

Meteorologian ja säähavainnonteon perusteet 2017:

Mallivastaukset, harjoitus 3

Otso Peräkylä

27 helmikuuta 2017

1. Tehtävä

a-kohta

Termodynamiikan yhtälö kuvaa energian säilymistä: niinpä Q :n yksikköön täytyy sisältyä energian yksikkö, eli joule (J). Ilmasta puhuttaessa meillä ei yleensä ole mitään määrättyä ilman määrää jota käsiteltäisiin: sen sijaan että puhutaan tietyn ilmamäärän sisältämästä kokonais-energiasta, on järkevämpää puhua energiasta massayksikköä kohti. Energiaa myös siirtyy ja muuttuu muodosta toiseen jatkuvasti. Näin ollen puhutaan energiasta myös aikayksikköä kohti, ja Q :n yksikkö on vastaavasti $\frac{\text{J}}{\text{kg s}}$. Tarkistetaan seuraavaksi että loppujenkin termien yksikkö on sama:

$$[c_v] \frac{[DT]}{[Dt]} = \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \frac{\text{K}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{kg s}} \quad Q.E.D. \quad (1)$$

Ensimmäisen muodon ensimmäisen termin suhteen päädyttiin siis samoihin yksiköihin. Seuraavaksi tarkistetaan ensimmäisen muodon toinen termi:

$$[p] \frac{[D\alpha]}{[Dt]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{\text{s}} = \frac{\text{N m}}{\text{kg s}} = \frac{\text{J}}{\text{kg s}} \quad Q.E.D. \quad (2)$$

Eli samat yksiköt saatiin jälleen. Yhtälön toisen muodon yksiköt saadaan samaan tapaan: c_p :n yksiköt ovat samat kuin c_v :n, joten ensimmäinen termi muodostuu identtisesti. Toisessa termissä paine on muuttunut ominaistilavuuteen, ja ominaistilavuuden muutos paineen muutokseen. Koska paineella ja paineen muutoksella, kuten ominaistilavuudella ja sen muutoksella, on samat yksiköt, myös tästä termistä tulee samat yksiköt.

b-kohta

Ilmapaketin saama energia voi mennä joko sen sisäisen energian kasvattamiseen, tai ympäristöä vastaan tehtyyn työhön (useimmiten molempiin). Ilmapaketin sisäinen energia kasvaa kun sen lämpötila nousee. Paketti taas tekee työtä ympäristöään vastaan kun sen tilavuus kasvaa. Se ikään kuin työntää seiniään ulospäin, jolloin ilmapaketin aiheuttama paine (voima per pinta-ala) vaikuttaa tietyn välimatkan yli: voima kertaa välimatka = työ. Jos kaikki ilmapaketin saama energia menee ilmapaketin sisäisen energian kasvattamiseen, se ei voi tehdä työtä ympäristöään vastaan. Sen tilavuus siis pysyy vakiona. Tällöin ensimmäisen yhtälön toinen termi on nolla, koska ominaistilavuus ei muutu:

$$Q = c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + p \times 0 = c_v \frac{DT}{Dt} \quad (3)$$

Tämä termi kuvaa siis ilmapaketin sisäisen energian muutosta. Jos taas sisäinen energia ei muutu, lämpötila pysyy vakiona mutta tilavuus kasvaa. Tällöin jää jäljelle vain ensimmäisen yhtälön toinen termi $p \frac{D\alpha}{Dt}$: tämä kuvaa siis ympäristöä vastaan tehtyä työtä.

