Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 8 gennaio 2009

1. Da un'urna contenente 12 palline bianche e 16 palline nere, si eseguono estrazioni con modalità aleatoria; precisamente, si lancia un dado equilibrato e si effettuano estrazioni con rimessa, se esce un numero minore di 5, e senza rimessa, altrimenti. Considerati gli eventi:

   H = si effettuano estrazioni senza rimessa

   K = nelle prime 5 estrazioni un colore è stato estratto una volta più dell'altro

   calcolare $\Pr(H|K)$.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita sul trapezio ottenuto unendo il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e il quadrato Q di vertici opposti $(1,0)$, $(2,1)$ con densità proporzionale alla funzione:

   $$g(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } (x,y) \in T \\ xy & \text{se } (x,y) \in Q \end{cases}.$$

   Calcolare:

   - le speranze matematiche di X e Y;
   - la probabilità condizionata $\Pr(X - Y \leq \frac{1}{2} \,|\, (X,Y) \in T)$.

   Studiare la correlazione di X e Y.

3. Siano X, Y due v.a. tali che $\Pr(X \leq Y) = 1$. Indicate con F_X, F_Y le funzioni di ripartizione, rispettivamente, di X e Y, provare che riesce $F_Y \leq F_X$.

) $P(H|K) = \frac{P(K|H)}{P(K)} P(H)$!

$K =$ " 3 bianche e 2 nere " $\vee$ " 2 bianche e 3 nere "

$= "S_5 = 3" \vee "S_5 = 2"$

$$P(S_5 = 3|H) = \frac{\binom{12}{3}\binom{16}{2}}{\binom{28}{5}} = \frac{220}{819}$$

$$P(S_5 = 2|H) = \frac{\binom{12}{2}\binom{16}{3}}{\binom{28}{5}} = \frac{308}{819}$$

$$P(K|H) = \frac{220}{819} + \frac{308}{819} = \frac{176}{273}$$

$$P(S_5 = 3|\overline{H}) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4320}{16807}$$

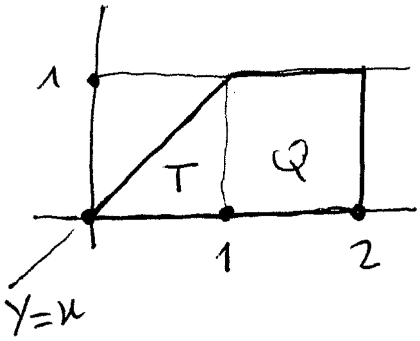
$$P(S_5 = 2|\overline{H}) = \binom{5}{2}\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{5760}{16807}$$

$$P(K|\overline{H}) = \frac{4320}{16807} + \frac{5760}{16807} = \frac{1440}{2401}$$

$$P(K) = P(K|\overline{H})P(\overline{H}) + P(K|H)P(H)$$
$$= \frac{1440}{2401} \cdot \frac{4}{6} + \frac{176}{273} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1208816}{2401 \cdot 819}$$

$$P(H|K) = \frac{176}{273} \cdot \frac{2401 \cdot 819}{1208816} \cdot \frac{2}{6} = \frac{26411}{75551} = 0,3496$$

2)



$$\int_{T\cup Q} g(x,y)\,dx\,dy = \int_T x\,dx\,dy + \int_Q xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x x\,dy + \int_1^2 dx \int_0^1 xy\,dy$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$$

$$f(x,y) = \frac{12}{13}\begin{cases} x & (x,y)\in T \\ xy & (x,y)\in Q \end{cases}$$

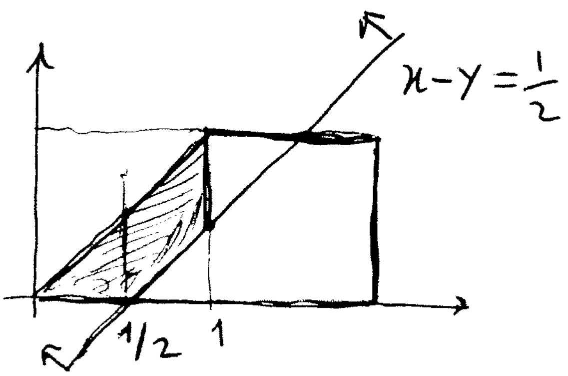
$$f_X(x) = \frac{12}{13}\begin{cases} \int_0^x x\,dy = x^2 & 0\le x\le 1 \\ \int_0^1 xy\,dy = \frac{1}{2}x & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{12}{13}\left[\int_0^1 x\cdot x^2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x\cdot x\,dx\right] = \frac{17}{13}$$

$$f_Y(y) = \frac{12}{13}\left[\int_y^1 x\,dx + \int_1^2 xy\,dx\right] = \frac{(-y^2+3y+1)12}{26} \quad \Big| \; 0\le y\le 1$$

$$E(Y) = \frac{12}{26}\int_0^1 y(-y^2+3y+1)\,dy = \frac{15}{26}$$

$$P\left(X-Y\le\frac{1}{2}\,\Big|\,(X,Y)\in T\right) = \frac{P\left(X-Y\le\frac{1}{2}\wedge(X,Y)\in T\right)}{P((X,Y)\in T)}$$



$$= \frac{P((X,Y)\in \;\;)}{\frac{12}{13}\int_0^1 dx\int_0^x x\,dy = \frac{12}{13}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$P((X,Y)\in \blacktriangle) = \frac{12}{13}\left[\int_0 dx\int_0 x\,dy + \int_{1/2} dx \int_{x-\frac{1}{2}} x\,dy\right]$$

$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{11}{48}$$

$$P\left(X-Y\le\frac{1}{2}\,\middle|\,(X,Y)\in T\right) = \frac{12}{13}\cdot\frac{11}{48}\cdot\frac{3\cdot 13}{12} = \frac{11}{16}$$

3) $P(X\le Y)=1 \Rightarrow P(X>Y)=0$

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(Y\le y \wedge X\le Y)$$

$$+P(Y\le y\wedge X>Y) \quad = 0$$

$$= P(Y\le y\wedge X\le Y)$$

$* \; Y\le y\wedge X\le Y \rightarrow X\le y \;\Big|\; \le P(X\le y) = F_X(y)$

Ne uzme $F_Y \le F_X$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 8 settembre 2008

1. Date un'urna A contenente 5 palline bianche e 3 palline nere e un'urna B contenente 3 bianche e 5 nere si eseguono estrazioni senza rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che assegna probabilità $\frac{1}{5}$ alla scelta dell'urna A. Considerati gli eventi:

$$\begin{aligned} E_n &= \text{esce pallina bianca all'estrazione } n\text{-sima} \\ E &= \text{viene scelta l'urna } A \end{aligned}$$

calcolare $\Pr(E_2 \mid \overline{E}_2 \vee \overline{E}_3)$, $\Pr(\overline{E}_2 \mid \overline{E}_2 \vee \overline{E}_3)$ e $\Pr(E \mid \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2)$.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel triangolo $T = T_1 \cup T_2$, ove T_1 è il triangolo di vertici $(0,0), (0,1), (1,0)$ e T_2 è il triangolo di vertici $(0,0), (0,-1), (1,0)$, con densità congiunta proporzionale alla funzione:

$$g(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } (x,y) \in T_1 \\ 1 & \text{se } (x,y) \in T_2 \end{cases}.$$

Calcolare:

- la speranza matematica di Y;
- la probabilità condizionata $\Pr(X - Y \leq \frac{1}{2} \mid (X,Y) \in T_1)$.

Dire inoltre se X e Y sono v.a. correlate.

3. Con riferimento al gioco del lotto su una ruota, siano:

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{Il 30 viene estratto al primo posto} \\ F_2 &= \text{Il 10 viene estratto} \\ F_3 &= \text{L'ambo 10, 30 viene estratto} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_1$

Analizzare la dipendenza logica di tali eventi dalla partizione del primo estratto, da quella delle cinquine non ordinate e da quella delle cinquine ordinate.

$\mathbb{P}_2$

$\mathbb{P}_3$

$$P_n(E_2 \mid \bar{E}_2 \vee \bar{E}_3) = \frac{P_n(E_2 \wedge (\bar{E}_2 \vee \bar{E}_3))}{P_n(\bar{E}_2 \vee \bar{E}_3)}$$

$$= \frac{P_n(E_2 \wedge \bar{E}_3)}{P_n(\bar{E}_2) + P_n(\bar{E}_3) - P_n(\bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3)}$$

$$P_n(E_2 \wedge \bar{E}_3) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}\binom{2}{1}} \cdot \frac{1}{5} + \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}\binom{2}{1}} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{15}{56}\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{15}{56}$$

$$P_n(\bar{E}_2) = P_n(\bar{E}_2 \mid E)\, P_n(E) + P_n(\bar{E}_2 \mid \bar{E})\, P_n(\bar{E})$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{23}{40}$$

$$P_n(\bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) = \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}\binom{2}{0}} \cdot \frac{1}{5} + \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}\binom{2}{0}} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{3}{28} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{5} = \frac{43}{140}$$

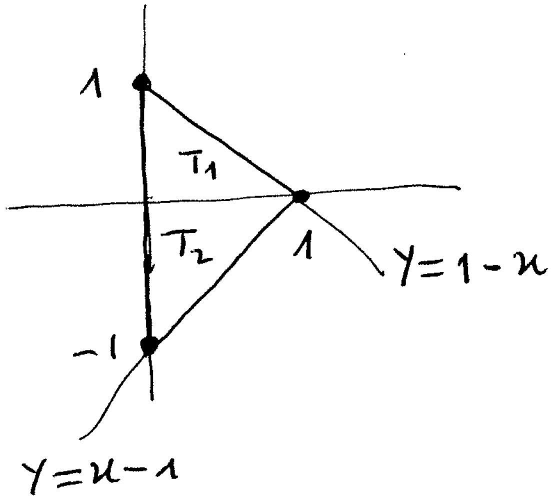
$$\cdot\ P_n(E_2 \mid \bar{E}_2 \vee \bar{E}_3) = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{23}{40} + \frac{23}{40} - \frac{43}{140}} = \frac{15}{56} \cdot \frac{140}{118} = \frac{75}{236}$$

$$\cdot\ P_n(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_2 \vee \bar{E}_3) = 1 - \frac{75}{236} = \frac{161}{236}$$

$$\cdot\ P_n(E \mid \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = \frac{P_n(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \mid E)}{P_n(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2)}\, P_n(E)$$

$$= \frac{\frac{3}{28}}{\frac{43}{140}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{28} \cdot \frac{140}{43} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{43}$$

4



$$\int_{T_1\cup T_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy\,dy + \text{area } \triangledown$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x \; y^2\Big|_0^{1-x} dx + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x(1-x)^2\,dx + 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx + 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+1\right) = \frac{13}{24}$$

- $$f(x,y) = \frac{24}{13}\begin{cases} xy & \text{su } T_1 \\ 1 & \text{su } T_2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx & 0 \le y \le 1 \\ \int_0^{y+1} f(x,y)\,dx & -1 \le y \le 0 \end{cases}$$

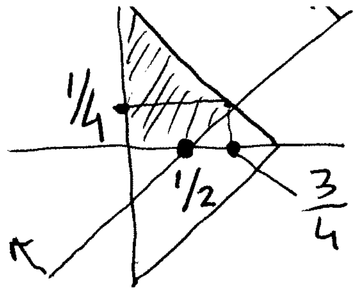
- $$= \frac{24}{13}\begin{cases} \int_0^{1-y} xy\,dx = \frac{1}{2}y(1-y)^2 & 0 \le y \le 1 \\ \int_0^{y+1} dx = y+1 & -1 \le y \le 0 \end{cases}$$

- $$E(Y) = \frac{24}{13}\left[\int_{-1}^{0} y(y+1)\,dy + \int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}y(1-y)^2\,dy\right]$$

$$= \frac{24}{13}\left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{24}{13}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right) =$$

$$= \frac{24}{13}\cdot\left(-\frac{3}{20}\right) = -\frac{18}{65}$$



$$\Pr\left(X - Y \le \tfrac{1}{2} \mid (X,Y) \in T_1\right)$$

$$= \frac{\Pr\left(X - Y \le \frac{1}{2} \wedge (X,Y) \in T_1\right)}{\Pr\left((X,Y) \in T_1\right)}$$

$$= \frac{\text{"aire"}\,\Delta - \text{"aire"}\,\Delta}{\text{"aire"}\,\Delta}$$

$$\text{"aire"}\,\Delta = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy\,dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

$$\text{"aire"}\,\Delta = \int_0^{1/4} dy \int_{y+\frac{1}{2}}^{1-y} xy\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/4} y\, x^2 \Big|_{y+\frac{1}{2}}^{1-y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{1/4} y(1-4y) \cdot \frac{3}{4}\,dy = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}y^3\right)\Big|_0^{1/4}$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{48}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{16^2}$$

- $\Pr\left(X - Y \le \frac{1}{2} \mid (X,Y) \in T_1\right) = 1 - \dfrac{\text{"aire"}\,\Delta}{\text{"aire"}\,\Delta} = 1 - \dfrac{1}{16^2} \cdot 24$

$$= 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}$$

3] $\mathbb{P}_1$: dip, ind, ind.

$\mathbb{P}_2$: semidip, dip, dip

$\mathbb{P}_3$: dip, dip, dip

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, ~~3 giugno~~ 1 luglio 2008

1. Date un'urna A contenente 2 palline bianche e 8 palline nere e un'urna B contenente 10 palline bianche e 5 palline nere si eseguono estrazioni senza rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che assegna probabilità $\frac{1}{4}$ alla scelta dell'urna A. Considerati gli eventi:

$$E_n = \text{esce pallina bianca all'estrazione } n\text{-sima}$$

calcolare $\Pr(E_n)$, $\Pr(\overline{E}_n|E_m)$ e $\Pr(E_2 \wedge E_8|E_2 \vee E_8)$. Valutare inoltre la probabilità che sia stata scelta l'urna A sapendo che nelle prime 2 estrazioni sono apparse palline di colore diverso.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel trapezio di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(0, -1)$ con densità congiunta proporzionale alla funzione $g(x, y) = x\,|y|$. Calcolare:

   – Le densità marginali;

   – La speranza matematica di X;

   – La funzione di ripartizione della v.a. $Z = X - Y$ nel punto 1.

3. Individuare la partizione generata dagli eventi E_1, E_2, E_3, E_4 sapendo che E_1, E_2 sono esaustivi, E_3 è incompatibile con E_4 e $E_3 \to E_1$. Si esprima inoltre l'evento $E_1 \wedge \overline{E}_4$ come disgiunzione di costituenti.

1) • $$P_n(E_n) = P_n(E_n|A)\,P_n(A) + P_n(E_n|B)\,P_n(B)$$

$$= P_n(E_n|A)\cdot\frac{1}{4} + P_n(E_n|B)\cdot\frac{3}{4}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{4} + \frac{10}{15}\cdot\frac{3}{4} = \frac{11}{20} & n \le 10 \\ \frac{10}{15}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2} & 10 < n \le 15 \\ 0 & n > 15 \end{cases}$$

• $$P_n(E_n|E_m) = \frac{P_n(E_n \wedge E_m)}{P_n(E_m)} = \begin{cases} \frac{20}{11} P_n(E_n \wedge E_m) & m \le 10 \\ 2\,P_n(E_n \wedge E_m) & 10 < m \end{cases}$$

$m \le 15$

$$P_n(E_n \wedge E_m) = P_n(E_n \wedge E_m | A)\,P_n(A) + P_n(E_n \wedge E_m|B)\,P_n(B)$$

$$= P_n(E_n \wedge E_m|A)\cdot\frac{1}{4} + P_n(E_n \wedge E_m|B)\cdot\frac{3}{4}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{10}{2}\binom{2}{1}}\cdot\frac{1}{4} + \dfrac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}\binom{2}{1}}\cdot\frac{3}{4} & n \le 10 \\ \dfrac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}\binom{2}{1}}\cdot\frac{3}{4} & 10 < n \le 15 \\ 0 & n > 15 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{45} + \frac{5}{28} = \frac{281}{45\cdot 28} & n \le 10 \\ \frac{5}{28} & 10 < n \le 15 \\ 0 & n > 15 \end{cases}$$

$$P_n(E_n|E_m) = \begin{cases} \frac{20}{11}\cdot\frac{281}{45\cdot 28} = \frac{281}{693} & n, m \le 10 \\ 2\cdot\frac{281}{45\cdot 28} = \frac{281}{630} & n \le 10,\ m > 10 \\ \frac{20}{11}\cdot\frac{5}{28} = \frac{25}{77} & 10 < n \le 15,\ m \le 10 \\ 2\cdot\frac{5}{28} = \frac{5}{14} & 15 \ge n > 10,\ m > 10 \\ 0 & n > 15 \end{cases}$$

- $P_n(E_2 \wedge E_8 \mid E_2 \vee E_8) = \dfrac{P_n(E_2 \wedge E_8)}{P_n(E_2 \vee E_8)} = \dfrac{P_n(E_8) - P_n(\overline{E_2} \wedge E_8)}{P_n(E_2) + P_n(E_8) - P_n(E_2 \wedge E_8)}$

$$P_n(E_2 \wedge E_8) = \frac{11}{20} - \frac{281}{45 \cdot 28} = \frac{693 - 281}{45 \cdot 28} = \frac{103}{315}$$

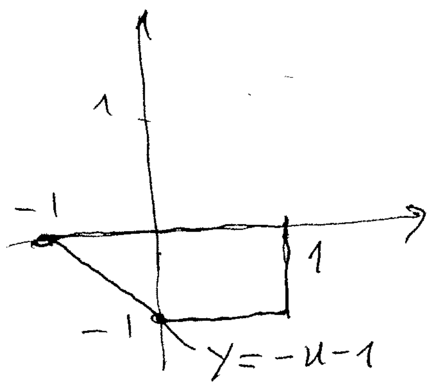
$$P_n(E_2 \wedge E_8 \mid E_2 \vee E_8) = \frac{\frac{103}{315}}{\frac{11}{20} + \frac{11}{20} - \frac{103}{315}} = \frac{103}{315} \cdot \frac{630}{487}$$

$$= \frac{206}{487}$$

- $P_n(A \mid S_2 = 1) = \dfrac{P_n(S_2 = 1 \mid A)}{P_n(S_2 = 1)} P_n(A) = \dfrac{\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{10}{2}}}{2 \cdot P_n(E_1 \wedge E_2)} \cdot \dfrac{1}{4}$

$$= \frac{\frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 9}}{2 \cdot \frac{281}{45 \cdot 28}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{56}{281}$$

2)



$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-(y+1)}^{1} -xy \, dx = -\int_{-1}^{0} y \left(\tfrac{1}{2} x^2 \Big|_{-(y+1)}^{1} \right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{0} y \left[1 - (y+1)^2 \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} y (y^2 + 2y) \, dy$$

$$= \frac{5}{24}$$

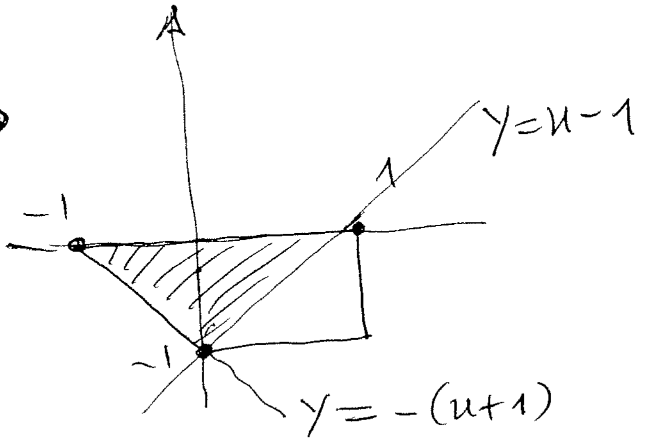
$$f(x,y) = \frac{24}{5} x |y|$$

- $f_X(x) = \dfrac{24}{5} \begin{cases} \int_{-x-1}^{0} -xy \, dy = \frac{1}{2} x (x+1)^2 & -1 \le x \le 0 \\ \int_{-1}^{0} -xy \, dy = \frac{1}{2} x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$$f_Y(y) = \frac{24}{5} \int_{-y-1}^{1} -xy \, dx = \frac{12}{5} y (y^2 + 2y) \qquad -1 \le y \le 0$$

$$E(X) = \frac{24}{5}\int_{-1}^{1} x\, f_X(x)\,dx = \frac{24}{5}\left[\int_{-1} \frac{1}{2} x^2 (x+1)\,dx + \int_0^1 \frac{1}{2} x^2\,dx\right]$$

$$= \frac{22}{25}$$

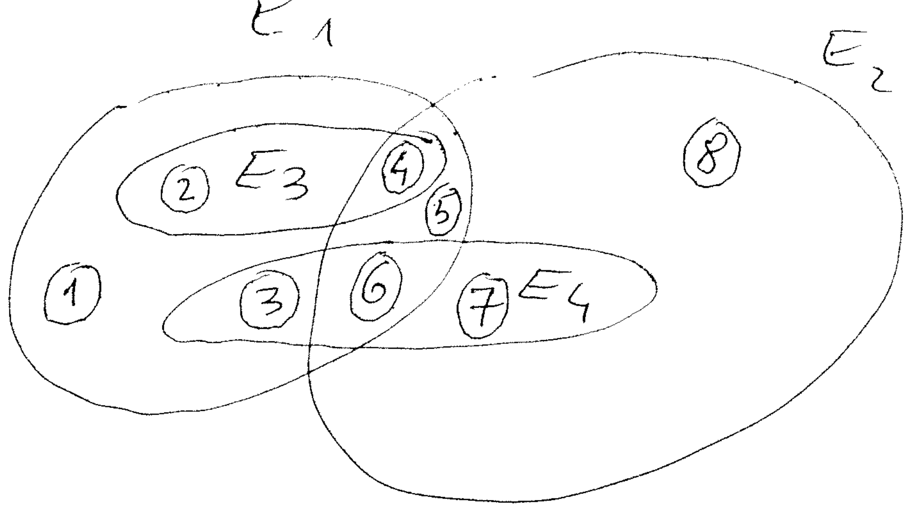


$$\underline{\underline{F_Z(1)}} = P_x(X - Y \leq 1)$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-(y+1)}^{y+1} f(x,y)\,dx$$

$$= -\frac{24}{5}\int_{-1}^{0} dy \int_{-(y+1)}^{y+1} x y\,dx = \underline{\underline{0}}$$

3)



Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, ~~17 giugno~~ 2008

1. Da un'urna contenente 9 palline bianche e 12 palline nere, si eseguono estrazioni con modalità aleatoria; precisamente, si lancia un dado equilibrato e si effettuano estrazioni con rimessa, se esce un numero minore di 3, e senza rimessa, altrimenti. Considerati gli eventi:

   H = si effettuano estrazioni senza rimessa
   K = nelle prime 3 estrazioni un colore è stato estratto una volta più dell'altro

   calcolare $\Pr(H|K)$.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita sul trapezio ottenuto unendo il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e il quadrato Q di vertici opposti $(1,0)$, $(2,1)$ con densità proporzionale alla funzione:

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } (x,y) \in T \\ 1 & \text{se } (x,y) \in Q \end{cases}.$$

   Calcolare:

   - le speranze matematiche di X e Y;
   - la funzione di ripartizione congiunta nei punti di Q;
   - la probabilità condizionata $\Pr(X - Y \leq \frac{1}{2} \,|\, (X,Y) \in Q)$.

