VARIABILI CASUALI

variabile di Bernoulli	X = {0,1} con P(X=0)=1-p=q P(X=1)=P	$M(X)=m_1=p$ $M(X^2)=m_2^2=p$ $M(X^n)=m_n^n=p$ $\sigma^2(X)=m_2^2-m_1^2=p-p^2=pq$ $G_X^{(t)}=M(e^{tX})=e^{t0}q+e^{t1}p=pe^t+q$ nb: $G_X^{(t)}=\sum e^{tX}p(X)$
variabile binomiale (n, p)	X = {0,1,2,…,x,…,n} con $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ *somma delle n variabili di Bernoulli stocasticamente indipendenti*	$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)=p+p+\ldots+p=np$ $\sigma^2(X)=\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)=pq+pq+\ldots+pq=npq$ *nb: per media e varianza vedi anche "Trasformazioni lineari"* $P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x q^{n-x}$ *nb:* $\sum_{x=0}^{n}P(X)=(p+q)^n=1$ *nb: da* $\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}\geq 1$ *si ottiene* $x\geq np-q$ *limite inferiore della x* *e di conseguenza np-q + 1 = np + p limite superiore della x* $G_X^{(t)}=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}$ $G_X^{(t)}=G_{X_1}^{(t)}\cdot G_{X_2}^{(t)}\cdot\ldots\cdot G_{X_n}^{(t)}=(pe^t+q)^n$ *nb: derivando successivamente, con t = 0, si ottengono i vari momenti dall'origine* $m_1=np$ $m_2=n^2p^2-np^2+np$ $m_3=n^3p^3-3n^2p^3+2np^3+3n^2p^2-3np^2+np$ $\overline{m}_3=2np^3-3np^2+np=npq\cdot(q-p)$ $\gamma_1=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ *nb: se p = q, oppure se* $n\to\infty$, *la variabile è simmetrica*

variabile ipergeometrica (N, n, p)	$X=\{\max(0,n-Nq)\leq X\leq\min(n,NP)\}$ con $X=\sum_{k=1}^{n}X(i)_k$ *somma dei risultati delle singole prove, dove ciascun X(i)k assume 0 o 1, e ci sono:* *Np elementi che rappresentano successi* *Nq elementi che rappresentano insuccessi ;*	$P(X=x)=\frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ *N = popolazione* *n = estrazioni* *x = palline che si vorrebbe escano* $P(X_1=1)=p$ $P(X_2=1)=P(1,1)+P(0,1)=p\frac{Np-1}{N-1}+q\frac{Np}{N-1}=p$ $P(X_3=1)=P(1,1,1)+P(1,0,1)+P(0,1,1)+P(0,0,1)=\ldots=p$
	$M(X)=M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}M(X_i)=np$ $cov(X_k,X_h)=M(X_k,X_h)-M(X_k)M(X_h)=p\frac{Np-1}{N-1}-p^2=-\frac{pq}{N-1}$ $\sigma^2(X)=\sigma^2\left(\sum X_i\right)+n(n-1)\cdot cov(X_k,X_h)=\sum\sigma^2(X_i)-n(n-1)\cdot\frac{pq}{N-1}=npq\cdot\frac{N-n}{N-1}$ *con* $\frac{N-n}{N-1}$ *detto fattore di correzione per popolazioni finite*	

variabile di Poisson (λ)	n molto grande p molto piccolo np costante (= λ)	$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$ *che si può ridurre a* $P(X=x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}=\frac{\lambda^X}{x!}e^{-\lambda}$ $G_X^{(t)}=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}$ *da cui, derivando successivamente, con t = 0, si ottengono i vari momenti, e quindi* $m_1=\lambda$ *o dalla binomiale* $m_1=np=\lambda$ $m_2=\lambda^2+\lambda$ $\sigma^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$ *o dalla binomiale* $\sigma^2=npq=\lambda\cdot q=\lambda$ *perchè* $q\to 1$