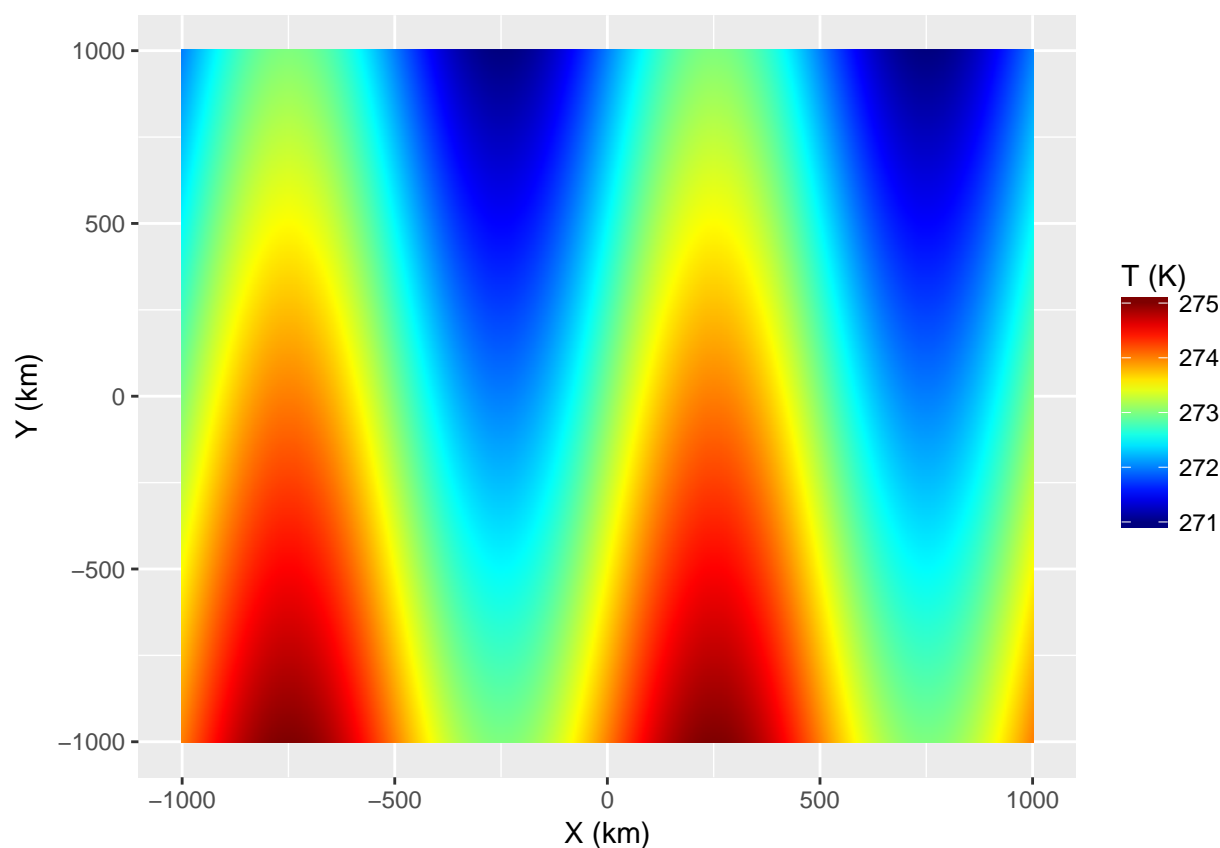
c-kohta

Jos ilmapaketti saa energiaa, eikä sitä vangita vakio-tilavuuteen, se sekä lämpenee että laajenee. Sen paine pysyy tässä prosessissa vakiona. Tällaista tilannetta kuvaa toisen yhtälön ensimmäinen termi $c_p \frac{DT}{Dt}$. Termiin sisältyy siis sekä sisäisen energian muutosta että ymmäristöä vastaan tehtyä työtä. Samalla tavalla yhtälön toiseen termiin $\alpha \frac{Dp}{Dt}$ sisältyy sekä ilmapaketin tekemää työtä että sisäisen energian muutosta.

2. tehtävä

a-kohta

Lämpötilan-kenttä on muotoa $T(x, y) = A + By + C \sin(kx)$, missä vakiot $A = 273$ K, $B = -0.001$ K/km ja $C = 1$ K, aaltoluku $k = 2\pi/L$, ja aallonpituus $L = 1000$ km. Sen jakauma näyttää seuraavalta:



b-kohta

Lämpötilan gradientti kertoo mihin suuntaan mentäessä lämpötila kasvaa nopeiten, ja sen kasvunopeuden. Se lasketaan seuraavasti:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j}. \quad (4)$$

Lämpötilan osittaisderivaatta x:n suhteen on

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A + By + C\sin(kx)) = Ck\cos(kx). \quad (5)$$

Osittaisderivaatta y:n suhteen taas on

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(A + By + C\sin(kx)) = B. \quad (6)$$

Näin ollen lämpötilan gradientti on

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} = Ck\cos(kx)\hat{i} + B\hat{j}. \quad (7)$$

Sijoittamalla x:n ja y:n arvot tähän yhtälöön saadaan gradientin arvoksi pisteessä (0,0)

$$\begin{aligned} \nabla T(0, 0) &= Ck\cos(0)\hat{i} + B\hat{j} = Ck\hat{i} + B\hat{j} = \frac{1 \text{ K} \times 2\pi}{1000 \text{ km}}\hat{i} - 0.001 \text{ K/km}\hat{j} \\ &= 0.00628... \text{ K/km}\hat{i} - 0.001 \text{ K/km}\hat{j} \approx 0.006 \text{ K/km}\hat{i} - 0.001 \text{ K/km}\hat{j}. \end{aligned} \quad (8)$$

