CALCOLO DELLE PROBABILITA'
Appello del 31/5/2017

Nome: ____________________ COGNOME: ____________________

---

1) Siano X il punto realizzato lanciando un dado regolare a 6 facce, Y il primo estratto sulla ruota del lotto di Venezia nella prossima estrazione. Posto E = 'X + Y è dispari', E_X = 'X è pari', E_Y = 'Y è pari',
   (a) determinare la partizione generata da E, E_X, E_Y;
   (b) studiare la correlazione fra le coppie (E, E_X), (E, E_Y), (E_X, E_Y);
   (c) i tre eventi E, E_X, E_Y sono stocasticamente indipendenti?

2) L'urna A contiene 3 palline bianche e 3 rosse, l'urna B contiene 2 palline bianche e 4 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con contagio unitario da una delle due urne, scelta con meccanismo aleatorio che assegna probabilità 2/5 alla scelta dell'urna A. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":
   (a) calcolare $P(E_i \wedge E_j)$, $P(E_5|E_6)$, $P(E_3|E_1 \vee E_3)$, $P(\overline{E}_3 \wedge E_4|E_4)$;
   (b) Tizio partecipa ad un gioco in cui paga 5 unità monetarie in ogni estrazione pari se esce pallina bianca e riceve x unità monetarie in ogni estrazione dispari, ancora se esce pallina bianca. Il gioco termina dopo 15 estrazioni.
   (b1) calcolare la media e la varianza del guadagno di Tizio;
   (b2) determinare x in modo che il gioco sia equo.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (−1,0), (1,0), (0,1) con densità congiunta proporzionale a $(x + 1)(y + 1)$. Determinare:
   (a) la funzione di densità di X;
   (b) la funzione di ripartizione della coppia (X, Y) nel punto (1; 1/2);
   (c) $P(X + Y > 0)$; $P(X + Y \leq 0 \mid Y \leq 1/2)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 16/6/2017

Nome: ______________________ COGNOME: ______________________

1) Siano E_1, E_2, E_3 eventi, i primi due incompatibili. Un soggetto valuta $P(E_1) = P(E_3) = 1/2$, $P(E_1 \wedge E_3) = 1/8$, $P(E_2 \wedge E_3) = 3/8$.
   (a) Verificare la coerenza dell'assegnazione di cui sopra;
   (b) studiare la correlazione fra E_1 e $E_2 \vee E_3$;
   (c) determinare le limitazioni di probabilità per, separatamente, $P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)$ e $P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 | \overline{E}_3)$.

2) L'urna A contiene 3 palline bianche e 2 rosse, l'urna B contiene solo palline rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con reimbussolamento da una delle due urne, scelta con meccanismo aleatorio che assegna probabilità 3/4 alla scelta dell'urna A. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":
   (a) calcolare $P(E_3 | \overline{E}_4)$, $P(\overline{E}_3 | E_4)$;
   (b) posto $X = |E_1| - |\overline{E}_2|$, calcolare $Var(X)$, $P(X > 0)$;
   (c) dopo quante estrazioni di sole palline rosse la probabilità che le estrazioni vengano effettuate dall'urna B supera i 9/10?

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio di vertici (0,0), (2,0), (1,1), (0,1) con densità congiunta proporzionale a y. Determinare:
   (a) la funzione di densità di X e E(X);
   (b) la funzione di ripartizione della coppia (X, Y) nel generico punto $(x_0; 1/2)$;
   (c) $P(X \geq Y^2)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 30/6/2017

Nome: ______________________ COGNOME: ____________________________

---

1) In un gioco vengono effettuati sequenzialmente 8 lanci di un dado, 4 con un dado regolare a 6 facce, 4 con un dado regolare a 12 facce. Non è noto quali lanci nella sequenza siano effettuati con l'uno o l'altro dado.
   (a) Calcolare la probabilità che in almeno 2 lanci esca un punto maggiore di 4;
   (b) se al primo lancio è uscito 5, qual è la probabilità che il primo lancio sia stato effettuato con il dado a 6 facce?
   (c) Agli 8 lanci è associato un meccanismo di scommesse, solo parzialmente noto: il relativo guadagno complessivo G non è comunque minore di –75 €, e E(G) = –25 €. Determinare una limitazione significativa per la probabilità dell'evento $(G \geq 0)$.

