И. Г. Петровский

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Д. МЫШКИСА, О. А. ОЛЕЙНИК

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов механико-математических специальностей университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1984

УДК 517.91/4(075.8)

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкиса, О. А. Олейник. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 296 с.

Книга представляет собой учебник по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений. Тщательно продуманное изложение дало возможность в небольшом объеме вместить обширный материал. Более детально и строго, чем в других руководствах, рассмотрены уравнения простых типов. Подробно изложены общие теоремы о разрешимости уравнений и систем уравнений с непрерывными правыми частями. Теория линейных уравнений сопровождается оригинальным изложением канонической формы систем. Книга включает главу об автономных системах и добавление, содержащее теорию линейных и нелинейных уравнений с частными производными 1-го порядка. Большое количество задач значительно расширяет содержание книги.

Ил. 41.

П $\frac{1702050000—264}{077(02)—84}$ 98—84

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ДОПОЛНЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРОВ

Иван Георгиевич Петровский (1901—1973) был выдающимся математиком и выдающимся человеком. В математике ему принадлежит ряд основополагающих результатов, прежде всего, в теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и в алгебраической геометрии. Его общественная деятельность также широко известна. Достаточно сказать, что с 1951 г. и до конца своей жизни он был ректором Московского государственного университета. Подробную биографию И. Г. Петровского и описание его научных достижений можно найти в «Трудах семинара имени И. Г. Петровского» (Изд-во МГУ, 1982, т. 8, с. 3—20), а также в журнале «Успехи математических наук», 1971, т. 26, № 2, с. 3—24.

И. Г. Петровский был также автором трех учебников для университетов — по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (6 изданий в 1939—1970 гг.), интегральных уравнений (3 издания в 1948—1968 гг.) и уравнений с частными производными (3 издания в 1950—1961 гг.). Эти глубоко оригинальные книги переведены на многие языки и полностью сохранили свое значение в настоящее время; более того, во многих университетах преподавание указанных дисциплин в значительной степени сложилось под воздействием этих книг. Однако они давно уже стали библиографической редкостью. Поэтому их переиздание не только является данью памяти их замечательного автора, но и принесет несомненную пользу многим студентам-математикам и преподавателям.

Настоящее издание книги «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» печатается с последнего прижизненного издания 1970 г. Нами внесены некоторые редакционные поправки. Заново написаны § 54—57.

А. Д. Мышкис, О. А. Олейник

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Большую работу по подготовке этого издания выполнил А. Д. Мышкис. В частности, он написал новую главу об автономных системах. Параграф 64 написала О. А. Олейник, С. А. Гальперн, Е. М Ландис и А. Д. Мышкис добавили новые задачи. Эти задачи, как и прежние, не являются простыми упражнениями. В значительной своей части они расширяют основное содержание книги и могут быть использованы для курсовых работ.
1964 г.

И. Петровский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эти лекции я читал в 1936/37 учебном году в Саратовском государственном университете и (с небольшими изменениями) в Московском государственном университете. Я не стремился изложить возможно больше методов интегрирования, применимых для различных частных типов дифференциальных уравнений; на русском языке уже имеются курсы, где эти методы достаточно полно изложены. Я не старался также рассказать о всех отделах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Из всей этой теории я выбрал лишь несколько вопросов, но их я старался изложить по возможности цельно и строго — так, как теперь излагается большинство математических дисциплин. Я не предполагал у моих слушателей знакомства с теорией аналитических функций, и потому необходимые для моего курса сведении из этой теории или разьяснял, или точно указывал, где их можно найти.

Я должен выразить благодарность А. И. Барабанову, записки которого легли в основу изложения § 1—21, В. В. Степанову, С. А. Гальперну А. Д. Мышкису, которые просмотрели всю мою рукопись и сделали ряд ценных указаний. 1939 г.

И. Петровский

Часть 1

ОДНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ 1-го ПОРЯДКА С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Определения, примеры

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

между независимым переменным x, его функцией y и производными $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Функция $y=\varphi(x)$ называется *решением* этого дифференциального уравнения, если после замены y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x)$, ..., $y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ оно обращается в тождество. Всюду, где нет особой оговорки, мы будем считать, что *рассматриваемые величины принимают только действительные (конечные) значения, а рассматриваемые функции однозначны.*

Таким образом, в обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестная функция зависит только от одного аргумента. В противоположность этому в *уравнениях с частными производными* неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных. В дальнейшем, говоря о дифференциальных уравнениях, мы всюду, кроме Дополнения, будем иметь в виду только обыкновенные дифференциальные уравнения.

К обыкновенным дифференциальным уравнениям приводят многие вопросы естествознания. В качестве иллюстрации рассмотрим два следующих примера.

Пример 1. Допустим, что в каждый момент времени известна скорость точки, движущейся по оси Ox; пусть она равна $f(t)$, где $f(t)$ непрерывна. Будем считать, кроме того, что известна абсцисса x_0 этой точки в некоторый определенный момент $t=t_0$. Требуется найти закон движения точки, т. е. зависимость абсциссы движущейся точки от времени.

Задача сводится к нахождению того решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(t),$$

которое при $t=t_0$ обращается в x_0. Из интегрального исчисления известно, что такое решение дается формулой

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau)\,d\tau.$$

Пример 2. Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна наличному количеству радия. Допустим, что в момент t_0 имелось R_0 г радия. Требуется определить количество R г радия в любой момент t.

Если коэффициент пропорциональности обозначить c $(c>0)$, то задача сводится к нахождению того решения дифференциального уравнения

$$\frac{dR}{dt}=-cR,$$

которое при $t=t_0$ обращается в R_0. Таким решением будет функция

$$R=R_0e^{-c(t-t_0)}.$$

Из рассмотренных примеров видно, что одному и тому же дифференциальному уравнению могут удовлетворять очень многие функции. Именно поэтому для определения искомой функции задавалось не только дифференциальное уравнение, которому она должна удовлетворять, но также и ее *начальное значение*, т. е. значение при каком-нибудь определенном значении аргумента. В рассмотренных нами примерах начальные значения определяли единственным образом соответствующие им решения дифференциальных уравнений.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является изучение свойств решений дифференциальных уравнений. Нахождение решений дифференциального уравнения называют *интегрированием* этого уравнения.

§ 2. Геометрическая интерпретация. Обобщение задачи

Будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области G [1] плоскости (x, y). Это уравнение задает в каждой точке области значение углового коэффициента касательной к проходящему через эту точку графику решения уравнения (1.1). Если в каждой точке (x, y) области G представить с помощью некоторого отрезка [2] направление касательной, определяемое значением $f(x, y)$, то получится *поле направлений*. Тогда поставленную прежде задачу нахождения решения дифференциального уравнения можно сформулировать так: требуется найти кривую $y = \varphi(x)$, которая в каждой своей точке имеет заданную уравнением (1.1) касательную или, как часто говорят, заданное уравнением (1.1) направление.

С геометрической точки зрения в такой постановке задачи представляются мало естественными следующие обстоятельства:

---

[1] *Областью* называется непустое множество G точек, обладающее следующими двумя свойствами: 1) каждая точка G — *внутренняя*, т. е. она имеет окрестность, целиком принадлежащую G; 2) множество G *связно*, т. е. любые две его точки можно соединить состоящей из конечного числа звеньев ломаной, целиком лежащей внутри G.

Граничными точками области называются те точки, которые являются предельными для точек области, но не принадлежат области. Совокупность всех граничных точек называется *границей* области.

Замкнутой областью $\bar{G}$ (замыканием области G) называется область G вместе с ее границей.

[2] Оба направления этого отрезка для нас безразличны.

1) требуя, чтобы угловой коэффициент заданного в любой точке (x, y) области G направления равнялся $f(x, y)$, мы тем самым исключаем направления, параллельные оси Oy;

2) рассматривая только кривые, служащие графиками функций от x, мы тем самым исключаем из рассмотрения те линии, которые некоторыми перпендикулярами к оси Ox пересекаются больше одного раза.

Поэтому мы несколько обобщим предыдущую постановку задачи. Именно, будем допускать, что поле направлений в некоторых точках параллельно оси Oy. И в таких точках, где угловой коэффициент по отношению к оси Ox не имеет смысла, будем пользоваться угловым коэффициентом по отношению к оси Oy. Соответственно этому будем наряду с дифференциальным уравнением (1.1) рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y), \qquad (1.1')$$

причем $f_1(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$ всюду, где обе эти функции имеют смысл. При этом мы считаем, что в каждой точке G по крайней мере одна из функций f и f_1 имеет смысл; $f_1=0$ там и только там, где f не имеет смысла, а $f=0$ там и только там, где f_1 не имеет смысла. Задачу же интегрирования дифференциальных уравнений (1.1), (1.1′) мы поставим так: *в области G найти все линии*[1]),

[1]) *Линией* (или *кривой*) будем называть множество точек (x, y), задаваемых уравнениями: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, когда t пробегает значения некоторого интервала (a, b); в частности, может быть $a=-\infty$ и $b=+\infty$. Будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные и что всегда $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$. Каждая точка $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$ такой линии лежит на некотором куске ее, который служит графиком или непрерывно дифференцируемой, т. е. имеющей непрерывную производную, функциональной зависимости y от x, или непрерывно дифференцируемой функциональной зависимости x от y. Действительно, по крайней мере одно из двух чисел $\varphi'(t_0)$ и $\psi'(t_0)$ отлично от нуля. Пусть, например, $\varphi'(t_0)\neq 0$. Тогда в силу непрерывности $\varphi'(t)$ она сохраняет знак на некотором интервале значений t от $t_0-\varepsilon$ до $t_0+\varepsilon$. Поэтому при этих значениях t уравнение $x=\varphi(t)$ можно разрешить относительно t. Получим $t=\chi(x)$. Подставляя это значение t в уравнение $y=\psi(t)$, получим $y=\psi[\chi(x)]$, т. е. y есть функция от x.

