## CORRELAZIONE E INDIPENDENZA STOCASTICA

DEF *siano $E$ e $H$ eventi, con $H \neq \emptyset$ :*
*<u>correlazione</u> di $E$ con $H$ : $E$ è correlato negativamente con $H$ se $P(E/H)<P(E)$, positivamente se $P(E/H)>P(E)$*
*<u>indipendenza stocastica</u> di $E$ con $H$ : $E$ è stocasticamente indipendente da $H$ se $P(E/H)=P(E)$*

TEO *se due eventi hanno probabilità positiva allora $P(E_1/E_2)/P(E_1)=P(E_2/E_1)/P(E_2)$*

TEO *se due eventi sono correlati, allora le loro negazioni sono correlate nello stesso senso e ciascuno di essi è correlato in senso inverso con la negazione dell'altro, cioè*
*se $P(E_1/E_2)>P(E) \Rightarrow P(\neg E_1/\neg E_2)>P(\neg E_1) \Rightarrow P(\neg E_1/E_2)<P(\neg E_1)$*

TEO *se $E_1$ è stocasticamente indipendente da $E_2$, allora si ha :*
*a) $\neg E_1$ è stocasticamente indipendente da $E_2$*
*b) $P(E_1' \wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ per ogni scelta degli apici*

DIM *per ipotesi è $P(E_1/E_2)=P(E_1)$, quindi :*
*a) $P(\neg E_1/E_2)=1-P(E_1/E_2)=1-P(E_1)=P(\neg E_1)$*
*b) si deve provare che nella nostra ipotesi la probabilità si fattorizza sui costituenti della $\mathbb{P}_G\{E_1,E_2\}$*
*$\Rightarrow$ dato che $P(E_1 \wedge E_2)=P(E_2)P(E_1/E_2)=P(E_1)P(E_2)$ la prob. si fattorizza per il costituente $E_1 \wedge E_2$*
*$\Rightarrow$ da $E_1=(E_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge \neg E_2)$ si ricava $P(E_1)=P(E_1 \wedge E_2)+P(E_1 \wedge \neg E_2)=P(E_1)P(E_2)+P(E_1 \wedge \neg E_2)$*
*$\Rightarrow P(E_1 \wedge \neg E_2)=P(E_1)(1-P(E_2))=P(E_1)P(\neg E_2)$*
*$\Rightarrow$ analogamente si prova che $P(\neg E_1 \wedge E_2)=P(\neg E_1)P(E_2)$ e quindi che $P(\neg E_1 \wedge \neg E_2)=P(\neg E_1)P(\neg E_2)$*

---

DEF *siano $E_1$ e $E_2$ due eventi logicamente indipendenti, diremo che essi sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se $E_1$ è stocasticamente indipendente sia da $E_2$ che da $\neg E_2$ (e viceversa), se riesce cioè :*
*$P(E_1/E_2)=P(E_1/\neg E_2)=P(E_1)$ e $P(E_2/E_1)=P(E_2/\neg E_1)=P(E_2)$, cioè l'eventuale informazione sul valore logico assunto da uno dei due eventi non ha alcuna influenza sulla valutazione della probabilità dell'altro*

*nb : la presenza della condizione di indipendenza logica è giustificata dal fatto che se ci fosse dipendenza logica tra $E_1$ e $E_2$ si potrebbero avere scelte di probabilità estreme per i due eventi, togliendo così quella libertà di valutazione che è nello spirito della nozione di indipendenza stocastica, infatti :*
*gli eventi $E_1$ e $E_2$ non sono logicamente indipendenti se e solo se qualche costituente della loro partizione generata è impossibile, ad esempio se $E_1 \wedge E_2=\emptyset$ allora riesce $P(E_1/E_2)=P(E_1 \wedge E_2/E_2)=P(\emptyset/E_2)=0$ e analogamente $P(E_2/E_1)=0$ e quindi richiedere l'indipendenza stocastica in queste condizioni significa allora dover porre $P(E_1)=P(E_2)=0$*

DEF *siano $E_1,\ldots,E_n$ eventi logicamente indipendenti, diremo che essi sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se per ogni $E_1' \wedge \ldots \wedge E_n' \in \mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$ si ha $P(E_i/E_1' \wedge \ldots \wedge E_{i-1}' \wedge E_{i+1}' \wedge \ldots \wedge E_n')=P(E_i)$*