3. Da un'urna composta da M palline bianche o nere di cui m bianche, si effettuano due estrazioni con la seguente modalità: con riferimento alla prima estrazione, si rimette la pallina estratta nell'urna solamente se è bianca. Dire, giustificando la risposta, se il processo di estrazione descritto è scambiabile.

-) $P_n(H) = \frac{2}{3}$

$$P_n(E_1) = P_n(E_1 \mid \overline{H})\, P_n(\overline{H}) + P_n(E_1 \mid H)\, P_n(H)$$
$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{7}$$

$$K = \{S_3 = 1\} \vee \{S_3 = 2\}$$

$$P_n(K) = P_n(S_3 = 1) + P_n(S_3 = 2)$$

$$P_n(S_3 = 1 \mid \overline{H}) = \binom{3}{1}\ \frac{3}{7}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{3^2\cdot 4^2}{7^3}$$

$$P_n(S_3 = 2 \mid \overline{H}) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{7} = \frac{3^3\cdot 4}{7^3}$$

$$P_n(K \mid \overline{H}) = \frac{3^2\cdot 4^2}{7^3} + \frac{3^3\cdot 4}{7^3} = \frac{3^2\cdot 4\cdot 7}{7^3} = \frac{3^2\cdot 4}{7^2}$$

$$P_n(S_3 = 1 \mid H) = \frac{\binom{9}{1}\binom{12}{2}}{\binom{21}{3}} = \frac{3\cdot 9\cdot 11}{5\cdot 7\cdot 19}$$

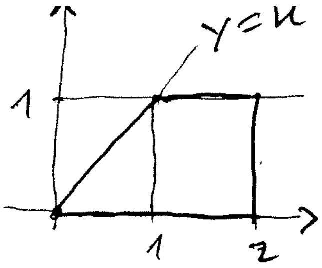
$$P_n(S_3 = 2 \mid H) = \frac{\binom{9}{2}\binom{12}{1}}{\binom{21}{3}} = \frac{3\cdot 8\cdot 9}{5\cdot 7\cdot 19}$$

$$P_n(K \mid H) = \frac{3\cdot 9\cdot 11}{5\cdot 7\cdot 19} + \frac{3\cdot 8\cdot 9}{5\cdot 7\cdot 19} = \frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}$$

$$P_n(K) = P_n(K \mid \overline{H})\, P_n(\overline{H}) + P_n(K \mid H)\, P_n(H)$$
$$= \frac{\cancel{3^2}\cdot 4}{7^2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{3}\cdot 9}{5\cdot 7}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} = \frac{12}{7^2} + \frac{18}{5\cdot 7} =$$
$$= \frac{6}{7}\left(\frac{2}{7} + \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{7}\ \frac{10+21}{35} = \frac{6}{7^2}\cdot\frac{31}{5}$$

$$P_n(H \mid K) = \frac{P_n(K \mid H)}{P_n(K)}\ P_n(H) = \frac{\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}}{\frac{6\cdot 31}{5\cdot 7^2}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7\cdot 3}{31} = \frac{21}{31}$$

2)



$$\int_{T\cup Q} f(x,y)\,dx\,dy = \int_T x^2\,dx\,dy + \int_Q dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x x^2\,dy + 1$$

$$= \int_0^1 x^3\,dx + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$f(x,y) = \frac{4}{5}\begin{cases} x^2 & (x,y)\in T \\ 1 & (x,y)\in Q \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{4}{5}\begin{cases} \int_0^x x^2\,dy = x^3 & 0 \le x \le 1 \\ \int_0^1 dy = 1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{4}{5}\left[\int_y^1 x^2\,dx + \int_1^2 dx\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{3}x^3\Big|_y^1 + 1\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{3}(1-y^3)+1\right] = \frac{4}{15}(4-y^3)$$

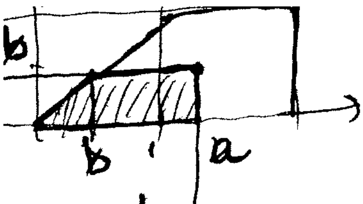
$$E(X) = \int_0^2 x f_X(x)\,dx = \frac{4}{5}\left[\int_0^1 x^4\,dx + \int_1^2 x\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{5}+\frac{3}{2}\right] = \frac{34}{25}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \frac{4}{15}\cdot\int_0^1 y(4-y^3)\,dy$$

$$= \frac{4}{15}\left(2y^2 - \frac{y^5}{5}\Big|_0^1\right) = \frac{4}{15}\left(2-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{12}{25}$$



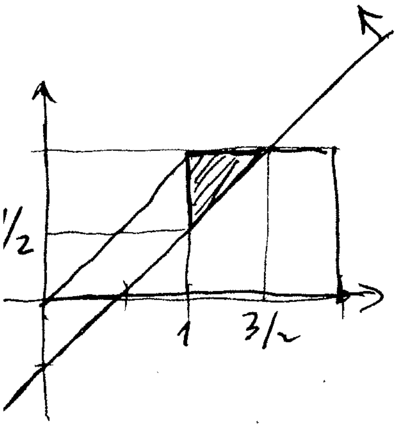
$$F(a,b) = \iint f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^b dy\left[\int_b^1 x^2\,dx + \int_1^a dx\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^b dx\int_0^a x^2\,dy + \int_b^1 dx\int_0^b x^2\,dy + (a-1)b\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^b x^3\,dx + \int_b^1 x^2 y\,dx + (a-1)b\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{b^4}{4} + \frac{1}{3}b(1-b^3) + (a-1)b\right]$$

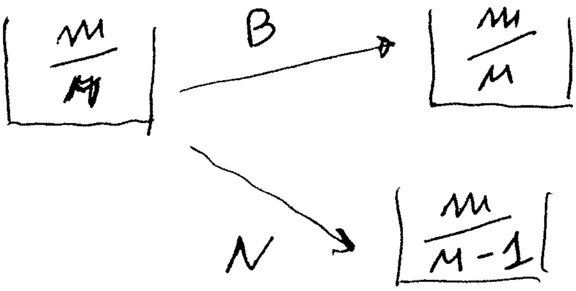


$$P_n\left(X-Y \le \tfrac{1}{2} \,\middle|\, (X,Y)\in Q\right)$$

$$= \frac{P_n\left(X-Y\le \frac{1}{2} \wedge (X,Y)\in Q\right)}{P_n((X,Y)\in Q)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}\cdot(2-1)\cdot 1} = \frac{1}{8}$$

---

3) 

$$P_n(E_1 \wedge \overline{E}_2) = P_n(\overline{E}_2 | E_1)\,P_n(E_1) = \frac{m}{M}\,\frac{M-m}{M}$$

$$P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2) = P_n(E_2 | \overline{E}_1)\,P_n(\overline{E}_1) = \frac{M-m}{M}\,\frac{m}{M-1}$$

Sono diverse!

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 3 giugno 2008

1. Date un'urna A contenente 1 pallina bianca e 3 palline nere e un'urna B contenente 3 palline bianche e 1 pallina nera si eseguono estrazioni con rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che assegna probabilità $\frac{1}{3}$ alla scelta dell'urna A. Indicato con G_n il guadagno che si realizza nelle prime n estrazioni in un gioco che prevede che si vincano 4 unità monetarie se esce pallina bianca e si paghino 2 unità monetarie se esce pallina nera, calcolare $E(G_n)$, $Var(G_n)$ e la funzione di ripartizione di G_2.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel triangolo di vertici $(-2, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 2)$ con densità congiunta unitaria nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 2)$ e proporzionale alla funzione $g(x, y) = |x|y$ nel triangolo di vertici $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 2)$. Calcolare:

   – Le densità marginali;

   – La probabilità condizionata $Pr(X + Y \geq 0 | X < 0)$.

3. Individuare la partizione generata dagli eventi E_1, E_2, E_3, E_4 sapendo che E_1, E_2 sono esaustivi, E_1 è incompatibile con E_3 e E_2 con E_4. Si dica inoltre se l'evento $\overline{E}_1 \wedge E_3$ è logicamente dipendente dalla partizione generata.

1) $G_n = 4S_n - 2(n - S_n) = 6S_n - 2n$

$$P_n(E_n) = P_n(E_n|A)P_n(A) + P_n(E_n|B)P_n(B)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{12}$$

• $E(G_n) = 6E(S_n) - 2n = 6\cdot\frac{7}{12}n - 2n = \frac{3}{2}n$

$$Var(G_n) = 36\,Var(S_n)$$
$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(E_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i} Cov(E_i, E_j)$$

$$P_n(E_i \wedge E_j) = P_n(E_i \wedge E_j|A)P_n(A) + P_n(E_i \wedge E_j|B)P_n(B)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{3}(1+3^2\cdot 2)$$
$$= \frac{19}{16\cdot 3}$$

$$Cov(E_i \wedge E_j) = P_n(E_i \wedge E_j) - P_n(E_i)P_n(E_j) = \frac{19}{16\cdot 3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2^4\cdot 3}\left[19 - \frac{49}{3}\right] = \frac{1}{2^4\cdot 3}\cdot\frac{8}{3}$$
$$= \frac{1}{18}$$

$$Var(S_n) = n\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{12} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{18}$$
$$= \frac{1}{2\cdot 9}\left[\frac{35}{8}n + n(n-1)\right]$$

• $Var(G_n) = \cancel{36}^{\,2}\cdot\frac{1}{\cancel{18}}\left[\frac{35}{8}n + (n-1)n\right]$

$$F_{G_2}(x) = P_n(6S_2 - 4 \le x) = P_n\left(S_2 \le \frac{x+4}{6}\right)$$

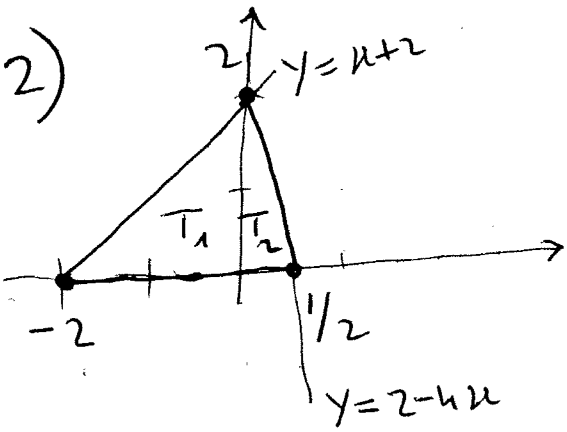
$$P_n(S_2 = h) = P_n(S_2 = h \mid A) P_n(A) + P_n(S_2 = h \mid B) P_n(B)$$

$$= \binom{2}{h}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^h \left(\frac{3}{4}\right)^{2-h} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^h \left(\frac{1}{4}\right)^{2-h} \cdot \frac{2}{3}\right]$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{48} & \text{se } h = 0 \\ \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\right] \cdot 2 = \frac{18}{48} & \text{se } h = 1 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{48} & \text{se } h = 2 \end{cases}$$

- $P_n(G_2 = -4) = \frac{11}{48}$, $P_n(G_2 = 2) = \frac{18}{48}$, $P_n(G_2 = 8) = \frac{19}{48}$

2)



$$P_n((X,Y) \in T_2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = k \iint_{T_1} -xy \, dx \, dy$$

$$= -k \int_{-2}^{0} dx \int_{0}^{x+2} xy \, dy$$

$$= -\frac{k}{2} \int_{-2}^{0} x(x+2)^2 \, dx = \frac{2}{3} k$$

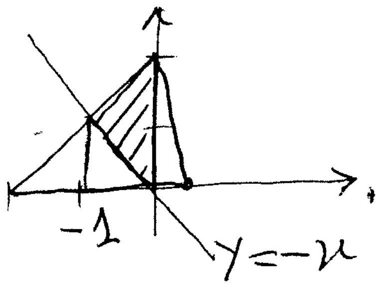
- $k = \frac{3}{4}$

- $$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{2-4x} dy = 2-4x, & \text{se } x \ge 0 \\ \int_0^{x+2} -\frac{3}{4} xy \, dy = -\frac{3}{4} x \frac{(x+2)^2}{2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- $$f_Y(y) = \int_{y-2}^{\frac{2-y}{4}} f(x,y) \, dx = \int_{y-2}^{0} -\frac{3}{4} xy \, dx + \int_0^{\frac{2-y}{4}} dx =$$

$$= \frac{3}{8} y (y-2)^2 + \frac{2-y}{4} = \frac{2-y}{4} \left[\frac{3}{2}(2-y) + 1 \right]$$

$$= \frac{2-y}{4} \cdot \frac{8-3y}{2}$$



$$P_n(X+Y \geq 0 \wedge X < 0) = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{x+2} -\frac{3}{4} x y \, dy$$

$$= -\frac{3}{4} \int_{-1}^{0} x \left[\frac{(x+2)^2 - x^2}{2} \right] dx$$

$$= -\frac{3}{8} \int_{-1}^{0} x \cdot 4(x+1) \, dx$$

$$= -\frac{3}{2} \int_{-1}^{0} (x^2 + x) \, dx$$

$$= -\frac{3}{2} \left\{ - \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] \right\} = \frac{1}{4}$$

$$P_n(X<0) = \int_{-2}^{0} -\frac{3}{4} x \frac{(x+2)^2}{2} dx = -\frac{3}{8} \left(\frac{x^4}{4} + 2x^2 + \frac{4}{3} x^3 \right|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{3}{8} \left(4 + 8 - \frac{32}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

oppure $= 1 - P_n(X \geq 0) = 1 - \int_0^{1/2} (2-4x) \, dx$

$$P_n(X+Y \geq 0 \mid X<0) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

3) $\mathbb{P} = \{ E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_4, \bar{E}_1 E_2 \bar{E}_3, E_1 E_2, E_3, E_4 \}$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 8 gennaio 2008

1. L'urna A contiene 6 palline bianche e 3 nere, l'urna B contiene 2 palline bianche e 8 nere. Si eseguono estrazioni senza rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{3}{4}$ alla scelta dell'urna A. Calcolare:

   - La probabilità che l'urna scelta sia la A sapendo che nelle prime quattro estrazioni sono uscite due palline nere;
   - la speranza matematica e la varianza del numero di palline bianche uscite nelle prime tre estrazioni.

2. Considerato il trapezio T di vertici $(0,0),(3,0),(2,1),(1,1)$, sia (X,Y) una coppia aleatoria distribuita su T con densità proporzionale alla funzione $g(x,y) = x + y$, calcolare:

   - Le densità marginali;
   - Le speranze matematiche di X e Y;
   - La probabilità condizionata $\Pr(X \geq 1 \wedge Y \leq \frac{1}{2} | X + Y > 2)$.

3. Siano X, Y i numeri usciti nel lancio contemporaneo di due dadi equilibrati. Considerati gli eventi "X è pari", e "$X + Y$ è pari", dire se gli eventi sono stocasticamente indipendenti.

1) $$P(A \mid S_4 = 2) = \frac{P(S_4 = 2 \mid A)}{P(S_4 = 2)} \, P(A)$$

$$P(S_4 = 2 \mid A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{5}{14}$$

$$P(S_4 = 2 \mid B) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{2}{15}$$

$$P(A \mid S_4 = 2) = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{14}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{225}{253}$$

$$S_3 = |E_1| + |E_2| + |E_3|$$

$$E(S_3) = 3\,P(E_1) = 3\left[P(E_1 \mid A)\,P(A) + P(E_1 \mid B)\,P(B)\right]$$

$$= 3\left[\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{4}\right] = \frac{33}{20}$$

$$\mathrm{Var}(S_3) = 3\,\mathrm{Var}(|E_1|) + 2\cdot 3\,\mathrm{Cov}(|E_1|\cdot|E_2|)$$

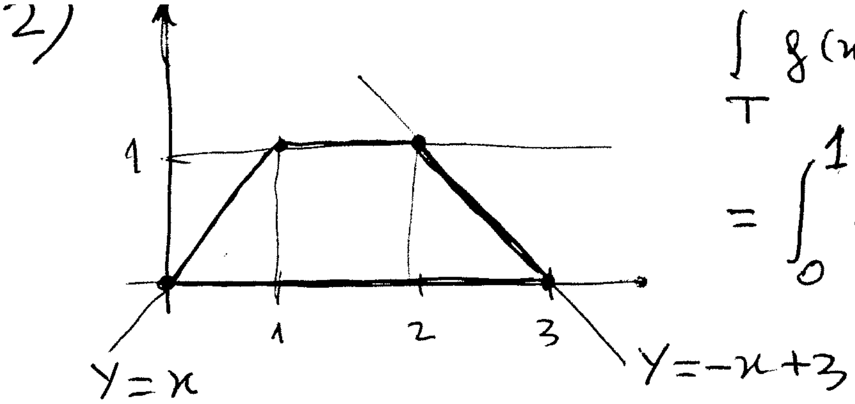
$$= 3\,P(E_1)(1 - P(E_1)) + 6\,P(E_1 \wedge E_2)$$

$$= 3\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20} + 6\left[P(E_1 \wedge E_2 \mid A)\,P(A) + P(E_1 \wedge E_2 \mid B)\,P(B)\right]$$

$$= 3\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20} + 6\left[\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{0}}{\binom{9}{2}}\cdot\frac{3}{4} + \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{0}}{\binom{10}{2}}\,\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{727}{400}$$

2)



$$\int_T g(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^{3-y} (x+y)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2y^2\right) dy$$

$$= \frac{23}{6}$$

$$f(x,y) = \frac{6}{23}(x+y) \qquad (x,y) \in T$$

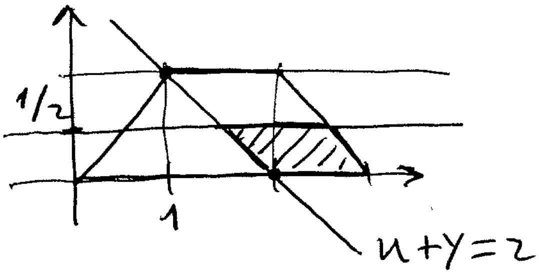
- $$f_X(x) = \frac{6}{23} \begin{cases} \int_0^x (x+y)\,dy & 0 \le x \le 1 \\ \int_0^1 (x+y)\,dy & 1 \le x \le 2 \\ \int_2^{3-x} (x+y)\,dy & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$= \frac{6}{23} \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}(2x+1) & 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}(9-x^2) & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

- $$f_Y(y) = \int_y^{3-y} \frac{6}{23}(x+y)\,dx = \frac{3}{23}(9-4y^2) \qquad 0 \le y \le 1$$

$$E(X) = \frac{6}{23}\left[\int_0^1 \frac{3}{2}x^3\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x(2x+1)\,dx + \int_2^3 \frac{1}{9}x(9-x^2)\,dx\right] = \frac{239}{276}$$

$$E(Y) = \frac{3}{23}\int_0^1 y(9-4y^2)\,dy = \frac{21}{46}$$



$$P\left(X \geq 1 \wedge Y \leq \tfrac{1}{2} \mid X+Y>2\right)$$

$$= \frac{P(\ \ )}{P(X+Y>2)} = \frac{P(\ \ )}{P(\ \ )}$$

$$P(\ \ ) = \frac{6}{23}\int_0^{1/2} dy \int_{2-y}^{3-y} (x+y)\,dx = \frac{6}{23}\int_0^{1/2} \frac{5}{2}\,dy = \frac{15}{46}$$

$$P(\ \ ) = \frac{6}{23}\int_0^{1} dy \int_{2-y}^{3-y} (x+y)\,dx = \frac{6}{23}\int_0^{1} \frac{5}{2}\,dy = \frac{30}{46}$$

$$P\left(X \geq 1 \wedge Y \leq \tfrac{1}{2} \mid X+Y>2\right) = \frac{15}{46}\cdot\frac{46}{30} = \frac{1}{2}$$

3)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(X+Y \text{ pari}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(\overbrace{X+Y}^{\text{pari}} \mid X \text{ pari}) = \frac{P(X+Y \text{ pari} \wedge X \text{ pari})}{P(X \text{ pari})} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{9}{12}$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 13 settembre 2007

1. Date un'urna A contenente 6 palline bianche e 4 nere e un'urna B contenente 2 bianche e 8, si procede ad una sequenza di estrazioni senza rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{1}{4}$ alla scelta dell'urna A. Considerati gli eventi:

$$\begin{aligned} E_n &= \text{esce pallina bianca all'estrazione } n\text{-sima} \\ E &= \text{viene estratta l'urna } A \end{aligned}$$

valutare $\Pr(E_1|E_2)$, $\Pr(E_1|\overline{E}_2)$, $\Pr(E_1|\overline{E}_2 \wedge E_3)$, $\Pr(\overline{E}_3|E_1 \wedge \overline{E}_5)$, $\Pr(\overline{E}_4 \wedge E_8|E_2 \vee \overline{E}_8)$ e $\Pr(E|E_2 \vee \overline{E}_8)$.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ con densità congiunta proporzionale alla funzione:

$$g(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Calcolare:

- $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{E}(Y)$;
- Considerata la v. a. $Z = X + Y$, calcolare $\mathrm{E}(Z)$ e la funzione di ripartizione $F(z)$ di Z per valori $z \leq 1$.

