ELEMENTI DI LOGICA

DEF *una <u>proposizione della logica</u> è un ente espresso con una proposizione in forma affermativa, che assume uno e uno solo dei valori logici vero e falso*

DEF *una proposizione con elemento parametrico n, che opportunamente sostituito la fa diventare una proposizione delle logica, è un <u>predicato della logica</u>*

DEF *sono <u>composizioni elementari</u> la negazione $\neg p$ (non p), la congiunzione $p \wedge q$ (p e q), la alternativa $p \vee q$ (p o q), l'implicazione $p \rightarrow q$ (se p allora q), la biimplicazione $p \leftrightarrow q$ (p sse q)*

DEF *composizioni di valore logico noto a priori vengono chiamate principi universali della logica (teoremi della logica) e le composizioni sempre vere sono dette <u>tautologie</u> e quelle sempre false <u>contraddizioni</u>*

DEF *sia $\wp$ un insieme di proposizioni, diremo <u>congiunzione multipla</u> delle proposizioni di $\wp$ la proposizione $\wedge\wp$, che è vera se sono vera tutte le proposizioni di $\wp$, falsa altrimenti*

DEF *sia $\wp$ un insieme di proposizioni, diremo <u>alternativa multipla</u> delle proposizioni di $\wp$ la proposizione $\vee\wp$, che è vera se sono vera almeno una proposizione di $\wp$, falsa altrimenti*

INTRODUZIONE AI PROBLEMI DELL'INCERTEZZA

EVENTI E OPERAZIONI CON EVENTI

TEO *affinché le conclusioni sui valori logici delle proposizioni possano essere condivise da tutti, lo stato di informazione deve descrivere il problema e i dati che lo riguardano mediante una proposizione delle logica che si sa essere vera (stato d'informazione reale), o che la si suppone tale (stato d'informazione ipotetico)*

DEF *siano α, p, q proposizioni della logica e nell'ipotesi α (cioè sub α), sia deducibile che p e q hanno lo stesso valore logico ($p \leftrightarrow q$ è una proposizione vera), allora diremo che <u>p è equivalente a q</u> (sub α), cioè $p \sim q$ (sub α)*

DEF *siano $\wp$ un insieme di proposizioni, α uno stato d'informazione, allora proposizioni equivalenti descrivono una medesima circostanza (definiscono un medesimo <u>evento</u>), e gli eventi descrivibili con le proposizioni di $\wp$ sono gli elementi (classi di equivalenza) dell'insieme quoziente $\wp/_\alpha$ relativi alla relazione di equivalenza ~ (sub α)*

DEF *a ogni <u>evento</u> si attribuisce come valore logico quello comune alle proposizioni che lo compongono e si dice che esso è <u>possibile</u> se il valore di tali proposizioni non è deducibile, <u>certo</u> se è deducibile vero, <u>impossibile</u> se è deducibile falso*

DEF *è <u>base</u> della descrizione, l'insieme $\mathbb{B}=\beta/_\alpha$ (con β insieme di proposizioni della logica) cioè l'insieme degli eventi definiti dalle proposizioni di β*

TEO *il limite di descrivibilità di una situazione incerta per mezzo delle proposizioni di β è costituito dalla base delle descrizione e da eventi definiti dalle proposizioni composte con proposizioni di β (che sono interpretabili come risultati di operazioni con gli eventi di $\mathbb{B}$)*

DEF *siano p una proposizione, $\wp$ un insieme di proposizioni, α lo stato d'informazione, si definisce <u>l'evento</u> $E=p/_\alpha$, e <u>l'insieme di eventi</u> $\mathcal{E}=\wp/_\alpha$*

DEF *le operazioni sono <u>consistenti</u> se il loro risultato non varia sostituendo le proposizioni usate per definirle da proposizioni equivalenti*

DEF *sia $\mathbb{B}=\beta/_\alpha$, gli eventi descrivibili per mezzo delle proposizioni di β sono gli eventi composti ottenuti operando in tutti i modi possibili con gli eventi di $\mathbb{B}$, e sono detti <u>eventi composti di base $\mathbb{B}$</u>*

DEF *un evento E si dice <u>logicamente dipendente</u> dagli eventi dell'insieme $\mathbb{B}$ (da $\mathbb{B}$), se il suo valore logico è deducibile se si conoscono tutti i valori logici degli eventi di $\mathbb{B}$, qualunque essi siano*

DEF *l'insieme degli eventi logicamente dipendenti da $\mathcal{E}$ si indica con <u>$\mathcal{D}_L(\mathbb{B})$</u>*

TEO *l'insieme degli eventi composti di base $\mathbb{B}$ è incluso in $\mathcal{D}_L(\mathbb{B})$*

DEF *relazione di uguaglianza : due eventi E_1, E_2 definiti dalle proposizioni p_1, p_2 nello stato di informazione α sono uguali se e solo se p_1 e p_2 sono equivalenti ovvero se $p_1 \sim p_2$ (sub α)*

DEF *relazione di implicazione : siano due eventi E_1, E_2 definiti dalle proposizioni p_1, p_2, si dice che E_1 implica E_2 ($E_1 \Rightarrow E_2$) se e solo se siamo in grado di asserire che la proposizione $p_1 \rightarrow p_2$ è vera (sub α)*

DEF *relazione di incompatibilità : sia $\mathcal{E}$ un insieme di eventi, si dice che gli eventi di $\mathcal{E}$ sono incompatibili se e solo se siamo in grado di asserire che non possono essere tutti veri, cioè $\wedge\mathcal{E}=\varnothing$*

DEF *relazione di esaustività : sia $\mathcal{E}$ un insieme di eventi, si dice che gli eventi di $\mathcal{E}$ sono esaustivi se e solo se siamo in grado di asserire che almeno uno di essi è vero, cioè $\vee\mathcal{E}=\Omega$*

DEF *un insieme di eventi $\mathbb{P}$ è una partizione dell'evento certo Ω se e solo se i suoi eventi sono esaustivi e a due a due incompatibili (tali cioè che uno e uno solo di essi si verifichi)*

DEF *gli elementi di $\mathbb{P}$ sono detti costituenti*

DEF *i costituenti non impossibili sono detti eventi elementari (se lo sono tutti la partizione è $\mathbb{P}^{\varnothing}=\mathbb{P}-\{\varnothing\}$)*

DEF *sono dette partizioni associate le partizioni $\mathbb{P}^{\varnothing}$ e $\mathbb{P}^{\varnothing}\cup\{\varnothing\}$*

DEF *la partizione $\{\Omega\}$ e la sua associata $\{\Omega,\varnothing\}$ sono prive di costituenti possibili (descrivono la certezza) e per questo motivo prende il nome di partizione nulla*

DEF *un evento E si dice logicamente dipendente da una partizione $\mathbb{P}$, se il suo valore logico è deducibile dall'ipotesi che un evento elementare sia vero, qualunque esso sia*

DEF *sia un evento E e $\omega\in\mathbb{P}$, sono eventi elementari di tipo 1 quelli che $\omega\Rightarrow E$, cioè $\omega\wedge\neg E=\varnothing$*
tipo 2 quelli che $\omega\Rightarrow\neg E$, cioè $\omega\wedge E=\varnothing$
tipo 3 quelli che $\omega\wedge E$ e $\omega\wedge\neg E$ entrambi possibili