*nb : come nel caso di due eventi, anche qui è $P(\neg E_i/E_1' \wedge \ldots \wedge E_{i-1}' \wedge E_{i+1}' \wedge \ldots \wedge E_n')=P(\neg E_i)$ per ogni $i$; inoltre la nozione di indipendenza stocastica di $n$ eventi si può esprimere dicendo che essi sono logicamente indipendenti e che ciascuno di essi è stocasticamente indip. da ogni costituente della partizione generata dai rimanenti*

DEF *date $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$ partizioni logicamente indipendenti di cardinalità finita, diremo che esse sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se per ogni $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ con $\omega_i \in \mathbb{P}_i$, si ha $P(\omega_i/\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{i-1} \wedge \omega_{i+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n)=P(\omega_i)$*

---

TEO *data una probabilità sugli eventi $E_1$ e $E_2$, riesce $\Sigma^{(')}P(E_1')P(E_2')=1$ e ponendo $P(E_1' \wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ si ottiene un'applicazione di dominio la partizione $\mathbb{P}_G(E_1,E_2)$, non negativa e di somma 1;*
*affinché questa valutazione (detta "per fattorizzazione"), sia una probabilità occorre che essa assegni probabilità nulla a tutti gli eventuali costituenti impossibili, in particolare la valutazione per fattorizzazione è una probabilità se gli eventi $E_1$ e $E_2$ sono logicamente indipendenti*

DIM *$1=[P(E_1)+P(\neg E_1)][P(E_2)+P(\neg E_2)]=P(E_1)P(E_2)+P(\neg E_1)P(E_2)+P(E_1)P(\neg E_2)+P(\neg E_1)P(\neg E_2)$*

*nb : il teorema si può estendere per $n$ eventi e, dato che la partizione $\mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$ è la partizione prodotto delle partizioni $\{E_1,\neg E_1\},\ldots,\{E_n,\neg E_n\}$, anche per un numero finito di partizioni di cardinalità finita (v. $\Downarrow$)*

TEO *date $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$ partizioni di cardinalità finita $c_i,\ldots,c_n$ con $\mathbb{P}_i=\{\omega_i(1),\ldots,\omega_i(c_i)\}$ e $P(\omega_i(1))+\ldots+P(\omega_i(c_i))=1$, allora si ha che $[P(\omega_1(1))+\ldots+P(\omega_1(c_1))]\ldots[P(\omega_n(1))+\ldots+P(\omega_n(c_n))]=1 \Rightarrow \Sigma_{\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n} P(\omega_1)\ldots P(\omega_n)=1$;*
*ponendo $P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n)=P(\omega_1)\ldots P(\omega_n)$ si ottiene un'applicazione di dominio la partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, non negativa e di somma 1; essa è una probabilità se assegna probabilità nulla a tutti i costituenti impossibili, in particolare se le partizioni $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$ sono logicamente indipendenti*

TEO *siano $E_1$ e $E_2$ eventi logicamente indipendenti :*

a) *se sono stocasticamente indipendenti, allora la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1,E_2)$*
b) *viceversa, se sono di probabilità non estreme (diversa da 0 e 1) e si prolunga la loro valutazione per fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(E_1,E_2)$, allora essi risultato stocasticamente indipendenti*

DIM
a) *stessa dimostrazione di : $P(E_1'\wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ per ogni scelta degli apici (v. ⇧)*
b) *per ipotesi $P(E_1'\wedge E_2')=P(E_1')P(E_2')$ e $0<P(E_i')<1$ per $i=1,2$ e per ogni scelta degli apici*
$\Rightarrow P(E_1')=P(E_1'\wedge E_2')/P(E_2')=P(E_1'/E_2')$ e $P(E_2')=P(E_1'\wedge E_2')/P(E_1')=P(E_2'/E_1')$

TEO *siano $E_1,\dots,E_n$ eventi logicamente indipendenti :*

a) *se sono stocasticamente indipendenti, allora la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$*
b) *viceversa, se sono di probabilità non estreme (diversa da 0 e 1) e si prolunga la loro valutazione per fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(E_1,\dots,E_n)$, allora essi risultato stocasticamente indipendenti*