3. Dati gli eventi A, B, C, D tali che $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ e B, D incompatibili, determinare la partizione generata.

-) $i, j \leq 10$

$$P_n(E_i) = P_n(E_i \mid A)\, P_n(A) + P_n(E_i \mid B)\, P_n(B)$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P_n(E_i \wedge E_j) = P_n(E_i \wedge E_j \mid A) \cdot \frac{1}{4} + P_n(E_i \wedge E_j \mid B) \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}\binom{2}{2}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{0}}{\binom{10}{2}\binom{2}{2}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P_n(E_1 \mid E_2) = \frac{P_n(E_1 \wedge E_2)}{P_n(E_2)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_n(E_i) = P_n(E_i \wedge E_j) + P_n(E_i \wedge \overline{E_j})$$

$$P_n(E_i \wedge \overline{E_j}) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P_n(E_1 \mid \overline{E_2}) = \frac{P_n(E_1 \wedge \overline{E_2})}{P_n(\overline{E_2})} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{2}{7}$$

$$P_n(E_i \wedge \overline{E_j} \wedge E_h) = P_n(E_i \wedge \overline{E_j} \wedge E_h \mid A) \cdot \frac{1}{4} + P_n(E_i \wedge \overline{E_j} \wedge E_h \mid B) \cdot \frac{3}{4}$$

$h \leq 10$

$$= \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}\binom{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}\binom{3}{2}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{120}$$

$$P_n(E_1 \mid \overline{E_2} \wedge E_3) = \frac{P_n(E_1 \wedge \overline{E_2} \wedge E_3)}{P_n(\overline{E_2} \wedge E_3)} = \frac{7}{120} \cdot 5 = \frac{7}{24}$$

$$P_n(E_1 \wedge \overline{E_3}) = P_n(E_1 \wedge \overline{E_3} \wedge E_5) + P_n(E_1 \wedge \overline{E_3} \wedge \overline{E_5})$$

$$P_n(E_1 \wedge \overline{E_3} \wedge \overline{E_5}) = \frac{1}{5} - \frac{7}{120} = \frac{17}{120}$$

$$P_n(\overline{E}_3 \mid E_1 \wedge \overline{E}_5) = \frac{P_n(E_1 \wedge E_3 \wedge E_5)}{P_n(E_1 \wedge \overline{E}_5)} = \frac{17}{120} \cdot 5 = \frac{17}{24}$$

$$(\overline{E}_4 \wedge E_8) \wedge (E_2 \vee \overline{E}_8) = (\overline{E}_4 \wedge E_8 \wedge E_2) \vee (\overline{E}_4 \wedge E_8 \wedge \overline{E}_8)$$
$$= E_2 \wedge \overline{E}_4 \wedge E_8$$

$$P_n((\overline{E}_4 \wedge E_8) \wedge (E_2 \vee \overline{E}_8)) = \frac{7}{120}$$

$$P_n(E_2 \vee \overline{E}_8) = P_n(E_2) + P_n(\overline{E}_8) - P_n(E_2 \wedge \overline{E}_8)$$
$$= \frac{3}{10} + \left(1 - \frac{3}{10}\right) - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

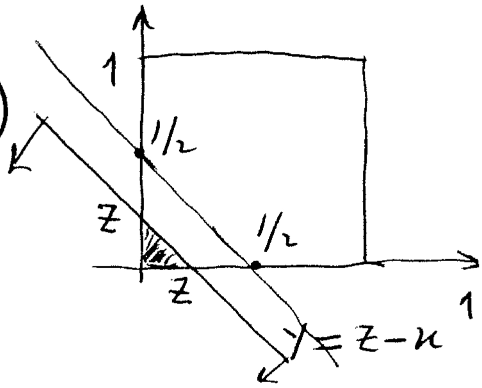
$$P_n(\overline{E}_4 \wedge E_8 \mid E_2 \vee \overline{E}_8) = \frac{7}{120} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{96}$$

$$P_n(A \mid E_2 \vee \overline{E}_8) = \frac{P_n(E_2 \vee \overline{E}_8 \mid A)}{P_n(E_2 \vee \overline{E}_8)} \cdot P_n(A)$$

$$P_n(E_2 \vee \overline{E}_8 \mid A) = P_n(E_2 \mid A) + P_n(\overline{E}_8 \mid A) - P_n(E_2 \wedge \overline{E}_8 \mid A)$$
$$= \frac{6}{10} + \frac{4}{10} - \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}\binom{2}{1}} = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

$$P_n(A \mid E_2 \vee \overline{E}_8) = \frac{11}{15} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{48}$$

2)



$$\int_Q g(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \left[\int_0^{1/2} x\,dx + \int_{1/2}^1 dx \right]$$
$$= \frac{5}{8}$$

$$f(x,y) = \frac{8}{5} \begin{cases} x & x \le \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{8}{5}\begin{cases} \int_0^1 x\,dy = x & x \le \frac{1}{2} \\ \int_0^1 dy = 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x\, f_X(x)\,dx = \frac{8}{5}\left[\int_0^{1/2} x^2\,dx + \int_{1/2}^1 x\,dx\right] = \frac{2}{3}$$

$$f_Y(y) = \frac{8}{5}\left[\int_0^{1/2} x\,dx + \int_{1/2}^1 dx\right] = 1$$

$$E(Y) = \int_0^1 y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$$

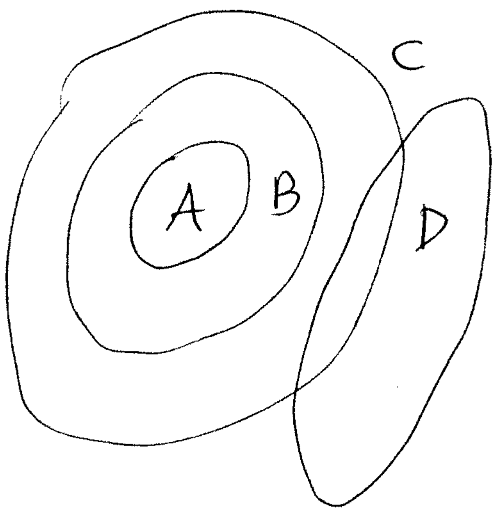
$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$F_Z(z) = 0$ se $z \le 0$

$0 < z \le \frac{1}{2}$ $\quad F_Z(z) = \frac{8}{5}\left[\int_0^z dx \int_0^{z-x} x\,dy\right]$

$$= \frac{8}{5}\left[\int_0^z x(z-x)\,dx\right] = \frac{4}{15} z^3$$

3)



$A,\ \bar{A} \wedge B,\ \bar{B} \wedge C \wedge \bar{D},$

$C \wedge D,\ \bar{C} \wedge D,\ \bar{D}$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 2 luglio 2007

1. L'urna A contiene 3 palline bianche e 2 nere, l'urna B contiene 2 palline bianche e 6 nere. Si eseguono estrazioni senza rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{5}{6}$ alla scelta dell'urna A. Considerati gli eventi:

$$\begin{aligned} E_n &= \text{esce pallina bianca nell'estrazione } n\text{-sima} \\ E &= \text{viene estratta l'urna } A \end{aligned}$$

calcolare $\Pr(E_3|E_1)$, $\Pr(E_1 \vee E_2 \vee E_3)$ e $\Pr(E|S_3 = 1)$.

2. Siano T_1 il triangolo di vertici $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$ e T_2 il triangolo di vertici $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$. Consirata una coppia aleatoria (X,Y) distribuita su $T_1 \cup T_2$ con densità proporzionale alla funzione:

$$g(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } (x,y) \in T_1 \\ \\ y & \text{se } (x,y) \in T_2 \end{cases}$$

calcolare

- La speranza matematica di X;
- La funzione di ripartizione congiunta nel punto $(\frac{3}{2}, 3)$.

3. Siano E_1, E_2 eventi possibili tali che E_2 sia logicamente semidipendente dalla partizione generata da E_1. Che cosa si può dire del legame logico di E_1 rispetto alla partizione generata da E_2?

L)
$$P_n(E_i) = P_n(E_i|A)P_n(A) + P_n(E_i|B)P_n(B)$$
$$= \frac{1}{6}\left[5P_n(E_i|A) + P_n(E_i|B)\right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{6}\left[5\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{8}\right] = \frac{13}{24} & i \leq 5 \\ \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{24} & i = 5 \\ 0 & i > 5 \end{cases}$$

$$P_n(E_i \wedge E_j) = P_n(E_i \wedge E_j | A)P_n(A) + P_n(E_i \wedge E_j|B)P_n(B)$$
$$(i,j \leq 5) \quad = \frac{1}{6}\left[\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}\binom{2}{2}}\cdot 5 + \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{0}}{\binom{8}{2}\binom{2}{2}}\right] = \frac{43}{168}$$

$$P_n(E_3|E_1) = \frac{P_n(E_1 \wedge E_3)}{P_n(E_1)} = \frac{43}{168}\cdot\frac{24}{13} = \frac{43}{91}$$

$$P_n(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 3P_n(E_1) - 3P_n(E_1 \wedge E_2) + P_n(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$$
$$= 3\cdot\frac{13}{24} - 3\cdot\frac{43}{168} + P_n(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$$
$$= \frac{6}{7} + P_n(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3|A)\cdot\frac{5}{6} + 0\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{6}{7} + \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}\binom{3}{3}}\cdot\frac{5}{6} = \frac{6}{7} + \frac{1}{12} = \frac{79}{84}$$

$$P_n(A|S_3=1) = \frac{P_n(S_3=1|A)}{P_n(S_3=1)}\,P_n(A)$$

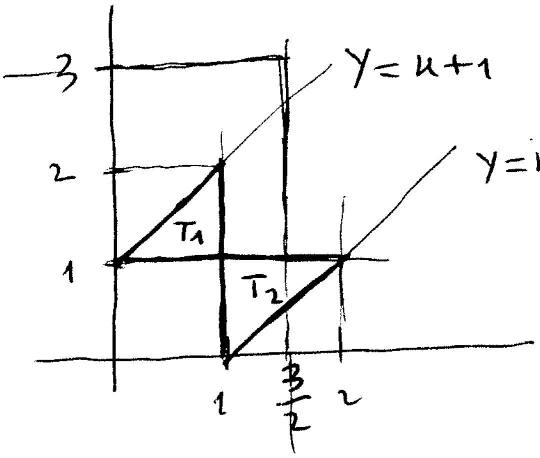
$$P_n(S_3=1|A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$P_n(S_3=1|B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{28}$$

$$P_n(S_3=1) = \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6} + \frac{15}{28}\cdot\frac{1}{6} = \frac{19}{56}$$

$$P_r(A \mid S_3 = 1) = \frac{\overline{10}}{\frac{19}{56}} \cdot \frac{5}{6} = \frac{14}{19}$$

2)



$$\int_{T_1} g(x,y)\,dx\,dy + \int_{T_2} g(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{T_1} x\,dx\,dy + \int_{T_2} y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_1^{x+1} x\,dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^{1} y\,dy$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (2x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f(x,y) = \frac{3}{2}\begin{cases} x & (x,y)\in T_1 \\ y & (x,y)\in T_2 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\begin{cases} \int_1^{x+1} x\,dy = x^2 & 0 \le x < 1 \\ \int_0^1 y\,dy + \int_1^2 dy = \frac{3}{2} & x = 1 \\ \int_{x-1}^{1} y\,dy = \frac{2x - x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{3}{2}\left[\int_0^1 x\cdot x^2\,dx + \int_1^2 x\cdot\frac{2x-x^2}{2}\,dx\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{24} = \frac{17}{16}$$

$$=\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \frac{3}{2}\left[\int_{T_1} x\,dx\,dy + \int_1^{3/2} dx \int_{x-1}^{1} y\,dy\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3} + \int_1^{3/2} \frac{2x - x^2}{2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8} - \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{9}{12}$$

3) A) $E_1 \to E_2$

$\overline{E}_1 \wedge E_2 \neq \phi$

$\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \neq \phi$

C) $\overline{E}_1 \to E_2$

$E_1 \wedge E_2 \neq \phi$

$E_1 \wedge \overline{E}_2 \neq \phi$

B) $E_1 \to \overline{E}_2$

$\overline{E}_1 \wedge E_2 \neq \phi$

$\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \neq \phi$

D) $\overline{E}_1 \to \overline{E}_2$

$E_1 \wedge \overline{E}_2 \neq \phi$

$E_1 \wedge E_2 \neq \phi$

A) $\overline{E}_2 \to \overline{E}_1$

$E_2 \wedge E_1 = E_1 \neq \phi$

$E_2 \wedge \overline{E}_1 \neq \phi$

C) $\overline{E}_2 \to E_1$

$E_1 \wedge E_2 \neq \phi$

$\overline{E}_1 \wedge E_2 = \overline{E}_1 \neq \phi$

B) $E_2 \to \overline{E}_1$

$\overline{E}_2 \wedge E_1 = E_1 \neq \phi$

$\overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 \neq \phi$

D) $E_2 \to E_1$

$\overline{E}_2 \wedge E_1 \neq \phi$

$\overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 = \overline{E}_1 = \phi$

Allora E_1 logicamente semidipendente dalla partizione generata da E_2

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 19 giugno 2007

1. L'urna A contiene 2 palline bianche e 8 nere, l'urna B contiene 6 palline bianche e 4 nere. Si eseguono estrazioni con rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{2}{5}$ alla scelta dell'urna A. Considerato il guadagno G_n che si ottiene nelle prime n estrazioni in un gioco in cui in ogni estrazione si paga 1 e si riceve 3 se esce pallina bianca, calcolare:

   – La speranza matematica di G_5;

   – Considerato l'evento:

   $$E : \text{È stata estratta l'urna } A$$

   valutare $\Pr(E|G_5 = -2)$.

2. Le coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$ con densità proporzionale alla funzione:

   $$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \geq 0 \\ -xy & \text{se } y < 0 \end{cases}.$$

   Calcolare

   – Le densitàdi X e Y;

   – La speranza matematica di Y;

   – La funzione di ripartizione della v.a. $Z = X - Y$ in $\frac{1}{2}$.

3. La v.a. X ha determinazioni nell'intervallo chiuso $[0, 2]$. Sapendo che $\Pr(X = 1) = \frac{1}{2}$ e che il resto della probabilità è distribuito uniformemente nell'intervallo considerato, tracciare un grafico della funzione di ripartizione di X. Calcolare inoltre $\Pr(X < 1)$ e $\Pr(X > 1)$.

$\cdot)\quad G_n = -n + 3S_n = 3S_n - n$

$$E(G_n) = 3E(S_n) - n = 3n\,P_n(E_1) - n$$

$$P_n(E_1) = P_n(E_1|A)P_n(A) + P_n(E_1|B)P_n(B)$$
$$= \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{5} + \frac{6}{10}\cdot\frac{3}{5} = \frac{11}{25}$$

$$E(G_n) = \frac{33}{25}n - n = \frac{8}{25}n \qquad \underline{E(G_5) = \frac{8}{5}}$$

- $G_n = 3 - n \iff S_n = 1$

$$P_n(E|G_n = 3-n) = P_n(E|S_n = 1) = \frac{P_n(S_n=1|E)}{P_n(S_n=1)}P_n(E)$$

$$P_n(S_n=1|E) = \binom{n}{1}\cdot\frac{2}{10}\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^{n-1}$$

$$P_n(S_n=1|E) = \binom{n}{1}\cdot\frac{6}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1}$$

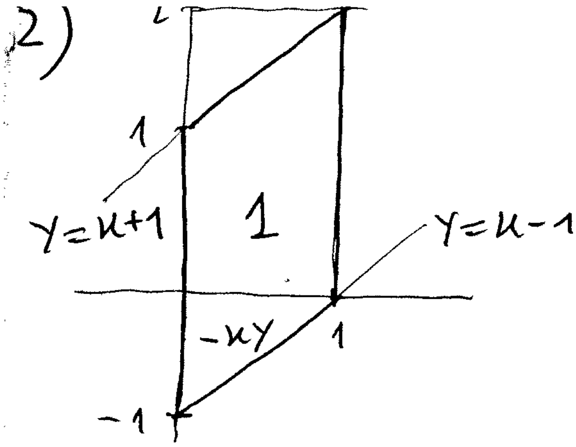
$$P_n(S_n=1) = n\cdot\frac{2}{10}\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{5} + n\cdot\frac{6}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{5}$$
$$= \frac{n}{10^n}\cdot 2\cdot 4^{n-1}\left[2^{n-1}\cdot\frac{2}{5} + \frac{9}{5}\right]$$
$$= \frac{n}{10^n}\cdot\frac{2}{5}\cdot 4^{n-1}\left[2^n + 9\right]$$

$$P_n(E|G_n = 3-n) = \frac{\frac{n}{10^n}\cdot 2\cdot 8^{n-1}}{\frac{n}{10^n}\cdot\frac{2}{5}\cdot 4^{n-1}[2^n+8]}\cdot\frac{2}{5}$$
$$= \frac{5\cdot 2^{n-1}}{2^n+8}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2^n}{2^n+9}$$

$n = 5$

$$= \frac{32}{41}$$

2)



$$1 = k\left[\frac{(2+1)\cdot 1}{2} + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 -xy\,dy\right]$$

$$= k\left[\frac{3}{2} + \int_0^1 \frac{1}{2}x(x-1)^2\,dx\right]$$

$$= k\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx\right]$$

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1$$

$$= k\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] = k\cdot\frac{37}{24}$$

$$f(x,y) = \frac{24}{37}\begin{cases} 1 & \text{se } xy \geq 0 \\ -xy & \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(x,y)\,dy = \frac{24}{37}\left[\int_{x-1}^0 -xy\,dy + \int_0^{x+1} dy\right]$$

$$= \frac{24}{37}\left[\frac{x(x-1)^2}{2} + x+1\right]$$

$$f_Y(y) = \frac{24}{37}\begin{cases} \int_0^{y+1} -xy\,dx = -\frac{y(y+1)^2}{2} & \text{se } y<0 \\ \int_0^1 dx = 1 & \text{se } 0\leq y \leq 1 \\ \int_{y-1}^1 dx = 2-y & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