DEF *E è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$ se i suoi eventi elementari sono tutti di tipo 1 o (aut) di tipo 2, ovvero se il valore di E è sempre deducibile*

DEF *E è logicamente indipendente da $\mathbb{P}$ se i suoi eventi elementari sono tutti di tipo 3, ovvero se il valore di E non è mai deducibile*

DEF *E è logicamente semidipendente da $\mathbb{P}$ se i suoi eventi elementari sono sia di tipo 1 o (vel) di tipo 2 che di tipo 3, ovvero se il valore logico di E è talvolta deducibile e altre volte no*

TEO *gli eventi logicamente dipendenti da una partizione $\mathbb{P}$ si possono esprimere tutti e soli come somma di suoi costituenti; inoltre se $E=\vee\mathcal{E}$ con $\mathcal{E}\subset\mathbb{P}$, allora $\neg E=\vee(\mathbb{P}-\mathcal{E})$*

TEO *se $\mathbb{P}$ è finita e sono n i suoi eventi elementari, sono allora 2^n gli eventi di $\mathcal{A}_L(\mathbb{P})$, tanti quanti i sottoinsiemi di $\mathbb{P}^{\varnothing}$*

DEF *se $\mathcal{E}\subset\mathbb{P}$, l'evento $E=\vee\mathcal{E}$ si può allora indicare con $\mathcal{E}$ e i suoi eventi elementari si dicono componenti di E*

DEF *siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$, si dice che $\mathbb{P}'$ è più fine di $\mathbb{P}$ se e solo se ogni costituente di $\mathbb{P}$ è logicamente dipendente da $\mathbb{P}'$*

LEM *sia E un evento non impossibile, $\mathbb{P}$ una partizione di Ω, allora esiste un $\omega\in\mathbb{P}^{\varnothing}$ tale che $\omega\wedge E\neq\varnothing$*

DIM
per semplicità poniamo $\mathbb{P}=(\omega_1,\dots,\omega_n)$
$\Rightarrow$ *per definizione di partizione $\omega_1\vee\dots\vee\omega_n=\Omega$*
$\Rightarrow E=E\wedge\Omega=E\wedge(\omega_1\vee\dots\vee\omega_n)=(E\wedge\omega_1)\vee\dots\vee(E\wedge\omega_n)$
$\Rightarrow (E\wedge\omega_1)\vee\dots\vee(E\wedge\omega_n)=E\neq\varnothing$
$\Rightarrow$ *per definizione di somma logica esiste ω_i tale che $E\wedge\omega_n$ è possibile*

TEO *siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$, la partizione $\mathbb{P}'$ è più fine di $\mathbb{P}$ se e solo se ogni costituente di $\mathbb{P}'$ ne implica uno di $\mathbb{P}$*

TEO *siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$, la partizione $\mathbb{P}'$ è più fine di $\mathbb{P}$, allora $\mathcal{A}_L(\mathbb{P})\subset\mathcal{A}_L(\mathbb{P}')$*

DIM
se $E\in\mathcal{A}_L(\mathbb{P})$, la proposizione 2.6.2 esso è allora somma logica di eventi elementari di $\mathbb{P}$, ciascuno dei quali è somma logica di eventi elementari di $\mathbb{P}'$
$\Rightarrow$ *E è anche somma logica di eventi elementari di $\mathbb{P}'$*
$\Rightarrow$ *per la proposizione si ha che $E\in\mathcal{A}_L(\mathbb{P})$,*

DEF *date le partizioni $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$, l'insieme $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n=\{\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n: \omega_1\in\mathbb{P}_1,\dots,\omega_n\in\mathbb{P}_n\}$ si dice partizione prodotto di $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ o anche partizione congiunta delle partizioni marginali $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$*

TEO *la partizione prodotto di $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ è una partizione di Ω più fine di ciascuna delle $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$, ed è la meno fine che gode di questa proprietà*

DEF *le partizioni $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ si dicono logicamente indipendenti se i costituenti della partizione prodotto $\mathbb{P}_1^{\varnothing}\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n^{\varnothing}$ sono tutti possibili*

DEF *dati gli eventi $E_1,\dots,E_n$, l'insieme $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)=\{E_1,\neg E_1\}\wedge\dots\wedge\{E_n,\neg E_n\}=\{E_1'\wedge\dots\wedge E_n': \forall$ scelta degli apici$\}$ si dice partizione generata dagli eventi $E_1,\dots,E_n$ o dall'insieme di eventi $\{E_1,\dots,E_n\}$ indicandola con $\mathbb{P}_G\{E_1,\dots,E_n\}$*

TEO *data una $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$, gli eventi $E_1,\dots,E_n$ (e le loro negazioni) sono logicamente dipendenti da essa, la quale risulta essere la partizione meno fine che gode di questa proprietà*

DEF *gli eventi $E_1,\dots,E_n$ si dicono logicamente indipendenti se i costituenti della $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$ sono tutti possibili*

APPROCCIO ALLA VALUTAZIONE : PROBABILITÀ

NOZIONE DI PROBABILITÀ

DEF *nello schema delle scommesse, la probabilità di un evento viene interpretata come la quota che si è disposti a pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica (nb : chi punta $S \cdot P(E)$ ha diritto di vincere S)*

DEF *sia $\mathcal{A}$ un algebra di eventi con $E_1 \wedge E_2 = \varnothing$, un'applicazione di $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{R}$ è una probabilità (assoluta) se e solo se soddisfa alle proprietà di normalizzazione $P(\Omega)=1$, non negatività $P(E) \geq 0$, additività $P(E_1 \vee E_2)=P(E_1)+P(E_2)$*

TEO *proprietà della probabilità :*

- $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$
- $P(\phi) = 0$
- $0 \leq P(E) \leq 1$
- $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \wedge E_2)$
- subadditività : $P(E_1 \vee E_2) \leq P(E_1) + P(E_2)$
- monotonia : se $E_1 \Rightarrow E_2$, allora $P(E_1) \leq P(E_2)$
- principio d'inclusione/esclusione :

$$P(E_1 \vee \ldots \vee E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_h) - \sum_{h<i}^{1,n} P(E_h \wedge E_i) + \sum_{h<i<j}^{1,n} P(E_h \wedge E_i \wedge E_j) - \ldots + (-1)^{n+1} P(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$$

TEO *una volta valutata la probabilità degli eventi elementari di $\mathbb{P}$ non si è più liberi di scegliere in modo autonomo la distribuzione di probabilità su una partizione meno fine, la quale deve essere invece calcolata*

DIM *scelgo una distribuzione di probabilità per una partizione $\mathbb{P}$ finita*
$\Rightarrow$ tale scelta determina per additività le probabilità di tutti gli eventi logicamente dipendenti da $\mathbb{P}$
$\Rightarrow$ ciò determina anche le distribuzioni di probabilità su tutte le partizioni meno fini

TEO *una probabilità assegnata su una partizione $\mathbb{P}$ pone dei vincoli alla scelta delle distribuzioni di probabilità su partizioni più fini di lei, ma solitamente non tali da determinarle*

DIM *passo da $\mathbb{P}$ a una partizione propriamente più fine $\mathbb{P}'$*
$\Rightarrow$ esiste almeno un evento elementare di $\mathbb{P}$ somma logica di più di un evento elementare di $\mathbb{P}'$
$\Rightarrow$ almeno un $\omega_0 \in \mathbb{P}$ deve essere "spezzettato" (e se la probabilità di questo ω_0 non è nulla ...)
$\Rightarrow$ la probabilità di ω_0 può essere ripartita in modo arbitrario tra i "pezzi" che lo compongono