Gradientti osoittaa siis noin 6 yksikköä x-akselin suuntaan, ja negatiivisen yhden yksikön y-akselin suuntaan: siis länsikaakkoon. Gradientin itseisarvo, tai pituus, voidaan laskea sen komponenttien neliöiden summan neliöjuuresta:

$$|\nabla T(0, 0)| = \sqrt{(0.00628... \text{ K/km})^2 + (-0.001 \text{ K/km})^2} = 0.00636... \text{ K/km} \approx 0.006 \text{ K/km}. \quad (9)$$

Tämä tarkoittaa, että kun lähdetään kulkemaan gradientin suuntaan (eli länsikaakkoon), kasvaa lämpötila noin 0.006 astetta kilometrissä.

Pisteessä x = 250 km gradientin arvoksi saadaan

$$\nabla T(250 \text{ km}, 0) = Ck\cos\left(\frac{250 \times 2\pi}{1000}\right)\hat{i} + B\hat{j} = B\hat{j} = -0.001 \text{ K/km}\hat{j}. \quad (10)$$

Gradientti koostuu siis nyt vain y-komponentista, joka osoittaa suoraan etelään. Gradientin itseisarvo on suoraan y-komponentin itseisarvo:

$$|\nabla T(250 \text{ km}, 0)| = \sqrt{(0 \text{ K/km})^2 + (-0.001 \text{ K/km})^2} = 0.001 \text{ K/km}. \quad (11)$$

3. tehtävä

a-kohta

Kun ilma konvergoi, tulee yhteen pisteeseen vaakasunnassa enemmän ilmaa kuin siitä lähtee. Jollei ilma puristu kokoon, täytyy tämän ylimääräisen ilman virrata kuitenkin jonnekin. Se virtaa siis pystysuuntaan. Maanpinnalla on tässä tapauksessa konvergenssia, eli sinne virtaa enemmän ilmaa kuin sieltä virtaa pois. Koska ilma ei voi virrata maan pinnalta enää alaspäin, täytyy sen alkaa virrata ylöspäin. Tästä aiheutuu ylöspäin suuntautuva pystytuuli 1500 metrin korkeudessa: sen arvo voidaan laskea luentokalvoilla esillä olleesta yhtälöstä:

$$w(z) \approx - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (12)$$

Eli toisin sanoen integroidaan tuulen divergenssiä maanpinnalta kyseiselle korkeudelle asti. Pystytuulen tietyllä korkeudella vaikuttaa siis koko sen alaisen ilmapilarin divergenssi: mitä enemmän ilmaa pakkautuu alla olevaan pilariin, sitä suurempi pystynopeus tietyllä korkeudella pitää olla. Nyt meille on annettu divergenssin tarkan pystyjakauman sijasta eri ilmakerrosten keksimäärisiä divergenssejä. Koska divergenssi on integraalissa suoraan (eikä esimerkiksi divergenssin neliönä), voidaan *keskimääräinen* divergenssi ottaa integraalista ulos:

$$- \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} \int_0^z dz = - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} (z - 0). \quad (13)$$