имеющие в каждой точке направление, заданное уравнениями (1.1) *и* (1.1′) [1]. Эти линии мы будем называть *интегральными линиями* (*интегральными кривыми*) уравнений (1.1), (1.1′) или поля направлений, задаваемого этими уравнениями. Вместо множественного числа: «уравнения (1.1), (1.1′)», мы часто будем употреблять единственное число: «уравнение (1.1), (1.1′)».

Ясно, что график всякого решения уравнения (1.1) является интегральной линией уравнения (1.1), (1.1′), но не всякая интегральная линия уравнения (1.1), (1.1′) есть график решения уравнения (1.1). В дальнейшем, если будет явно указано, что

$$f(x, y)=\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

то мы, наряду с уравнением

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{1.2}$$

не будем выписывать уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{N(x, y)}{M(x, y)}=f_1(x, y). \tag{1.2′}$$

Иногда же мы будем такие уравнения записывать в более симметричной относительно x и y форме:

$$M\,dx-N\,dy=0. \tag{1.3}$$

При этом поле направлений определено всюду, где обе функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ имеют смысл и по крайней мере одна из них отлична от нуля.

Пример 1. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{1.4}$$

При таком определении понятия линии мы заранее требуем от решения не только дифференцируемости, но даже непрерывной дифференцируемости. В этой книге будут рассматриваться только такие решения.

[1] Иногда поле направлений бывает задано не только внутри области G, но и на некоторой части ее границы или даже на всей границе. В таком случае может быть, что и интегральные линии проходят не только внутри G, но и по некоторой части ее границы.

задает поле направлений всюду, за исключением начала координат. Схематически это поле изображено на рис. 1. Все определяемые им направления проходят через начало координат. Ясно, что при любом k функции

$$y=kx \tag{1.5}$$

являются решениями уравнения (1.4). Совокупность же всех интегральных линий этого уравнения дается соотношением

$$ax+by=0, \tag{1.6}$$

где a и b — любые постоянные, не равные нулю одновременно. Ось Oy является его интегральной линией, но не служит графиком его решения.

Так как уравнение (1.4) не определяет поля направлений в начале координат, то линии (1.5) и (1.6) яв-

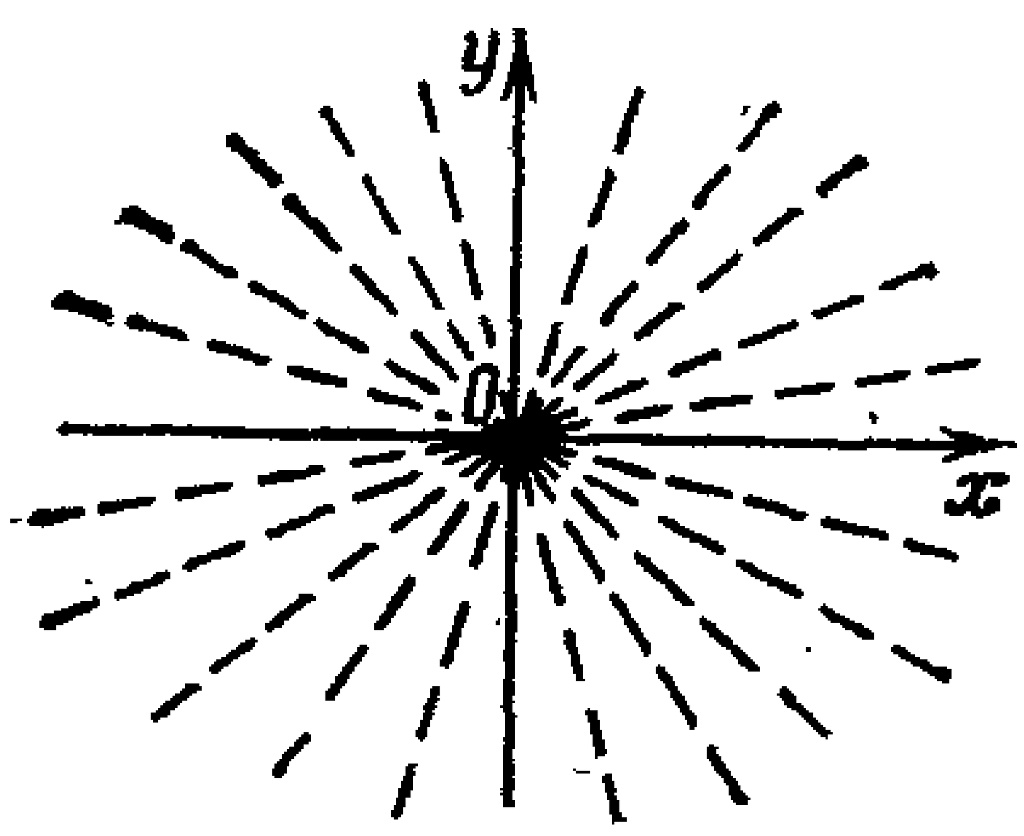

Рис. 1

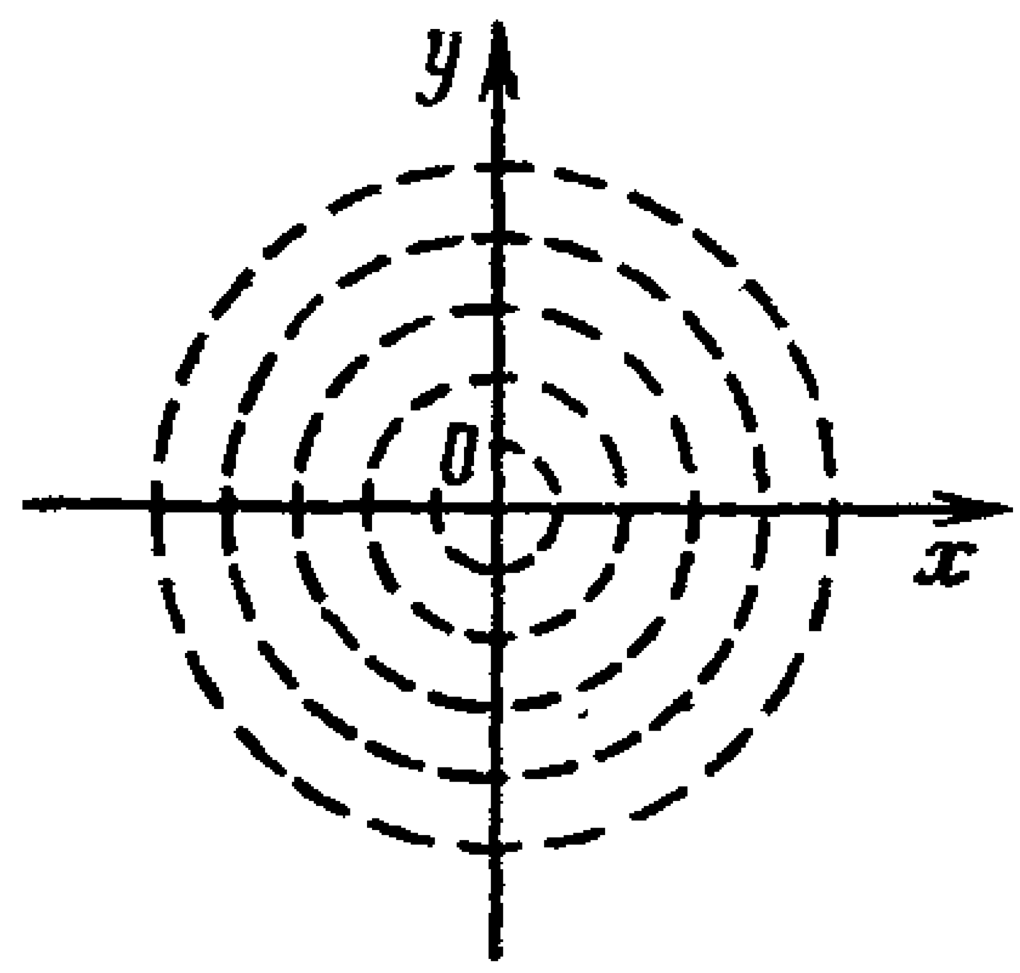

Рис. 2

ляются интегральными всюду, за исключением начала координат. Поэтому правильнее говорить, что интегральными линиями уравнения (1.4) являются не прямые, проходящие через начало координат, а полупрямые, выходящие из начала координат (к этим полупрямым само начало не причисляется).

Пример 2. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{1.7}$$

задает поле направлений всюду, за исключением начала координат. Схематически это поле изображено на рис. 2. Направления, задаваемые в точке (x, y) уравнениями (1.4) и (1.7), взаимно перпендикулярны. Ясно, что все окружности, имеющие центр в начале координат, будут интегральными кривыми уравнения (1.7). Решениями же этого уравнения будут функции

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

и

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R < x < R).$$

Условимся о следующей терминологии:

1. Функцию $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ будем называть *общим решением*[1] дифференциального уравнения (1.1) *в области* G, если при соответствующем выборе постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функция φ обращается в любое решение этого уравнения, график которого лежит в G. В дальнейшем мы увидим, что обычно бывает $n=1$.

2. Уравнение $\Phi(x, y)=0$ интегральной линии уравнения (1.1), (1.1') будем называть *интегралом дифференциального уравнения* (1.1), (1.1').

3. Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0 \tag{1.8}$$

будем называть *общим интегралом*[1] дифференциального уравнения (1.1), (1.1') в области G, если при соответствующем выборе постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ уравнение (1.8) дает любую интегральную линию нашего дифференциального уравнения, проходящую в области G.

Так, например, в первом из разобранных примеров соотношение (1.5) давало общее решение уравнения (1.4) во всей плоскости (x, y), за исключением оси Oy, а уравнение (1.6) давало общий интеграл этого уравнения во всей плоскости (x, y), за исключением начала координат. Во втором же примере уравнение

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

давало общее решение во всей полуплоскости $y>0$,

---

[1] В литературе встречаются и другие определения понятий общего решения и общего интеграла.

а уравнение

$$x^2+y^2=R^2 \tag{1.9}$$

давало общий интеграл нашего дифференциального уравнения во всей плоскости (x, y), за исключением начала координат. Что у уравнения (1.4), соответственно (1.7), нет других интегральных линий кроме линий (1.6), соответственно (1.9), будет доказано в § 5.

ЗАДАЧИ

1. У какой области на плоскости граница не содержит ни одной точки?

2. Начертите интегральные линии уравнений:

а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{|xy|}$; б) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{|x+y|}{x+y}$; в) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+|x|}{y+|y|}$;

г) $\dfrac{dy}{dx}=\begin{cases}0 \text{ при } y\neq x,\\ 1 \text{ при } y=x;\end{cases}$ д) $\dfrac{dy}{dx}=\begin{cases}1 \text{ при } y\neq x,\\ 0 \text{ при } y=x.\end{cases}$

Укажите те области, где эти уравнения определяют поле направлений.

3. Пусть дана линия $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a<t<b$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют указанным в сноске на с. 13 условиям. Пусть $a<a'<b'<b$. Докажите тогда следующие утверждения:

а) отрезок $a'\leqslant t\leqslant b'$ можно разбить на конечное число таких примыкающих друг к другу отрезков, что соответствующие части рассматриваемой линии являются графиками либо однозначных непрерывно дифференцируемых функций $y=y(x)$, либо функций $x=x(y)$ с такими же свойствами;

б) существует такое постоянное $\varepsilon>0$, что при всяком t' $(a'\leqslant t'\leqslant b')$ участок рассматриваемой линии, соответствующий отрезку $t'\leqslant t\leqslant t'+\varepsilon$, не имеет точек самопересечения;

в) отношение длины любого участка линии с концами, соответствующими $t=t_1$ и $t=t_2$ $(a'\leqslant t_1<t_2\leqslant b')$ к t_2-t_1, ограничено и превосходит некоторую положительную постоянную.

4. Как связаны между собой требования:

а) чтобы поле направлений не содержало направлений, параллельных оси Oy;

б) чтобы все интегральные линии были графиками функций от x?

5. Найдите уравнение геометрического места точек, которое заведомо содержит все точки максимума и минимума решений уравнения (1.1). Тот же вопрос для точек перегиба, если функция $f(x, y)$ дифференцируема.

через которую должна проходить интегральная кривая, постоянная C определится единственным образом: $C=y_0$. Значит, через каждую точку (x_0, y_0) этой полосы про-

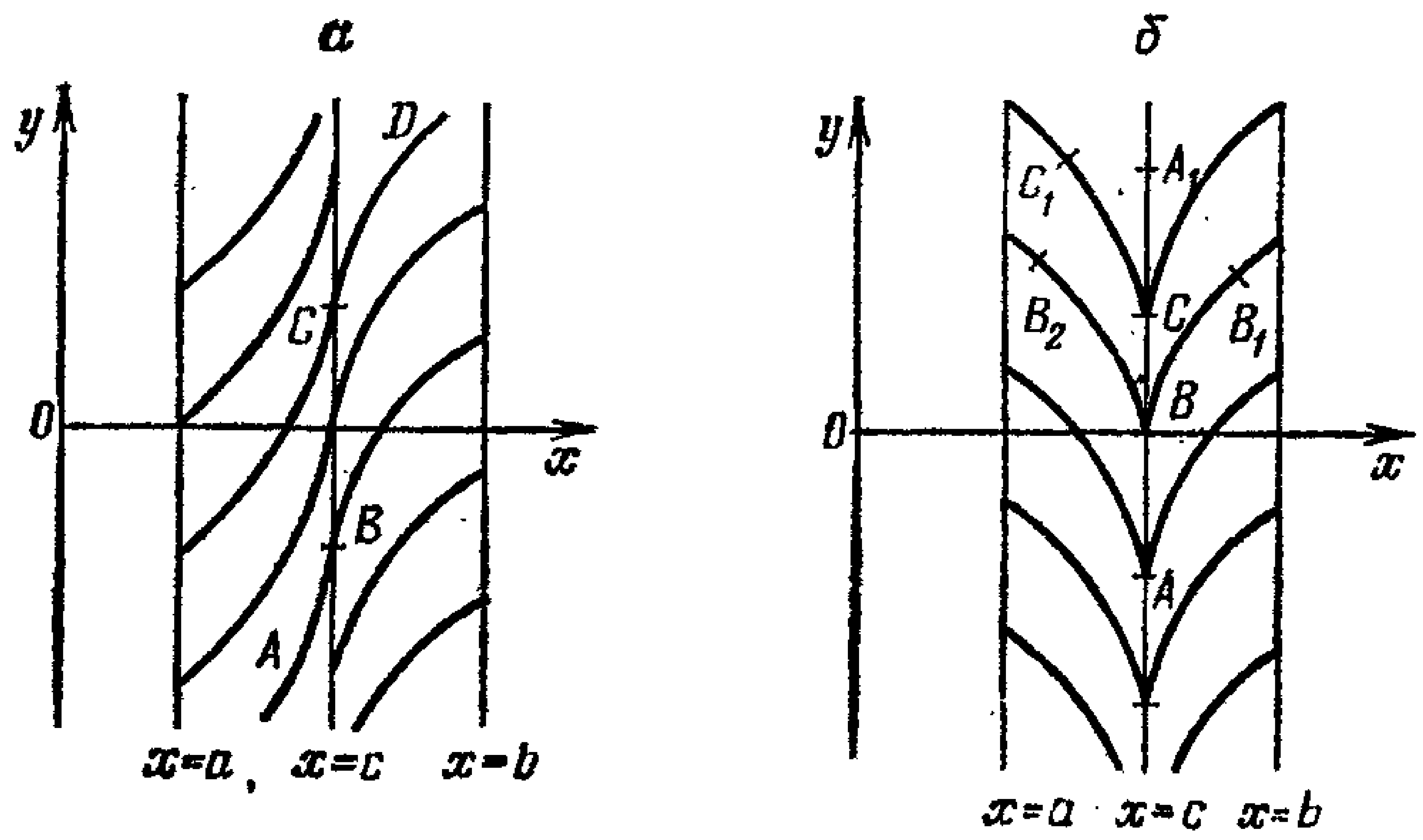

Рис. 3

ходит одна и только одна интегральная кривая, а именно

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi.$$

Случай 2. $f(x)\to\infty$ при $x\to c\ (a<c<b)$, оставаясь в остальных точках интервала (a, b) непрерывной. Зададим при $x=c$ поле направлений уравнением $\frac{dx}{dy}=0$.

В этом случае при приближении к прямой $x=c$ поле направлений становится все круче и круче. Однако на открытых полосках $a<x<c$ и $c<x<b$ дело будет обстоять так же, как и в предыдущем случае: если точка (x_0, y_0) лежит, например, на первой из этих полос, то через нее проходит одна и только одна интегральная линия, лежащая в этой полосе. Она будет даваться уравнением