DEF *se gli eventi elementari di una partizione finita $\mathbb{P}$ (casi possibili) possono essere giudicati ugualmente probabili si è in condizioni di simmetria*

TEO *sia $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$ la partizione prodotto che descrive il risultato complessivo delle n estrazioni da un urna contenente s oggetti, la distribuzione uniforme su $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$ (cioè l'equiprobabilità dei suoi eventi elementari) induce distribuzioni uniformi su tutte le partizioni marginali, semplici e multiple*

DIM modalità con rimessa :

· *casi possibili :*
al momento di ogni singola estrazione tutti gli s oggetti sono presenti nell'urna
$\Rightarrow$ *le scelte possibili per l'evento elementare di ogni partizione marginale sono s*
$\Rightarrow$ *le partizioni $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$ sono allora logicamente indipendenti*
$\Rightarrow$ *gli eventi elementari di $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$ sono s^n*

· *casi favorevoli :*
fisso un evento elementare $(i)_h$ della partizione $\mathbb{P}_h$
$\Rightarrow$ *$\mathbb{P}_h$ è meno fine della partizione prodotto $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$*
$\Rightarrow$ *l'evento $(i)_h$ è logicamente dipendente da $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$*
$\Rightarrow$ *prendo tutte le n-ple che contengono "i" all'h-esimo posto*
$\Rightarrow$ $(i)_h=\vee\{(i_1,\ldots,i_{i-1},i,i_{i+1},\ldots,i_n):1\le i_1,\ldots,i_n\le s\}$
$\Rightarrow$ *$(i)_h$ è composto da s^{n-1} eventi elementari di $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$ (ho n-1 scelte perché "i" l'ho scelto fisso)*

· *probabilità :*
$\Rightarrow$ $P((i)_h)=s^{n-1}/s^n=1/s$
$\Rightarrow$ *per la genericità di $(i)_h$ si ha che gli eventi elementari di $\mathbb{P}_h$ sono equiprobabili (di probabilità 1/s)*
$\Rightarrow$ *essendo $\mathbb{P}_h$ generica, il ragionamento prova la tesi per tutte le partizioni marginali $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$*

modalità senza rimessa :

· *casi possibili :*
l'urna perde un oggetto all'atto di ogni singola estrazione
$\Rightarrow$ *sono impossibili tutti (e soli) i costituenti $(i_1,\ldots,i_n)$ della partizione prodotto $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$ con almeno un oggetto ripetuto (con almeno due numeri della n-pla uguali)*
$\Rightarrow$ *le partizioni $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$ non sono logicamente indipendenti*
$\Rightarrow$ *ho s scelte possibili per l'evento elementare $\mathbb{P}_1$, s-1 per l'evento elementare $\mathbb{P}_2$, …, s-n+1 per $\mathbb{P}_n$*
$\Rightarrow$ *i casi possibili (eventi elementari di $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$) sono $s(s-1)\ldots(s-n+1)=(s)_n$*

· *casi favorevoli :*
fisso un evento elementare $(i)_h$ logicamente dipendente da $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$
$\Rightarrow$ *come sopra* $(i)_h=\vee\{(i_1,\ldots,i_{i-1},i,i_{i+1},\ldots,i_n):1\le i_1,\ldots,i_n\le s\}$
$\Rightarrow$ *i costituenti possibili di $(i)_h$ sono tutti e soli quelli definiti dalle n-ple $(i_1,\ldots,i_{i-1},i,i_{i+1},\ldots,i_n)$ con $i_1,\ldots,i_{i-1},i_{i+1},\ldots,i_n$ distinti a due a due e distinti da i, che qui è elemento fisso*
$\Rightarrow$ *$(i)_h$ è composto da $(s-1)_{n-1}$ componenti*

· *probabilità :*
$\Rightarrow$ $P((i)_h)=(s-1)_{n-1}/(s)_n=1/s$
$\Rightarrow$ *per la genericità di $(i)_h$ e $\mathbb{P}_h$ segue la tesi*

TEO *nel modello senza rimessa, l'equiprobabilità sulla partizione in n-ple ordinate induce l'equiprobabilità sulla partizione in n-ple non ordinate (sui sottoinsiemi di n elementi), cioè se un modello d'estrazione prevede*
- *che vengano estratti n oggetti in modo sequenziale (uno alla volta)*
- *che le n-ple abbiano uguale probabilità di essere estratte*
- *che le probabilità dipendano dagli oggetti estratti e non dal loro ordine d'estrazione*

il modello di estrazione sequenziale (senza rimessa) può essere sostituito da quello che prevede l'estrazione di un sottoinsieme di n oggetti tutti in una volta (in ipotesi di equiprobabilità d'estrazione per tali sottoinsiemi)

DIM *considero gli eventi $\{i_1,\ldots,i_n\}$="gli oggetti estratti nelle n estrazioni sono $i_1,\ldots,i_n$" e $\{i_1,\ldots,i_n\}\subset\{1,\ldots,s\}$*
$\Rightarrow$ *il loro insieme è una partizione $\mathbb{P}'$, che descrive l'esito dell'estrazione senza riguardo per l'ordine*
$\Rightarrow$ *se è nota l'n-pla ordinata $(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$ sono noti anche gli oggetti estratti $\{i_1,\ldots,i_n\}$*
$\Rightarrow$ *la partizione $\mathbb{P}'$ è più fine di $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$*
$\Rightarrow$ *essendo n! n-ple ordinate, ogni evento elementare di $\mathbb{P}'$ è costituito da n! eventi elem. di $\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n$*
$\Rightarrow$ *la cardinalità di $\mathbb{P}'$ è $(s)_n/n!$, che è il numero dei sottoinsiemi di n elementi di un insieme di s*
$\Rightarrow$ *$P(\{i_1,\ldots,i_n\})=n!/(s)_n$, che è il rapporto tra casi favorevoli a $\{i_1,\ldots,i_n\}$ e casi possibili*
$\Rightarrow$ *la probabilità è la stessa per ogni evento elementare $\{i_1,\ldots,i_n\}$, in corrispondenza a ogni sottoinsieme di n elementi di $\{1,\ldots,s\}$*

TEO *nel modello con rimessa,* $P([n_1,...,n_s]) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_s!} \cdot \dfrac{1}{s^n}$

DIM *dato che l'estrazione avviene con rimessa*
$\Rightarrow$ *il risultato è una n-pla ordinata di soggetti (scelti tra 1,…s) nella quale sono ammesse ripetizioni*
$\Rightarrow$ *si definisce* n_i *il numero di ripetizioni dell'oggetto i-esimo della n-pla estratta*
$\Rightarrow$ *moltiplico i modi per scegliere* n_1 *posti per l'oggetto 1 tra gli n disponibili inizialmente nella n-pla di estrazione, con i modi per scegliere* n_2 *posti per l'oggetto 2 tra gli* $n\text{-}n_1$ *ancora disponibili ecc.*
$\Rightarrow$ *con riferimento all'estrazione mediante n-ple ordinate, si ha che le n-ple a cui corrispondono i numeri di ripetizione* $n_1,…,n_s$ *(che differiscono tra di loro solo per l'ordine) sono in numero di*