Variabile normale (μ, σ)	funzione di densità : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ nb : $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=1$ $\mu=$ media, moda, mediana $\mu\pm\sigma=$ punti di flesso nb : $\mu\pm 3\sigma$ intervallo della certezza pratica (oltre, l'area è sostanzialmente nulla) $G_X^{(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\text{dx}=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\left(-2t\sigma^2\mu-t^2\sigma^4\right)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+t\sigma^2)\right)^2}\text{dx}=e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\mu}$ perchè l'integrale è = 1 *da cui, derivando successivamente, con t = 0, si ottengono i vari momenti, e quindi* $m_1=\mu$ $m_2=\mu^2+\sigma^2$ $m_3=\mu(\mu^2+3\sigma^2)$ $m_4=\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4$ $\sigma^2=\mu^2+\sigma^2-\mu^2=\sigma^2$ $\overline{m}_3=0$ (infatti distribuzione simmetrica) $\overline{m}_4=3\sigma^4$ (vedi curtosi)
	variabile normale standardizzata $N(0,1)$: trasformazione lineare $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ *mediante cui* $z=a+bx$ *dove* $-\frac{\mu}{\sigma}=a,\ \frac{1}{\sigma}=b$ *si ha* $M(z)=\frac{1}{\sigma}M(x-\mu)=0$, $\sigma^2(z)=M\left(z-M(z)\right)^2=M\left(\frac{x-\mu}{\sigma}-0\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}M(x-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$ *la densità di z è quindi :* $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$, $G_z^{(t)}=\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$, $\overline{m}_3=0$, $\overline{m}_4=3$ *la funzione di ripartizione* Φ(x) *corrisponde all'area sottesa alla densità f(z) da -∞ a x*

NB : approssimazioni

$\left\{\begin{array}{l}np>5\\nq>5\\n>50\end{array}\right.$ Bin ~ N

$\left\{\begin{array}{l}N\to\infty\\n/N=p\end{array}\right.$ Ip ~ Bin

$\left\{\begin{array}{l}np\le 10\\n>50\end{array}\right.$ Bin → Poisson

Somma di n variabili casuali indipendenti identicamente distribuite, con :

μ media e σ^2 varianza di ciascuna variabiler casuale sommata
$n\mu$ media della somma e $n\sigma^2$ varianza della somma

$X_{(n)} = X_1+X_2+\ldots+X_n$

funzione di ripartizione $\Phi(x)$ per $X_{(n)}$ standardizzata ⇨ $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_{(n)} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le n\right\}$

… applicata alla variabile binomiale (in quanto somma di variabili casuali indipendenti identicamernte distribuite) $P(X \le x) = P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right\} \cong \Phi\left\{\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right\}$

nb : una buona approssimazione di questo tipo si ottiene se $npq \ge 10$

variabile esponenziale (θ)	visione dinamica del fenomeno a tasso di incidenza costante (Poisson): $\lambda = \theta t$	*funzione di ripartizione* $F(t) = P(T \le t) = 1 - e^{-\theta t}$ *da cui, derivando, si ottiene la funzione di densità* $f(t) = \theta e^{-\theta t}$ $G_X^{(t)} = \int_0^\infty e^{tx}\theta e^{-\theta x}\mathrm{dx} = \frac{\theta}{\theta - t}\cdot\int_0^\infty(\theta - t)e^{-(\theta-t)x}\mathrm{dx} = \frac{\theta}{\theta - t}$ *perchè l'integrale vale 1* *da cui, derivando successivamente, con t = 0, si ottengono i vari momenti, e quindi* $m_1 = \frac{1}{\theta}$ $m_2 = \frac{2}{\theta^2}$ $m_3 = \frac{6}{\theta^3}$ $\sigma^2(x) = \frac{1}{\theta^2}$

variabile geometrica	X = {1,2,3,…} indica che l'evento atteso si è verificato alla 1ª, 2ª, 3ª, ecc. prova	$P(X = x) = q^{x-1}p$ nb : $\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}p = p\frac{1-q^\infty}{1-q} = p\frac{1}{1-q} = 1$ *perchè q < 1* $G_X^{(t)} = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}q^{x-1}p = \frac{p}{q}e^t q\frac{1-(e^t q)^\infty}{1-e^t q} = \frac{pe^t}{1-e^t q}$ *perchè* $e^t q < 1$ *da cui, derivando successivamente, con t = 0, si ottengono i vari momenti, e quindi* $m_1 = \frac{1}{p}$ $m_2 = \frac{1+q}{p^2}$ $\sigma^2(x) = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

variabile binomiale negativa	X = {k,k+1,k+2,…} generalizzazione della variabile geometrica, e vale per un k-esimo successo, non per il primo (come era nella geometrica)	$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1}\cdot q^{x-k}p^k$ $M(X) = \frac{k}{p}$ $\sigma^2(x) = \frac{kp}{p^2}$

variabile di Erlang	generalizzazione della variabile esponenziale, e vale per la k-esima manifestazione del fenomeno, con l'attesa espressa da una durata di tempo	*funzione di densità* $f(x)=\dfrac{\theta^k x^{k-1}e^{-\theta x}}{(k-1)!}$ $M(X)=\dfrac{1}{\theta}$

variabile normale bivariata (μ_y, σ_y^2) (μ_x, σ_x^2) $(\mu_{y/x}, \sigma_{y/x}^2)$ $(\mu_{x/y}, \sigma_{x/y}^2)$

funzione di densità congiunta nelle variabili X e Y :