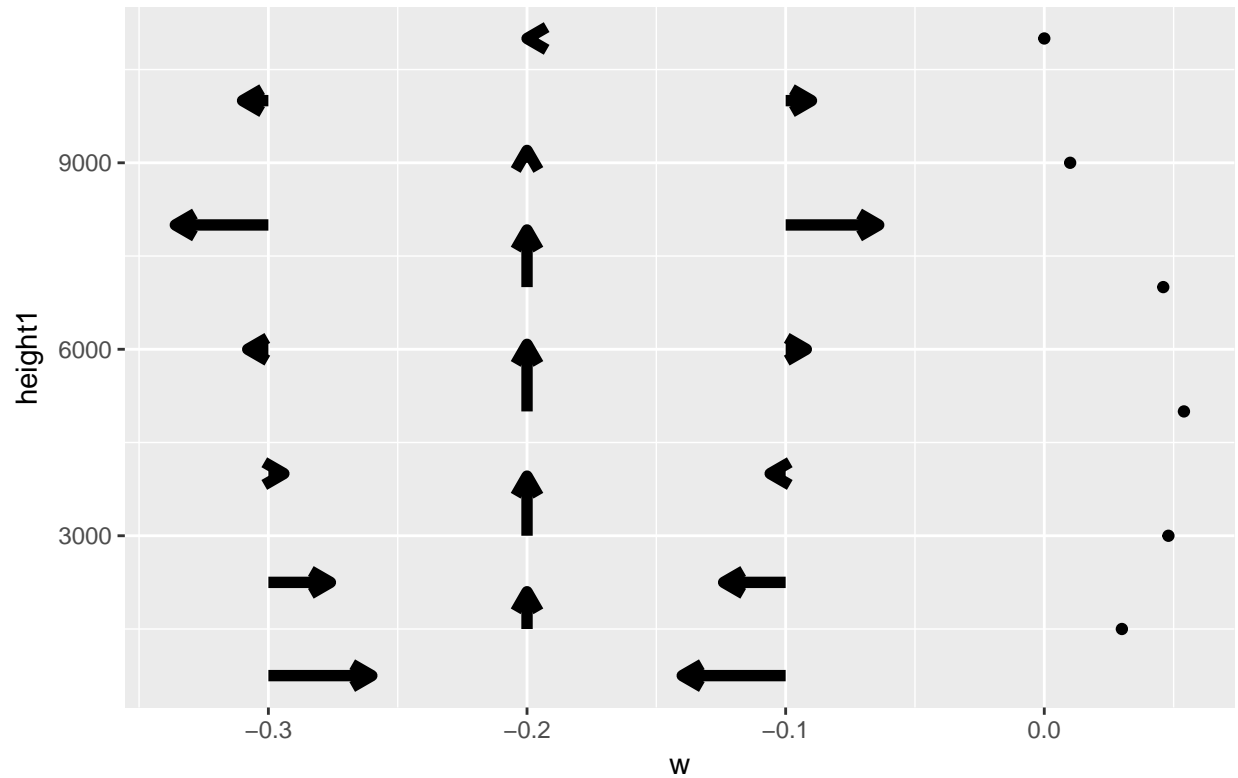
Näin voidaan laskea pystytuuli 1500 metrin korkeudella:

$$w(1500 \text{ m}) = - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} (z - 0) = - (-2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}) (1500 \text{ m} - 0) = 0.03 \text{ m s}^{-1}. \quad (14)$$

3000 metrin pystytuulen laskemiseksi tarvittaisiin ylemmän kaavan mukaisesti kerroksen 0 - 3000 m keskimääräinen divergenssi. Meillä on kuitenkin tiedossa 0 - 1500 m ja 1500 m - 3000 m divergenssit erikseen. Tätä varten voidaan pilkkoa integraali kahtia:

$$\begin{aligned} w(3000 \text{ m}) &= - \int_0^{3000 \text{ m}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \int_0^{1500 \text{ m}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz - \int_{1500 \text{ m}}^{3000 \text{ m}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \\ &= - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{0-1500 \text{ m}} (1500 \text{ m} - 0) - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{3000 \text{ m}-1500 \text{ m}} (3000 \text{ m} - 1500 \text{ m}) \\ &= (2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} + 1.2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}) \times 1500 \text{ m} = (0.02 + 0.018) \text{ m s}^{-1} = 0.048 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

3000 metrin pystytuuli riippuu siis koko alemman ilmakerroksen konvergenssista. Vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että 1500 metrin pystytuuleen lisätään 1500 m - 3000 m kerroksen konvergenssin aiheuttama pystytuuli. Samalla tavalla 5000 metrin pystytuuli voidaan laskea alemmien kerrosten konvergensseista. Tulokset on esitetty alla olevassa kuvassa: pahoittelut hieman epäoptimaalisesta formaatista.



Pystytuuli eri korkeuksilla (mustat pisteet). Nuolet kuvaavat divergenssiä/konvergenssiä (vaakanuolet) ja pystytuulen nopeutta (pystynuolet)