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-...-n_{s-1}}{n_s} = \frac{(n)_{n_1}}{n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)_{n_2}}{n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-...-n_{s-1})_{n_s}}{n_s!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_s!}$$

n-ple ordinate (casi favorevoli a $[n_1,...,n_s]$*), le quali compongono l'evento elementare che descrive l'estrazione di 1* n_1 *volte, di 2* n_2 *volte, di s* n_s *volte (prescindendo perciò dall'ordine)*
$\Rightarrow$ *dividendo per i casi possibili che sono* $1/s^n$*, ottengo la probabilità*

DEF *sia* $\{\omega_1,…,\omega_n\}$ *una partizione di* Ω *in eventi elementari, diremo* *funzione peso* *ogni applicazione non negativa* π *di dominio* $\{\omega_1,…,\omega_n\}$*, proporzionale alle probabilità* $P(\omega_1),…,P(\omega_n)$ *secondo un fattore positivo*

DEF *i* *pesi* $\pi(\omega_1),…,\pi(\omega_n)$ *misurano i rapporti delle probabilità di* $\omega_1,…,\omega_n$*, nel senso che si ha* $\pi(\omega_i)/\pi(\omega_h)=P(\omega_i)/P(\omega_h)$ *per ogni coppia di indici (i, h) tali che* $\pi(\omega_h)>0$

TEO *sia* π *una funzione peso definita sulla partizione* $\{\omega_1,…,\omega_n\}$*, allora le probabilità* $P(\omega_1),…,P(\omega_n)$ *si ottengono normalizzando i pesi* $\pi(\omega_1),…,\pi(\omega_n)$ *(nb : la condizione di normalizzazione è* $P(\omega_1)+…+P(\omega_n)=1$*),*
cioè : $P(\omega_h) = \pi(\omega_h) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \pi(\omega_i)$

PROBABILITÀ IN AMBIENTE INFINITO NUMERABILE

TEO *in ogni partizione* $\mathbb{P}$ *gli eventi elementari di probabilità positiva sono al più un insieme numerabile*

DIM *ovvio se l'insieme* $\mathbb{P}$ *è finito, quindi sia* $\mathbb{P}$ *infinito*
$\Rightarrow$ *supposto* $\omega_1,…,\omega_n \in \mathbb{P}$*,* $P(\omega_1)>1/(n+1)$*, i=1,…,n*
$\Rightarrow$ *la probabilità che viene attribuita agli* $\omega_1,…,\omega_n$ *supera n/(n+1)*
$\Rightarrow$ *ne rimane quindi meno di 1/(n+1) da attribuire alla collettività degli altri eventi elementari*
$\Rightarrow$ *non più di un caso possibile può avere probabilità >1/2, due al più probabilità >1/3, …*
$\Rightarrow$ *non più di n casi possibili possono avere probabilità >1/(n+1)*
$\Rightarrow$ *il loro numero non supera quello dei posti a loro riservati, che si possono numerare indicando nella prima riga un * per il posto riservato per probabilità >1/2, nella seconda riga due * per probabilità >1/3, …, nella n-esima riga n * per probabilità >1/(n+1)*
$\Rightarrow$ *al primo * della riga n-esima si assegna il numero 1+2+…+(n-1)+1=n(n-1)/2+1*

DEF *sia una* $\mathbb{P}$ *una partizione numerabile e P un'applicazione definita su* $\mathbb{P}$*, non negativa e di somma 1, esiste allora unica una probabilità su* $Д_L(\mathbb{P})$ *ammissibile con P, che si indica ancora con P;*
essa si ottiene attribuendo a ogni evento logicamente dipendente da $\mathbb{P}$ *probabilità uguale alla somma dei suoi componenti, e oltre essere normalizzata, non negativa e additiva, è anche* *σ-additiva**, verifica cioè la condiz. :*
- *se* $E_1,…,E_n,… \in Д_L(\mathbb{P})$ *e sono a due a due incompatibili riesce che* $P(E_1 \vee … \vee E_n \vee …)=P(E_1)+…+P(E_n)+…$

DEF *una* *probabilità* *si dice* *concentrata* *su una partizione* $\mathbb{P}$ *se attribuisce probabilità positiva e di somma 1 a un numero finito o numerabile dei suoi eventi elementari*

TEO *sia* $\mathbb{P}=\{\omega_1,…,\omega_n,…\}$ *una partizione numerabile; ogni applicazione non negativa* π *di dominio* $\mathbb{P}$*, positiva su almeno un evento elementare, si può interpretare come una funzione peso, cioè tale che per ogni coppia di eventi* (ω_1,ω_n) *con* $\pi(\omega_h)>0$ *riesca* $\pi(\omega_i)/\pi(\omega_h)=P(\omega_i)/P(\omega_h)$*; se la serie dei pesi* $\pi(\omega_1),…,\pi(\omega_n),…$ *converge, normalizzandoli si ottiene una probabilità concentrata su* $\mathbb{P}$ *che conserva tali rapporti,*
cioè : $P(\omega_h) = \pi(\omega_h) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \pi(\omega_i)$

TEO *sia X un numero aleatorio, $I \subset \Re$; se per ogni $x \in I$ riesce $P(X=x)=0$ è allora possibile togliere da I un numero finito di elementi (numeri) senza alterare la probabilità dell'evento $X \in I$;*
in dettaglio, se $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset I$ e $I' = I - \{x_1, \ldots, x_n\}$, nelle ipotesi dette riesce $P(X=I')=P(X \in I)$

DIM *riesce infatti $P(X=I)=P(X \in I')+P(X=x_1)+\ldots+P(X=x_n)=P(X \in I')$*

DEF *sia X un numero aleatorio, prende il nome di <u>funzione di ripartizione</u> di X la funzione $F(x)=P(X \leq x)$, $\forall x \in \Re$*

TEO *proprietà della funzione di ripartizione :*
a) *gli eventi di $\{X \leq x : x \in \Re\}$ costituiscono una famiglia monotona, nel senso che se $x<y$, allora $(X \leq x) \Rightarrow (X \leq y)$ e quindi si ha $F(x) \leq F(y)$*
b) *poiché $(X \leq y)=(X \leq x) \vee (x<X \leq y)$ riesce $P(X \leq y)=P(X \leq x)+P(x<X \leq y)$, da cui si ricava $P(x<X \leq y)=F(y)-F(x)$*

TEO *sia F la funzione di ripartizione di un numero aleatorio X e x è punto di continuità di F, allora $P(X=x)=0$*

DIM *poiché $(X=x) \Rightarrow (\xi<X \leq x)$, per la monotonia della probabilità e dato che $P(x<X \leq y)=F(y)-F(x)$*
$\Rightarrow P(X=x) \leq P(\xi<X \leq x)=F(x)-F(\xi)$
$\Rightarrow P(X=x) \leq \lim_{\xi \to x}(F(x)-F(\xi)) = F(x)-\lim_{\xi \to x}F(\xi) = F(x)-F(x)=0$