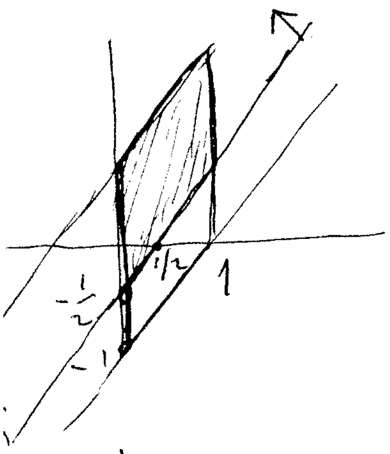
$$E(Y) = \int_{-1}^2 y\,f_Y(y)\,dy = \frac{24}{37}\left[\int_{-1}^0 -\frac{y^2(y+1)^2}{2}\,dy + \int_0^1 y\,dy + \int_1^2 y(2-y)\,dy\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{y^5}{5} + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-1}^0 \qquad y^2 - \frac{y^3}{3}\Big|_1^2$$

$$= \frac{24}{37}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{24}{37}\left[-\frac{1}{60} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right] = \frac{24}{37}\cdot\frac{69}{60}$$

$$\Xi\left(\tfrac{1}{2}\right) = P_n\left(X - Y \le \tfrac{1}{2}\right) = \left[\int_0^{1/2} dx \left[\int_{x-\frac{1}{2}} -xy\,dy + \int_0^{x+1} dy\right] + \int_{1/2}^{1} dx \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+1} dy\right] \cdot \frac{24}{37}$$



$Y = x - \frac{1}{2}$

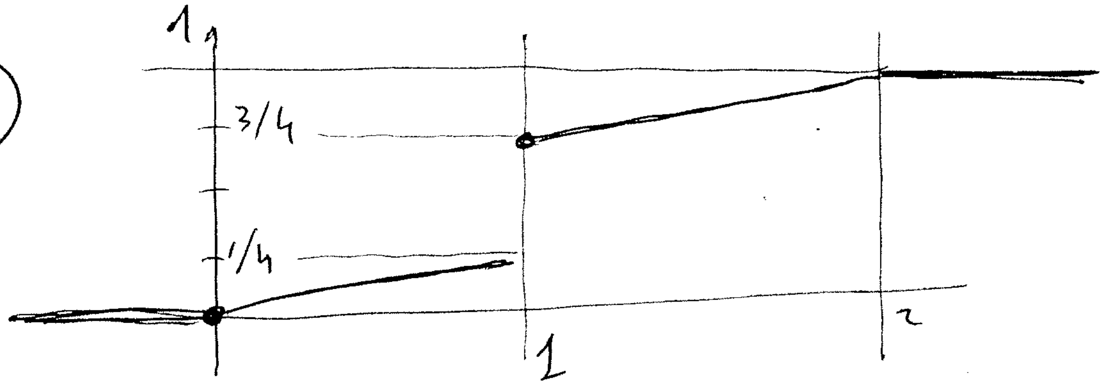
$$= \frac{24}{37}\left[\frac{1}{2}\int_0^{1/2} x\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 dx + \int_0^{1/2}(x+1)\,dx + \int_{1/2}^{1}\left(\cancel{x}+1\cancel{-x}+\tfrac{1}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{24}{37}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right|_0^{1/2} + \left(\tfrac{1}{2}x^2 + x\right|_0^{1/2} + \frac{3}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{24}{37}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{24}{37} \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{17}{24} + \frac{11}{8}\right]$$

3)



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{4} & 0 \le x < 1 \\ \frac{x+2}{4} & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$P_n(X < 1) = \frac{1}{4}$

$P_n(X > 1) =$

$1 - P_n(X \le 1) = 1 - \frac{3}{4}$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 4 giugno 2007

1. L'urna A contiene 4 palline bianche e 6 nere, l'urna B contiene 8 palline bianche e 2 nere. Si eseguono estrazioni senza rimessa da una delle due urne scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{3}{4}$ alla scelta dell'urna A. Considerati gli eventi:

$$E_n = \text{esce pallina bianca nell'estrazione } n\text{-sima},$$

   calcolare $\Pr(E_i)$, $\Pr(E_i|E_j)$ $(i, j = 1, \ldots, 10)$ e $\mathrm{Var}(\frac{S_2}{2})$.

2. Le coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ con densità proporzionale alla funzione x^2y. Calcolare

   - Le densità marginali;
   - La funzione di ripartizione della v.a. $Z = 2X + Y$.

   Dire se X, Y sono v.a. indipendenti.

3. Dati gli eventi possibili E, F tali che E sia logicamente dipendente dalla partizione generata da F, che cosa si può dire del legame logico sussistente tra F e la partizione generata da E?.

$$Pr(E_i) = Pr(E_1) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{4} + \frac{8}{10}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (i \leq 10)$$

$$Pr(E_i \wedge E_j) = Pr(E_i \wedge E_j \wedge A)\,Pr(A) + Pr(E_i \wedge E_j \wedge B)\,Pr(B)$$

$(i, j \leq 10)$

$$= Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge A)\cdot\frac{3}{4} + Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge B)\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\Big[Pr(E_2 \mid E_1 \wedge A)\,Pr(E_1 \mid A)\cdot 3 + Pr(E_2 \mid E_1 \wedge B)\,Pr(E_1 \mid B)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}\cdot 3 + \frac{7}{9}\cdot\frac{8}{10}\Big] = \frac{23}{90}$$

$$Pr(E_i \mid E_j) = \frac{23}{90}\cdot 2 = \frac{23}{45}$$

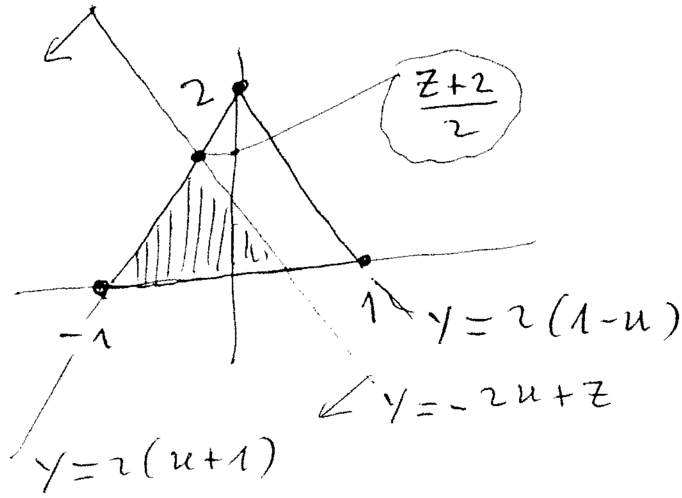
$$Var\left(\frac{S_2}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(S_2) = \frac{1}{4}\Big[Var(E_1) + Var(E_2) + 2\,Cov(E_1, E_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\big(Pr(E_1 \wedge E_2) - Pr(E_1)\,Pr(E_2)\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2} + 2\left(\frac{23}{90} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2} + \frac{23}{45} - \frac{1}{2}\Big] = \frac{23}{180}$$

2]



$$\int_T x^2 y \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_{\frac{y-2}{2}}^{\frac{2-y}{2}} x^2 y \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 y \left[\left(\frac{2-y}{2}\right)^3 - \left(\frac{y-2}{2}\right)^3 \right] dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 y \cdot 2 \cdot \left(\frac{2-y}{2}\right)^3 dy = \frac{1}{12} \int_0^2 y (2-y)^3 dy$$

$$= -\frac{1}{12} \int_0^2 y \underbrace{(y-2)^3}_{= \frac{d}{dy} \frac{(y-2)^4}{4}} dy \quad (\text{per parti})$$

$$= -\frac{1}{12} \left[y \frac{(y-2)^4}{4} \Big|_0^2 - \int_0^2 \underbrace{\frac{(y-2)^4}{4}}_{= \frac{d}{dy} \frac{(y-2)^5}{4 \cdot 5}} dy \right]$$

$$= -\frac{1}{12} \left[-\frac{2^5}{4 \cdot 5} \right] = \frac{2}{15}$$

$$f(x,y) = \frac{15}{2} x^2 y$$

$$f_X(x) = \frac{15}{2} \begin{cases} \int_0^{2(x+1)} x^2 y \, dy = 2x^2 (x+1)^2 & -1 \le x \le 0 \\ \int_0^{2(1-x)} x^2 y \, dy = 2x^2 (1-x)^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{15}{2} \int_{\frac{y-2}{2}}^{\frac{2-y}{2}} x^2 y \, dx = \frac{15}{2} y \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{\frac{y-2}{2}}^{\frac{2-y}{2}}$$

$$= \cancel{\frac{15}{2}}^{5} \cdot \cancel{\frac{1}{3}} \cdot y \cdot \cancel{2} \left(\frac{2-y}{2}\right)^3 = \frac{5}{8} y (2-y)^3$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le -2 \\ \int_0^{\frac{z+2}{2}} dy \int_{\frac{y-2}{2}}^{\frac{z-y}{2}} \frac{15}{2} x^2 y \, dx & -2 \le z \le 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$

] $\phi \neq E, F \neq \Omega$

E log. dip. da $F, \overline{F} \Rightarrow \begin{cases} F \to E \text{ o } F \to \overline{E} \\ \overline{F} \to E \text{ o } \overline{F} \to \overline{E} \end{cases}$

Sia vero $F \to E$. Allora $\overline{F} \not\to E$ (in caso contrario $E = \Omega$)

Quindi $\overline{E} \to \overline{F}$ e $\overline{\overline{E}} \to \overline{\overline{F}}$

cioè $E \to F$

Sia vero $F \to \overline{E}$. Allora $\overline{F} \not\to \overline{E}$ (in caso contrario $\overline{E} = \Omega$)

Quindi $\overline{\overline{E}} \to \overline{F}$ e $\overline{F} \to E$

cioè $E \to \overline{F}$ e $\overline{E} \to F$

Conseguentemente, F è logicamente dipendente da $E, \overline{E}$.-

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 6 dicembre 2006

1. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere, si esegue una sequenza di estrazioni reinbussolando, dopo ogni estrazione, la pallina estratta insieme con una di medesimo colore. Considerati gli eventi:

   E_n = esce pallina bianca nell'estrazione n-sima

   H = nelle prime 3 estrazioni un colore è stato estratto una volta più dell'altro

   calcolare $\Pr(E_5|H)$.

2. Data una v.a. $X \neq 0$, supponiamo che la coppia aleatoria (X, Y) sia distribuita sul quadrato di vertici opposti $(0,0)$, $(1,1)$ con densità costante pari a 1 nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e proporzionale a xy altrove. Calcolare

   - la speranza matematica di X;
   - la funzione di ripartizione congiunta nei punti del quadrato;
   - la funzione di ripartizione della v.a. $Z = \frac{Y}{X}$.

3. Considerati due eventi E, F di probabilità positiva e minore di 1 stocasticamente indipendenti, cosa si può dire degli eventi E, $\overline{F}$?

·)

$H:$ BBN, BNB, NBB $\quad (3,2) \longrightarrow (5,3)$

 NNB, NBN, BNN $\quad (3,2) \longrightarrow (4,4)$

$H \wedge E_5$:

$(5,3) \xrightarrow{B} (6,3)$, $\quad (5,3) \xrightarrow{N} (5,4)$

$(4,4) \xrightarrow{B} (5,4)$, $\quad (4,4) \xrightarrow{N} (4,5)$

BBN : $(3,2) \to (4,2) \to (5,2) \qquad P_n(BBN) = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}$

BNB : $(3,2) \to (4,2) \to (4,3) \qquad P_n(BNB) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5}$

NBB : $(3,2) \to (3,3) \to (4,3) \qquad P_n(NBB) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

$$P_n(BBN) = P_n(BNB) = P_n(NBB) = \frac{4}{35}$$

$$P_n((5,3)) = 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{35}$$

NNB: $(3,2) \to (3,3) \to (3,4) \qquad P_n(NNB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

NBN: $(3,2) \to (3,3) \to (4,3) \qquad P_n(NBN) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

BNN: $(3,2) \to (4,2) \to (4,3) \qquad P_n(BNN) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5}$

$$P_n(NNB) = P_n(NBN) = P_n(BNN) = \frac{3}{35}$$

$$P_n((4,4)) = 3 \cdot \frac{3}{35} = \frac{9}{35}$$

$$P_n(H) = \frac{12}{35} + \frac{9}{35} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} P_n(H \wedge E_5) &= P_n(H \wedge E_5 \mid (5,3))\, P_n((5,3)) \\ &\quad + P_n(H \wedge E_5 \mid (4,4))\, P_n((4,4)) \\ &= P_n(E_2 \mid (5,3)) \cdot \frac{12}{35} + P_n(E_2 \mid (4,4)) \frac{9}{35} \end{aligned}$$

$$P_n(E_2|(5,3)) = P_n(E_2|E_1 \wedge (5,3))\, P_n(E_1|(5,3)) + P_n(E_2|\overline{E}_1 \wedge (5,3))\, P_n(\overline{E}_1|(5,3))$$

$$= \frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P_n(E_2|(4,4)) = P_n(E_2|E_1 \wedge (4,4))\, P_n(E_1|(4,4)) + P_n(E_2|\overline{E}_1 \wedge (4,4))\, P_n(\overline{E}_1|(4,4))$$

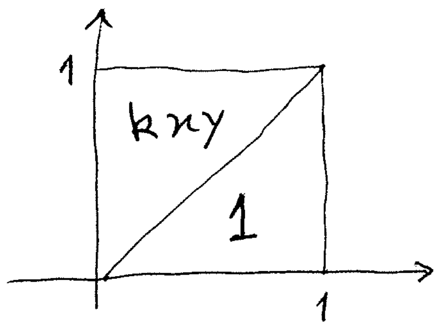
$$= \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P_n(H \wedge E_5) = \frac{5}{8}\cdot\frac{12}{35} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{35} = \frac{3}{14} + \frac{9}{70} = \frac{12}{35}$$

$$P_n(E_5|H) = \frac{\frac{12}{35}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{7}$$

o

2)



$$\iint_{\square} = \iint_{\triangle} + \iint_{\nabla} =$$

$$= \text{area } \Delta + \int_0^1 dx \int_x^1 kxy\, dy$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{k}{2}\int_0^1 x(1-x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{k}{8}$$

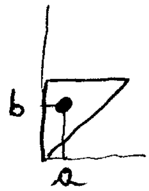
Quindi $1 = \frac{1}{2} + \frac{k}{8} \Rightarrow \underline{\underline{k=4}}$

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dy = \int_0^x dy + \int_x^1 4xy\, dy$$

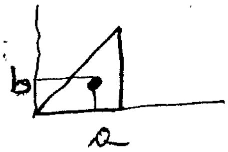
$$= 3x - 2x^3$$

$$E(X) = \int_0^1 x(3x - 2x^3)\,dx = \frac{3}{5}$$

$(a,b) \in \square$



$$F(a,b) = \begin{cases} \int_0^a dx \left[\int_0^x dy + \int_x^b 4xy\,dy \right] \\ \int_0^b dy \left[\int_0^y 4xy\,dx + \int_y^a dx \right] \end{cases}$$



$$= \begin{cases} \frac{1+2b^2}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^4 \\ \frac{1}{2} b^4 + ab - \frac{1}{2} b^2 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = Pr\left(\frac{Y}{X} \le z \right) = Pr(Y \le zX)$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \int_0^1 dx \int_0^{zx} dy & 0 \le z \le 1 \\ \int_0^1 dy \left[\int_{\frac{y}{z}}^{y} 4xy\,dx + \int_y^1 dx \right] & 1 \le z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{1}{2} z & 0 \le z \le 1 \\ 1 - \frac{1}{2z^2} & z \geq 1 \end{cases}$$

o

3) $Pr(E) = Pr(E \wedge F) + Pr(E \wedge \overline{F}) = Pr(E)Pr(F) + Pr(E \wedge \overline{F})$

$Pr(E \wedge \overline{F}) = Pr(E) - Pr(E)Pr(F) = Pr(E)(1 - Pr(F))$

$= Pr(E)\,Pr(\overline{F})$

Quindi $E, \overline{F}$ sono stocasticamente indipendenti.-

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 11 settembre 2006

1. Un'urna contiene 2 palline bianche e 8 nere. Si estrae una pallina e si imbussolano nell'urna 6 palline bianche, se la pallina estratta è bianca, e 2 nere altrimenti. Si eseguono poi estrazioni con rimessa dall'urna. Considerati gli eventi:

$$E_n = \text{esce pallina bianca nell'estrazione } n\text{-sima}$$

calcolare $\Pr(E_n)$ e $\Pr(E_i|E_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Considerato il numero aleatorio $S_n = |E_1| + \ldots + |E_n|$, valutare $\mathrm{E}(S_{30})$ e $\mathrm{Var}(S_{30})$.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita sul trapezio di vertici $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ con densità proporzionale alla funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y^2 & \text{se } y < 0 \\ \\ 1 & \text{se } y \geq 0 \end{cases}.$$

Calcolare le densità marginali e $\mathrm{P}(Y \geq 0 | X < \frac{1}{2})$.

3. Il numero aleatorio X ha come determinazioni possibili i numeri -2, -1, 3 e i numeri dell'intervallo $[0, 1]$. Sapendo che $\mathrm{P}(X = -2) = \frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(X = -1) = \frac{3}{12}$, $\mathrm{P}(X = 3) = \frac{4}{12}$ e che il resto della probabilità è distribuita uniformemente nell'intervallo unitario, determinare la funzione di ripartizione e disegnarne un grafico.

·)

$$(2,8) \xrightarrow{B} (7,8) \quad \frac{1}{5} \quad A \qquad P(E_n|A) = \frac{7}{15}$$

$$(2,8) \xrightarrow{N} (2,9) \quad \frac{4}{5} \quad B \qquad P(E_n|B) = \frac{2}{11}$$

$$P(E_n) = P(E_n|A)\,P(A) + P(E_n|B)\,P(B) = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{197}{825}$$

$$P(E_i \wedge E_j) = P(E_i \wedge E_j|A)\,P(A) + P(E_i \wedge E_j|B)\,P_n(B)$$
$$= \left(\frac{7}{15}\right)^2\cdot\frac{1}{5} + \left(\frac{2}{11}\right)^2\cdot\frac{4}{5} = \frac{9529}{5\cdot 15^2\cdot 11^2}$$

$$P(E_i | E_j) = \frac{P(E_i \wedge E_j)}{P(E_j)} = \frac{6629}{5\cdot 15^2\cdot 11^2}\cdot\frac{825}{197} = \frac{9529}{32505}$$

$$E(S_n) = E(|E_1|) + \ldots + E(|E_n|) = n\,P(E_n)$$

$$E(S_{30}) = 30\cdot\frac{197}{825} = \frac{394}{55}$$

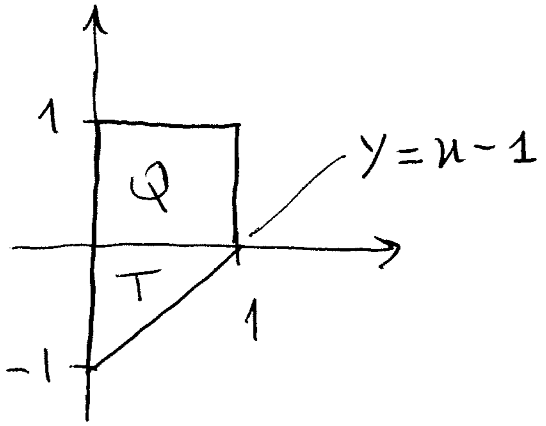
$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(E_1) + \ldots + \mathrm{Var}(E_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i} \mathrm{Cov}(|E_i|,|E_j|)$$

$$\mathrm{Cov}(|E_i|,|E_j|) = P(E_i \wedge E_j) - P(E_i)\,P(E_j) =$$
$$= \frac{9529}{5\cdot 15^2\cdot 11^2} - \left(\frac{197}{825}\right)^2 = \frac{8816}{15^2\cdot 11^2\cdot 5^2}$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = n\,\frac{197}{825}\cdot\frac{628}{825} + 2\binom{n}{2}\frac{8816}{15^2\cdot 11^2\cdot 5^2}$$
$$= n\,\frac{197\cdot 628}{825^2} + n(n-1)\,\frac{8816}{825^2}$$

$$\mathrm{Var}(S_{30}) = \frac{30}{825^2}\left[197.628 + 29.8816\right]$$
$$= \frac{151752}{8075}$$

2)



$$\int_{Q \cup T} g(x,y)\,dx\,dy =$$
$$\int_Q g(x,y)\,dx\,dy + \int_T g(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \mathrm{Area}(Q) + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{0} (x+y^2)\,dy$$
$$= 1 + \int_0^1 \left(xy + \tfrac{1}{3}y^3\right|_{x-1}^{0} dx$$
$$= 1 + \int_0^1 -\left[x(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3}\right] dx$$
$$= 1 + \int_0^1 \frac{1-x^3}{3}\,dx = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$f(x,y) = \frac{4}{5}\begin{cases} 1 & (x,y) \in Q \\ x+y^2 & (x,y) \in T \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{x-1}^{1} f(x,y)\,dy = \frac{4}{5}\left[\int_{x-1}^{0} (x+y^2)\,dy + 1\right]$$
$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1-x^3}{3} + 1\right] = \frac{4}{15}(4-x^3)$$