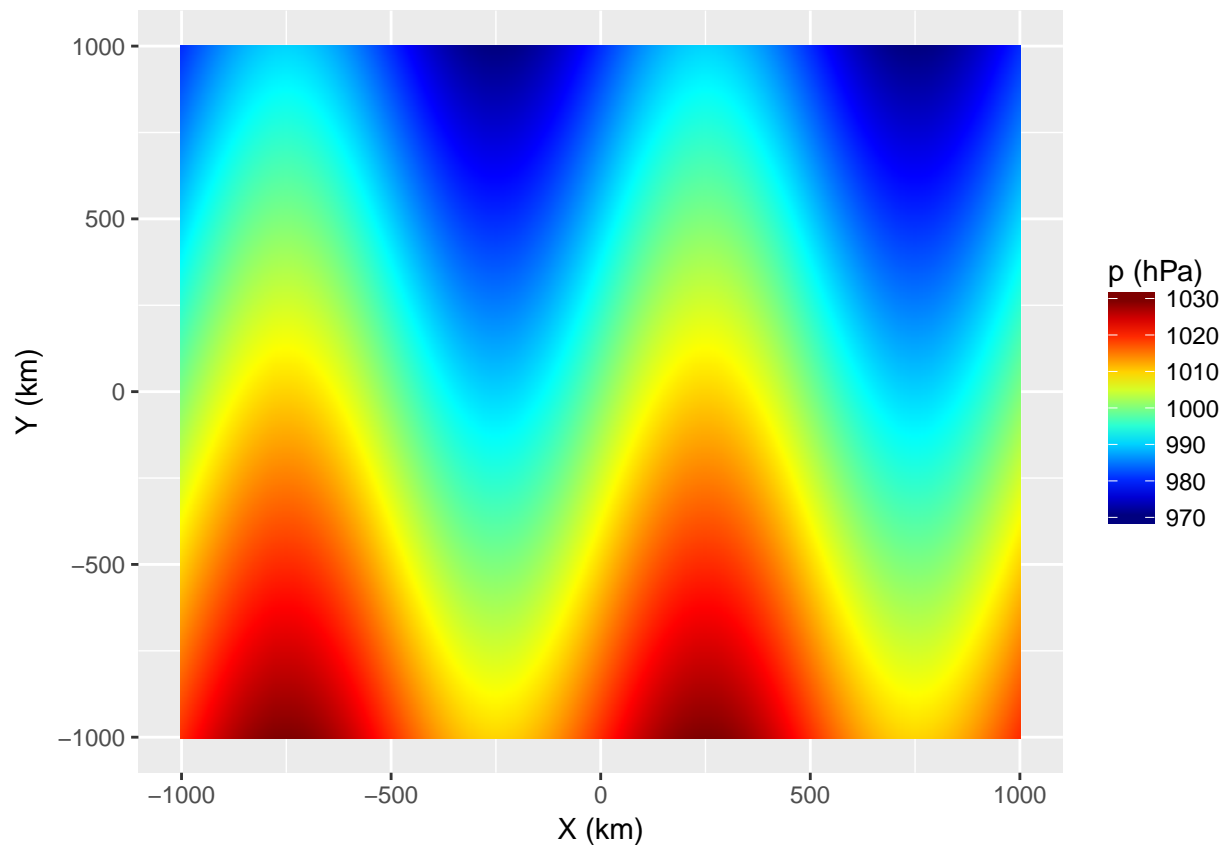
c-kohta

Pystynopeudet ovat tässä maksimissaan luokkaa 5 cm/s. Ukkospilvissä pystynopeudet voivat olla luokkaa 1 m/s, eli paljon voimakkaampia. Myös intertrooppisessa nousuliikkeessä nousunopeudet voivat olla kovempia (näihinkin liittyy usein ukkospilviä). Tämän tapauksen pystynopeudet voisivat vastata suurin piirtein keskilämpöasteiden matalapaineiden arvoja.

4. tehtävä

a-kohta

Paineen jakauma hahmoteltu alla:



b-kohta

Painegradientti lasketaan aivan samalla tavalla kuin 2-tehtävässä. Vain vakioiden arvot muuttuvat. Osittaisderivaatat ovat nyt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A + By + C\sin(kx)) = Ck\cos(kx). \quad (16)$$

Osittaisderivaatta y:n suhteen taas on

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(A + By + C\sin(kx)) = B. \quad (17)$$

Näin saadaan gradientin arvoksi

$$\begin{aligned} \nabla p(0,0) &= Ck\cos(0)\hat{i} + B\hat{j} = Ck\hat{i} + B\hat{j} = \frac{10 \text{ hPa} \times 2\pi}{1000 \text{ km}}\hat{i} - 0.02 \text{ hPa/km}\hat{j} \\ &= 0.0628... \text{ hPa/km}\hat{i} - 0.02 \text{ hPa/km}\hat{j} \approx 0.06 \text{ hPa/km}\hat{i} - 0.02 \text{ hPa/km}\hat{j}, \end{aligned} \quad (18)$$

ja

$$|\nabla p(0,0)| = \sqrt{(0.0628... \text{ hPa/km})^2 + (-0.02 \text{ hPa/km})^2} = 0.0659... \text{ hPa/km} \approx 0.07 \text{ hPa/km}. \quad (19)$$