TEO *sia X un num. aleatorio, allora $F(x)=P(X \leq x)$, $x \in \Re$, è una sua funzione di ripartizione, se verifica le proprietà :*
a) *F è monotona non decrescente*
b) *F è continua a destra*
c) *se $(X \leq x)=\varnothing$, allora $F(x)=0$*
d) *se $(X \leq x)=\Omega$, allora $F(x)=1$*
e) *se $(X \leq x)=(X \leq y)$, allora $F(x)=F(y)$*
f) $\lim_{n \to -\infty}F(x)=0$; $\lim_{n \to +\infty}F(x)=1$
g) *se x è un punto di continuità di F, allora $P(X=x)=0$*
h) *se x è un punto di discontinuità (di salto) di F, allora $P(X=x)=F(x)-F(x^-)$*

DEF *sia F la funzione di ripartizione di un numero aleatorio X, x un punto di continuità di F; prende il nome di <u>densità di probabilità</u> in x, e la si indica con f(x), il seguente limite, se esiste :*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x-\Delta x < X \leq x+\Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x-\Delta x)}{2\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

TEO *dato un numero aleatorio X con determinazioni nel continuo, sia g una funzione non negativa definita in $\Re$, nulla per ogni x non appartenente all'immagine di X; se g è integrabile tra $-\infty$ e $+\infty$, allora essa determina la densità di probabilità $f=kg$, compatibile con X, calcolando la costante k in modo che riesca (normalizzando) :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} kg(x)dx = 1 \Rightarrow k = 1 \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \qquad e\ \forall x \in \Re \ riesce\ che \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

EVOLUZIONE DELL'INCERTEZZA PER INCREMENTO D'INFORMAZIONE

EVENTI CONDIZIONATI

TEO
1. *il numero degli eventi elementari nello stato d'informazione finale $\alpha\wedge\beta$, non può superare quello degli eventi elementari di partenza (nello stato d'informazione α)*
2. *qualunque sia l'incremento β, eventi incompatibili rimangono incompatibili*
3. *gli eventi elementari ancora possibili dopo l'incremento d'informazione β sono ancora incompatibili, e la loro somma logica è Ω perché si conserva, ovviamente, anche la relazione di esaustività*

cioè : tutte le relazioni esistenti nello s. inf. α continuano a sussistere (si conservano) anche nello s. inf. $\alpha\wedge\beta$

DEF *siano E e H eventi definiti dalle proposizioni p e h in uno stato d'inf. α con $H\neq\varnothing$, diremo evento E condizionato (subordinato) a H l'evento $E/H=p|_{\alpha\wedge h}$ e si dà il nome di ipotesi (o evento ipotesi) al componente H*

DEF *in contrapposizione alla nozione di evento condizionato, gli eventi definiti nello stato d'informazione iniziale prendono il nome di eventi assoluti*

TEO *siano E, F, H, K eventi nello stato d'informazione α, con $H\wedge K\neq\varnothing$, allora si ha :*

a) $E/\Omega=E$ ⇦ *dice che gli eventi assoluti si possono considerare come caso particolare di eventi condizionati, scegliendo l'evento certo Ω come evento condizionante*

b) $H/H=\Omega|_H$, $\neg H/H=\varnothing|_H$ ⇦ *dicono che quando si considerano gli eventi condizionati a H, si può eliminare dal quadro delle possibilità l'evento $\neg H$, perché $\neg H/H$ è impossibile*

c) $E/H=E\wedge H/H$ ⇦ *dice che nel quadro delle possibilità descritto da eventi condizionati a H, gli eventi assoluti vengono sostituiti dai loro prodotti logici con H*

d) $(E/H)/(K/H)=(E/K)/(H/K)=E/H\wedge K=E/K\wedge H$

e) $E/H=F/H$ *sse* $E\wedge H=F\wedge H$

DIM
a) *per definizione* $E/\Omega=p|_{\alpha\wedge\Omega}=p|_\alpha=E$
b) *se H è vero, vero sub vero ⇒ vero; ma H non è può essere falso ⇒ impossibile*
c) *essendo H vero, se E è vero $E\wedge H$ è vero e se E è falso $E\wedge H$ è falso ⇒ $E\wedge H=E$*
d) *no dim. (*)*
e) *per la c) si ha che $E/H=F/H$ sse $E\wedge H/H=F\wedge H/H$ sse $E\wedge H=F\wedge H$*

TEO *sia $\mathbb{P}$ una partizione di Ω, l'insieme $\mathcal{A}_L(\mathbb{P})/\mathcal{A}_L^{\varnothing}(\mathbb{P})$ rappresenta il massima quadro delle possibilità che si riesce a descrivere (in termini assoluti e condizionati) mediante gli eventi elementari della partizione $\mathbb{P}$;*
inoltre $\mathcal{A}_L(\mathbb{P})=\mathcal{A}_L(\mathbb{P})/\Omega\subset\mathcal{A}_L(\mathbb{P})/\mathcal{A}_L^{\varnothing}(\mathbb{P})$

TEO *il risultato di un'operazione con eventi condizionati si può ottenere anche eseguendo prima le operazioni con gli eventi assoluti, e condizionando poi il risultato*

DIM
posto $E_i=p_i|_\alpha$:
a) $(E_1/H)\wedge(E_2/H) = (p_1|_{\alpha\wedge h})\wedge(p_2|_{\alpha\wedge h}) = (p_1\wedge p_2)|_{\alpha\wedge h} = (E_1\wedge E_2)/H$
b) $\neg\vee(E_i/H) = \neg\vee(p_i|_{\alpha\wedge h}) = \neg[(\vee p_i)|_{\alpha\wedge h}] = (\neg\vee p_i)|_{\alpha\wedge h} = (\neg\vee E_i)/H$

TEO
1. *se E_1 ed E_2 sono incompatibili, lo sono anche E_1/H e E_2/H*
2. *se E_1/H e E_2/H sono incompatibili, non è detto che lo siano E_1 e E_2*

DIM
1. $E_1\wedge E_2=\varnothing \Rightarrow E_1\wedge E_2/H=\varnothing|_H \Rightarrow E_1/H\wedge E_2/H=\varnothing|_H$ *quindi E_1/H e E_2/H sono incompatibili*
2. *se $E_1/H\Rightarrow E_2/H$ allora $E_1\wedge E_2/H=E_1/H \Rightarrow E_1\wedge E_2\wedge H=(E_1\wedge H)\wedge(E_2\wedge H)=E_1\wedge H$ allora $E_1\wedge H\Rightarrow E_2\wedge H$ quindi $E_1\wedge E_2\neq\varnothing \Rightarrow$ è un caso in cui E_1 e E_2 non sono incompatibili*

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

DEF *per ogni coppia di eventi A e B, si definisce* $\underline{\delta(A\Rightarrow B)}=\{1$ *se* $A\Rightarrow B$ $(A\wedge B=A)$, *0 altrimenti;*
nb : la probabilità degli eventi logicamente dipendenti da una partizione finita $\mathbb{P}=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ *non impossibili, per ogni* $E\in Д_L^{\varnothing}(\mathbb{P})$ *è* $P(E)=\Sigma P(\omega_i)\delta(\omega_i\Rightarrow E)$, *in quanto il filtro* $\delta(\omega_i\Rightarrow E)=1$ *sse* ω_i *è componente di E*

TEO *la condizione di simmetria si conserva dopo l'incremento d'informazione solo se l'evento ipotesi è logicamente dipendente dalla partizione scelta per descrivere la situazione in esame*