$\underline{0 \le x \le 1}$

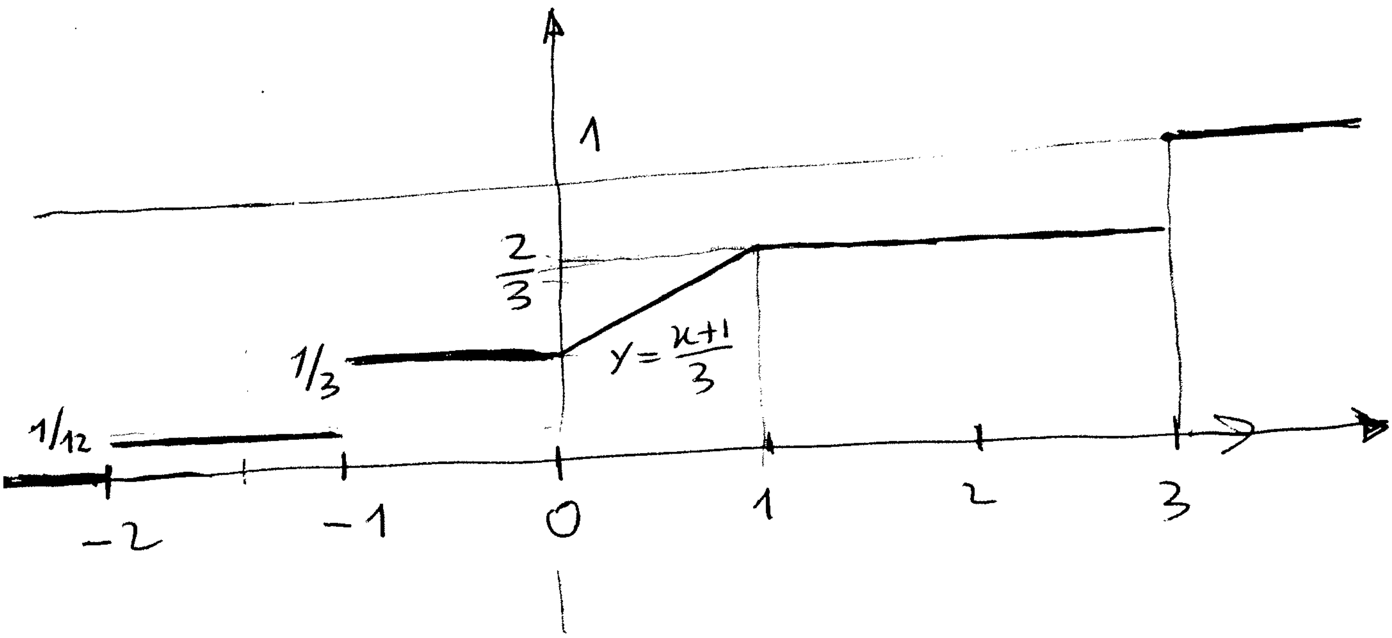
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 1 \geq y \geq 0 \\ \int_0^{y+1} (u+y^2)\,du = (y+1)\left(\frac{y+1}{2}+y^2\right) & -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

$$P\left(Y \geq 0 \mid X < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(Y \geq 0 \wedge X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{15} \int_0^{1/2} (4-u^3)\,du}$$

$$= \frac{3}{2\left(4u - \frac{u^4}{4}\right)\Big|_0^{1/2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{127} = \frac{96}{127}$$

3) $P(X=-2) + P(X=-1) + P(X=3) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{2}{3}$

massa distribuita uniformemente in $[0,1] = \frac{1}{3}$



Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 10 luglio 2006

1. Un'urna contiene 4 palline bianche e 4 nere. Si lancia due volte un dado equilibrato e si imbussola dopo ogni lancio una pallina bianca se il numero uscito è 1, una nera altrimenti. Si eseguono poi estrazioni senza rimessa dall'urna. Considerati gli eventi:

$$E_n = \text{esce pallina bianca nell'estrazione } n\text{-sima}$$

calcolare $\Pr(E_n)$, $\Pr(E_2|E_1 \wedge \overline{E}_5)$, $\Pr(\overline{E}_3|E_1 \wedge \overline{E}_5)$ e $\Pr(\overline{E}_5|E_1 \wedge \overline{E}_5)$. Considerato il numero aleatorio

$$N = \text{numero di palline bianche presenti nell'urna prima della seconda estrazione}$$

valutare $E(N)$ e $V(N)$.

2. Considerato il lancio simultaneo di due dadi equilibrati, calcolare la covarianza dei numeri aleatori

$$\begin{aligned} X &= \text{minimo dei due numeri usciti nel lancio} \\ Y &= \text{massimo dei due numeri usciti nel lancio.} \end{aligned}$$

3. Considerato un numero aleatorio X tale che $E(X^4) = 2^{-8}$, fornire una limitazione della probabilità $P(|X| > \frac{1}{2})$.

1)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & (6,4) & \frac{1}{36} & A \\
 & (5,4) \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "\neq 1"'] & (5,5) & & \\
(4,4) \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "\neq 1"'] & & & \frac{10}{36} & B \\
 & (4,5) \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "\neq 1"'] & (5,5) & & \\
 & & (4,6) & \frac{25}{36} & C
\end{tikzcd}$$

$\underline{P(E_n) = 0 \quad \text{se } n > 0}$

$\underline{1 \leq n \leq 10}$

$$P(E_n) = P(E_n | A)\, P(A) + P(E_n | B)\, P(B) + P(E_n | C)\, P(C)$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{36} + \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{36} + \frac{4}{10} \cdot \frac{25}{36} = \frac{13}{30}$$

$$P(E_n) = \begin{cases} \frac{13}{30} & 1 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

$$P(E_2 | E_1 \wedge \overline{E}_5) = \frac{P(E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_5)}{P(E_1 \wedge \overline{E}_5)} = \frac{P(E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3)}{P(E_1 \wedge \overline{E}_2)}$$

$$P(\overline{E}_3 | E_1 \wedge \overline{E}_5) = 1 - P(E_3 | E_1 \wedge \overline{E}_5) = 1 - \frac{P(E_1 \wedge E_3 \wedge \overline{E}_5)}{P(E_1 \wedge \overline{E}_5)}$$

$$= 1 - \frac{P(E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3)}{P(E_1 \wedge \overline{E}_2)} = 1 - P(E_2 | E_1 \wedge \overline{E}_5)$$

$P(\overline{E}_5 | E_1 \wedge \overline{E}_5) = 1$ in quanto $E_1 \wedge \overline{E}_5 \rightarrow \overline{E}_5$

$$P(E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3) = P(E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3 | A) \cdot \frac{1}{36} + P(E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3 | B) \frac{10}{36} + P(E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3 | C) \cdot \frac{25}{36}$$

$$= \frac{1}{36}\left[\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}\binom{3}{2}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}\binom{3}{2}}\, 10 + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}\binom{3}{2}} \cdot 25\right]$$

$$= \frac{1}{36\binom{10}{3}\binom{3}{2}}\left[\binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{2}\binom{5}{1}\cdot 10 + \binom{4}{2}\binom{6}{1}\cdot 25\right]$$

$$= \frac{30+250+450}{3\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 3} = \frac{730}{3\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 3} = \frac{73}{648}$$

- $$P(E_1 \wedge \overline{E}_2) = P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | A)\frac{1}{36} + P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | B)\frac{10}{36} + P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | C)\frac{25}{36}$$

$$= \frac{1}{36}\left[\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}\binom{2}{1}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}\binom{2}{1}}\, 10 + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}\binom{2}{1}} \cdot 25\right]$$

$$= \frac{1}{36\cdot 10\cdot 9}\left[6\cdot 4 + 5\cdot 5\cdot 10 + 4\cdot 6\cdot 25\right]$$

$$= \frac{874}{36\cdot 10\cdot 9} = \frac{437}{1620}$$

$$P(E_2 | E_1 \wedge \overline{E}_5) = \frac{73}{648}\cdot\frac{1620}{437} = \frac{365}{874}$$

$$P(\overline{E}_3 | E_1 \wedge \overline{E}_5) = 1 - \frac{365}{874} = \frac{509}{874}$$

- $$E(N) = E(N|E_1)P(E_1) + E(N|\overline{E}_1)P(\overline{N}_1)$$

$$= E(N|E_1)\frac{13}{30} + E(N|\overline{E}_1)\cdot\frac{17}{30}$$

$$E(N) = \frac{1}{30}\Big[\big(5\cdot P(A) + 4P(B) + 3P(C)\big)\, 13 + \big(6\cdot P(A) + 5\cdot P(B) + 4P(C)\big)\, 17 \Big]$$

$$= \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{36}\Big[(5 + 4\cdot 10 + 3\cdot 25)\cdot 13 + (6 + 5\cdot 10 + 4\cdot 25)\cdot 17\Big] = \frac{39}{10}$$

$$Var(N) = E(N^2) - E(N)^2$$

$$= \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{36}\Big[(25 + 16\cdot 10 + 9\cdot 25)\cdot 13 + (36 + 25\cdot 10 + 16\cdot 25)\cdot 17\Big] - \left(\frac{39}{10}\right)^2 =$$

$$= \frac{8431}{30\cdot 13} - \frac{1521}{100} = \frac{24991}{3900}$$

2) $(X, Y) = $ (min numero uscito, max numero uscito)

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(5,6)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

	1	2	3	4	5	6
X	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$E(X) = 1\cdot\frac{11}{36} + 2\cdot\frac{9}{36} + 3\cdot\frac{7}{36} + 4\cdot\frac{5}{36} + 5\cdot\frac{3}{36} + 6\cdot\frac{1}{36} = \frac{91}{36}$$

$$E(Y) = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 3\cdot\frac{5}{36} + 4\cdot\frac{7}{36} + 5\cdot\frac{9}{36} + 6\cdot\frac{11}{36} = \frac{161}{36}$$

$$E(XY) = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{2}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{2}{36} + 6\cdot\frac{4}{36}$$
$$+ 8\cdot\frac{2}{36} + 9\cdot\frac{1}{36} + 10\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{4}{36} + 15\cdot\frac{2}{36}$$
$$+ 16\cdot\frac{1}{36} + 18\cdot\frac{2}{36} + 20\cdot\frac{2}{36} + 24\,\frac{2}{36} + 25\cdot\frac{1}{36}$$
$$+ 30\cdot\frac{2}{36} + 36\cdot\frac{1}{36} = \frac{441}{36}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$
$$= \frac{441}{36} - \frac{91}{36}\cdot\frac{161}{36} = \frac{1225}{1296}$$

3) Markov $\quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad \begin{pmatrix} X \geq 0 \\ a > 0 \end{pmatrix}$

$$P(|X| > \tfrac{1}{2}) = P(X^4 > \tfrac{1}{2^4}) \leq P(X^4 \geq \tfrac{1}{2^4})$$
$$\leq \frac{E(X^4)}{\frac{1}{2^4}} = 2^{-8}\cdot 2^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 19 giugno 2006

1. Un'urna contiene 3 palline bianche e 9 nere. Si estraggono 2 palline dall'urna e le si rimette nell'urna solo se hanno medesimo colore. Si procede poi ad una sequenza di estrazioni di una pallina per volta senza rimessa. Considerati gli eventi:

$$E_n = \text{esce pallina bianca nell'estrazione } n\text{-sima}$$

calcolare:

   - $\Pr(E_n)$;
   - $\Pr(\overline{E}_1 \wedge E_2 | E_5)$.

Considerato il numero aleatorio

$$N = \text{numero di palline bianche presenti nell'urna prima della terza estrazione}$$

valutare $\Pr(N = 2 | E_3)$.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita uniformemente nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(1, 3)$. Determinare:

   - le speranze matematiche di X e Y;
   - le funzioni di ripartizione e di densità del numero aleatorio $Z = Y - 3X$.

3. Considerati due numeri aleatori X, Y aventi speranza matematica finita, provare che risulta $V(X) - V(Y) = \mathrm{Cov}(X - Y, X + Y)$.

L)

$$(3,9) \xrightarrow{(b,b)\vee(n,n)} (3,9) \quad A \qquad P_n(A) = \frac{13}{22}$$

$$(3,9) \xrightarrow[(b,n)\vee(n,b)]{} (2,8) \quad B \qquad P_n(B) = \frac{9}{22}$$

$$P_n(b,b) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{22} \; ; \; P_n(n,n) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{11}$$

$$P_n(E_n) = P_n(E_n|A)\,P_n(A) + P_n(E_n|B)\,P_n(B)$$

$$= \frac{3}{12} \cdot \frac{13}{22} + \frac{2}{10} \cdot \frac{9}{22} = \frac{101}{440}$$

$$P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 | E_5) = \frac{P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_5)}{P_n(E_5)} = P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_5) \cdot \frac{440}{101}$$

$$P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_5) = P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_5 | A) \cdot P_n(A) + P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_5 | B)\,P_n(B)$$

$$= P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3 | A) \cdot \frac{13}{22} + P_n(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3 | B) \cdot \frac{9}{22}$$

$$= \frac{\cancel{\binom{3}{2}}\binom{9}{1}}{\binom{12}{3}\cancel{\binom{3}{2}}} \cdot \frac{13}{22} + \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}\binom{3}{2}} \frac{9}{22}$$

$$= \frac{9}{2 \cdot 11 \cdot 10} \cdot \frac{13}{22} + \frac{1}{15 \cdot \cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{\,3}}{22}$$

$$= \frac{9}{220} \cdot \frac{13}{22} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{15}_{\,5} \cdot 22} =$$

$$= \frac{1}{22}\left[\frac{9\cdot 13}{220} + \frac{1}{5}\right] = \frac{161}{220\cdot 22}$$

- $P_n(\bar{E}_1 \wedge E_2 \mid E_5) = \frac{161}{220\cdot 22}\cdot\frac{440}{101} = \frac{161}{11\cdot 101}$

Urne A: $\{N=2\} = \{S_2 = 1\} = (E_1 \wedge \bar{E}_2) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2)$

$$P_n(N=2 \wedge E_3) = P_n(E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) + P_n(\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$$

$$= \frac{\cancel{\binom{3}{2}}\binom{9}{1}}{\binom{12}{3}\cancel{\binom{3}{2}}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{1}}{\binom{12}{3}\binom{3}{2}} = 2\cdot\frac{9}{220} = \frac{9}{110}$$

- Urne B: $\{N=2\} = \{S_2 = 0\} = \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2$

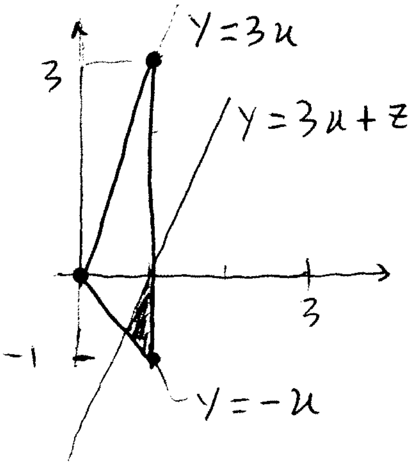
$$P_n(N=2 \wedge E_3) = P_n(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3)$$

$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}\binom{3}{1}} = \frac{7}{45}$$

$$P_n(N=2 \wedge E_3) = \frac{9}{110}\cdot\frac{13}{22} + \frac{7}{45}\cdot\frac{9}{22} = \frac{271}{22\cdot 110}$$

- $P_n(N=2 \mid E_3) = \frac{271}{\cancel{22}\cdot\cancel{110}_{22}}\cdot\frac{\cancel{440}^{\cancel{20}\,4}}{101} = \frac{271\cdot 4}{101\cdot 22}$

2)



$$f(x,y) = \left(\frac{1\cdot 4}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \int_T x\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-x}^{3x} \frac{1}{2} x\, dy = \int_0^1 x\,\frac{1}{2}(3x+x)\, dx$$

$$E(X) = \int_0^1 2u^2\,du = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_T y\, f(u,y)\,du\,dy = \int_0^1 du \int_{-u}^{3u} \frac{1}{2}\, y\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 du\, \frac{1}{2}\left(9u^2 - u^2\right) = \frac{1}{4} \int_0^1 8u^2\, du$$

$$E(Y) = 2/3$$

$$F_Z(z) = P_r(Y - 3X \le z) = \begin{cases} 0 & z \le -4 \\ \int_{\Delta} \frac{1}{2}\, du\,dy & -4 \le z \le 0 \\ 1 & z \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{\Delta} \frac{1}{2}\, du\,dy = \frac{1}{2}\, \text{aire}\, \Delta = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{4}\right)(z+4) = \left(1 + \frac{z}{4}\right)^2$$

3) $\mathrm{Var}(X) - V(Y) = \mathrm{Cov}(X - Y, X + Y)$

$$\mathrm{Cov}(X-Y, X+Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + \cancel{\mathrm{Cov}(X,Y)} - \cancel{\mathrm{Cov}(Y,X)} - \mathrm{Cov}(Y,Y)$$

$$= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 5 giugno 2006

1. Date un'urna A contenente 4 palline bianche e 3 palline nere e un'urna B contenente 7 bianche e 3 nere si eseguono 3 estrazioni con la seguente modalità. Si lancia un dado equilibrato e:
   - se esce il numero 1, le estrazioni avvengono dall'urna A rimettendo ognivolta nell'urna la pallina estratta con una di medesimo colore;
   - se esce un numero diverso da 1, le estrazioni avvengono dall'urna B senza rimettere mai la pallina nell'urna. Considerati i numeri aleatori:

   $$\begin{aligned} M &= \text{numero uscito nel lancio del dado} \\ N &= \text{numero di palline bianche presenti nell'urna dopo le 3 estrazioni} \end{aligned}$$

   calcolare $\mathrm{P}(M = 3|N = 5)$.

2. Dato il triangolo T di vertici $(0,0), (0,1), (1,2)$, sia la coppia aleatoria (X, Y) distribuita su T con densità congiunta del tipo $g(x, y) = k(y-x)$. Calcolare

   – il valore di k;

   – le densità marginali;

   – la speranza matematica e la varianza di Y;

   Si dica infine se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

3. I numeri aleatori U e V sono stocasticamente indipendenti e uniformemente distribuiti nell'intervallo $[1, 2]$. Determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $Z = \max(U, V)$.

.) $1 \to$ estrazioni da A con contagio unitario

$\neq 1 \to$ estrazioni senza rimessa da B

$$P(M=3 | N=5) = \frac{P(N=5 | M=3)}{P(N=5)} P(M=3)$$

$$P(N=5 | M=3) = P(N=5 | B) = P(S_3 = 2 | B)$$

$$= \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40}$$

$$P(N=5) = P(N=5|A) P(A) + P(N=5|B) P(B)$$

$$= P(N=5|A) \cdot \frac{1}{6} + \frac{21}{40} \cdot \frac{5}{6}$$

$$P(N=5|A) = P(BNN|A) + P(NBN|A) + P(NNB|A)$$

$$= P(N | BN \wedge A) P(N | B \wedge A) \cdot P(B|A)$$

$$+ P(N | NB \wedge A) P(B | N \wedge A) P(N|A)$$

$$+ P(B | NN \wedge A) P(N | N \wedge A) P(N|A)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}$$

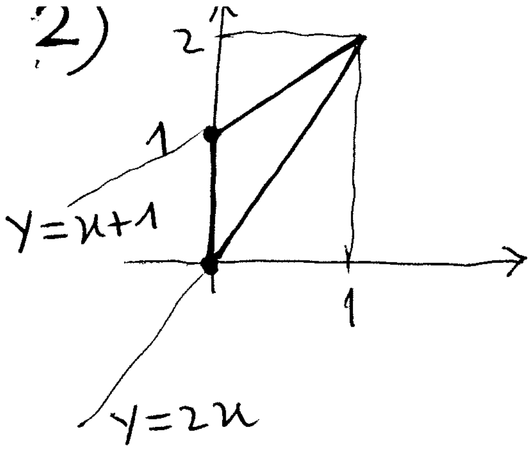
$$= 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} \quad \text{(scambiabile)}$$

$$= \frac{2}{7}$$

$$P(N=5) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{7}{16} = \frac{163}{21 \cdot 16}$$

$$P(M=3 | N=5) = \frac{21}{40} \cdot \frac{21 \cdot 16}{163} \cdot \frac{1}{6} = \frac{147}{815}$$

2)



$$\int_T (y-x)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{2x}^{x+1} (y-x)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} y^2 - xy \Big|_{2x}^{x+1} dx \right.$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}(x+1)^2 - x(x+1) \right] - \left[\tfrac{1}{2}(2x)^2 - x(2x) \right] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2-1)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

- $f(x,y) = \begin{cases} 3(y-x) & (x,y) \in T \\ 0 & (x,y) \notin T \end{cases}$

- $f_X(x) = \int_{2x}^{x+1} 3(y-x)\,dy = \frac{3}{2}(1-x^2) \quad 0 \le x \le 1$

- $f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{y/2} 3(y-x)\,dx = \frac{9}{8} y^2 & 0 \le y \le 1 \\ \int_{y-1}^{y/2} 3(y-x)\,dx = \frac{3}{8}(4-y^2) & 1 \le y \le 2 \end{cases}$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot \frac{9}{8} y^2\,dy + \int_1^2 y \cdot \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy = \frac{9}{8}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{9}{8} y^2\,dy + \int_1^2 y^2 \cdot \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy = \frac{7}{5}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{7}{5} - \frac{81}{64} = \frac{43}{5 \cdot 64}$$

$(x,y) \in T$

$$3(y-x) \neq \frac{3}{2}(1-x^2) \cdot \frac{9}{8} y^2 \qquad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array}$$

Quindi non sono stocasticamente indipendenti

)

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(\max(U,V) \leq t)$$

$$= P(U \leq t \wedge V \leq t)$$

$$= F_{(U,V)}(t,t)$$

$$= F_U(t)\, F_V(t)$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-1)^2 & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 12 dicembre 2005

1. Un'urna contiene 2 palline bianche e 1 pallina nera. Si lancia un dado e si imbussola nell'urna una pallina bianca se esce faccia 1, due palline bianche se esce faccia 2, tre palline nere altrimenti. Si eseguono poi 3 estrazioni senza rimessa. Considerati gli eventi

   - E_i = esce pallina bianca all'i-sima estrazione
   - H_j = esce il numero j nel lancio del dado

   calcolare $P(H_4|E_1 \wedge \overline{E}_3)$.