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi.$$

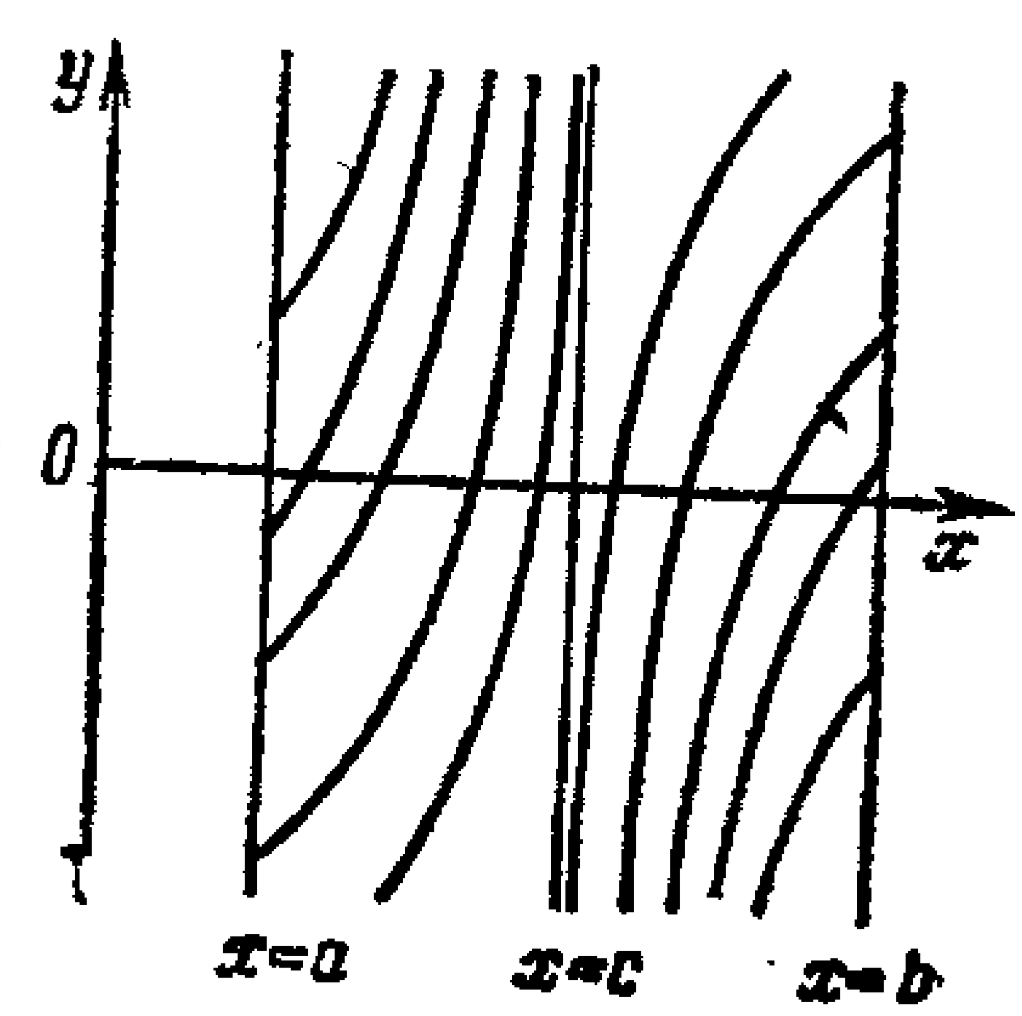

Рис. 4

Если при $x \to c-0$ интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$ сходится, то эта линия при $x \to c-0$ будет приближаться к некоторой определенной точке прямой $x=c$ (рис. 3, *а*). В противном случае линия $y=y(x)$ будет при $x \to c-0$ асимптотически приближаться к прямой $x=c$ (рис. 4).

Аналогичным образом можно исследовать поведение интегральных кривых на полоске $c<x<b$. Два из возможных здесь случаев изображены на рис. 3, *а* и 4, которые сделаны в предположении, что если интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi, \quad a<x_0<c, \tag{2.1}$$

сходится (расходится) при $x \to c-0$, то сходится (соответственно расходится) и интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi, \quad c<x_0<b, \tag{2.2}$$

при $x \to c+0$, и что $f(x) \to +\infty$ при $x \to c$.

Прямая $x=c$ также есть интегральная линия.

Пусть мы рассматриваем все кривые только в полосе $a<x<b$. Тогда в случае сходимости при $x \to c$ интегралов (2.1) и (2.2) через одну и ту же точку $A(x_0, y_0)$ всегда проходит бесконечное множество интегральных кривых нашего уравнения. Действительно, пусть, например, $a<x_0<c$. Тогда любая линия вида $ABCD$ (рис. 3, *а*) будет интегральной.

В случае, когда интегралы (2.1) и (2.2) сходятся при $x \to c \pm 0$, но

$$f(x) \xrightarrow[x \to c+0]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to c-0]{} -\infty,$$

поведение интегральных линий схематически изображено на рис. 3, *б*. Тогда через каждую точку A прямой $x=c$ проходит бесконечное множество интегральных линий AA_1, ABB_1, ACC_1, ... Через каждую же точку, лежащую внутри полосы $a<x<c$ или $c<x<b$, например через точку B_1, в этом случае проходит только одна интегральная линия B_1BA. Кривые вида B_1BB_2, имею-

щие излом в точке B, мы не считаем интегральными линиями в соответствии со сноской на с. 13.

В случае расходимости интегралов (2.1) и (2.2) через каждую точку полосы $a<x<b$ проходит одна и только одна интегральная линия.

Случай сходимости только одного из интегралов (2.1) и (2.2) мы предоставим разобрать читателю.

ЗАДАЧИ

1. Какие случаи возможны, если $f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$, $\varphi(c)=0$ и $\varphi'(c)$ существует? Предполагается, что $\varphi(x)$ всюду непрерывна и $\varphi(x)\neq 0$ при $x\neq c$.

2. Представьте картину поведения интегральных линий уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}},\quad \frac{dy}{dx}=e^{-\frac{1}{x}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x},\quad \frac{dy}{dx}=x^a\sin\frac{1}{x}\ \text{при различных } a.$$

В частности, установите картину поведения этих интегральных линий при $x\to 0$.

3. Может ли уравнение $y'=f(x)$ иметь решение, существующее на всей оси x, если функция $f(x)$ не является всюду непрерывной?

§ 4. Уравнения вида $\dfrac{dy}{dx}=f(y)$

Это уравнение в сущности отличается от предыдущего только тем, что x и y поменялись ролями. Если $f(y)$ непрерывна при $a<y<b$ и не обращается в нуль в этом интервале, то уравнение можно переписать в виде $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(y)}$. Отсюда видно, что тогда, во-первых, через каждую точку (x_0, y_0) полосы $a<y<b$ проходит единственная интегральная линия

$$x=x_0+\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$$

и, во-вторых, все интегральные линии получаются из одной сдвигом, параллельным оси Ox.

Пусть теперь $f(y)$, оставаясь непрерывной, обращается в нуль при каком-нибудь, притом единственном, значении $y=c$ из интервала (a, b). Тогда:

1) если $\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}$ при $y \to c \pm 0$ расходится, то через каждую точку полосы, расположенной между прямыми $y=a$ и $y=b$, проходит одна и только одна интегральная линия; прямая $y=c$, которая сама есть интегральная линия, является асимптотой всех интегральных кривых;

2) если $\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}$ при $y \to c \pm 0$ сходится и при переходе y через $y=c$ функция $f(y)$ не меняет знака, то через каждую точку указанной полосы проходит бесконечное множество интегральных линий;

3) если $\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}$ при $y \to c \pm 0$ сходится и при переходе y через $y=c$ функция $f(y)$ меняет знак, то через каждую точку прямой $y=c$ проходит бесконечное множество интегральных линий, в то время как через каждую точку полос $a<y<c$ и $c<y<b$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Эти выводы следуют из § 3. Представление о геометрической картине для этого случая могут дать рис. 3 и 4, если в них поменять ролями оси координат.

ЗАДАЧИ

1. Какие случаи из разобранных в этом параграфе возможны, если $f'(c)$ существует?

2. Представьте картину поведения интегральных линий уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = |y|^k, \quad \frac{dy}{dx} = \sin y, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{1}{y}.$$

3. Пусть $f(c)=0$ и сколь угодно близко от $y=c$, как при $y<c$, так и при $y>c$, найдутся значения y, при которых $f(y)>0$, и найдутся значения y, при которых $f(y)<0$. Докажите, что тогда через любую точку $x=x_0$, $y=c$ проходит единственное решение $y\equiv c$ уравнения $y'=f(y)$.

4. Докажите, что все решения уравнения $y'=f(y)$ монотонны.

5. Пусть $f(y)$ непрерывна при $a<y<b$ и $\varphi(x)\to c$ при $x\to+\infty$ $(a<c<b)$ для некоторого решения $y=\varphi(x)$ уравнения $y'=f(y)$. Докажите, что тогда $y\equiv c$ также является решением.

6. Пусть $f(y)$ непрерывна и положительна при $y_0\leqslant y<\infty$. Найдите необходимое и достаточное условие наличия асимптот у решений уравнения $y'=f(y)$. Рассмотрите, в частности, случай $f(y)\equiv\dfrac{P(y)}{Q(y)}$, где P и Q — многочлены.

7. Приведите пример уравнения $y'=f(y)$ с непрерывной правой частью, среди решений которого найдутся два, обладающих следующими свойствами: они определены для всех x, монотонно возрастают, а их графики имеют единственную общую точку.

Указание. В качестве множества нулей функции $f(y)$ воспользуйтесь так называемым совершенным нигде не плотным множеством.

8. Постройте пример двух уравнений $y'=f_1(y)\geqslant 0$ и $y'=f_2(y)\geqslant 0$ с непрерывными правыми частями, для которых через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная линия, и притом таких, что для уравнения $y'=\max\{f_1(y),\ f_2(y)\}$ эта единственность не гарантируется. Продумайте варианты этой задачи.

§ 5. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями с *разделяющимися переменными* называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\,f_2(y). \tag{2.3}$$

Теорема. *Пусть при $a<x<b$, $c<y<d$ функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ непрерывны, причем $f_2(y)$ нигде не обращается в нуль. Тогда через каждую точку $(x_0,\ y_0)$ прямоугольника Q:*

$$a<x<b,\quad c<y<d$$

проходит одна и только одна интегральная линия уравнения (2.3).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что интегральная линия уравнения (2.3), как и любого уравнения вида (1.1) с непрерывной правой частью, обязательно имеет уравнение вида $y=\varphi(x)$. Допустим сначала, что существует функция $\varphi(x)$, которая удовлетворяет уравнению (2.3) и при $x=x_0$ обращается в y_0. Тогда имеем тождество

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f_1(x)\,f_2(\varphi(x)),$$

которое, поскольку $f_2(y)\neq 0$, можно представить так:

$$\frac{d\varphi(x)}{f_2(\varphi(x))}=f_1(x)\,dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по x в пределах от x_0 до x. Получим

$$\int\limits_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)}\frac{d\varphi(\xi)}{f_2(\varphi(\xi))}=\int\limits_{x_0}^{x}f_1(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $F_2(y)$ — какая-нибудь первообразная от $\frac{1}{f_2(y)}$ и $F_1(x)$ — какая-нибудь первообразная от $f_1(x)$; тогда равенство можем переписать так:

$$F_2(\varphi(x))-F_2(y_0)=F_1(x)-F_1(x_0). \qquad (2.4)$$

В силу того, что $F_2(y)$ есть монотонная функция (так как $F_2'(y)=\frac{1}{f_2(y)}\neq 0$), последнее равенство можно однозначно разрешить относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=F_2^{-1}[F_2(y_0)+F_1(x)-F_1(x_0)]^{1)}. \qquad (2.5)$$

Таким образом, допустив существование такого решения уравнения (2.3), у которого $y=y_0$ при $x=x_0$, мы представили это решение в форме (2.5) и тем самым установили, что такое решение *единственно*: все функции, входящие в правую часть этого равенства, были определены только на основании данного уравнения и начальных условий.