DIM
a) *quando un evento H è logicamente dipendente da una partizione* $\mathbb{P}$
$\Rightarrow$ *i suoi eventi elementari* ω *si ripartiscono in modo netto tra quelli che implicano H (per i quali* ω/H *è possibile) e quelli che implicano* $\neg H$ *(per i quali* ω/H *è impossibile)*
$\Rightarrow$ *la probabilità P(H) è somma della probabilità dei componenti di H, i quali in ipotesi di simmetria contribuiscono in uguale misura alla formazione della probabilità P(H)*
b) *quando un evento H non è logicamente dipendente da una partizione* $\mathbb{P}$
$\Rightarrow$ *esistono eventi elementari* ω *(almeno uno) tali che* $\omega\wedge H$ *e* $\omega\wedge\neg H$ *siano entrambi possibili*
$\Rightarrow$ *anche loro non sono logicamente indipendenti da* $\mathbb{P}$
$\Rightarrow$ *se la probabilità di tali* ω *è positiva, non si sa quanta di essa vada a* $\omega\wedge H$ *e quanta a* $\omega\wedge\neg H$
$\Rightarrow$ *gli eventi elementari di* $\mathbb{P}$ *possono contribuire in modo ineguale alla formazione della probabilità di H, rompendo così la condizione di simmetria*

DEF *sia* $Д$ *un algebra di eventi, P una probabilità su* $Д$, $Д^+=\{H\in Д: P(H)>0\}$; *diremo* <u>*probabilità condizionata*</u> *l'applicazione* $P(\bullet/\bullet)$ *definita, per ogni* $E\in Д$ *e* $H\in Д^+$ *(di dominio* $Д/Д^+$*) dalla* $P(E/H)=P(E\wedge H)/P(H)$

DIM
consideriamo una partizione $\mathbb{P}=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$, *una probabilità P definita su di essa e quindi su* $Д_L(\mathbb{P})$
$\Rightarrow$ *per ogni evento* $H\in Д_L(\mathbb{P})$ *di probabilità positiva, si definisce la probabilità condizionata su* $\mathbb{P}/H$ *quella che corrisponde alla funzione peso* $\pi(\omega_i/H)=\{P(\omega_i)$ *se* $\omega_i\Rightarrow H$, *0 se* $\omega_i\Rightarrow\neg H$
$\Rightarrow$ *sommando i pesi si ha* $\Sigma\pi(\omega_i/H)\delta(\omega_i\Rightarrow H)=\Sigma P(\omega_i)\delta(\omega_i\Rightarrow H)=P(H)$
$\Rightarrow$ *normalizzando si ottiene la probabilità* $P(\omega_i/H)=P(\omega_i)/P(H)$, *per ogni* ω_i/H *possibile, 0 altrimenti*
$\Rightarrow$ *prolungando la probabilità trovata per additività da* $\mathbb{P}/H$ *a* $Д_L(\mathbb{P}/H)$, *si deve porre* $P(\varnothing|_H)=0$ *mentre per ogni altri evento* $E\in Д_L^{\varnothing}(\mathbb{P})$ *si ricava :*
$P(E/H)=P(E\wedge H/H)=\Sigma P(\omega_i/H)\delta(\omega_i\Rightarrow E\wedge H)=[1/P(H)]\cdot\Sigma P(\omega_i)\delta(\omega_i\Rightarrow E\wedge H)=P(E\wedge H)/P(H)$

TEO *in ambiente finito, assegnata una probabilità P su* $Д_L(\mathbb{P})$, *per ogni* $H\in Д_L(\mathbb{P})$ *di probabilità positiva esiste un'unica probabilità condizionata su* $Д_L(\mathbb{P})/H$ *che conserva i rapporti delle probabilità degli eventi elementari di* $\mathbb{P}$ *che risultano ancora possibili dopo il condizionamento*

DIM
se $E_1/H, E_2/H\in Д_L(\mathbb{P}/H)$ *e* $P(E_2/H)>0$ *allora :* $\dfrac{P(E_1/H)}{P(E_2/H)}=\dfrac{P(E_1\wedge H)}{P(H)}\Big/\dfrac{P(E_2\wedge H)}{P(H)}=\dfrac{P(E_1\wedge H)}{P(E_2\wedge H)}$
dato che tutti gli eventi che implicano H si possono scrivere nella forma $E\wedge H$ *(=E se* $E\Rightarrow H$*), la prob. definita da* $P(E/H)=P(E\wedge H)/P(H)$ *conserva i rapporti delle probabilità degli eventi che implicano H*

TEO *se* E_1/H *e* E_2/H *sono incompatibili, allora riesce* $P(E_1\vee E_2/H)=P(E_1/H)+P(E_2/H)$

DIM
$P(E_1\vee E_2/H)=P[(E_1\wedge H)\vee(E_2\wedge H)]/P(H)=P(E_1\wedge H)/P(H)+P(E_2\wedge H)/P(H)=P(E_1/H)+P(E_2/H)$

TEO *se* $P(\bullet/\bullet)$ *è l'applicazione definita in* $Д/Д^+$ $\Rightarrow$ $\forall H\in Д^+$ *l'applicazione* $P(\bullet/H)$ *di dominio* $Д/H$ *è una probabilità*

TEO *probabilità composte : siano E e H eventi nello stato d'informazione* α, *con* $H\neq\varnothing$, *allora* $P(E\wedge H)=P(H)P(E/H)$

DIM
definiamo la probabilità di E/H quando P(H)>0 e affinché E/H abbia senso è sufficiente che $H\neq\varnothing$;
a) *l'uguaglianza sussiste banalmente se P(H)=0, perché* $E\wedge H\Rightarrow H$ *e quindi* $P(E\wedge H)\leq P(H)=0$
b) *altrimenti l'uguaglianza è conseguenza immediata della definizione di probabilità condizionata*

TEO *siano* $E_1,\ldots,E_n$ *eventi;* $E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1}\neq\varnothing\Rightarrow P(E_1\wedge\ldots\wedge E_n)=P(E_1)P(E_2/E_1)\ldots P(E_n/E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1})$

DIM
nb : il secondo membro ha senso perché la condizione $E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1}\neq\varnothing$ *implica che tutti gli eventi ipotesi previsti siano diversi da* $\varnothing$, *perché* $E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1}$ *implica ciascuno di essi*
$\Rightarrow$ *sostituendo in* $P(E\wedge H)=P(H)P(E/H)$ *l'evento E con* E_n *e H con* $E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1}$
$\Rightarrow P(E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1}\wedge E_n)=P(E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1})P(E_n/E_1\wedge\ldots\wedge E_{n-1})$
$\Rightarrow$ *per induzione si ottiene la tesi, supponendo che essa valga per n-1*

TEO $P(E\wedge H/K)=P(H/K)P(E/K\wedge H)$

DIM
posto $E=p|_\alpha$, $H=h|_\alpha$, $K=k|_\alpha$ *:*
$\Rightarrow P(E\wedge H)=P(H)P(E/H)$ *si può scrivere* $P(p\wedge h|_\alpha)=P(h|_\alpha)P(p|_{\alpha\wedge h})$
$\Rightarrow$ *sostituendo* α *con* $\alpha\wedge k$ *si ricava* $P(p\wedge h|_{\alpha\wedge k})=P(h|_{\alpha\wedge k})P(p|_{\alpha\wedge k\wedge h})$ *e quindi la tesi*

TEO *disintegrabilità della probabilità :*
sia $\{H_1,\ldots,H_n\}$ *una partizione di* Ω, *allora per ogni evento E si ha* $P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(E/H_i)$