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}$$

ponendo $\rho=0$, *cioè indipendenza stocastica tra le due variabili, la densità congiunta risulta espressa dal prodotto delle densità marginali delle due variabili normali X e Y :*

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}}$$

ma se $\rho\neq 0$, *le distribuzioni marginali sono sempre delle variabili normali :*

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{dy}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}}\,,\qquad f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{dx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}}$$

inoltre, considerando la funzione di densità condizionata, si evidenzia una relazione di dipendenza lineare :

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left[y-\left(\mu_y+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\mu_x\right)\right]^2}\qquad \textit{da cui,}$$

$\mu_{y/x}=\mu_y-\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\mu_x+\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}x$ *retta delle medie condizionate dove* $\mu_y-\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\mu_x=a_{y/x},\ \ \rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=b_{y/x}$

analogamente, il condizionamento rispetto y porta a :

$\mu_{x/y}=\mu_x-\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\mu_y+\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}y$ *retta delle medie condizionate dove* $\mu_x-\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\mu_y=a_{x/y},\ \ \rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=b_{x/y}$

se $\rho=0,\ \ \mu_{y/x}=\mu_y$ e $\mu_{x/y}=\mu_x$ *(le due rette sono* $\perp$ *fra loro, e // agli assi)*;

inoltre, dalla funzione di densità condizionata si ha che :

$$\sigma_{y/x}^2=\sigma_y^2(1-\rho^2)=M(Y-a_{y/x}-b_{y/x}X)^2=M(Y-\mu_y)^2+\rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}M(X-\mu_x)^2-2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}M\big[(Y-\mu_y)(X-\mu_x)\big]$$

che si può anche scrivere come $\sigma_y^2(1-\rho^2)=\sigma_y^2+\rho^2\dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\sigma_x^2-2\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\mathrm{cov}(X,Y)\ \Rightarrow\ \mathrm{cov}(X,Y)=\rho\sigma_x\sigma_y$

si possono anche ottenere delle curve di livello sezionando orizzontalmente le funzioni di densità congiunta, e per ciascuna curva si può porre $f(x,y)=k$, *da cui*

$$\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}=-2(1-\rho^2)\cdot\ln\left(K2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

che rappresenta un ellisse di centro (μ_x,μ_y) *in cui l'inclinazione degli assi dipende da* ρ, *e si orienta verticalmente se* $\sigma_x^2<\sigma_y^2$, *orizzontalmente se* $\sigma_x^2>\sigma_y^2$ *(nb:cerchi se* $\sigma_x^2=\sigma_y^2$*).*

con una distribuzione di andamento qualunque :

$$\sigma^2(x) = \int_a^b (x - M(x))^2 f(x)\mathrm{dx} = \int_a^{x_1} (x - M(x))^2 f(x)\mathrm{dx} + \int_{x_1}^{x_2} (x - M(x))^2 f(x)\mathrm{dx} + \int_{x_2}^{b} (x - M(x))^2 f(x)\mathrm{dx}$$

posto $|x_1 - M(x)| = |M(x) - x_2| = t\sigma(x)$ *si ha che* $x_1 = M(x) - t\sigma(x),\ \ x_2 = M(x) + t\sigma(x)$ *quindi*

$$\sigma^2(x) \geq \int_a^{x_1} (M(x) - t\sigma(x) - M(x))^2 f(x)\mathrm{dx} + \int_{x_2}^{b} (M(x) + t\sigma(x) - M(x))^2 f(x)\mathrm{dx}$$

$\sigma^2(x) \geq t^2\sigma^2(x)\left[\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{dx} + \int_{x_2}^{b} f(x)\mathrm{dx}\right]$ *dove gli integrali in parentesi quadra rappresentano* $P(|x - M(x)| > t\sigma)$

quindi sarà $P(|x - M(x)| > t\sigma) \leq \dfrac{1}{t^2}$ *e di conseguenza* $P(|x - M(x)| \leq t\sigma) \geq \dfrac{1}{t^2}$

nb: *se divido per σper venda una variabile standardizzata* $P\left(\dfrac{|x - M(x)|}{\sigma} > t\right)$