С другой стороны, легко проверить, что функция $\varphi(x)$, определяемая равенством (2.5), действительно

---

[1] Через F_2^{-1} обозначена функция, обратная F_2.

дает (в некоторой окрестности значения x_0) решение уравнения (2.3), обращающееся в y_0 при $x=x_0$. В самом деле, дифференцируя равенство (2.4) по x, получаем

$$\frac{dF_2(\varphi(x))}{d\varphi(x)}\varphi'(x)=F_1'(x);$$

отсюда

$$\frac{1}{f_2(\varphi(x))}\varphi'(x)=f_1(x).$$

Значит, дифференциальное уравнение (2.3) удовлетворяется. Начальные же условия удовлетворяются потому, что

$$\varphi(x_0)=F_2^{-1}[F_2(y_0)]=y_0.$$

В заключение заметим, что в случае обращения $f_2(y)$ в одной какой-нибудь точке $y=y_1$ в нуль может нарушиться единственность. Это зависит от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f_2(\eta)}, \tag{2.6}$$

когда y приближается к y_1. В первом случае через некоторые точки прямоугольника Q проходит бесконечное множество интегральных кривых; все они касаются интегральной прямой $y=y_1$, на которой $f_2(y)=0$; в случае же расходимости интеграла (2.6) при $y\to y_1\pm 0$ проходящая через точку (x_0, y_0) интегральная кривая всегда единственна[1]. При этом предполагается, что $f_1(x)$ не равно нулю тождественно. В противном случае через каждую точку Q всегда проходит одна и только одна интегральная линия.

---

[1] Единственность может нарушиться только тогда, когда какая-нибудь интегральная кривая $y=\varphi(x)$ коснется интегральной прямой $y=c$ в некоторой внутренней точке (x_1, y_1) прямоугольника Q. Но этого не может быть, если интеграл (2.6) расходится при $y\to y_1$. Действительно, в этом случае при $x\to x_1$ левая часть равенства (2.4) бесконечно растет, тогда как правая остается ограниченной.

ЗАДАЧИ

1. Представьте картину поведения интегральных кривых уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\sin y},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin y}{\sin x},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{y}{x}},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{\sin x}{\sin y}},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{\sin y}{\sin x}}.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(y)}{\varphi(x)},$$

где функции $f(y)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны при всех неотрицательных значениях их аргументов; $\varphi(0)=f(0)=0$.

А. Пусть в области G $(0<x<\infty,\ 0<y<\infty)$ $\varphi(x)f(y)<0$. Исследуйте поведение интегральных кривых этого уравнения при $x\to\infty$, а также при $y\to\infty$ в зависимости от сходимости или расходимости интегралов

$$\int_0^1\frac{dy}{f(y)},\quad \int_1^\infty\frac{dy}{f(y)},\quad \int_0^1\frac{dx}{\varphi(x)},\quad \int_1^\infty\frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Б. Пусть в области G $(0<x<\infty,\ 0<y<\infty)$ $\varphi(x)f(y)>0$. Покажите, что при этих условиях всякая интегральная линия, проходящая через какую-нибудь точку области G, при своем продолжении в сторону уменьшения x неограниченно приближается к началу координат (быть может, частично проходя по границе G); найдите критерий наличия асимптоты у решении.

Если дополнительно потребовать, чтобы $\varphi'(0)\neq 0$ и $f'(0)\neq 0$, а $\varphi''(t)$ и $f''(t)$ были непрерывны при $0\leqslant t<\varepsilon$ (где $\varepsilon>0$), то каждая интегральная линия подходит к началу координат по определенному направлению. Если $\varphi'(0)\neq f'(0)$, то все они касаются при $x=0$ одной из координатных осей (какой?). Если же $\varphi'(0)=f'(0)$, то интегральные линии подходят к началу координат по всем направлениям (как прямые $y=kx$).

Проведите аналогичное рассмотрение решений уравнений

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(x)}{f(y)}\quad\text{и}\quad\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\,f(y)$$

при тех же предположениях.

3. Пусть функции $\varphi(x)$ и $f(y)$ непрерывны и положительны при $a<x<b$, $c<y<d$, причем $\varphi(x)$ (соответственно $f(y)$) стремится к нулю или бесконечности при $x\to a$ и $x\to b$ ($y\to c$ и $y\to d$). Рассмотрите все случаи расположения интегральных кривых урав-

нения $y'=\varphi(x)f(y)$ в прямоугольнике $a<x<b$, $c<y<d$. Опираясь на это, проведите полное исследование расположения интегральных линий уравнения $y'=\frac{P(x)\,Q(y)}{R(x)\,S(y)}$, где P, Q, R и S — многочлены.

§ 6. Однородные уравнения

Однородными дифференциальными уравнениями называют уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.7}$$

Если функция $f(u)$ определена при $a<u<b$, то функция $f\left(\frac{y}{x}\right)$ будет определена в углах, образованных такими точками (x, y), для которых $a<\frac{y}{x}<b$. Области, составленные этими двумя углами, мы будем обозначать G.

Теорема. *Если функция $f(u)$ непрерывна при $a<u<b$ и всюду на этом интервале $f(u)\neq u$, то через каждую точку (x_0, y_0) из G проходит одна и только одна интегральная линия уравнения* (2.7).

Доказательство. Положим $y=ux$; тогда уравнение (2.7) перепишется так:

$$xu'+u=f(u).$$

Отсюда получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}, \tag{2.8}$$

к которому применима предыдущая теорема, что и доказывает наше утверждение.

Из уравнения (2.8) находим

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{f(u)-u}$$

и, следовательно,

$$\ln|x|=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+C, \tag{2.9}$$

где $\Phi(u)$ есть некоторая первообразная от $\dfrac{1}{f(u)-u}$. Из формулы (2.9) видно, что при наших предположениях все интегральные кривые однородного дифференциального уравнения между собой подобны, и центром подобия служит начало координат. Действительно, при подходящем выборе постоянной C_1 замена x и y соответственно на C_1x и C_1y переводит кривую

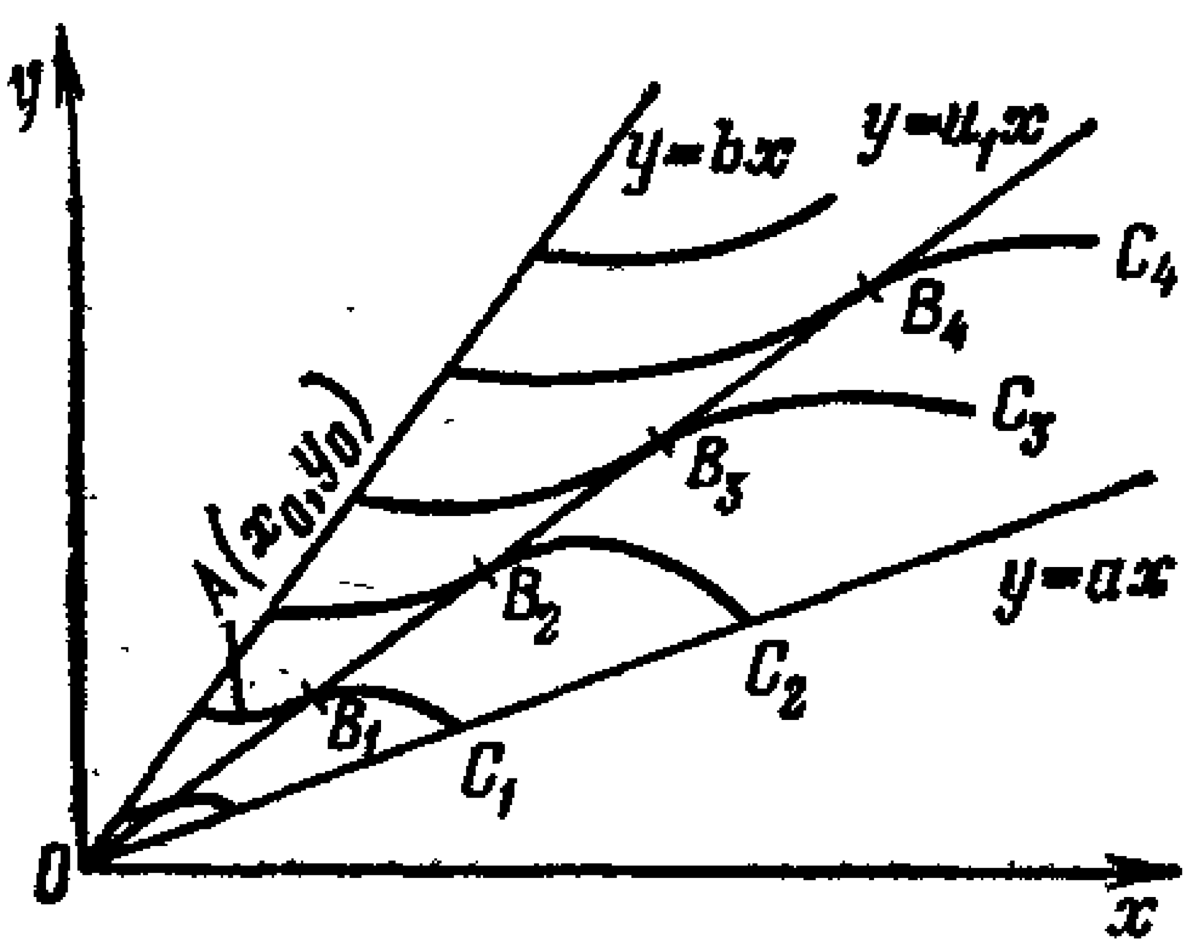

Рис. 5

$$\ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

в любую кривую семейства (2.9).

