

1. Marco teórico

1.1. Correlación lineal

Cuando se tiene una variable controlada x y una dependiente y y tenemos el modelo lineal

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \quad (1)$$

que implica entonces el modelo para análisis de rendimiento promedio:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x. \quad (2)$$

Si la variable x es un valor observado de una variable X , al establecerse una relación funcional y al basarse en (2) se implica el modelo

$$E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (3)$$

que supone la esperanza condicional de Y para un valor fijo de X en una función lineal del valor x . Al suponer que la variable aleatoria vectorial (X, Y) tiene una distribución normal bivariable con $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $V(X) = \sigma_X^2$, $V(Y) = \sigma_Y^2$, el coeficiente de correlación ρ puede demostrar que

$$E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \text{donde } \beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho. \quad (4)$$

Si (X, Y) tiene una distribución normal bivariable, entonces la prueba de independencia es equivalente a probar si el coeficiente de correlación ρ es igual a cero. Denotando con $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra de aleatoria de distribución normal bivalente. El estimador de máxima probabilidad de ρ está dado por el coeficiente de correlación muestral:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}. \quad (5)$$

Puede expresarse r en términos de cantidades conocidas:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \hat{\beta} \sqrt{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}}. \quad (6)$$

Cuando (X, Y) tenga una distribución normal bivariable, se sabe que

$$E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \text{donde } \beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho. \quad (7)$$

Pruebas en las que los conjuntos de hipótesis que contienen β_1 , por ejemplo, $H_a: \beta_1 = 0$ contra $H_a: \beta_1 > 0$ $H_a: \beta_1 < 0$, así como $H_a: \beta_1 > 0$ contra $H_a: \beta_1 \neq 0$ pueden estar basadas en el estadístico

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{S/\sqrt{S_{xx}}}, \quad (8)$$

Wackerly, Mendenhall III y Scheaffer consideran que “parecería lógico usar r como estadístico de prueba para probar hipótesis más generales acerca de ρ , pero la distribución de probabilidad para r es difícil de obtener.” Dennis D Wackerly, William Mendenhall III y Richard L Scheaffer. *Estadística matemática con aplicaciones*. Trad. por Jorge Humberto Romo Mufioz. 7.ª ed. Ciudad de México: Cengage Learning, 2009. ISBN: 9780495110811 Sin embargo, en muestras moderadamente grandes podemos probar la hipótesis $H_0: \rho_1 = \rho_0$ con una prueba Z en la que

$$Z = \frac{(\frac{1}{2}) \ln(\frac{1+r}{1-r}) - (\frac{1}{2}) \ln(\frac{1+\rho}{1-\rho})}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}. \quad (9)$$

Si α es la probabilidad deseada de cometer un error tipo I, la forma de la región de rechazo depende de la hipótesis alternativa. Las diversas alternativas de interés más frecuente y correspondientes regiones de rechazo son las siguientes:

$$H_a: \rho > \rho_0, \quad RR: z > z_\alpha \quad (10)$$

$$H_a: \rho < \rho_0, \quad RR: z < -z_\alpha \quad (11)$$

$$H_a: \rho \neq \rho_0, \quad RR: |z| > z_\alpha/2 \quad (12)$$

La suma de los cuadrados del error SSE , es es una alternativa para medir la variación en valores que permanecen sin explicación después de usar las x para ajustar el modelo de regresión lineal simple, la razón SSE/S_{yy} la proporción de la variación total en las y_i que este modelo no explica. El coeficiente de determinación se puede escribir como

$$r^2 = \left(\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \right)^2 = \left(\frac{S_{xy}}{S_{xx}} \right) \left(\frac{S_{xy}}{S_{yy}} \right) = \left(\frac{\hat{\beta}_1 S_{xy}}{S_{yy}} \right) = \frac{S_{yy} - SEE}{S_{yy}} = 1 - \frac{SSE}{S_{yy}}. \quad (13)$$

Podemos interpretar a r^2 como la proporción de la variación total en las y_i que es explicada por una variable x en un modelo de regresión lineal simple.

1.2. Modelo de base de datos relacional

código	CHAR	fecha	DATE	estado	INTEGER
MX01		2020-01-01		1	
MX02		2020-01-02		1	
MX03		2020-01-03		0	

[Dat12]

1.3. Probabilidad condicional

La probabilidad condicional tiene las mismas características que la probabilidad, pero $P(\cdot|B)$ actualiza nuestra incertidumbre acerca de los eventos para reflejar la evidencia observada en B .

Si A y B son eventos con $P(B) > 0$ entonces la *probabilidad condicional* de A dado B denotado por $P(A|B)$, se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (14)$$

Se denomina probabilidad a priori de A a $P(A)$ y probabilidad a posteriori de A a $P(A|B)$ y es importante mencionar que $P(A|B) \neq P(B|A)$.