2. Considerata una variabile aleatoria X distribuita nell'intervallo $[0, 1]$ con funzione di densità proporzionale a $g(x) = x^3$, si determinino valori di $\epsilon > 0$ tali che $P(\{|X - E(X)| > \epsilon V(X)\}) < \frac{1}{2}$.
   Si forniscano inoltre la funzione di ripartizione e la funzione di densità della variabile aleatoria trasformata $Y = \ln(X + 1)$.

3. Dati gli eventi E_1, E_2, E_3 tali che E_1, E_3 sono esaustivi e $E_2 \Rightarrow E_1 \wedge E_3$, si individui la, partizione generata.

·) $P(H_4 | E_1 \wedge \overline{E}_3) = \dfrac{P(E_1 \wedge \overline{E}_3 | H_4)}{P(E_1 \wedge \overline{E}_3)} P(H_4)$ (Beyes)

$$H_4 \longrightarrow (\overset{\text{urna}}{2 \circ ; 4 \bullet})$$

$$P(E_1 \wedge \overline{E}_3 | H_4) = P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | H_4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}\binom{2}{1}} = \frac{4}{15}$$

$$P(E_1 \wedge \overline{E}_3) = P(E_1 \wedge \overline{E}_3 | H_1) P(H_1) + P(E_1 \wedge \overline{E}_3 | H_2) P(H_2)$$

$$+ 4 \cdot P(E_1 \wedge \overline{E}_3 | H_4) P(H_4)$$

$$= P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | H_1) \cdot \frac{1}{6} + P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | H_2) \cdot \frac{1}{6}$$

$$+ 4 P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | H_4) \cdot \frac{1}{6}$$

$$H_1 \longrightarrow (3 \circ ; 1 \bullet) \qquad P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | H_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}\binom{2}{1}} = \frac{1}{4}$$

$$H_2 \longrightarrow (4 \circ ; 1 \bullet) \qquad P(E_1 \wedge \overline{E}_2 | H_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}\binom{2}{1}} = \frac{1}{5}$$

$$P(E_1 \wedge \overline{E}_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{360}$$

$$P(H_4 | E_1 \wedge \overline{E}_3) = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{91}{360}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{16}{91}$$

2) $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

$f(x) = 4x^3$ in $[0,1]$; 0 fuori

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = 4 \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \frac{16}{25}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 = 4 \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75}$$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon \text{Var}(X)) \leq \frac{\cancel{\text{Var}(X)}}{\varepsilon^2 \text{Var}(X)^{\cancel{2}}} < \frac{1}{2}$$

$$\| \; \frac{1}{\varepsilon^2 \frac{2}{75}} < \frac{1}{2}$$

cioè $\varepsilon^2 > 75$

$$\underline{\varepsilon > \sqrt{75}}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln(X+1) \leq y) = P(X+1 \leq e^y)$$
$$= P(X \leq e^y - 1) = F_X(e^y - 1)$$

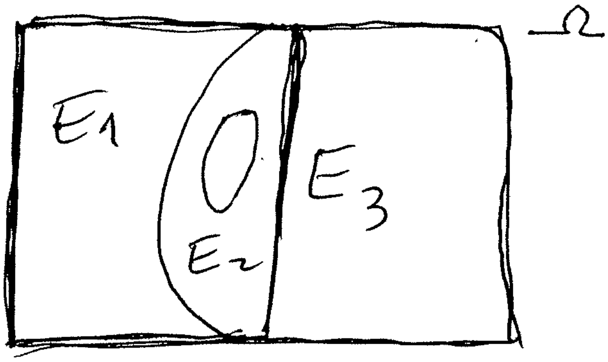
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \qquad x^4 = \int_0^x 4t^3 dt$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ (e^y-1)^4 & 0 \le y \le \ln 2 \\ 1 & y \geq \ln 2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4(e^y-1)^3 e^x & 0 \le y \le \ln 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3) $E_1 \vee E_3 = \Omega$

$E_2 \to E_1 \wedge E_3$



$E_1 \wedge \bar{E}_3, \; E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3, \; E_2, \; \bar{E}_1 \wedge E_3$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 16 settembre 2005

1. Da un'urna contenente 6 palline bianche e 5 palline nere si estrae una pallina e la si rimette nell'urna assieme ad un'altra di colore diverso (nera se quella estratta è bianca e bianca diversamente). Si eseguono poi 4 estrazioni senza rimessa. Considerati gli eventi

   - E_i = esce pallina bianca all'i-sima estrazione senza rimessa
   - H = viene estratta esattamente una pallina nera nelle prime 3 estrazioni

   calcolare $P(E_1)$ e $P(E_4|H)$.

2. Il numero aleatorio X è distribuito in $[-1, 1]$ con densità proporzionale alla funzione $h(t) = t^2$ e il numero aleatorio Y è distribuito in $[0, 1]$ con densità proporzionale alla funzione $k(t) = t^3$. Supposto che X e Y siano stocasticamente indipendenti, determinare:

   - densità e funzione di ripartizione congiunte della coppia (X, Y);
   - Il valore della funzione di ripartizione del numero aleatorio $Z = Y - X$ nel punto $-\frac{1}{2}$;
   - La probabilità condizionata $P(Z \geq -\frac{1}{2} \,|\, 0 < X < 1)$.

3. Si dica se la seguente distribuzione di probabilità sui numeri naturali:

$$P(n) = \frac{2}{3^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

   è numerabilmente additiva.

L)

$$(6,5) \xrightarrow{b} \overset{A}{(6,6)} \quad \frac{6}{11}$$

$$(6,5) \xrightarrow{n} \underset{B}{(7,5)} \quad \frac{5}{11}$$

$$P(E_1) = \frac{6}{11}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{11}\cdot\frac{7}{12} = \frac{71}{132}$$

$$H = \{S_3 = 2\}$$

$$P(H) = P(H|A)\cdot P(A) + P(H|B)P(B)$$

$$= \frac{\binom{6}{2}\binom{6}{1}}{\binom{12}{3}}\cdot\frac{6}{11} + \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}\cdot\frac{5}{11} = \frac{71\cdot 3}{4\cdot 11^2} = \frac{213}{484}$$

$$H \wedge E_4 = \{S_4 = 3\} \wedge \overline{E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge \overline{E_4}}$$

$$P(H\wedge E_4) = P(S_4 = 3) - P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge \overline{E_4})$$

$$= \left[P(S_4 = 3|A) - P(E_1\wedge E_2 \wedge E_3 \wedge \overline{E_4}|A)\right]P(A)$$

$$+ \left[P(S_4=3|B) - P(E_1\wedge E_2 \wedge E_3 \wedge \overline{E_4}|B)\right]P(B)$$

$$= \left[\frac{\binom{6}{3}\binom{6}{1}}{\binom{12}{4}} - \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{1}}{\binom{12}{4}\binom{4}{3}}\right]\frac{6}{11}$$

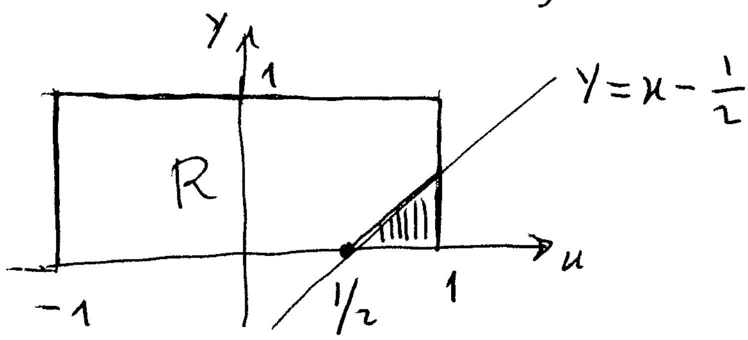
$$+ \left[\frac{\binom{7}{3}\binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} - \frac{\binom{7}{3}\binom{5}{1}}{\binom{12}{4}\binom{4}{3}}\right]\cdot\frac{5}{11}$$

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{1}}{\binom{12}{4}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{11} + \frac{\binom{7}{3}\binom{5}{1}}{\binom{12}{4}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{11}$$

$$= \frac{2}{11}\cdot\frac{6}{11} + \frac{35}{12\cdot 11}\cdot\frac{5}{11} = \frac{319}{12\cdot 11^2}$$

$$P(E_4 \mid H) = \frac{P(H \wedge E_4)}{P(H)} = \frac{319}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot \cancel{11^2}} \cdot \frac{\cancel{4 \cdot 11^2}}{71 \cdot 3} = \frac{319}{639}$$

2)



$$\left.\begin{array}{ll} f_X(x) = \frac{3}{2} x^2 & -1 \le x \le 1 \\ f_Y(y) = 4y^3 & 0 \le y \le 1 \end{array}\right] \quad f(x,y) = 6x^2 y^3 \qquad (x,y) \in R$$

$$\left.\begin{array}{ll} F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{3}{2} t^2 \, dt = \frac{x^3+1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ F_Y(y) = \int_0^y 4t^3 \, dt = y^4 & 0 \le y \le 1 \end{array}\right]$$

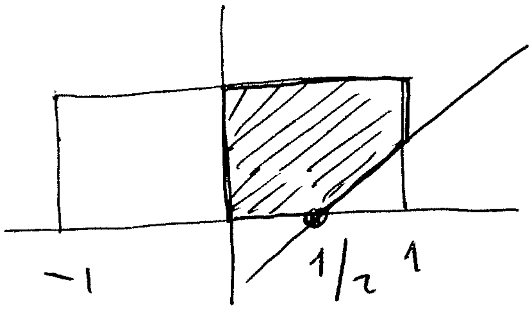
$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y) = \frac{1}{2}(x^3+1) y^4 \qquad (x,y) \in R$$

$$F_Z\left(-\tfrac{1}{2}\right) = P\left(Y - X \le -\tfrac{1}{2}\right) = P(\blacktriangle) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{x-\frac{1}{2}} f(x,y) \, dy$$

$$= 6 \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{x-\frac{1}{2}} x^2 y^3 \, dy$$

$$= \frac{3}{32} \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 (2x-1)^4 \, dx$$

$$= \frac{3}{20}$$



$$P\left(0<X<1 \wedge Z \geq -\tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= P(\square)$$

$$= P\left((X,Y)\in[0,1]^2\right) - F_Z\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 6x^2y^3\,dy - \frac{3}{20}$$

$$= \frac{7}{20}$$

$$P\left(Z \geq -\tfrac{1}{2} \,\middle|\, 0<X<1\right) = \frac{P\left(0<X<1 \wedge Z \geq -\tfrac{1}{2}\right)}{P(0<X<1)}$$

$$= \frac{\frac{7}{20}}{\frac{3}{2}\int_0^1 x^2\,dx} = \frac{7}{20}\cdot 2 = \frac{7}{10}$$

3) $$\sum_{n\geq 1}\frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n} - 1\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right] = \frac{1}{3} < 1$$

P non è numerabilmente additiva.

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 4 luglio 2005

1. L'urna A contiene 2 palline bianche e 6 palline nere, l'urna B contiene 2 palline bianche e 10 palline nere. Si procede a 4 estrazioni senza rimessa da una delle due urne, scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{3}{4}$ alla scelta dell'urna A. Valutare la probabilità che sia stata scelta l'urna A sapendo che è stata estratta pallina nera nella seconda estrazione e pallina bianca nella quarta estrazione.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$ con densità $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^2 + y)$. Determinare:

   – le densità marginali;

   – la funzione di ripartizione del numero aleatorio $Z = X + Y$.

3. Considerato un numero aleatorio X con speranza matematica 5 e varianza 10, individuare un intorno di 5 tale che la probabilità che X cada in tale intorno sia almeno del 90%.

)

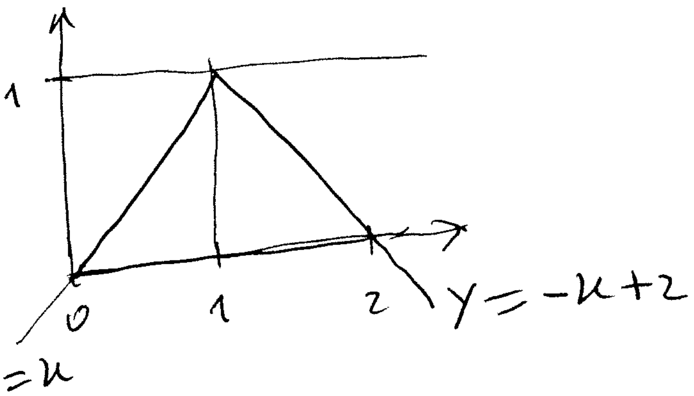
$$P(A|E_2 \wedge E_4) = \frac{P(E_2 \wedge E_4|A)}{P(E_2 \wedge E_4)}\, P(A)$$

$$P(E_1 \wedge E_4|A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{8}{2}\binom{2}{1}} = \frac{3}{14}$$

$$P(E_1 \wedge E_4|B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{10}{1}}{\binom{12}{2}\binom{2}{1}} = \frac{5}{33}$$

$$P(A|E_2 \wedge E_4) = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{14}\cdot\frac{3}{4} + \frac{5}{33}\cdot\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{297}{367}$$

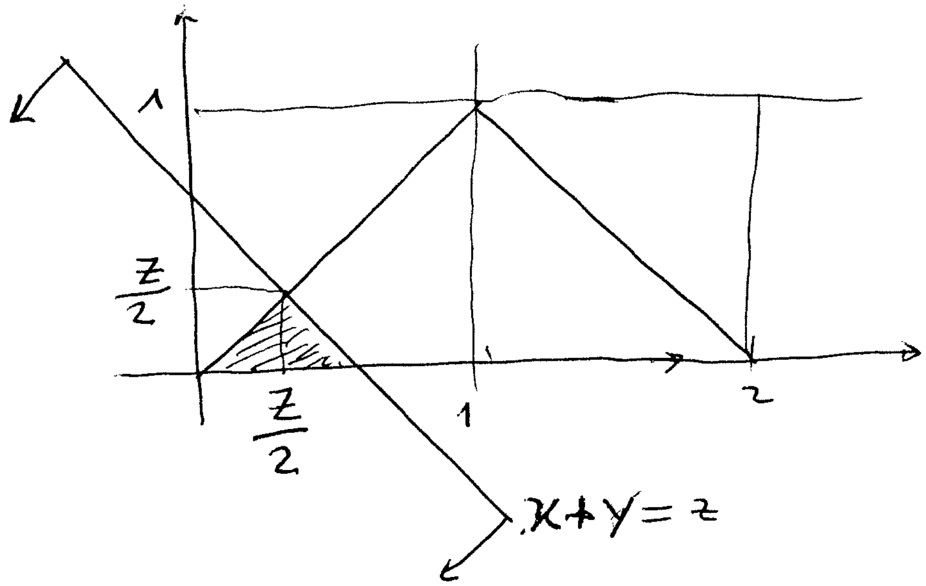
2)



- $$f_X(x) = \frac{2}{3}\begin{cases} \int_0^x (x^2+y)\,dy = x^3 + \frac{1}{2}x^2 & 0 \le x \le 1 \\ \int_0^{2-x} (x^2+y)\,dy = \frac{5}{2}x^2 - x^3 - 2x + 2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

- $$f_Y(y) = \frac{2}{3}\int_y^{2-y} (x^2+y)\,dx = 8y - 3y^2 - y^3 - \frac{1}{2}y^4$$

$$0 \le y \le 1$$



- $F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z)$
- $F_Z(z) = 0$ si $z \le 0$
- $F_Z(z) = 1$ si $z \geqslant 2$
- $F_Z(z) = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{z}{2}} dy \int_y^{z-y} (x^2+y)\, dx$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{z}{2}} \frac{z^3 - 3yz^2 + 3y^2 z + 3yz - 2y^3 - 6y^2}{3}\, dy$$

$$= \frac{2}{9} \left(z^3 y - \frac{3}{2} y^2 z^2 + y^3 z + \frac{3}{2} y^2 z - \frac{y^4}{2} - 2y^3 \right|_0^{\frac{z}{2}}$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{7}{2 \cdot 16} z^4 + \frac{1}{8} z^3 \right)$$

$$= \frac{1}{144} (7z+2) z^3$$

$$P(|X-5| \geq \varepsilon) = 1 - P(|X-5| < \varepsilon) \leq \frac{10}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X-5| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{10}{\varepsilon^2}$$

Basta quindi che $1 - \frac{10}{\varepsilon^2} \geq \frac{9}{10}$

cioè $\varepsilon \geq 10$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 20 giugno 2005

1. Fra 10 urne contenenti palline bianche e nere, una contiene il 25% di pallíne bianche mentre le rimanenti 9 contengono in parti uguali palline biance e nere. Si estra a caso un'urna e da questa si estraggono con rimessa tre palline. Considerati gli eventi

$$\begin{aligned} E &= \text{le palline estratte sono tutte bianche} \\ H &= \text{l'urna estratta è quella con il 25\% di palline bianche} \end{aligned}$$

   calcolare $P(H|E)$ e verificare se gli eventi E e H sono stocasticamente indipendenti.

2. Considerato il numero aleatorio X avente funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   determinare:

   - la speranza matematica del numero aleatorio $Y = 4X + 3$;
   - la probabilità dell'evento: $1 \leq Y \leq 4$;
   - le soluzioni dell'equazione

$$P(\{Y \geq x\}) \leq \frac{1}{e}.$$

   - l'espressione della funzione di ripartizione congiunta della coppia (X, Y)

3. Data una partizione $\mathcal{P}$ dell'evento certo, siano gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ tutti logicamente dipendenti da $\mathcal{P}$. Cosa si può dire degli eventi congiunzione $\bigwedge_{n=1}^{+\infty} E_n$ e disgiunzione $\bigvee_{n=1}^{+\infty} E_n$?

• A_0 = "urne con 25% di palline bianche"

A_i = "urne con 50% di palline bianche"

$(i=1,\dots,9)$

$$P(E|A_0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \qquad P(A_0) = P(A_i) = \frac{1}{10}$$

$$P(E|A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (i \le 9) \qquad (i \le 9)$$

$$P(E) = P(E|A_0)P(A_0) + \sum_{i=1}^{9} P(E|A_i)P(A_i)$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 9\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{2^3 \cdot 2^3} + \frac{9}{2^3}\right]$$

$$= \frac{1}{80}\left[\frac{1}{8} + 9\right] = \frac{73}{8 \cdot 80}$$

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)}{P(E)} P(H) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\frac{73}{8 \cdot 80}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{73}$$

$P(H|E) = \frac{1}{73} \neq \frac{1}{10} = P(H) \Rightarrow E, H$ non sono stoc. indip.