Исключительный случай $f(u) \equiv u$ мы имели в примере 1 § 2. Если же $f(u) = u$ в отдельных точках $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то через некоторые точки (x_0, y_0) из G может проходить много интегральных кривых. Это будет, если интеграл $\displaystyle\int_c^u \frac{d\xi}{f(\xi)-\xi}$ сходится, когда u приближается к одному из чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n$, например к u_1.

На рис. 5 схематически изображено возможное поведение интегральных кривых в этом случае. Через точку A будут, например, проходить интегральные линии AB_1C_1, $AB_1B_2C_2$, $AB_1B_3C_3$, ... Все они касаются прямой

$$y = u_1 x.$$

ЗАДАЧИ

1. Представьте картину поведения интегральных кривых уравнений

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

2. Докажите, что если все интегральные кривые некоторого дифференциального уравнения подобны между собой с центром подобия в начале координат, то это уравнение однородно.

3. Пусть функция $f(u)$ непрерывна при $0 \leqslant u < u_0$, причем $f(0) = 0$, $f(u) \neq u$ $(0 < u < u_0)$. Разберите все случаи расположения интегральных линий уравнения (2.7) в секторе

$$0 < \frac{y}{x} < \frac{u_0}{2}\ (x > 0).$$

Опираясь на это, проведите полное исследование расположении интегральных линий уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(\sin\varphi, \cos\varphi)}{Q(\sin\varphi, \cos\varphi)}$, где P и Q — многочлены от двух аргументов, а φ — полярный угол.

4. Наиболее общее однородное уравнение, заданное на всей плоскости x, y (кроме начала координат), имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = F(\varphi), \tag{*}$$

где $F(\varphi+2\pi) \equiv F(\varphi)$. Пусть функция $F(\varphi)$ задана для всех φ и «непрерывна, но может обращаться в бесконечность» в смысле, аналогичном § 2 (уточните это условие!). В каком случае можно перейти к уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(\varphi)}{f_2(\varphi)}$, где функции f_1 и f_2 непрерывны (в обычном смысле), периодичны с периодом 2π и не обращаются одновременно в нуль?

5. Уравнение (*) задачи 4 после перехода к полярным координатам приобретает вид

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \Phi(\varphi)\rho,$$

где функция $\Phi(\varphi)$ обладает свойствами, указанными в задаче 4 для функции $F(\varphi)$. Этот последний вид наиболее удобен для исследования решений. Пусть, в частности, функция $\Phi(\varphi)$ всюду конечна. Выясните поведение интегральных кривых уравнении (*) при их безграничном продолжении в зависимости от знака интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \Phi(\varphi)d\varphi$. Что будет, если этот интеграл равен нулю?

6. Найдите общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ при соответствующих предположениях, а также выясните картину поведения интегральных линий.

§ 7. Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\,y + b(x). \tag{2.10}$$

Теорема. *Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны в интервале $a<x<b$. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) полосы, определенной неравенствами $a<x<b$, $-\infty<y<\infty$, проходит одна и только одна интегральная линия этого уравнения, определенная при всех x на интервале (a, b).*

Доказательство. Разберем прежде всего более простой случай — *линейное однородное* уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\, y. \tag{2.11}$$

Это уравнение получается из предыдущего при $b(x) \equiv 0$ и является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому, замечая, что $\int\limits_c^y \frac{d\eta}{\eta}$ расходится при $y \to 0$, заключаем, что уравнение (2.11) имеет единственное решение, проходящее через точку (x_0, y_0). Легко видеть, что это решение дается формулой

$$y(x) = y_0 \exp\left[\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi\right] \quad (\exp a \equiv e^a).$$

Вернемся теперь к уравнению (2.10). Применим так называемый *метод вариации постоянной.* Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y(x) = z \exp\left[\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi\right], \tag{2.12}$$

где z есть некоторая функция от x. Несложными вычислениями можно показать, что для того, чтобы (2.12) было решением уравнения (2.10), необходимо и достаточно, чтобы функция $z(x)$ была дифференцируема и удовлетворяла уравнению

$$\frac{dz}{dx} = b(x) \exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi\right].$$

Для выполнения условия $y(x_0) = y_0$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $z(x_0)$ также равнялось y_0.

Поэтому из последнего уравнения находим

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(s) \exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right] ds.$$

Следовательно, функция

$$y = z(x) \exp\left[\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right] = y_0 \exp\left[\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right] + \int\limits_{x_0}^{x} b(s) \exp\left[\int\limits_{s}^{x} a(\xi)\,d\xi\right] ds$$

является единственным решением уравнения (2.10), которое обращается в y_0 при $x=x_0$.

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^n$$

(уравнение Бернулли), если $n \neq 1$, при помощи подстановки $z=y^k$, где k соответственно подобрано, приводится к линейному уравнению относительно z. (При нецелом n считаем, что $y>0$).

2. (О. А. Олейник.) Пусть на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ даны непрерывные функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$, причем

$$p(a)=p(b)=0, \quad p(x)>0 \quad (a<x<b),$$
$$q(x)>0 \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$
$$\int\limits_{a}^{a+\varepsilon} \frac{dx}{p(x)} = \int\limits_{b-\varepsilon}^{b} \frac{dy}{p(x)} = +\infty \quad (0<\varepsilon<b-a).$$

Тогда все решения уравнения

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x),$$

существующие на интервале $a<x<b$, стремятся к $\dfrac{r(b)}{q(b)}$ при $x \to b$. Среди этих решений одно стремится к $\dfrac{r(a)}{q(a)}$ при $x \to a$; другие же при $x \to a$ стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$.

§ 8. Уравнения в полных дифференциалах

Мы уже говорили (§ 2), что часто бывает удобно записывать дифференциальные уравнеиия в следующей форме:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{2.13}$$

(N в этом уравнении и N в уравнении (1.3) обратны по знаку). Может случиться, что левая часть этого уравнения представляет полный дифференциал некоторой функции переменных x и y. В таком случае дифференциальное уравнение (2.13) называется *уравнением в полных дифференциалах.*

Предположим, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Тогда, как известно из курса анализа, необходимым и достаточным условием, чтобы левая часть уравнения (2.13) была полным дифференциалом, является условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2.14}$$

если только область G, в которой заданы M и N, *односвязна*; это означает, что все точки, лежащие внутри любой замкнутой, не имеющей самопересечений ломаной, расположенной в G, также должны принадлежать G.

Для таких уравнений имеет место следующая

Теорема. *Пусть в прямоугольнике Q:*

$$a < x < b, \quad c < y < d,$$

функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны вместе с их частными производными $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$, причем всюду в Q выполняется условие (2.14) *и $N(x, y)$ не обращается в нуль. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) прямоугольника Q проходит одна и только одна интегральная линия уравнения* (2.13) [1].

---

[1] Так как из уравнеиия (2.13) следует, что при сделаниых от-

Доказательство. Как было только что указано, в прямоугольнике Q существует функция $z(x, y)$, полный дифференциал которой равен левой части (2.13) (неизменность знака N при этом несущественна). Но так как $N \neq 0$, то уравнение (2.13) можно переписать в эквивалентном виде:

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0,$$

или с учетом равенств $M \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $N \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$ так:

$$\frac{dz(x, y(x))}{dx} = 0.$$

Поэтому функция $y(x)$ является решением уравнения (2.13) тогда и только тогда, когда

$$z(x, y(x)) \equiv C \quad (C = \text{const}). \tag{2.15}$$

Этому уравнению, если $C \neq z(x_0, y_0)$, не может удовлетворять линия, проходящая через точку (x_0, y_0). (Почему?) Если же $C = z(x_0, y_0)$, то из теоремы о неявной функции следует, что уравнение (2.15) определяет линию, проходящую через точку (x_0, y_0), и притом только одну. Итак, теорема доказана. Заодно мы показали, что искомое решение определяется при помощи формулы

$$z(x, y) = z(x_0, y_0). \tag{2.16}$$

Разыскание функции $z(x, y)$ сводится, как известно из курса анализа, к выполнению двух квадратур.

Пример. Пусть поле направлений задано уравнением

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \equiv x\,dx + y\,dy = 0$$

в области G, ограниченной сторонами двух квадратов, у которых центром служит начало координат, стороны параллельны координатным осям и имеют длину соот-

---

носительно M и N предположениях $\frac{dx}{dy}$ никогда не обращается в нуль в прямоугольнике Q, то все проходящие внутри Q интегральные линии уравнения (2.13) должны быть графиками функций от x.

ветственно 2 и 4. Только что доказанную теорему нельзя применить сразу ко всей области G потому, что $N(x, y) \equiv y$ обращается в нуль на оси Ox. Но эту теорему можно применять отдельно к прямоугольникам:

$$\begin{array}{lll} Q_1: & -2<x<2, & 1<y<2, \\ Q_2: & -2<x<2, & -2<y<-1, \\ Q_3: & 1<x<2, & -2<y<2, \\ Q_4: & -2<x<-1, & -2<y<2. \end{array}$$

В последних двух случаях надо применять предыдущую теорему, поменяв в ее формулировке роли x и y. Тогда, соединяя вместе результаты, полученные отдельно в каждом случае, мы докажем, что через каждую точку области G проходит одна и только одна интегральная кривая нашего уравнения. Такой кривой будет проходящая через эту точку окружность с центром в начале координат или часть этой окружности.