DIM
vedi : $E=E\wedge\Omega=(E\wedge(\vee H_i))=\vee(E\wedge H_i)$, *additività delle probabilità, teorema delle probabilità composte*

DEF *siano E e H eventi, con $H\neq\varnothing$:*
<u>correlazione</u> di E con H : E è correlato negativamente con H se $P(E/H)<P(E)$, positivamente se $P(E/H)>P(E)$
<u>indipendenza stocastica</u> di E con H : E è stocasticamente indipendente da H se $P(E/H)=P(E)$

TEO *se due eventi hanno probabilità positiva allora $P(E_1/E_2)/P(E_1)=P(E_2/E_1)/P(E_2)$*

TEO *se due eventi sono correlati, allora le loro negazioni sono correlate nello stesso senso e ciascuno di essi è correlato in senso inverso con la negazione dell'altro, cioè*
se $P(E_1/E_2)>P(E) \Rightarrow P(\neg E_1/\neg E_2)>P(\neg E_1) \Rightarrow P(\neg E_1/E_2)<P(\neg E_1)$

TEO *se E_1 è stocasticamente indipendente da E_2, allora si ha :*
a) *$\neg E_1$ è stocasticamente indipendente da E_2*
b) *$P(E_1'\wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ per ogni scelta degli apici*

DIM *per ipotesi è $P(E_1/E_2)=P(E_1)$, quindi :*
a) *$P(\neg E_1/E_2)=1-P(E_1/E_2)=1-P(E_1)=P(\neg E_1)$*
b) *si deve provare che nella nostra ipotesi la probabilità si fattorizza sui costituenti della $\mathbb{P}_G\{E_1,E_2\}$*
$\Rightarrow$ dato che $P(E_1\wedge E_2)=P(E_2)P(E_1/E_2)=P(E_1)P(E_2)$ la prob. si fattorizza per il costituente $E_1\wedge E_2$
$\Rightarrow$ da $E_1=(E_1\wedge E_2)\vee(E_1\wedge\neg E_2)$ si ricava $P(E_1)=P(E_1\wedge E_2)+P(E_1\wedge\neg E_2)=P(E_1)P(E_2)+P(E_1\wedge\neg E_2)$
$\Rightarrow P(E_1\wedge\neg E_2)=P(E_1)(1-P(E_2))=P(E_1)P(\neg E_2)$
$\Rightarrow$ analogamente si prova che $P(\neg E_1\wedge E_2)=P(\neg E_1)P(E_2)$ e quindi che $P(\neg E_1\wedge\neg E_2)=P(\neg E_1)P(\neg E_2)$

DEF *siano E_1 e E_2 due eventi logicamente indipendenti, diremo che essi sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se E_1 è stocasticamente indipendente sia da E_2 che da $\neg E_2$ (e viceversa), se riesce cioè :*
$P(E_1/E_2)=P(E_1/\neg E_2)=P(E_1)$ e $P(E_2/E_1)=P(E_2/\neg E_1)=P(E_2)$, cioè l'eventuale informazione sul valore logico assunto da uno dei due eventi non ha alcuna influenza sulla valutazione della probabilità dell'altro

nb : la presenza della condizione di indipendenza logica è giustificata dal fatto che se ci fosse dipendenza logica tra E_1 e E_2 si potrebbero avere scelte di probabilità estreme per i due eventi, togliendo così quella libertà di valutazione che è nello spirito della nozione di indipendenza stocastica, infatti :
gli eventi E_1 e E_2 non sono logicamente indipendenti se e solo se qualche costituente della loro partizione generata è impossibile, ad esempio se $E_1\wedge E_2=\varnothing$ allora riesce $P(E_1/E_2)=P(E_1\wedge E_2/E_2)=P(\varnothing/E_2)=0$ e analogamente $P(E_2/E_1)=0$ e quindi richiedere l'indipendenza stocastica in queste condizioni significa allora dover porre $P(E_1)=P(E_2)=0$

TEO *data una probabilità sugli eventi E_1 e E_2, riesce $\Sigma^{(')}P(E_1')P(E_2')=1$ e ponendo $P(E_1'\wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ si ottiene un'applicazione di dominio la partizione $\mathbb{P}_G(E_1,E_2)$, non negativa e di somma 1;*
affinché questa valutazione (detta "per fattorizzazione"), sia una probabilità occorre che essa assegni probabilità nulla a tutti gli eventuali costituenti impossibili, in particolare la valutazione per fattorizzazione è una probabilità se gli eventi E_1 e E_2 sono logicamente indipendenti

DIM *$1=[P(E_1)+P(\neg E_1)][P(E_2)+P(\neg E_2)]=P(E_1)P(E_2)+P(\neg E_1)P(E_2)+P(E_1)P(\neg E_2)+P(\neg E_1)P(\neg E_2)$*

nb : il teorema si può estendere per n eventi e, dato che la partizione $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$ è la partizione prodotto delle partizioni $\{E_1,\neg E_1\},\dots,\{E_n,\neg E_n\}$, anche per un numero finito di partizioni di cardinalità finita (v. ⇩)

TEO *date $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ partizioni di cardinalità finita $c_1,\dots,c_n$ con $\mathbb{P}_i=\{\omega_i(1),\dots,\omega_i(c_i)\}$ e $P(\omega_i(1))+\dots+P(\omega_i(c_i))=1$, allora si ha che $[P(\omega_1(1))+\dots+P(\omega_1(c_1))]\dots[P(\omega_n(1))+\dots+P(\omega_n(c_n))]=1 \Rightarrow \Sigma_{\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n} P(\omega_1)\dots P(\omega_n)=1$;*
ponendo $P(\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n)=P(\omega_1)\dots P(\omega_n)$ si ottiene un'applicazione di dominio la partizione $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$, non negativa e di somma 1; essa è una probabilità se assegna probabilità nulla a tutti i costituenti impossibili, in particolare se le partizioni $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ sono logicamente indipendenti

TEO *siano E_1 e E_2 eventi logicamente indipendenti :*
a) *se sono stocasticamente indipendenti, allora la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1,E_2)$*
b) *viceversa, se sono di probabilità non estreme (diversa da 0 e 1) e si prolunga la loro valutazione per fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(E_1,E_2)$, allora essi risultato stocasticamente indipendenti*

DIM
a) *stessa dimostrazione di : $P(E_1'\wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ per ogni scelta degli apici (v. ⇧)*
b) *per ipotesi $P(E_1'\wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ e $0<P(E_i')<1$ per $i=1,2$ e per ogni scelta degli apici*
$\Rightarrow P(E_1')=P(E_1'\wedge E_2')/P(E_2')=P(E_1'/E_2')$ e $P(E_2')=P(E_1'\wedge E_2')/P(E_1')=P(E_2'/E_1')$

DEF *siano $E_1,\dots,E_n$ eventi logicamente indipendenti, diremo che essi sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se per ogni $E_1'\wedge\dots\wedge E_n'\in\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$ si ha $P(E_i/E_1'\wedge\dots\wedge E_{i-1}'\wedge E_{i+1}'\wedge\dots\wedge E_n')=P(E_i)$*

nb : come nel caso di due eventi, anche qui è $P(\neg E_i/E_1'\wedge\dots\wedge E_{i-1}'\wedge E_{i+1}'\wedge\dots\wedge E_n')=P(\neg E_i)$ per ogni i; inoltre la nozione di indipendenza stocastica di n eventi si può esprimere dicendo che essi sono logicamente indipendenti e che ciascuno di essi è stocasticamente indip. da ogni costituente della partizione generata dai rimanenti

