

## DOMANDE CALCOLO DELLE PROBABILITA' (PROGREDITO)

- Impostare il discorso sul metodo dei minimi quadrati  $\times 2$ 
  - Dove è definita la  $g$ ? E dove va?
  - Chi è l'ente aleatorio osservabile?
  - Qual'è il problema del mmq?
  - La  $g(X)$  è una v.a.?
  - Nell'impostazione del discorso ci sono 2 strade:
    - Generale: funzione di regressione
    - Specifica: retta di regressione
  - Che classe di  $g$  prendiamo? A quadrato integrabili
- Cos'è la funzione di regressione?  $\times 2$ 
  - Da dove salta fuori?
  - Che ipotesi occorrono?
- Convergenza quasi certa
  - Definizione
  - Come si caratterizza
  - Che teoremi sfrutta la dimostrazione? (continuità dall'alto)
    - Che cosa dice il teorema della continuità dall'alto
    - Che cosa significa che la successione di eventi è non crescente?
- Che legame fra  $\text{Var}(X)$  e  $E(X|H)$ ?  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) + E((X-Y)^2)$ 
  - Sotto quali ipotesi vale
  - Perché  $E(X^2)$  finita?
- Se  $Y$  è versione limitata tutte le versioni sono limitate? No, possono essere diverse su  $m(A)=0$
- Teorema di Glivenko-Cantelli
- Quando due enti aleatori si dicono indipendenti
- Che cosa vuol dire successione di variabili aleatorie indipendenti
- Che cos'è la misura prodotto? E prodotto di due misure?
- Con tre enti aleatori come è definita l'indipendenza? E con  $n$  eventi?
- Date  $n$  v.a. sotto quali ipotesi  $E(\text{prodotto } X_i) = \text{prodotto } E(X_i)$ 
  - Quando  $E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$
- Giustificazione teorica del perché chiamiamo indipendenti 2 v.a.
- Disuguaglianza di Jensen
  - Come si dimostra
- Come si vede che la convergenza in probabilità implica la convergenza in distribuzione?
  - Cos'è il  $\limsup$  di una successione?
  - Perché vale l'implicazione sui pt di continuità?
  - Perché è importante la convergenza in distribuzione? Per l'approssimazione Normale
- Che cos'è la  $S_n^*$ ? Dove converge?
- $E(X|H) = Y$
- La ' $\sigma$  algebra', borel misurabilità implica l'osservabilità?
- Che cos'è un atomo?

- Che cosa permette di dire l'atomo?
- Come si comporta la speranza matematica condizionata sull'atomo  $H$ ?
- Teorema di Levy
- Disuguaglianza di Cauchy Schwarz.
  - Sua dimostrazione
  - Che succede se vale l'uguaglianza? Che una v.a. è trasformata affine dell'altra
- Cos'è una  $\mu$ -densità?
  - Dimostrazione dell'unicità della  $\mu$ -densità
- Da cosa è composta una sigma algebra minima?  $\{\text{vuoto}, \Omega\}$
- Vale  $E(X|H \text{ sigma algebra}) = E(X)$ ?
  - Dimostrazione
  - Definizione di speranza matematica condizionata
- Dimostrazione che l'integrale di Lebesgue su insieme di misura zero vale zero
- Dimostrazione che la misura  $m$  è monotona
- Che cos'è la legge debole dei grandi numeri?
  - Sotto che condizioni esiste?
- Dimostrazione disuguaglianza di Markov
- Dimostrazione disuguaglianza di Chebichev
- Teorema di Glivenko - Cantelli
- Fare il discorso sulla misura prodotto
  - Che problemi ci sono nello scrivere l'integrale..? 2 problemi
    - Come si risolvono i 2 problemi?
    - Quando una misura è sigma finita? Quando la misura di ogni elemento è sigma finita
    - La misura di Lebesgue è sigma finita? Sì
    - La misura di conteggio è sigma finita? Solo se  $S$  è discreto
  - Perché si chiama misura prodotto? Perché è definita come prodotto delle misure
  - Fatti i conti cosa otteniamo?
- Quando due enti si dicono indipendenti? Quando la legge congiunta è il prodotto delle leggi marginali
  - Prese due v.a. indipendenti cosa posso dire del loro  $E(X_1 X_2)$ ? È prodotto delle loro speranze matematiche
- Che cos'è la comonotonia? Quando 2 v.a. sono comonotone? Se il prodotto degli incrementi è non negativo. Nelle zone in cui una variabile aleatoria cresce...
  - Perché è una nozione importante? Per un teorema che coinvolge la correlazione (non capito quale)
- La  $\mathcal{Y}$  che sigma algebra genera? Qual'è la sigma algebra degli osservabili?
- Come si imposta il discorso sulla regressione?
  - Che cos'è la funzione di regressione  $Y|X$ ?
- $E(X|H \text{ algebra})$  che cos'è? Come si interpreta?
  - $X$  deve avere qualche proprietà affinché posso costruire l'integrale su  $H$  di  $X$  in  $dP$ ?  $X$  deve avere speranza matematica finita
  - Come si vede se una variabile aleatoria è  $H$ , Borel misurabile?
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
  - Dimostrazione
  - Nel caso in cui valga l'uguale...
    - A che cosa porta il risultato? A Rho indice di Bravais