Когда тождество (2.14) не выполнено, иногда удается сравнительно легко привести дифференциальное уравнение (2.13) к виду уравнения в полных дифференциалах. Это приведение выполняется с помощью *интегрирующего множителя* $\mu(x, y)$ — такой функции от x и y, после умножения на которую левая часть уравнения (2.13) обращается в полный дифференциал. Если функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ и $\mu(x, y)$ имеют непрерывные производные, то интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или в раскрытом виде

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \tag{2.17}$$

Последнее есть линейное дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка. Для приведения левой части (2.13) к виду полного дифференциала достаточно знать какое-нибудь одно частное решение уравнения (2.17) [1]; однако, как мы увидим

[1] Очевидно, тривиальное решение уравнения (2.17), равное тождественно нулю, не представляет интереса.

6. Пусть в некоторой области G функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| > 0, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Докажите, что тогда в некоторой окрестности любой точки G (но не обязательно во всей области G!) z_2 будет функцией от z_1.

7. Найдите интегрирующий множитель для линейного уравнения, записанного в виде

$$dy - [a(x)y + b(x)]dx = 0.$$

8. Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике Q, причем $N \neq 0$. Докажите, что при этом условии для существования в Q непрерывного интегрирующего множителя $\mu \neq 0$ [для уравнения (2.13)], зависящего только от x, необходимо и достаточно, чтобы в Q

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \equiv \frac{\partial N}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

На этом мы закончим изложение элементарных приемов нахождения решений дифференциальных уравнений 1-го порядка. Другие элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений изложены, например, в книгах: В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959; Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин. Сборник задач по высшей математике. — М.: Физматгиз, 1958, Т. 2; А. Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1979. В основном эти методы сводят различные дифференциальные уравнения к уже разобранным нами типам [1]).

Отметим здесь также некоторые курсы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вышедшие в последние годы: В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971; В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обык-

---

[1]) См. также Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.

новенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978; Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974; А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1979; М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980; Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

ГЛАВА III

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальных уравнений, интегралы которых находятся элементарными приемами, немного. Уже интегрирование дифференциальных уравнений типа Риккати, т. е. уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)\, y^2 + a_1(x)\, y + a_0(x),$$

как показал в 1841 г. Лиувилль, не сводится к квадратурам [1], т. е. к конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрирований этих функций (подобно тому как это делалось в § 3—8). Поэтому большое значение приобретают приемы приближенного решения дифференциальных уравнений, применимые к очень широким классам таких уравнений. Но прежде чем приступить к приближенному нахождению решений, надо быть уверенными в том, что они существуют, т. е. существует то, что будем приближенно вычислять. Начало настоящей главы и посвящено таким теоремам существования. К тому же доказательства этих теорем часто указывают и методы приближенного нахождения решений (см., например, § 9, 13, 14 и 17).

[1] Вопросы интегрируемости в квадратурах рассмотрены, например, в кн.: И. Капланский. Введение в дифференциальную алгебру. — М.: ИЛ, 1959.

§ 9. Ломаные Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y). \tag{3.1}$$

Область задания функции $f(x, y)$ назовем G. Как мы уже знаем, уравнение (3.1) определяет в G поле направлений, которые должны иметь интегральные линии.

Возьмем в области G какую-нибудь точку (x_0, y_0). Ей будет соответствовать проходящая через эту точку прямая с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$. На этой прямой в области G возьмем точку (x_1, y_1) (на рис. 6 обозначена цифрой 1). Через точку (x_1, y_1) проведем прямую с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$, на которой мы отметим принадлежащую G точку (x_2, y_2) (на рис. 6 обозначена цифрой 2). Затем на прямой, соответствующей точке (x_2, y_2), отмечаем точку (x_3, y_3) и т. д. Пусть при этом $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ (это построение можно выполнять и в сторону убывающих значений x). Получим ломаные линии, которые называют *ломаными Эйлера*. Естественно ожидать, что каждая из ломаных Эйлера с достаточно короткими звеньями дает некоторое представление об интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), и что при уменьшении длин звеньев ломаные Эйлера приближаются к этой интегральной кривой; при этом предполагается, что такая интегральная кривая существует. В самом деле, ниже мы покажем, что при непрерывности $f(x, y)$ можно выбрать такую последовательность ломаных Эйлера, которая будет сходиться к интегральной кривой. Однако при этом вообще не будет единственности, т. е. могут существовать различные интегральные кривые, проходящие через одну и ту же точку (x_0, y_0). М. А. Лаврентьев построил пример такого дифференциального уравнения вида (3.1), у которого хотя $f(x, y)$ и непрерывна, однако в любой окрестности каждой точки области G через эту точку проходит не одна, а по крайней мере

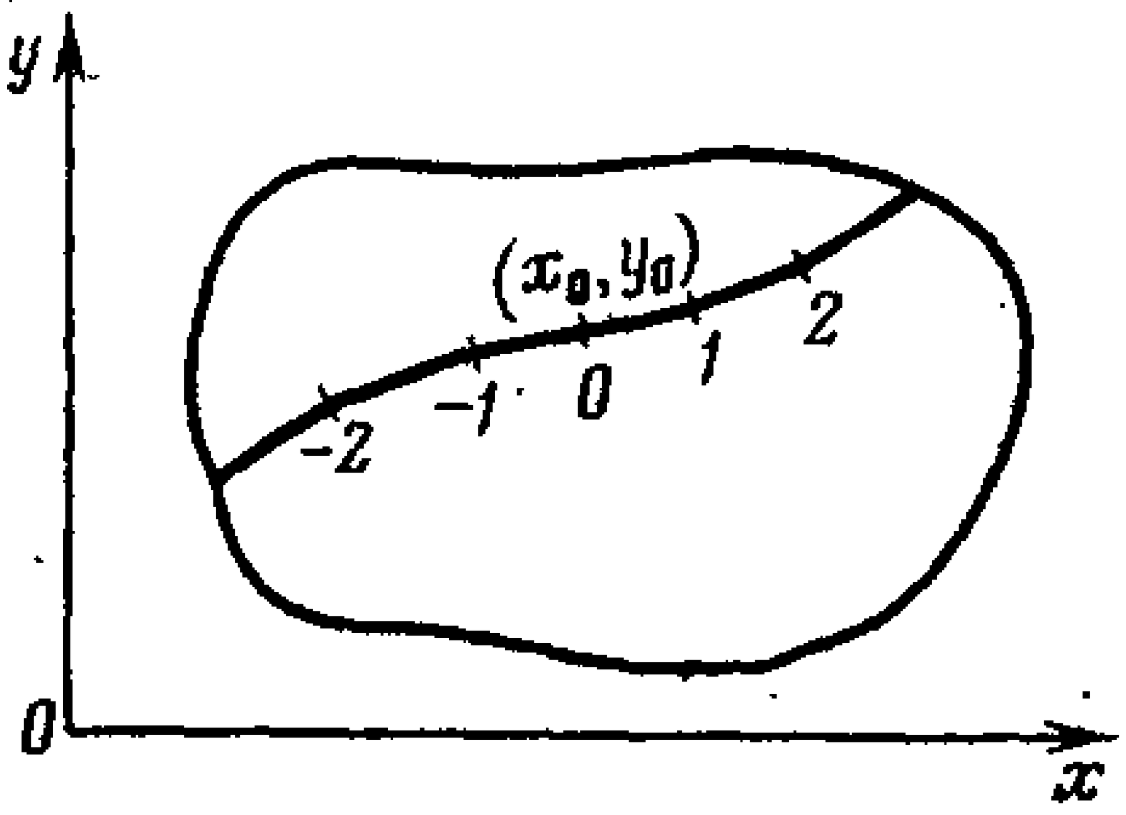

Рис. 6

две интегральные кривые[1]. Чтобы через точку (x_0, y_0) проходила только одна интегральная кривая, необходимы дополнительные предположения о функции $f(x, y)$.

Доказательство существования проходящей через точку (x_0, y_0) интегральной кривой дифференциального уравнения (3.1), которое мы здесь изложим, основано на теореме Арцеля и принадлежит в основном Пеано. Очевидно, каждая из таких кривых будет служить *графиком* некоторого *решения* дифференциального уравнения (3.1).

ЗАДАЧА

Пусть фуикция $f(x, y)$ задана иа полосе

$$a \leqslant x \leqslant a', \quad -\infty < y < \infty \quad (a < a'),$$

где она иепрерывна и ограничена. Покажите, что для уравнения (3.1) совокупность всех ломаных Эйлера, выходящих из точки (a, b), заполняет множество E, ограниченное сверху линией $y = \varphi_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant a'$, выпуклость которой обращена вниз, снизу линией $y = \varphi_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant a'$, выпуклость которой обращена вверх, а справа прямой $x = a'$. При этом

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = b; \quad \varphi_1'(a) = \varphi_2'(a) = f(a, b);$$

в каждой точке x правая и левая производные $\varphi_1(x)$ не меньше $f(x, \varphi_1(x))$, а правая и левая производные $\varphi_2(x)$ ие больше $f(x, \varphi_2(x))$. Сами линии $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ могут частнчно илн целиком прннадлежать E.

§ 10. Теорема Арцеля

Пусть на конечном интервале (a, b) [2] *дано семейство $\{f(x)\}$, состоящее из бесконечного множества функций $f(x)$, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных. Тогда из этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся на (a, b) бесконечную последовательность функций.*

---

[1] Sur une équation différentielle du premier ordre. — Math, Zeitschrift, B. 23 (1925), 197—209.