2.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F'(x) = 2e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(Y) = E(4X+3) = 4E(X) + 3$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} \cdot x\,dx = -\int_0^{+\infty} x \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right)dx$$

per parti $= -xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx =$

$$= -(0-0) + \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

$* E(Y) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 5$

$$F_Y(y) = P(4X+3 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-3}{4}\right) = F_X\left(\frac{y-3}{4}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & y < 3 \\ 1 - e^{-\frac{y-3}{2}} & y \geq 3 \end{cases}$$

$$* P(\{1 \leq Y \leq 4\}) = F_Y(4) - F_Y(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

$$P(\{Y \geq x\}) = P(\{Y > x\}) = 1 - P(\{Y \leq x\}) =$$

$$= 1 - F_Y(x) =$$

$$= \begin{cases} 1 & x < 3 \\ e^{-\frac{y-3}{2}} & x \geq 3 \end{cases}$$

Allora

$* P(\{Y \geq x\}) \leq \frac{1}{e}$ ha come soluzione $x \geq 5$

(per $x < 1$ vale $P(\{Y \geq x\}) = 1 \geq \frac{1}{e}$)

$$e^{-\frac{x-3}{2}} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow e^{-\frac{x-3}{2}} \leq e^{-1} \Rightarrow -\frac{x-3}{2} \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2} \geq 1 \Rightarrow x \geq 5$$

$*\quad F(x,y) = P(X \le x \wedge Y \le y) = P\left(X \le x \wedge X \le \frac{y-3}{4}\right)$

$$= \begin{cases} F_X(x) & x \le \frac{y-3}{4} \\ F_X\left(\frac{y-3}{4}\right) & x > \frac{y-3}{4} \end{cases}$$

3) E_n log. dip. da $\mathcal{P} \Rightarrow \forall \omega \quad \omega \to E$ oppure $\omega \to \overline{E}$

Dato ω possono sussistere 2 casi:

- $\exists n : \omega \to E_n$. Allora $\omega \to \bigvee_n E_n$
- $\nexists n\ (\omega \to E_n)$. Allora $\forall n \quad \omega \to \overline{E_n}$

  da cui $\quad \omega \to \bigwedge_n \overline{E_n} = \overline{\bigvee_n E_n}$

Ne segue $\bigvee_n E_n$ log. dip. da $\mathcal{P}$

Da $\bigwedge_n E_n = \overline{\bigvee_n \overline{E_n}}$ otteniamo la log. dip. di $\bigwedge_n E_n$ da $\mathcal{P}$.

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 6 giugno 2005

1. L'urna A contiene 3 palline bianche e 6 palline nere, l'urna B contiene 4 palline bianche e 6 palline nere. Si procede a 3 estrazioni senza rimessa da una delle due urne, scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{3}{5}$ alla scelta dell'urna A. Considerati gli eventi

$$\begin{aligned} E_i &= \text{esce pallina bianca all'}\, i\text{-sima estrazione} \\ E &= \text{è stata estratta l'urna}\, A \end{aligned}$$

calcolare $P(E_1 \vee \overline{E}_3)$ e $P(E|E_1 \vee \overline{E}_3)$.

2. Considerato il numero aleatorio X distribuito nell'intervallo $[0, 3]$ con densità proporzionale alla funzione:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ x + 2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

determinare:

   - la funzione di ripartizione;
   - la speranza matematica;
   - la funzione di ripartizione del numero aleatorio $Y = e^{X+1} + 1$.

3. Individuare la partizione generata dagli eventi F_1, F_2 e F_3 tali che: $F_1 \wedge F_3 = \emptyset$ e $F_2 \Rightarrow F_1 \vee F_3$.

-) $P(E_1 \vee \overline{E}_3) = P(E_1 \vee \overline{E}_3 | A) P(A) + P(E_1 \vee \overline{E}_3 | B) P(B)$

$$= \left[P(E_1|A) + P(\overline{E}_3|A) - P(E_1 \wedge \overline{E}_3|A) \right] \frac{3}{5}$$

$$+ \left[P(E_1|B) + P(\overline{E}_3|B) - P(E_1 \wedge \overline{E}_3|B) \right] \frac{2}{5}$$

$$= \left[\frac{3}{9} + \left(1 - \frac{3}{9}\right) - \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{1}}{\binom{9}{2}\binom{2}{1}} \right] \cdot \frac{3}{5}$$

$$+ \left[\frac{4}{10} + \left(1 - \frac{4}{10}\right) - \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}\binom{2}{1}} \right] \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \left[1 - \frac{1}{4}\right] \cdot \frac{3}{5} + \left[1 - \frac{4}{15}\right] \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{11}{15} \cdot \frac{2}{5}$$

$$P(A | E_1 \vee \overline{E}_3) = \frac{P(E_1 \vee \overline{E}_3 | A)}{P(E_1 \vee \overline{E}_3)} P(A) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{11}{15} \cdot \frac{2}{5}} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{223}{300}$$

2) $$\int_0^3 g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^3 (x+2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^3$$

$$= \frac{25}{3}$$

$$f(x) = \frac{3}{25} \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ x+2 & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{3}{25}\left[\int_0^1 x\cdot x^2\,dx + \int_1^3 x(x+2)\,dx\right] = \frac{203}{100}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{3}{25}\int_0^x t^2\,dt & 0 \le x \le 1 \\ \frac{3}{25}\left[\int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x (t+2)\,dt\right] & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{25}x^3 & 0 \le x \le 1 \\ \frac{3}{50}x^2 + \frac{6}{25}x - \frac{13}{50} & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{X+1}+1 \le y) = P(e^{X+1} \le y-1)$$

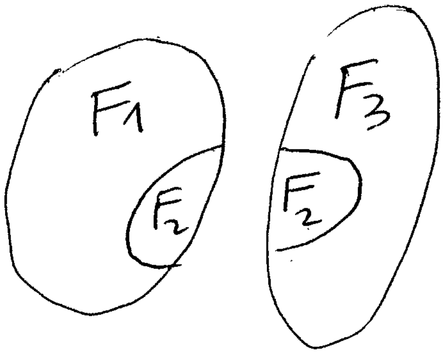
- $F_Y(y) = 0$, si $y \le 1$
- $\underline{y>1}$ $\quad F_Y(y) = P(X+1 \le \ln(y-1))$

$$= P(X \le \ln(y-1)-1)$$

$$= F(\ln(y-1)-1)$$

$$= \begin{cases} 0 & y < e+1 \\ \frac{1}{25}[\ln(y-1)-1]^3 & e+1 \le y \le e^2+1 \\ \frac{3}{50}[\ln(y-1)-1]^2 + \frac{6}{25}[\ln(y-1)-1] - \frac{13}{50} & e^2+1 \le y \le e^4+1 \\ 1 & y \geq e^4+1 \end{cases}$$

3)



$F_1 \wedge \overline{F_2}$

$F_1 \wedge F_2$

$\overline{F_2} \wedge F_3$

$F_2 \wedge F_3$

$\overline{F_1} \wedge \overline{F_3}$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 14 gennaio 2005

1. L'urna A contiene 5 palline bianche e 10 palline nere, l'urna B contiene 12 palline bianche e 4 palline nere. Si proceda a 3 estrazioni senza rimessa da una delle due urne, scelta con un meccanismo di sorteggio che attibuisce probabilità $\frac{3}{5}$ alla scelta dell'urna A. Valutare la probabilità che sia stata scelta l'urna A sapendo che sono state estratte almeno due palline bianche.

2. Considerata la coppia aleatoria (X, Y) distribuita nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ con densità proporzionale alla funzione:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \text{ nel triangolo di vertici } (0,0),\ (1,0),\ (0,1) \\ 2 & \text{se } (x,y) \text{ nel triangolo di vertici } (1,0),\ (1,1),\ (0,1) \end{cases}$$

   determinare:

   - la funzione di ripartizione congiunta;
   - le densità marginali di X e Y.

3. Considerato il numero aleatorio X distribuito nell'intervallo $[-1,1]$ con densità

$$f(x) = \frac{1}{12}(6 - x),$$

   determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X^3 + 1$.

1) $H = \{S_3 \geq 2\} = \{S_3 = 2\} \cup \{S_3 = 3\}$

$$P(A|H) = \frac{P(H|A)}{P(H)}\,P(A) = \frac{P(H|A)}{P(H|A)\,P(A) + P(H|B)\,P(B)}\,P(A)$$

$$= \frac{3\,P(H|A)}{3\,P(H|A) + 2\,P(H|B)}$$

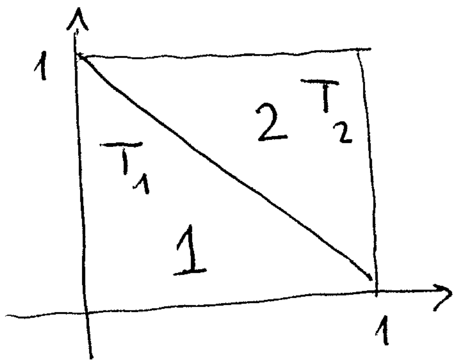
$$P(H|A) = P(S_3 = 2|A) + P(S_3 = 3|A)$$

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{22}{91}$$

$$P(H|B) = \frac{\binom{12}{2}\binom{4}{1}}{\binom{16}{3}} + \frac{\binom{12}{3}\binom{4}{0}}{\binom{16}{3}} = \frac{11}{14}$$

$$P(A|H) = \frac{3\cdot\frac{22}{91}}{3\cdot\frac{22}{91} + 2\,\frac{11}{14}} = \frac{6}{19}$$

2)



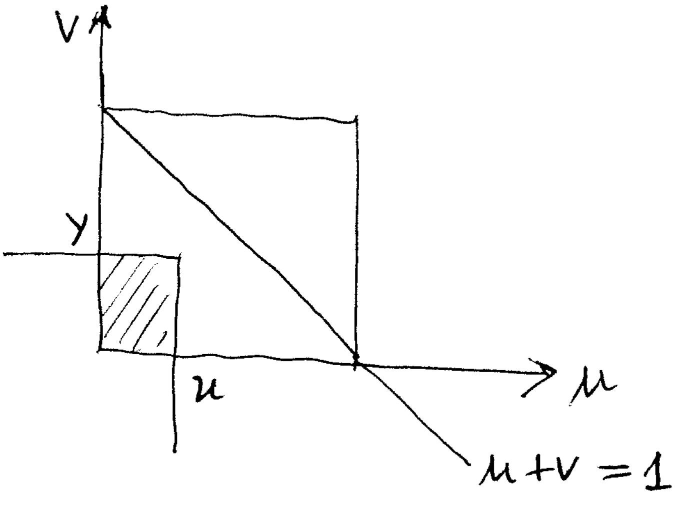
$$\int_Q g(x,y)\,dx\,dy = \int_{T_1} dx\,dy + \int_{T_2} 2\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

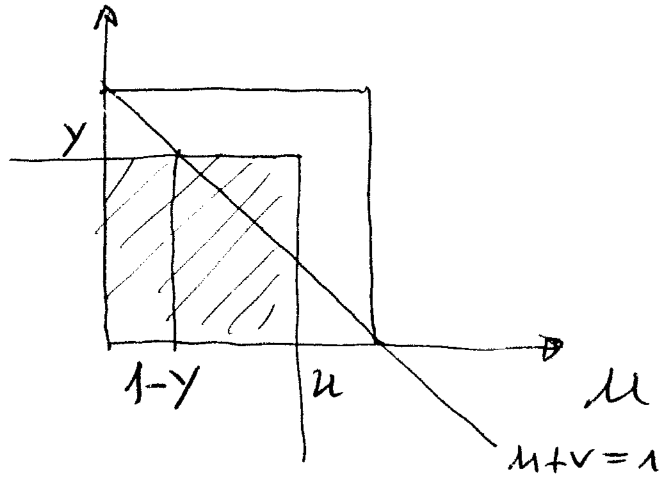
$$f(x,y) = \frac{2}{3}\begin{cases} 1 & (x,y) \in T_1 \\ 2 & (x,y) \in T_2 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{2}{3}\left[\int_0^{1-x} dy + \int_{1-x}^{1} 2\,dy\right] = (x+1)\,\frac{2}{3}$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{3}\left[\int_0^{1-y} du + \int_{1-y}^{1} 2\, du\right] = \frac{2}{3}(y+1)$$



A)



B)

A) $$F(u,y) = \int_0^u du \int_0^y dv = uy \quad \text{(area del rettangolo)}$$

B) $$F(u,y) = \int_0^{1-y} du \int_0^y dv + \int_{1-y}^{u} du \left[\int_0^{1-u} dv + \int_{1-u}^{y} 2\, dv\right]$$

$$= (1-y)y + \int_{1-y}^{u} (u+2y-1)\, du$$

$$= (1-y)y + \left[\frac{1}{2}u^2 + (2y-1)u\right|_{1-y}^{u}$$

$$= (1-y)y + \frac{1}{2}u^2 + (2y-1)u - (1-y)\frac{3y-1}{2}$$

$$= \frac{(1-y)^2}{2} + \frac{1}{2}u^2 + (2y-1)u$$

3) $Z = X^3 + 1$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X^3 + 1 \le z) = P(X \le \sqrt[3]{z-1})$$

$$= F_X(\sqrt[3]{z-1})$$

$$-1 \le \sqrt[3]{z-1} \le 1 \iff 0 \le z \le 2$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt[3]{z-1}} \frac{1}{12}(6-u)\,du & 0 \le z \le 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{\sqrt[3]{z-1}} \frac{1}{12}(6-u)\,du = \frac{1}{12}\left(6u - \frac{1}{2}u^2\right)\Big|_{-1}^{\sqrt[3]{z-1}}$$

$$= \frac{1}{24}\left(\sqrt[3]{z-1} + 1\right)\left(13 - \sqrt[3]{z-1}\right)$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 14 settembre 2004

1. Da un'urna che contiene 5 palline bianche e 3 palline nere, si esegue una sequenza di estrazioni reinbussolando, dopo ogni estrazione, la pallina estratta insieme con una del medesimo colore. Considerato l'evento:

   $$E_i : \text{esce pallina bianca all'}i\text{-sima estrazione}$$

   calcolare $P(E_3)$ e $P(\overline{E}_2 \wedge E_4 | E_3)$.

2. Considerata la coppia aleatoria (X, Y) distribuita nel parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,3)$, $(1,3)$ con densità del tipo

   $$f(x, y) = k(x + y),$$

   determinare:

   – il valore di k;

   – le densità marginali di X e Y.

3. Con riferimento al gioco del lotto su una data ruota, si considerino gli eventi

   $$\begin{aligned} H_i &: \text{il primo estratto della cinquina è } i \\ K_j &: \text{l'ultimo estratto della cinquina è } j. \end{aligned}$$

   Esaminare la logica dipendenza dalla partizione $\{H_i \wedge K_j \, : \, i, j = 1, \ldots, 90\}$ degli eventi:

   $$\begin{aligned} E &: \text{la somma del primo e dell'ultimo estratto è dispari} \\ F &: \text{i numeri estratti sono apparsi in ordine decrescente.} \end{aligned}$$

1) Processo scambiabile

$$P_r(E_3) = P_r(E_1) = \frac{5}{8}$$

$$P_r(E_2 \wedge E_4 \wedge E_3) = P_r(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$$

$$= P_r(E_3 | E_2 \wedge \overline{E}_1)\, P(E_2 | E_1)\, P_r(E_1)$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

———— o ————

3) E logicamente dipendente

$H_i \wedge K_j \to \overline{F}$ se $i < j$

F logicamente semidipendente

• $P(E_3) = P(E_3 \mid E_1 \wedge E_2)\, P(E_2 \mid E_1)\, P(E_1) +$

$P(E_3 \mid \bar{E}_1 \wedge E_2)\, P(E_2 \mid \bar{E}_1)\, P(\bar{E}_1) +$

$P(E_3 \mid E_1 \wedge \bar{E}_2)\, P(\bar{E}_2 \mid E_1)\, P(E_1) +$

$P(E_3 \mid \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2)\, P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1)\, P(\bar{E}_1)$

	B N		
E_1	$(6,3)$	$(7,3)$	$E_1 \wedge E_2$
		$(6,4)$	$E_1 \wedge \bar{E}_2$
$\bar{E}_1$	$(5,4)$	$(6,4)$	$\bar{E}_1 \wedge E_2$
		$(5,5)$	$\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2$

• $P(E_3) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8} + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{6}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{8} +$

$+ \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3\cdot5(2\cdot7+12+4)}{10\cdot9\cdot8}$

$= \frac{5}{8}$

• $P(\bar{E}_2 \wedge E_4 \mid E_3) = \frac{P(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3)}{P(E_3)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$

$P(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3) = P(E_1 \bar{E}_2 E_3 E_4) + P(\bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3 E_4)$

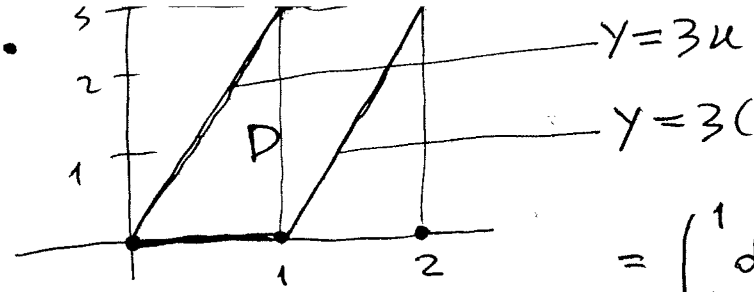
$= P(E_4 \mid E_1 \bar{E}_2 E_3)\, P(E_3 \mid E_1 \bar{E}_2)\, P(\bar{E}_2 \mid E_1)\, P(E_1)$

$+ P(E_4 \mid \bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3)\, P(E_3 \mid \bar{E}_1 \bar{E}_2)\, P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1)\, P(\bar{E}_1)$

$\bar{E}_1$	$\bar{E}_2$	E_3	E_1	$\bar{E}_2$	E_3
$(5,4)$	$(5,5)$	$(6,5)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(7,4)$

$= \frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{8} + \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}$

$= \frac{6\cdot5\cdot3(7+4)}{11\cdot10\cdot9\cdot8} = 1/8$



$$\int_D (x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{3x} (x+y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{3(x-1)}^{3} (x+y)\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[3x^2 + \frac{9}{2}x^2\right] + \int_1^2 dx \left[x\left(3-3(x-1)\right) + \frac{1}{2}\left(9-9(x-1)^2\right)\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{15}{2}x^2\,dx + \int_1^2 \left[3x(2-x) + \frac{9}{2}x(2-x)\right] dx$$

$$= \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{15}{2}\int_1^2 x(2-x)\,dx = \frac{15}{2}\left[\frac{1}{3} + \int_1^2 (2x-x^2)\,dx\right]$$

$$= \frac{15}{2}\left[\frac{1}{3} + \left(2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2\right)\right] = \frac{15}{2}$$

$$f_X(x) = \frac{2}{15}\begin{cases} \int_0^{3x} (x+y)\,dy & x\in[0,1] \\ \int_{3(x-1)}^{3} (x+y)\,dy & x\in[1,2] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & x\in[0,1] \\ x(2-x) & x\in[1,2] \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{15}\int_{y/3}^{1+y/3} (x+y)\,dx =$$

$$= \frac{2}{15}\left[y\left(1+y/3-y/3\right) + \frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{y}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{9}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{2}\right) = \frac{8y+3}{45}$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 13 luglio 2004

1. L'urna A contiene 5 palline bianche e 10 palline nere, l'urna B contiene 12 bianche e 4 nere. Si proceda a 4 estrazioni con rimessa da una delle due urne, scelta con un meccanismo di sorteggio che attribuisce probabilità $\frac{3}{5}$ alla scelta dell'urna A. Considerato l'evento:

   $$E_i : \text{esce pallina bianca all'}i\text{-sima estrazione}$$

   calcolare:

   - $P(\overline{E}_2 \wedge E_4 | E_3)$;
   - la probabilità che sia stata scelta l'urna A sapendo che nella prime tre estrazioni sono state estratte almeno due palline bianche.

2. Considerata la coppia aleatoria (X, Y) distribuita nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,2)$ con densità del tipo:

   $$f(x,y) = kxy,$$

   determinare;

   - il valore di k;
   - le densità marginali di X e Y;
   - le funzioni di ripartizione marginali di X e Y.

3. Dire sotto quali ipotesi vale la seguente formula:

   $$P(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) = P(E_1)P(E_2 | E_1)P(E_3 | E_1 \wedge E_2) \cdots P(E_n | E_1 \wedge \ldots \wedge E_{n-1}),$$

   fornendone poi una dimostrazione.