- Che legame c'è fra la  $\text{Var}(v.a.)$  e la  $\text{Var}(E(v.a.) | \text{sigma algebra})$ ?
  - Che ipotesi richiede l'uguaglianza?
- Quali sono le proprietà della speranza matematica condizionata?
  - Cosa succede se condiziona rispetto alla sigma algebra minima? Vale che "speranza matematica condizionata alla info nulla è la media di X". Come la si dimostra?
  - Definizione di speranza matematica di una v.a. condizionata alla sigma algebra
- Esponga la legge debole e forte dei grandi numeri
  - Quali enti si considera? Successione v.a.  $S_n$
  - Che teoremi collegati a questi abbiamo visto? Debole – Markov, Forte – Cebicev
  - Le dimostri
  - Siccome parliamo di Varianze, come deve essere la speranza matematica? Finita
  - C'è una condizione sufficiente per la legge debole? Sì Raichmann
- Cosa dice il teorema di Glivenko-Cantelli?
- Come è definita la FdR empirica relativa ai primi n n.a.? (incerto)
- Come si vede che l'integrale su un insieme di misura 0 vale 0 con f misurabile?
  - Dimostrazione
- Come si definisce l'integrale di Lebesgue? Per passi: f semplice non neg, g non neg
- Teorema fondamentale del calcolo delle probabilità
  - Perché è fondamentale? ha 2 aspetti: significato filosofico\ interpretativo: dimentico del meccanismo disorteggio (non so come è estratta la v.a.), significato algoritmico calcolistico: trasferisco l'integrale da un insieme astratto ad un insieme più dominabile\ + facile
  - Se poi considero una mu densità.
    - Dove è definita la mu densità
  - Prese due mu densità cosa sono? Mu q.o. uguali
- Convergenza in probabilità
  - Come è definita?
  - C'è unicità del limite? si c'è unicità quasi certa
  - Dimostrazione:
    - Da dove parte per dimostrare la disuguaglianza?
- Due v.a. sono indipendenti se? Prodotto delle leggi è legge del prodotto
  - Come la posso giustificare? Attraverso la media condizionata: Y versione, E(X) finita
- Sotto quale ipotesi c'è un legame fra la  $\text{Var}(v.a. \text{ non oss})$  e  $\text{Var}(v.a. \text{ oss})$ ?
  - Se le v.a. sono q.c. uguali e 1 è H-B misurabile, anche l'altra lo è? No, perché sono diverse
- Teorema fondamentale del calcolo delle probabilità
  - Chi è omega, P e  $P_X$ ?
  - Come è definita e come si calcola  $P_X$ ?
  - Come si vede che è una probabilità?
  - Che cos'è una probabilità?
    - Dimostrazione
- Nozione di mu densità
  - Se prendo come mu la misura di Lebesgue
  - Se ho 2 mu densità: f e f' del medesimo ente aleatorio, che possono dire?
    - Dimostrazione (per assurdo)
- Convergenza quasi certa
  - Definizione
  - Come posso caratterizzarla
    - Dimostrazione

- Che tipo di unicità del limite c'è qui? Q.c.
- Cosa si intende con approssimazione normale? Ciò che interessa è valutare la probabilità che  $P(S_n > \alpha)$  per  $n$  grande
  - Cosa dice il TLC? ... FdR ridotte converge uniformemente alla FdR  $N(0,1)$  e per  $n$  grande è circa 1- ...
  - Quanto è l'errore che commettiamo? Via disuguaglianza di Berry-Essen:  $+ < K \text{Beta}/\sqrt{..}$  con  $K$  circa 0,47
  - É una convergenza lenta o veloce? Lenta, è infatti un risultato teorico
  - Ci sono risultati pratici? Si per  $n=30$ , o 50 se distribuzione non asimmetrica
- Che legame c'è fra la  $\text{Var}(y.a.)$  e  $\text{Var}(y.a. \text{ condizionata a } \sigma \text{ alg})$ ?
  - Dimostrazione
- La miglior approssimazione in media quadratica di un un non osservabile è la media condizionata di un non osservabile?
  - Come salta fuori la retta di regressione?