2) L'urna A contiene 4 palline bianche e 2 rosse, l'urna B contiene 5 palline bianche e 1 rossa. Si effettui una sequenza di estrazioni senza reimbussolamento, tutte dall'urna A se lanciando un dado esce 6, dall'urna B altrimenti. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione", calcolare:
   (a) $P(E_3|\overline{E}_6)$, $P(E_2|\overline{E}_2 \vee E_4)$, $P(\overline{E}_i|\overline{E}_2 \wedge E_4)$ $(i \leq 6)$;
   (b) la covarianza fra $(|E_1| + |E_2|)$ e $(|E_2| + |\overline{E}_6|)$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul quadrato $Q = [0, a] \times [0, a]$ $(a > 0)$ con densità congiunta (uniforme in Q) $f_{X,Y}(x, y) = 1/a^2$. Posto $Z = X + Y$, determinare:
   (a) la funzione di ripartizione e la funzione di densità di Z, tracciando anche il grafico di quest'ultima;
   (b) la varianza di Z;
   (c) $P(X + Y \geq a \mid X \leq 1/2)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 15/9/2017

Nome: ______________________ COGNOME: ______________________

---

1) Con riferimento ad una partita di calcio (regolare) fra le squadre A e B:.
   (a) determinare la partizione generata dagli eventi
   E_1 = 'A vince 1-0'
   E_2 = 'A vince, ma non 1-0'
   E_3 = 'A non perde';
   (b) supposto che sia 1/2 la probabilità dell'evento 'A non vince', per quali valori $P(E_1)$, $P(E_2)$ è massima $Cov(|E_1|, |E_1 \vee E_2|)$?

2) Un'urna contiene 2 palline bianche e 5 rosse; si lancia due volte una moneta e si imbussolano nell'urna 3 palline, bianche se esce testa in entrambi i lanci, rosse altrimenti. Si effettuano poi estrazioni senza reimbussolamento dall'urna, fino a vuotarla. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":
   (a) calcolare $P(E_i|E_j)$, $P(E_i|\overline{E}_j)$, $P(\overline{E}_5|E_2)$;
   (b) calcolare la probabilità di E_5 sapendo che la pallina uscita nella prima estrazione è di colore diverso da quella uscita nell'ultima;
   (c) detto successo l'uscita di pallina bianca, si eseguano *n* estrazioni. Indicato con X_n il numero che conta le coppie di successi consecutivi, calcolare $E(X_n)$, ~~[illegible]~~.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio unione del triangolo T di vertici (0,0), (1,0), (1,1) e del quadrato Q di vertici opposti (1,0), (2,1) con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,x^3 & (x,y) \in T \\ k & (x,y) \in Q \end{cases}$$

   Calcolare:
   (a) le densità marginali;
   (b) la funzione di ripartizione di X, tracciandone il grafico;
   (c) $P(Y \geq |X-1|)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 12/1/2018

Nome: ______________________ COGNOME: ______________________

---

1) Del numero aleatorio X è noto che $E(X) = 6$, $P(X < 4) = 0{,}25$, $P(X \geq 9) = 0{,}35$. 9

   (a) Determinare una limitazione inferiore significativa per la varianza di X.

   (b) Sia $Y = -2X$. Determinare una limitazione superiore per $Cov(X, Y)$.