TEO *siano* $E_1,\dots,E_n$ *eventi logicamente indipendenti :*

a) *se sono stocasticamente indipendenti, allora la probabilità si fattorizza su* $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$
b) *viceversa, se sono di probabilità non estreme (diversa da 0 e 1) e si prolunga la loro valutazione per fattorizzazione su* $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$*, allora essi risultato stocasticamente indipendenti*

DIM

a) *no dim.*
b) *è indispensabile mostrare che se la probabilità si fattorizza su* $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$ *allora si fattorizza anche sulla partizione generata da ogni sottoinsieme di* $\{E_1,\dots,E_n\}$ *:*
   $\Rightarrow$ *sia infatti* $P(E_1'\wedge\dots\wedge E_n')=P(E_1')\dots P(E_n')$ *per ogni* $E_1'\wedge\dots\wedge E_n'\in\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$
   $\Rightarrow$ *osservato che* $E_1'\wedge\dots\wedge E_{n-1}'=(E_1'\wedge\dots\wedge E_{n-1}'\wedge E_n)\vee(E_1'\wedge\dots\wedge E_{n-1}'\wedge\neg E_n)$
   $\Rightarrow$ *teniamo conto dell'ipotesi di fattorizzazione*
   $\Rightarrow P(E_1'\wedge\dots\wedge E_{n-1}') = P(E_1')\dots P(E_{n-1}')P(E_n)+P(E_1')\dots P(E_{n-1}')P(\neg E_n) =$
   $= P(E_1')\dots P(E_{n-1}')[P(E_n)+ P(\neg E_n)] = P(E_1')\dots P(E_{n-1}')$
   $\Rightarrow$ *per la simmetria della situazione si possono ordinare gli eventi come si vuole e mettere all'ultimo posto uno qualsiasi degli* E_i
   $\Rightarrow$ *allora, ripetendo il calcolo precedente per ciascuno di questi ordinamenti, si conclude che la probabilità si fattorizza sui costituenti di ogni* $\mathbb{P}_G$ *da n-1 degli n eventi assegnati*
   $\Rightarrow$ *iterando il procedimento per i sottoinsiemi di n-1 eventi, e poi per quelli di n-2, ecc., si prova che se la probabilità si fattorizza su* $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$ *allora si fattorizza anche sulla partizione generata da ogni sottoinsieme di* $\{E_1,\dots,E_n\}$

   mettendoci ora nelle ipotesi del teorema :
   $\Rightarrow$ *sia* $0<P(E_i)<1$*,* $i=1,\dots,n$*,* $P(E_1'\wedge\dots\wedge E_n')=P(E_1')\dots P(E_n')$ *per ogni* $E_1'\wedge\dots\wedge E_n'\in\mathbb{P}(\{E_1,\dots,E_n\})$
   $\Rightarrow$ *allora* $0<P(E_i')<1$*, per ogni i, e quindi* $P(E_1')\dots P(E_n')>0$ *per ogni scelta degli apici*
   $\Rightarrow P(E_1/E_2'\wedge\dots\wedge E_n') = P(E_1'\wedge E_2'\wedge\dots\wedge E_n')/P(E_2'\wedge\dots\wedge E_n') =$
   $= [P(E_1')P(E_2')\dots P(E_n')]/[P(E_2')\dots P(E_n')] = P(E_1)$
   $\Rightarrow$ *per la simmetria della situazione, il risultato ora trovato per* E_1*, si può provare in corrispondenza a ogni* E_i *da cui segue la tesi*

TEO *se* ${}_1\mathcal{E}$ *e* ${}_2\mathcal{E}$ *sono sottoinsiemi disgiunti di* $\{E_1,\dots,E_n\}$*, allora ogni evento logicamente dipendente da* $\mathbb{P}_G({}_1\mathcal{E})$ *è stocasticamente indipendente da ogni evento non impossibile logicamente indipendente da* $\mathbb{P}_G({}_2\mathcal{E})$*, e viceversa*

DEF *date* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *partizioni logicamente indipendenti di cardinalità finita, diremo che esse sono* <u>*stocasticamente indipendenti*</u> *se per ogni* $\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n\in\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ *con* $\omega_i\in\mathbb{P}_i$*, si ha* $P(\omega_i/\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_{i-1}\wedge\omega_{i+1}\wedge\dots\wedge\omega_n)=P(\omega_i)$

TEO *siano* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *partizioni logic. indip. e siano assegnate a loro probabilità marginali e su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$*, allora :*

a) *se* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *sono stocasticamente indipendenti, la probabilità si fattorizza su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$
b) *viceversa, se le probabilità marginali sono positive su ogni evento elementare e vengono prolungate per fattorizzazione su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$*, allora* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *risultato stocasticamente indipendenti*

TEO *se le partizioni finite* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *sono stocasticamente indipendenti, allora la probabilità si fattorizza su* $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1)\wedge\dots\wedge\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$

DEF *dati* $X_1,\dots,X_n$ *numeri aleatori, diremo che essi sono* <u>*stocasticamente indipendenti*</u> *se sono tali le loro partizioni canoniche (cioè quelle che descrivono il numero elencando le sue determinazioni)*

TEO *un giudizio di simmetria su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ *induce l'indipendenza stocastica di* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$
(nb indipendenza stocastica che si realizza assegnando distribuzioni marginali uniformi)

DIM *siano* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *partizioni logicamente indipendenti e di cardinalità finita* $s_1,\dots,s_n$ *rispettivamente :*
$\Rightarrow$ *dato che gli* $s_1,\dots,s_n$ *costituenti di* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ *sono tutti possibili*
$\Rightarrow$ *per ogni* $\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n\in\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ *si ha* $P(\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n)=1/(s_1\dots s_n)=(1/s_1)\dots(1/s_n)=P(\omega_1)\dots P(\omega_n)>0$
$\Rightarrow$ *si applica il teorema che dice "se le probabilità marginali sono positive su ogni evento elementare e vengono prolungate per fattorizzazione su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$*, allora* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *risultato stoc. indip." (v. ⇧)*
$\Rightarrow$ *la scelta della distribuzione uniforme su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ *induce distribuzioni uniformi sulle singole partizioni* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *e implica anche che* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *siano stocasticamente indipendenti*

viceversa, se si suppongono $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *stocasticamente indipendenti :*
$\Rightarrow$ *si applica il teorema che dice "se* $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ *sono stoc. indip., la prob. si fattorizza su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$*"*
$\Rightarrow$ *se le probabilità marginali sono uniformi, allora è uniforme anche la probabilità su* $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$
$\Rightarrow$ *per ogni* $\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n\in\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ *si ha* $P(\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n)=(1/s_1)\dots(1/s_n)=1/(s_1\dots s_n)$

TEO *teorema di Bayes : siano E e H eventi,* $P(E)>0$*,* $H\neq\emptyset$*, allora si ha* $P(H/E)=[1/P(E)]P(H)P(E/H)$

DIM *si applica il teorema delle probabilità composte due volte, usando la prima come evento condizionante E e la seconda H si ricava :* $P(E\wedge H)=P(E)P(H/E)=P(H)P(E/H)$*, da cui la tesi*