La probabilidad condicional es la razón de dos probabilidades y sus consecuencias, la primera de ellas se obtiene moviendo el denominador en la definición al otro lado de la ecuación, para cada evento A y B con posibilidades positivas,

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A). \quad (15)$$

se le conoce como teorema de la *probabilidad de la intersección de dos eventos*. Aplicando repetidamente el teorema (15) aplicado a la intersección de n eventos obtenemos el teorema de *probabilidad de la intersección de n eventos*. Para cualquier evento A_1, \dots, A_n con probabilidad $P(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) > 0$,

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1, A_2) \dots P(A_n|A_1, \dots, A_{n-1}). \quad (16)$$

Otro teorema que relaciona a $P(A|B)$ con $P(B|A)$ es la regla *regla de Bayes*:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (17)$$

que se origina directamente del teorema (15) y a su vez se origina directamente de la definición de probabilidad condicional, sin embargo, la regla de Bayes tiene importantes aplicaciones e implicaciones en probabilidad y estadística, ya que en ocasiones es más fácil encontrar $P(B|A)$ que $P(A|B)$ o viceversa. Otra forma de escribir la regla, es en términos de sus **odds COMO SE DICE EN ESPAÑOL, ¿cuota?**, las **odds** de un evento A son

$$odds(A) = P(A) \frac{P(A)}{P(A^c)}. \quad (18)$$

Al tomar la expresión $P(A|B)$ y la dividimos entre la $P(A^c|B)$, ambas de la regla de Bayes llegamos a la *forma de odds de la regla de Bayes* que para cualquier eventos A y B con posibilidades positivas, las *odds de A after conditioning on B* son

$$\frac{P(A|B)}{P(A^c|B)} = \frac{P(B|A)}{P(B|A^c)} \frac{P(A)}{P(A^c)}. \quad (19)$$

En este caso las *odds a posteriori* $P(A|B)/P(A^c|B)$ son iguales a las *odds a priori* $P(A)/P(A^c)$ por el factor $P(B|A)/P(B|A^c)$ lo que se le conoce en estadística como *función de verosimilitud*.

La ley de Bayes es usada en ocasiones en conjunto con la *ley de probabilidad total*, que es esencial para descomponer problemas complicados de probabilidad en problemas partes: Si A_1, \dots, A_n es una partición de una muestra del espacio S , con $P(A_i) > 0$ para todo i , entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i). \quad (20)$$

Prueba: como los A_i forman una partición de S , podemos descomponer B como

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n). \quad (21)$$

como las partes están disjuntas, podemos agregar sus posibilidades para obtener $P(B)$:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n). \quad (22)$$

Aplicando el teorema (15) a cada $P(B \cap A_i)$ obtenemos

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n). \quad (23)$$

La *ley de probabilidad total* dice que para obtener la probabilidad incondicional de B , tenemos que dividir el espacio muestra en cortes disjuntos A_i , encontrar la probabilidad condicional de B en cada corte, después tomar la suma pesada de las probabilidades condicionales, donde los pesos son las probabilidades $P(A_i)$.

1.4. Variables aleatorias y sus distribuciones

Dado un experimento con una muestra en espacio S , una *variable aleatoria* es una función del mismo espacio S para los números reales \mathbb{R} . Una variable aleatoria X asigna el valor numérico $X(s)$ a cada resultado posible s del experimento. La aleatoriedad viene del hecho que tenemos un experimento aleatorio (con probabilidades descritas por la función de probabilidad P). Las variables aleatorias simplifican la notación y expanden la habilidad de cuantificar y resumir resultados de experimentos.

Se dice que una variable X es discreta cuando si hay una lista finita de valores a, a_2, \dots, a_n o una lista infinita de valores a, a_2, \dots de tal forma que $P(X = a_j \text{ para algún } j) = 1$. Si X es una variable aleatoria discreta, entonces el grupo infinito o contable de valores x tal que $P(X = x)$ se llama *soporte* de X . En contraste una variable aleatoria continua puede tomar cualquier valor real en un intervalo.

La forma más natural de expresar la distribución de variables aleatorias discretas es la *función de probabilidad* [BH19] (PMF, por sus siglas en inglés) que, para una X discreta, es la función p_X dada por $p_X(x) = P(X = x)$. El teorema de *funciones de probabilidad válidas* dice que cuando X es una variable aleatoria con soporte x_1, x_2, \dots , la función de probabilidad p_X de x debe satisfacer los siguiente criterios:

- No negativo $p_X(x) > 0$ si $x = x_j$ para un j , y $p_X(x) = 0$, de otra forma;
- Suma 1: $\sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = 1$.

el primer criterio es verdadero porque la probabilidad es no negativa, el segundo es verdadero ya que X debe tomar *algún* valor, y los eventos $X = x_j$ están disjuntos, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_j) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{X = x_j\}\right) = P(X = x_1 \text{ ó } X = x_2 \text{ ó } \dots) = 1. \quad (24)$$

1.4.1. Distribución de Bernoulli

Una variable aleatoria tiene la *distribución de Bernoulli* con un parámetro p si $P(X = 1) = p$ y $P(X = 0) = 1 - p$, cuando $0 < p < 1$. Se escribe como $X \sim \text{Bern}(p)$

Maybe[BH19]

Fuentes

- [BH19] Joseph K. Blitzstein y Jessica Hwang. *Introduction to Probability [Introducción a la probabilidad]*. 2.^a ed. Texts in Statistical Science [Textos en ciencia estadística]. Florida: Chapman y Hall/cRC, 2019. ISBN: 9781138369917.
- [Dat12] C. J. Date. *SQL and Relational Theory: How to Write Accurate SQL Code [SQL y teoría relacional: Cómo escribir código SQL correcto]*. 2.^a ed. California: O'Reilly Media, 2012. ISBN: 9781449316402.
- [WMIS09] Dennis D Wackerly, William Mendenhall III y Richard L Scheaffer. *Estadística matemática con aplicaciones*. Trad. por Jorge Humberto Romo Muñoz. 7.^a ed. Ciudad de México: Cengage Learning, 2009. ISBN: 9780495110811.