2) L'urna A contiene 2 palline bianche e 3 rosse, l'urna B contiene 5 palline bianche e 3 rosse. Si effettui una sequenza di estrazioni con contagio unitario, tutte dall'urna A con probabilità 1/4, tutte dall'urna B con probabilità 3/4. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":

   (a) calcolare $P(E_3 | E_1 \wedge \overline{E}_2)$, $P(\overline{E}_1 \vee \overline{E}_2 \vee E_3)$; 11

   (b) calcolare la probabilità che le estrazioni avvengano dall'urna A sapendo che nelle prime due estrazioni sono uscite palline di colore diverso;

   (c) detto successo l'estrazione di pallina bianca, sia X_n il numero che conta la differenza fra il numero di successi e il numero di insuccessi nelle prime *n* estrazioni. Calcolare $E(X_n)$, $E[(X_2)^2]$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici $(-1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ con densità $f_{X,Y}(x, y) = ky^2$. Calcolare: 11

   (a) la densità marginale $f_X(x)$;

   (b) la funzione di ripartizione della coppia (X, Y) nel generico punto $(x_0, 1)$, con $0 \leq x_0 \leq 1$;

   (c) $P(Y > 1 | X \leq 1)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'
Appello del 12/2/2018

Nome: ____________________ COGNOME: ________________________

1) Detti X il risultato del lancio di un dado regolare a sei facce, Y il numero estratto a caso e indipendentemente da $\{1, 2, \dots, 12\}$, $Z = X + Y$, calcolare:
   (a) $P(X = i \mid Z = 5)$;
   (b) $\mathrm{Cov}(X, Z)$;
   (c) $E[X(2Y - 5)]$.

2) Da un'urna contenente 3 palline bianche e 3 rosse si effettuano 3 estrazioni con la seguente modalità: si rimette la pallina nell'urna, se esce rossa, non la si rimette altrimenti. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione" e detta S_n la frequenza assoluta di successo in n estrazioni (successo: uscita di pallina bianca), calcolare:
   (a) $P(E_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, $P(E_1 \mid \overline{E}_2)$;
   (b) $P(E_2 \vee E_3 \mid \overline{E}_1)$;
   (c) $P(S_2 = 1)$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ con densità $f_{X,Y}(x, y) = kx|y|$. Calcolare:
   (a) le densità marginali $f_X(x)$, $f_Y(y)$;
   (b) la funzione di ripartizione del n.a. X.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'
Appello del 28/5/2018

Nome: ____________________ COGNOME: ________________________

---

1) Dato l'insieme di eventi $D = \{E_1, E_1 \vee E_2, E_2 \wedge E_3\}$:
   (a) determinare la partizione generata da D;
   (b) provare che l'applicazione P: $P(E_1) = 0{,}4$, $P(E_1 \vee E_2) = 0{,}6$, $P(E_2 \wedge E_3) = 0{,}2$ è una probabilità coerente su D;
   (c) determinare i prolungamenti coerenti di P su $E_1 \vee E_3$.

2) Da un'urna contenente 3 palline bianche e 6 rosse si effettuano estrazioni di una pallina alla volta con modalità non certa: con probabilità 3/4 le estrazioni sono tutte con reimbussolamento, con probabilità 1/4 tutte senza reimbussolamento. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione" e detta S_n la frequenza assoluta di successo in *n* estrazioni (successo: uscita di pallina bianca), calcolare:
   (a) $P(E_i)$ $(i \leq 9)$, $P(\overline{E}_1 \wedge E_3)$;
   (b) la probabilità che le estrazioni avvengano senza reimbussolamento sapendo che nelle prime due estrazioni è uscita pallina bianca;
   (c) $\mathrm{Cov}(S_3, |E_1| + |\overline{E}_2|)$;
   (d) $P(S_n = n - 1 | E_1 \wedge \overline{E}_2)$, $n \leq 3$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio di vertici (0, 0), (3, 0), (2, 1), (1,1) con densità proporzionale alla funzione $x + y$. Calcolare:
   (a) la densità marginale $f_X(x)$;
   (b) $E(X)$;
   (c) posto $Z = X^2 - Y$, $P(Z \geq 0)$.