Vastaavasti saadaan gradientin arvoksi pisteessä (250 km,0)

$$\nabla p(250 \text{ km}, 0) = Ck \cos\left(\frac{250 \times 2\pi}{1000}\right) \hat{i} + B \hat{j} = B \hat{j} = -0.02 \text{ hPa/km} \hat{j}, \quad (20)$$

ja

$$|\nabla p(250 \text{ km}, 0)| = \sqrt{(0 \text{ hPa/km})^2 + (-0.02 \text{ hPa/km})^2} = 0.02 \text{ hPa/km}. \quad (21)$$

c-kohta

Geostrofisen tuulen x- ja y-komponentit saadaan laskettua seuraavasti:

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (22)$$

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (23)$$

Geostrofisen tuulen x-komponentti siis riippuu paineen y-suuntaisesta muutosnopeudesta ja päin vastoin. Paineen derivaatat x- ja y-suuntiin laskettiin jo äsken. Tarvitsemme vielä ilman tiheyden ja Coriolisparametrin f arvot. Ilman tiheys voidaan laskea ilman tilanyhtälöstä kun tiedetään paine ja lämpötila. Paine on annettu tehtävässä x:n ja y:n funktiona, mutta käytetään tässä vain keskimääräistä arvoa 1000 hPa. Lämpötilalle on annettu vain yksi arvo, 283 K. Tiheys lasketaan seuraavasti:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{100000 \text{ Pa}}{287.058 \text{ J/(kg K)} 283 \text{ K}} = 1.230... \text{ kg m}^{-3} \approx 1.23 \text{ kg m}^{-3}. \quad (24)$$

Huomaa että paineen arvo on muutettu hektopascaleista pascaleihin kertomalla se sadalla, jotta saadaan yksiköksi kilogrammaa kuutiometriä kohden. Coriolisparametri f saadaan laskettua seuraavasti:

$$f = 2\Omega \sin\varphi. \quad (25)$$

Tässä Ω on maan kierto liikkeen (akselinsa ympäri) kulmanopeus, $\frac{2\pi}{86400 \text{ s}}$, ja φ on leveyspiiri jolla liike tapahtuu. Saadaan siis

$$f = 2 \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \sin(45^\circ \text{N}) = 1.0284...10^{-4} \text{ s}^{-1} \approx 1.02 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}. \quad (26)$$

Nyt meillä on kaikki tarvittavat komponentit geostrofisen tuulen laskemiseen. Paineen derivaatat ovat tähän mennessä olleet yksiköissä hPa/km: nyt ne pitää vielä muuntaa yksiköihin Pa/m, että saadaan vastaus metreissä sekunnissa. Saadaan geostrofisen tuulen komponenteiksi

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \approx -\frac{-0.002 \text{ Pa m}^{-1}}{1.23 \text{ kg m}^{-3} \times 1.02 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}} \quad (27)$$

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{10000 \text{ Pa} \frac{2\pi}{1000000 \text{ m}} \cos\left(\frac{2\pi}{1000000 \text{ m}} x\right)}{1.23 \text{ kg m}^{-3} \times 1.02 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}}. \quad (28)$$

Tuulen x-komponentti on siis vakio, ja y-komponentti riippuu x :n arvosta. Pisteessä $(0,0)$ saadaan tuuleksi

$$u_g = -\frac{-0.002 \text{ Pa m}^{-1}}{1.23 \text{ kg m}^{-3} \times 1.02 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}} = 15.798... \text{ m s}^{-1} \approx 16 \text{ m s}^{-1} \quad (29)$$

$$v_g = \frac{10000 \text{ Pa} \frac{2\pi}{1000000 \text{ m}}}{1.23 \text{ kg m}^{-3} \times 1.02 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}} = 49.631... \text{ m s}^{-1} \approx 50 \text{ m s}^{-1}. \quad (30)$$

Näin ollen geostrofinen tuuli osoittaa pohjoiskoilliseen, paineen samanarvonkäyrän suuntaisesti. Geostrofisen tuulen itseisarvo saadaan taas komponenttien neliöiden summan neliöjuurena: tulos on noin 52 metriä sekunnissa.