$p_1 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \qquad p_2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

- $P(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3) = p^2 q \qquad p(E_i) = p$

$$p(\bar{E}_2 \wedge E_4 \mid E_3) = \frac{p(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3)}{p(E_3)}$$

$$p(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3) = p(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3 \mid A)\, p(A) + p(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3 \mid B)\, p(B)$$

$$= \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \frac{9}{32}\right] \frac{1}{5}$$

$$= \frac{145}{9 \cdot 32} \cdot \frac{1}{5}$$

$$p(E_3) = p(E_3 \mid A)\, p(A) + p(E_3 \mid B)\, p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2}$$

$$P(\bar{E}_2 \wedge E_4 \wedge E_3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{145}{9 \cdot 32} \cdot 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{29}{144}$$

- $P(A \mid H) = \frac{P(H \mid A)}{P(H)}\, P(A)$

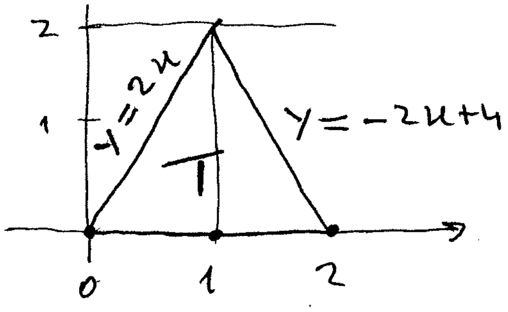
- $H = (E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3)$

$$P(H) = p^3 + 3p^2 q$$

$$P(H \mid A) = p_1^3 + 3 p_1^2 q_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{27}$$

$$p(H \mid B) = p_2^3 + 3 p_2^2 q_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{32}$$

$$P(A \mid H) = \frac{7/27}{\frac{7}{27} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{32} \cdot \frac{2}{5}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{112}{355}$$



(*)

$$\iint_T xy\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x} xy\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{-2x+4} xy\,dy$$

$$= \int_0^1 x \left(\tfrac{1}{2} y^2\right|_0^{2x} dx + \int_1^2 x \left(\tfrac{1}{2} y^2\right|_0^{-2x+4} dx$$

$$= \int_0^1 2x^3\,dx + 2\int_1^2 x(-x+2)^2\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + 2\int_1^2 (x^3+4x-4x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3\right|_1^2 = \frac{4}{3}$$

- $k = \frac{3}{4}$

- $x \in [0,1]$ $\quad f_X(x) = \int_0^{2x} \frac{3}{4} xy\,dy = \frac{3}{4}x\left(\frac{1}{2}y^2\right|_0^{2x} = \frac{3}{2}x^3$

  $x \in [1,2]$ $\quad f_X(x) = \int_0^{-2x+4} \frac{3}{4} xy\,dy = \frac{3}{4}x\left(\frac{1}{2}y^2\right|_0^{-2x+4} =$

  $$= \frac{3}{2}(x^3+4x-4x^2)$$

  $y \in [0,2]$ $\quad f_Y(y) = \int_{y/2}^{\frac{4-y}{2}} \frac{3}{4} xy\,dx = \frac{3}{4}y\left(\frac{1}{2}x^2\right|_{y/2}^{\frac{4-y}{2}}$

  $$= \frac{3}{4}(2y - y^2)$$

- $x \in [0,1]$ $\quad F_X(x) = \int_0^x \frac{3}{2}x^3\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\right|_0^x = \frac{3}{8}x^4$

(2)

$x \in [1,2]$ $\quad F_X(x) = P(X \le 1) + P(1 \le X \le x)$

$$= \frac{3}{8} + \int_1^x \frac{3}{2}(u^3 + 4u - 4u^2)\,du$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{4}{2}u^2 - \frac{4}{3}u^3 \Big|_1^x\right)$$

$$= \frac{3}{8}x^4 + 3x^2 - 2x^3 - 1$$

$y \in [0,2]$ $\quad F_Y(y) = \int_0^y \frac{3}{4}(2y - y^2)\,dy$

$$= \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_0^y\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right)$$

(*) Nota bene $\quad \int_T xy\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^{\frac{4-y}{2}} xy\,dx$

$$= \int_0^2 y\left(\frac{1}{2}x^2 \Big|_{y/2}^{\frac{4-y}{2}}\right)dy$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

3) $P(E_1 \wedge \dots \wedge E_{n-1}) > 0$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 23 giugno 2004

1. Da un'urna contenente m_1 palline bianche e m_2 palline nere si effettuano quattro estrazioni con rimessa. Considerati gli eventi:

   E_i : esce pallina bianca all'i-sima estrazione $(i = 1, \dots, 4)$
   H : escono almeno due palline bianche nelle prime tre estrazioni,

   calcolare $P(E_1 \mid H)$ e $P(E_4 \mid H)$. Cosa si può dire delle rimanenti probabilità $P(E_2 \mid H)$ e $P(E_3 \mid H)$?

2. Considerata la coppia aleatoria (X, Y) distribuita nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ con densità del tipo:

$$f(x, y) = k(1 - x)(2 - y),$$

   determinare;

   - il valore di k;
   - la densità marginale di X;
   - la speranza matematica di X^2.

3. Sia X un numero aleatorio ed F la sua funzione di ripartizione. Considerata la successione di eventi

$$E_n : X \leq 2 + \frac{1}{n},$$

   cosa si può dire della probabilità dell'evento $E = \lim_{n \to +\infty} E_n$?

1. $p = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$

$$P(H) = P(E_1 \wedge E_1 \wedge E_1) + P\Big(\bigvee_{h=1}^{3} E_i E_j \bar{E}_h\Big)$$

$$= p^3 + \sum_{h=1}^{3} P(E_i \wedge E_j \wedge \bar{E}_h)$$

$$= p^3 + 3p^2 q$$

$$P(E_1 \wedge H) = P(E_1) - P(E_1 \wedge \bar{H}) = P(E_1) - P(E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3)$$

$\bar{H}$: esce al più una pallina bianca nelle prime tre estrazioni

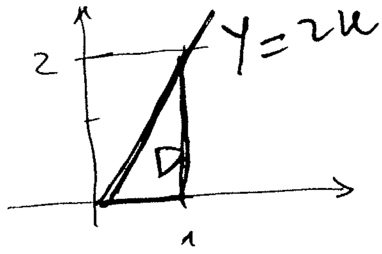
$$P(E_1|H) = \frac{P(E_1 \wedge H)}{P(H)} = \frac{p - pq^2}{p^3 + 3p^2 q} = \frac{p(1-q)(1+q)}{p^2(p+3q)}$$

$$= \frac{1+q}{p+3q} = P(E_2|H) = P(E_3|H)$$

$$P(E_4|H) = \frac{P(E_4 \wedge H)}{P(H)} = \frac{P(E_4)\,P(H)}{P(H)} = P(E_4) = p$$

---

2. $$1 = \int_D f(x,y)\,dx\,dy$$



$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x} (1-x)(2-y)\,dy$$

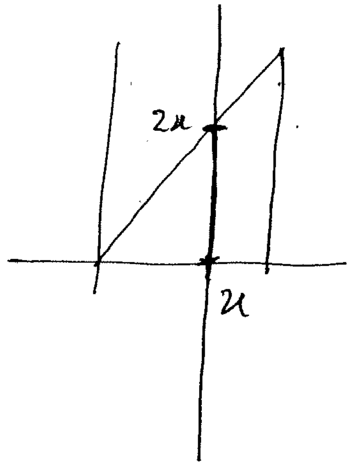
$$= \int_0^1 (1-x)\left[\int_0^{2x} (2-y)\,dy\right] dx$$

$$\int_0^{2x} (2-y)\,dy = 2y - \tfrac{1}{2}y^2 \Big|_0^{2x} = 4x - 2x^2 = 2(2x - x^2)$$

$$1 = 2\int_0^1 (1-x)(2x - x^2)\,dx = 2\left(x^2 - x^3 + \tfrac{1}{4}x^4\right|_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Quindi $k = 2$



• $f_X(x) = \int_0^{2x} 2(1-x)(2-y)\,dy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x,y)\,dy}_{\parallel \atop 0} + \int_0^{2x} f(x,y)\,dy + \underbrace{\int_{2x}^{+\infty} f(x,y)\,dy}_{\parallel \atop 0}$$

$$f_X(x) = 2(1-x)\int_0^{2x}(2-y)\,dy = 2(1-x)\cdot 2(2x-x^2)$$
$$= 4(1-x)(2x-x^2)$$

• $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2\,dP = \int_0^1 x^2\cdot 4(1-x)(2x-x^2)\,dx$

$$= 4\int_0^1 (2x^3-3x^4+x^5)\,dx = 4\cdot\frac{2}{10} = \frac{4}{15}$$

3. $E = \lim_n E_n$

<u>σ-additività</u>

$$P(E) = \lim_n P(E_n) = \lim_n P\left(X \le 2+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \lim_n F\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$= F(2)$$

<u>finita additività</u>

$E = \bigcap_n E_n$

$$P(E) \le P(E_n) = F\left(2+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow P(E) \le F(2^+)$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 9 giugno 2004

1. Da un'urna contenente m_1 palline bianche e m_2 palline nere si effettuano due estrazioni. Considerato l'evento:

   $$E : \text{vengono estratte due palline del medesimo colore}$$

   siano:

   - p_1 la probabilità di E nel caso che le estrazioni avvengano con rimessa
   - p_2 la probabilità di E nel caso che le estrazioni avvengano senza rimessa.

   Quale delle due probabilità è la maggiore?

2. Considerati due numeri aleatori X e Y uniformemente distribuiti sull'intervallo $[0, 1]$ e stocasticamente indipendenti, dire per quali valori di n risulta

   $$P\left(XY \leq \frac{1}{n} \,|\, X > \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{10}.$$

3. Indicato con X un numero aleatorio uniformemente distribuito sull'intervallo $[-2, 1]$, si tracci il grafico della funzione di ripartizione del numero aleatorio $|X|$.

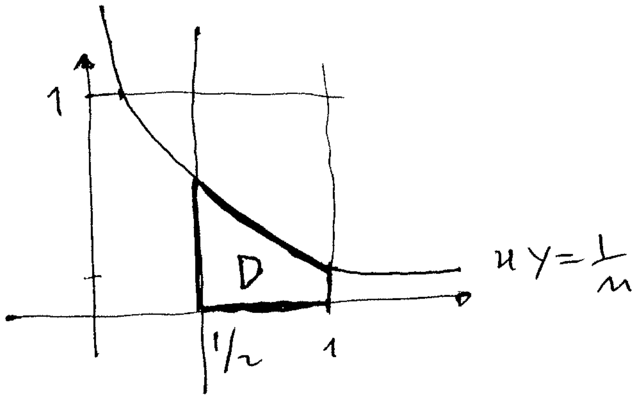
1.

	con rimessa	senza rimessa
$E_1 \wedge E_2$	$\left(\frac{n_1}{n}\right)^2$	$\binom{n_1}{2} / \binom{n}{2}$
$\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2$	$\left(\frac{n_2}{n}\right)^2$	$\binom{n_2}{2} / \binom{n}{2}$
	$\frac{n_1^2 + n_2^2}{n^2}$	$\frac{n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)}{n(n-1)}$

$n = n_1 + n_2$

$$\frac{n_1^2 + n_2^2}{n^2} - \frac{n_1^2 - n_1 + n_2^2 - n_2}{n(n-1)} = \frac{2 n_1 n_2}{n^2(n-1)} > 0$$

2.



$$P\left(XY \le \tfrac{1}{n} \wedge X > \tfrac{1}{2}\right) = P((X,Y) \in D) =$$

$$= \int_{1/2}^{1} dx \int_0^{\frac{1}{nx}} dy = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{nx}\, dx = \frac{1}{n}\left[\ln 1 - \ln 1/2\right]$$

$$= \frac{\ln 2}{n}$$

$$P\left(X > \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$P\left(XY \le \tfrac{1}{n} \mid X > \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(XY \le \frac{1}{n} \wedge X > \frac{1}{2}\right)}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\ln 2}{n}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \ln 2}{n} < \frac{1}{10}$$

$$\underline{20 \ln 2 < n}$$

b. $F_{|X|}(u) = P(|X| \le u) = P(|X| \le u \wedge X \ge 0) + P(|X| \le u \wedge X < 0)$

$= P(0 \le X \le u) + P(-u \le X < 0)$

$P(X=0) = 0$!

$= P(0 < X \le u) + P(-u \le X \le 0)$

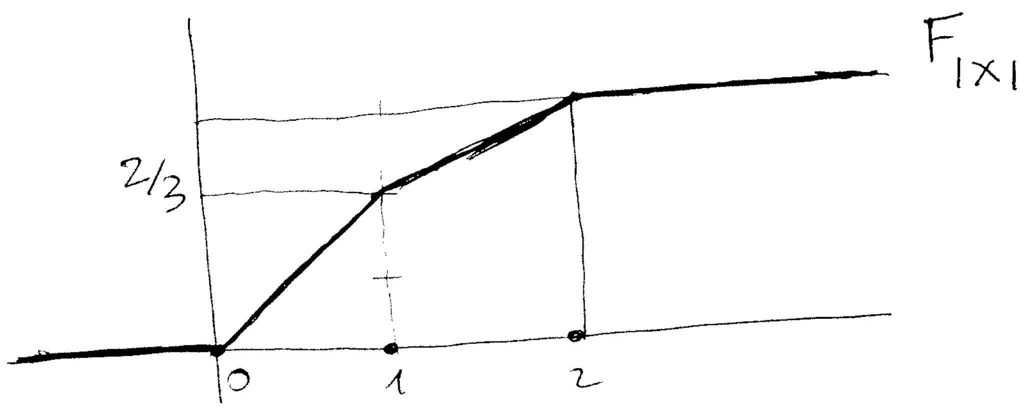
$= F_X(u) - F_X(0) + F_X(0) - F_X(-u)$

e quindi

$$\boxed{F_{|X|}(u) = F_X(u) - F_X(-u)}$$

$$F_{|X|}(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{u+2}{3} - \frac{-u+2}{3} & 0 \le u < 1 \\ 1 - \frac{-u+2}{3} & 1 \le u < 2 \\ 1 & u \ge 2 \end{cases}$$

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u < -2 \\ \frac{u+2}{3} & -2 \le u < 1 \\ 1 & u \ge 1 \end{cases}$$



Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 27 febbraio 2004

1. Con riferimento ad una partita di calcio tra due squadre A e B, si consideri la seguente partizione dell'evento certo:

   E_n : A vince con una rete di scarto facendo $n \geq 1$ reti;

   E : A vince con più di una rete di scarto;

   F : A perde;

   G : la partita termina in parità.

   Si studi la logica dipendenza dell'evento:

   $$H : A \,\text{e}\, B \,\text{segnano complessivamente 6 reti}$$

   dalla partizione.

   Posto poi $P(E_n) = (\frac{2}{5})^n$ per ogni n, si dica se la valutazione di probabilità $P(H) = \frac{7}{10}$ è ammissibile.

2. Un numero aleatorio X è distribuito uniformemente nell'intervallo chiuso $[a, b]$ $(a < b)$ con speranza matematica nulla e varianza unitaria. Determinare gli estremi dell'intervallo.

3. Considerato il quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità di probabilità congiunta:

   $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2+xy(x-y)}{8} & \text{se } (x, y) \in Q \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Calcolare $P(Y \leq 0 | X > 0)$.

) • $E_n \Rightarrow H$

$K \wedge H \neq \phi$, $K \wedge \overline{H} \neq \phi$ $(K = E, F, G)$

H logicamente semidipendente dalla partizione

• La valutazione non è ammissibile in quanto, dalla $E_1 \Rightarrow \overline{H}$, otteniamo

$$\frac{2}{5} = P(E_1) \leq P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

che è assurda $\left(\frac{3}{10} < \frac{2}{5}\right)$.

2) •
$$\left.\begin{array}{l} E(X) = \dfrac{a+b}{2} = 0 \\[2ex] V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

3) • $$8F(x,y) = \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}(2 + u^2 v - u v^2)\,du\,dv$$

$$= \int_{-1}^{x}\left[\int_{-1}^{y}(2 + u^2 v - u v^2)\,dv\right]du$$

• $$= \int_{-1}^{x}\left[2(y+1) + \frac{u^2}{2}(y^2-1) - \frac{u}{3}(y^3+1)\right]du$$

$$= 2(x+1)(y+1) + \frac{1}{6}(x^3+1)(y^2-1) - \frac{1}{6}(x^2-1)(y^3+1)$$

• $$P(Y \leq y \mid X > 0) = \frac{P(Y \leq y \wedge X > 0)}{P(X > 0)}$$

$$= \frac{P(Y \leq y) - P(Y \leq y \wedge X \leq 0)}{1 - P(X \leq 0)}$$

$$= \frac{F_Y(y) - F(0,y)}{1 - F_X(0)}$$

$$F_X(x) = F(x,1) = \frac{1}{8}\left[4(x+1) - \frac{2}{6}(x^2-1)\right]$$

$$= \frac{1}{24}(x+1)(13-x)$$

$$F_Y(\cancel{x}) = F(1,y) = \frac{1}{8}\left[4(y+1) + \frac{2}{6}(y^2-1)\right]$$

$$= \frac{1}{24}(y+1)(13-y)$$

$$P(Y \leq y \mid X > 0) = \frac{\frac{1}{24}(y+1)(13-y) - \frac{1}{8}\left[2(y+1) + \frac{1}{6}(y^2-1) + \frac{1}{6}(y^3+1)\right]}{1 - \frac{13}{24}}$$

$$= \frac{-y^3 - 3y^2 + 12y + 14}{22}$$

$$P(Y \leq 0 \mid X > 0) = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

- $$P(Y \leq y \mid X \leq 0) = \frac{P(Y \leq y \wedge X \leq 0)}{P(X \leq 0)}$$

$$= \frac{F(0,y)}{F_X(0)}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\left[2(y+1) + \frac{1}{6}(y^2-1) + \frac{1}{6}(y^3+1)\right]}{\frac{13}{24}}$$

$$= \frac{y^3 + y^2 + 12y + 12}{26}$$

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 17 febbraio 2004

1. Da un'urna contenente m_1 palline bianche e m_2 palline nere si effettua un'estrazione. Se esce pallina nera la si rimette nell'urna; se esce pallina bianca non la si rimette nell'urna e si immettono invece k palline nere. Si effettua poi una seconda estrazione. Valutare la probabilitrà di estrarre una pallina bianca nella prima estrazione sapendo che nella seconda è uscita pallina bianca.

2. Considerati due numeri aleatori uniformemente distribuiti sull'intervallo $[0,1]$ e stocasticamente indipendenti, si valuti la probabilità che la loro differenza non sia inferiore a $1/3$.

3. Sia
$$f(x) = \begin{cases} a\sin x & \text{se } x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
per ogni x reale.

   - Determinare a in modo che f sia una densità.
   - Determinare la relativa funzione di ripartizione F.

   Indicato con X un numero aleatorio avente F come funzione di ripartizione, si determini la funzione di ripartizione del numero aleatorio X^3.

2) $n = n_1 + n_2$

E_i = " esce pallina bianca "

Bayes $$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)}{P(E_2)} P(E_1)$$

$$P(E_1) = \frac{n_1}{n}$$

$$P(\bar{E}_1) = \frac{n_2}{n}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{n_1 - 1}{n + k - 1}$$

$$P(E_2|\bar{E}_1) = \frac{n_1}{n}$$

$$P(E_2) = P(E_2|E_1)\,P(E_1) + P(E_2|\bar{E}_1)\,P(\bar{E}_1)$$

$$= \frac{n_1 - 1}{n+k-1}\,\frac{n_1}{n} + \frac{n_1}{n}\,\frac{n_2}{n}$$

$$= \frac{n_1\,[\,n(n_1 - 1) + n_2(n+k-1)\,]}{n^2\,(n+k-1)}$$

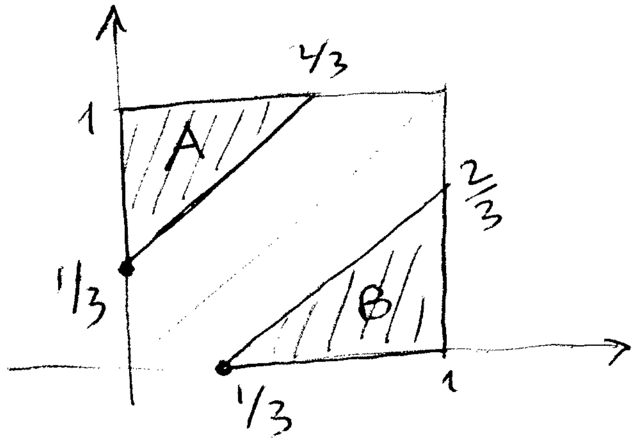
$$P(E_1|E_2) = \frac{\dfrac{n_1 - 1}{n+k-1}}{\dfrac{n_1\,[\,n(n_1-1) + n_2(n+k-1)\,]}{n^2\,(n+k-1)}} \quad \frac{n_1}{n}$$

$$= \frac{n\,(n_1 - 1)}{n(n_1 - 1) + n_2\,(n+k-1)}$$

) $X, Y \qquad P(|X-Y| > \frac{1}{3})$

$X > Y: \quad X - Y > \frac{1}{3} \quad Y < X - \frac{1}{3}$

$X < Y: \quad Y - X > \frac{1}{3} \quad Y > X + \frac{1}{3}$



$$|X-Y| > \frac{1}{3} \iff (X,Y) \in A \cup B$$

$$P(|X-Y| > \frac{1}{3}) = P((X,Y) \in A) + P((X,Y) \in B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$

- $\underline{a = \frac{1}{2}}$

- $x \in [0, \pi]$ $\quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \sin t \, dt = \frac{1 - \cos x}{2}$

- $Z = X^3$

$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(X^3 \le t) = P(X \le \sqrt[3]{t})$

$= \frac{1 - \cos \sqrt[3]{t}}{2}$