DIM
a) *no dim.*
b) *sia $0<P(E_i)<1$, $i=1,\dots,n$, $P(E_1'\wedge\dots\wedge E_n')=P(E_1')\dots P(E_n')$ per ogni $E_1'\wedge\dots\wedge E_n'\in\mathbb{P}(\{E_1,\dots,E_n\})$*
$\Rightarrow$ *allora $0<P(E_i')<1$, per ogni i, e quindi $P(E_1')\dots P(E_n')>0$ per ogni scelta degli apici*
$\Rightarrow P(E_1/E_2'\wedge\dots\wedge E_n') = P(E_1'\wedge E_2'\wedge\dots\wedge E_n')/P(E_2'\wedge\dots\wedge E_n') =$
$= [P(E_1')P(E_2')\dots P(E_n')]/[P(E_2')\dots P(E_n')] = P(E_1)$
$\Rightarrow$ *per la simmetria della situazione, il risultato ora trovato per $E_1$, si può provare in corrispondenza a ogni $E_i$ da cui segue la tesi*

TEO *siano $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ partizioni logic. indip. e siano assegnate a loro probabilità marginali e su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$, allora :*

a) *se $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ sono stocasticamente indipendenti, la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$*
b) *viceversa, se le probabilità marginali sono positive su ogni evento elementare e vengono prolungate per fattorizzazione su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$, allora $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ risultato stocasticamente indipendenti*

---

TEO *se ${}_1\mathcal{E}$ e ${}_2\mathcal{E}$ sono sottoinsiemi disgiunti di $\{E_1,\dots,E_n\}$, allora ogni evento logicamente dipendente da $\mathbb{P}_G({}_1\mathcal{E})$ è stocasticamente indipendente da ogni evento non impossibile logicamente dipendente da $\mathbb{P}_G({}_2\mathcal{E})$, e viceversa*

TEO *se le partizioni finite $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ sono stocasticamente indipendenti, allora la probabilità si fattorizza su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1)\wedge\dots\wedge\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$*

---

DEF *dati $X_1,\dots,X_n$ numeri aleatori, diremo che essi sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se sono tali le loro partizioni canoniche (cioè quelle che descrivono il numero elencando le sue determinazioni)*

TEO *un giudizio di simmetria su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ induce l'indipendenza stocastica di $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$*
*(nb indipendenza stocastica che si realizza assegnando distribuzioni marginali uniformi)*

DIM
*siano $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ partizioni logicamente indipendenti e di cardinalità finita $s_1,\dots,s_n$ rispettivamente :*
$\Rightarrow$ *dato che gli $s_1,\dots,s_n$ costituenti di $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ sono tutti possibili*
$\Rightarrow$ *per ogni $\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n\in\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ si ha $P(\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n)=1/(s_1\dots s_n)=(1/s_1)\dots(1/s_n)=P(\omega_1)\dots P(\omega_n)>0$*
$\Rightarrow$ *si applica il teorema che dice "se le probabilità marginali sono positive su ogni evento elementare e vengono prolungate per fattorizzazione su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$, allora $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ risultato stoc. indip." (v. ⇧)*
$\Rightarrow$ *la scelta della distribuzione uniforme su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ induce distribuzioni uniformi sulle singole partizioni $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ e implica anche che $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ siano stocasticamente indipendenti*

*viceversa, se si suppongono $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ stocasticamente indipendenti :*
$\Rightarrow$ *si applica il teorema che dice "se $\mathbb{P}_1,\dots,\mathbb{P}_n$ sono stoc. indip., la prob. si fattorizza su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$"*
$\Rightarrow$ *se le probabilità marginali sono uniformi, allora è uniforme anche la probabilità su $\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$*
$\Rightarrow$ *per ogni $\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n\in\mathbb{P}_1\wedge\dots\wedge\mathbb{P}_n$ si ha $P(\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n)=(1/s_1)\dots(1/s_n)=1/(s_1\dots s_n)$*

TEO *teorema di Bayes : siano E e H eventi, $P(E)>0$, $H\neq\emptyset$, allora si ha $P(H/E)=[1/P(E)]P(H)P(E/H)$*

DIM
*si applica il teorema delle probabilità composte due volte, usando la prima come evento condizionante E e la seconda H si ricava : $P(E\wedge H)=P(E)P(H/E)=P(H)P(E/H)$, da cui la tesi*