Silva. Fundamentos de matemáticas

GLOSARIO

Asintota, se llama asíntota de una función f(x) a una recta, cuya distancia a la curva (la función graficada) tiende a cero, cuando x tiende a infinito o bien x tiende a un punto.

Axioma, en la lógica y la matemática tradicional se entiende como un principio básico que se asume como verdadero sin recurrir o requerir de demostración alguna.

Abscisa, es la coordenada horizontal de un plano.

Álgebra, proviene del árabe y significa restaurar. Podía leerse en las puertas de los comercios de al-andalus el rótulo algebrista. En lengua árabe la palabra al-jabr significa componer, por lo que la publicidad hacia referencia a una barbería.

Aritmética, es de origen griego: aritmós significa número.

Cálculo, significa piedra pequeña. Los romanos utilizaban piedras pequeñas para hacer sus cuentas.

Cateto, significa en griego lo que cae perpendicularmente.

Cero, su origen fue la palabra árabe sifr, de ella se pasó a la latina zefirum y a la italiana zefiro y por contracción de ésta a la definitiva cero.

Círculo, proviene del latín y significa pequeño circo o redondel.

Circunferencia, significa lo que se mueve en torno a algo.

Coordenada, proviene del latín y significa el que juntamente con otro ordena.
Contradominio, son todos los valores que puede tomar la variable dependiente.

Derivada, representa el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto. La pendiente está dada por la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva (función) con el eje de las abcisas, en ese punto.

Dominio restringido, Dominio real de una función cuando esta es aplicada a un problema real.

Diámetro, proviene del griego y significa medida a través.

Dominio, son los valores para los cuales, la función esta definida.

Ecuación, viene del latín aequatio, que significa igualdad.

Función, una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

Geometría, proviene del griego y significa medición de la tierra.

Grafica, es una colección de pares ordenados dispuestos en un sistema de ejes.

Hipótesis, término procedente del griego que designa, etimológicamente, ‘aquello que se encuentra debajo de algo sirviéndole de base o fundamento’.

Hipotenusa, significa tensar por debajo, haciendo alusión a la forma primitiva de los constructores de trazar ángulos rectos.

Imagen, es cada valor del contradominio, (nótese que el contradominio las incluye a todas, es un conjunto. Imagen se llama a cada una de las que están dentro).
Limite, el límite describe la tendencia de una sucesión o una función. La idea es que en una sucesión o una función, al hablar de límite, decimos que se obtiene si se puede acercar a un cierto número tanto como queramos.

Lógica (del griego, *logos,* 'palabra', 'proposición', 'razón'), disciplina y rama de la filosofía que estudia los principios formales del conocimiento humano.

Matemáticas, viene del griego y significa aprender. Los antiguos griegos consideraban a la matemática como el saber por excelencia.

Monomio, viene del griego (monos=uno) y significa un término.

Máximo, Valor de la función que es mayor a cualquier otro valor dentro de un intervalo.

Mínimo, valor de la función que es menor a cualquier otro valor dentro de un intervalo.

Máximo absoluto, valor de la función que es mayor a cualquier otro valor en todo el dominio de la función.

Mínimo absoluto, valor de la función que es menor a cualquier otro valor en todo el dominio de la función.

Máximo local, valor de la función que es menor a cualquier valor en un intervalo cerrado.

Máximo local, valor de la función que es valor a cualquier otro valor en un intervalo cerrado.

Numero crítico, Valor de “x” donde la derivada es igual a cero o no existe.

Optimizar, Obtener el mejor resultado posible

Postulado, los términos *axioma* y *postulado* suelen utilizarse con frecuencia como sinónimos. Algunas veces la palabra *axioma* se usa para referirse a los principios básicos que deben ser asumidos en cualquier sistema deductivo, y el término *postulado* para señalar a los primeros principios peculiares de un sistema particular, como la geometría de Euclides. Rara vez se usa el término *axioma* para referirse a los primeros principios de la lógica, ni el término *postulado* para aludir a los primeros principios de las matemáticas.

Polinomio, procede del griego (polys=varios), significa varios términos.

Proposición, enunciado en el que se afirma algo, que puede ser verdadero o falso. Suele ser la expresión de un juicio y, por lo tanto, todo lo que se considera en un juicio tiene su reflejo en la proposición. En lógica simbólica, el cálculo de proposiciones analiza la estructura formal de las proposiciones y el valor de verdad que éstas poseen.

Radio, era en latín cada una de las varitas de la rueda de un carro.

Representación de un problema, Forma de presentar los datos con el fin de obtener una mejor perspectiva.

Teorema, proposición que afirma una verdad demostrable, es un enunciado de una propiedad o proposición seguida de una demostración, es el resultado de un estudio matemático o de un sistema formal.

Trigonometría, significa "resolución de triángulos"**.** Procede de trigono = triángulo y metrón = medida