[2] Безразлично, *замкнут* этот интервал или *открыт*, т. е. присоедиены к нему его концы илн нет.

Равномерная ограниченность здесь означает, что существует такая постоянная M, что

$$|f(x)| < M,$$

где $f(x)$ — любая функция семейства и x — любое число из интервала (a, b). Выражение «*функции семейства равностепенно непрерывны*» означает следующее: *каково бы ни было наперед заданное число* $\varepsilon > 0$, *найдется такое число* $\eta > 0$, *зависящее только от* ε, *что*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

для всякой функции $f(x)$ *рассматриваемого семейства при любых* x'' *и* x' *из интервала* (a, b), *если только*

$$|x'' - x'| < \eta.$$

Доказательство[1]. В силу равномерной ограниченности семейства все графики принадлежащих ему функций будут расположены в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 7) со сторонами $2M$ и $b-a$.

Составим бесконечную последовательность чисел

$$\varepsilon_1 = \frac{M}{2^{\alpha+1}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{M}{2^{\alpha+2}}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k = \frac{M}{2^{\alpha+k}}, \quad \ldots,$$

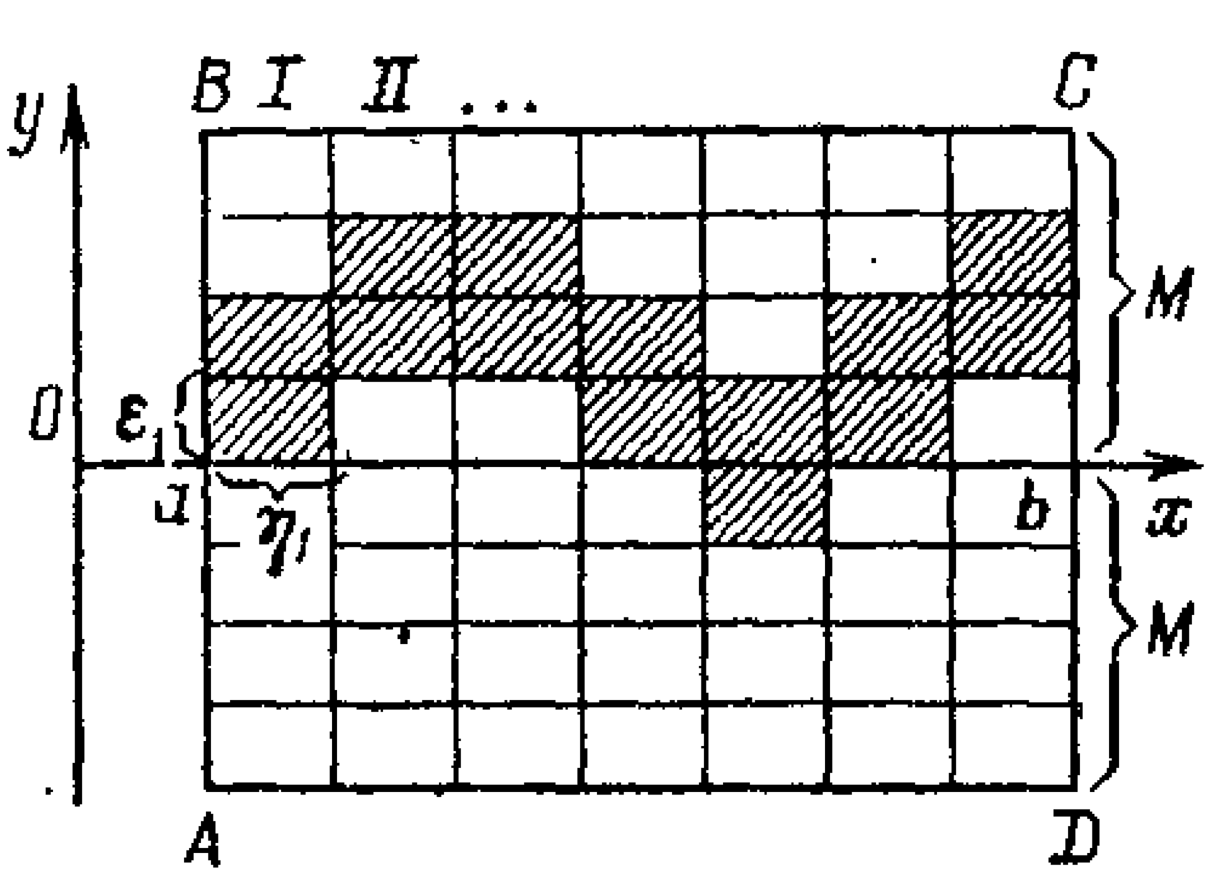

Рис. 7

где α — какое-нибудь целое положительное число или нуль. По определению равностепенной непрерывности каждому числу ε_k будет соответствовать $\eta_k = \eta(\varepsilon_k)$.

Разобьем вертикальную сторону прямоугольника $ABCD$ на отрезки длиной ε_1, горизонтальную же сторону этого прямоугольника разобьем на отрезки, длина каждого из которых не превышает η_1. Через полученные точки проведем прямые, параллельные координатным осям. Таким образом, весь прямоугольник $ABCD$ разобьется на меньшие прямоугольники. Вертикальные

[1] Это доказательство мне сообщил Л. А. Люстерник.

полосы, составленные из таких прямоугольников, будем обозначать римскими цифрами: I, II, ... Так как $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon_1$ при $|x''-x'|<\eta_1$, то график каждой функции семейства $\{f(x)\}$ может проходить не больше чем по двум соседним прямоугольникам каждой полосы, в частности полосы I. Но таких пар прямоугольников из полосы I имеется только конечное число; следовательно, по крайней мере по одной такой паре проходит бесконечное множество графиков функций рассматриваемого семейства. Эта пара прямоугольников на рис. 7 (где положено $a=1$) заштрихована. Будем теперь рассматривать те функции семейства, графики которых в полосе I проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Таких функций, как мы уже говорили, бесконечное множество. В полосе II, как легко видеть, все их графики могут проходить лишь по четырем прямоугольникам этой полосы, график же каждой такой функции может проходить только по двум соседним из них.

Следовательно, существуют два таких соседних прямоугольника на полосе II, по которым проходит бесконечное множество графиков функций данного семейства, и притом таких, которые и на полосе I проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Эти прямоугольники полосы II у нас также заштрихованы. Рассуждая и дальше таким же образом, мы найдем целую полосу, расположенную над всем интервалом (a, b), шириной $2\varepsilon_1$, по которой проходит бесконечное множество графиков семейства $\{f(x)\}$. Эта полоска s_1 у нас заштрихована. Возьмем из этих графиков один какой-нибудь; пусть это будет график функции $\overset{*}{f_1}(x)$. Семейство оставшихся функций, графики которых проходят по s_1, обозначим через $\{f_1(x)\}$.

С семейством функций $\{f_1(x)\}$ проделаем то же, что мы проделали с семейством $\{f(x)\}$, с той только разницей, что теперь вместо ε_1 возьмем ε_2 и вместо η_1 возьмем η_2. Тогда получим полоску s_2 шириной $2\varepsilon_2$, по которой проходят графики бесконечного множества функций из семейства $\{f_1(x)\}$. Одну из этих функций обозначим через $\overset{*}{f_2}(x)$, а семейство всех остальных таких функций обозначим через $\{f_2(x)\}$. Продолжая эти рассуждения, мы получим, таким образом, бесконечную последовательность функций

$$f_1^*(x),\ f_2^*(x),\ \ldots$$

Графики всех этих функций, начиная с $f_k^*(x)$, лежат в полоске s_k шириной $\frac{M}{2^{k+\alpha-1}}$. Следовательно, эта последовательность равномерно сходится, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1. Покажите на примерах, что как условие равномерной ограниченности, так и условие равностепенной непрерывности являются существенными в формулировке теоремы Арцеля: если отказаться хотя бы от одного из них, то утверждение может быть неверным.

2. Сформулируйте и докажите теорему Арцеля для функций нескольких независимых переменных.

3. Останется ли верной теорема Арцеля, если в ее формулировке допустить, что рассматриваемые функции заданы на бесконечном интервале?

4. Покажите, что в формулировке теоремы Арцеля вместо равномерной ограниченности функций на всем рассматриваемом интервале достаточно потребовать ограниченность всего семейства функций в одной только точке.

§ 11. Доказательство существования решения дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ методом Пеано

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'=f(x, y). \tag{3.2}$$

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ ограничена и непрерывна в области G, то через каждую точку (x_0, y_0) этой области проходит по крайней мере одна интегральная линия уравнения* (3.2).

Доказательство. Пусть

$$|f(x, y)| \leqslant M.$$

Через точку (x_0, y_0) области G проведем прямые с угловыми коэффициентами M и $-M$. Проведем далее две прямые $x=a$ и $x=b$ $(a<x_0<b)$, параллельные оси Oy, так, чтобы образуемые ими два равнобедренных треугольника с общей вершиной в точке (x_0, y_0) лежали внутри области G (рис. 8).

Построим теперь указанным в § 9 способом бесконечную последовательность ломаных Эйлера L_1, L_2, ..., L_k, ..., проходящих через точку (x_0, y_0), таким образом, чтобы наибольшее из звеньев линии L_k стремилось к нулю, когда $k \to \infty$. Каждая из этих ломаных будет пересекаться прямой, параллельной оси Oy, только в одной точке и будет поэтому графиком некоторой непрерывной функции от x. Пусть L_k является графиком функции $\varphi_k(x)$. Функции

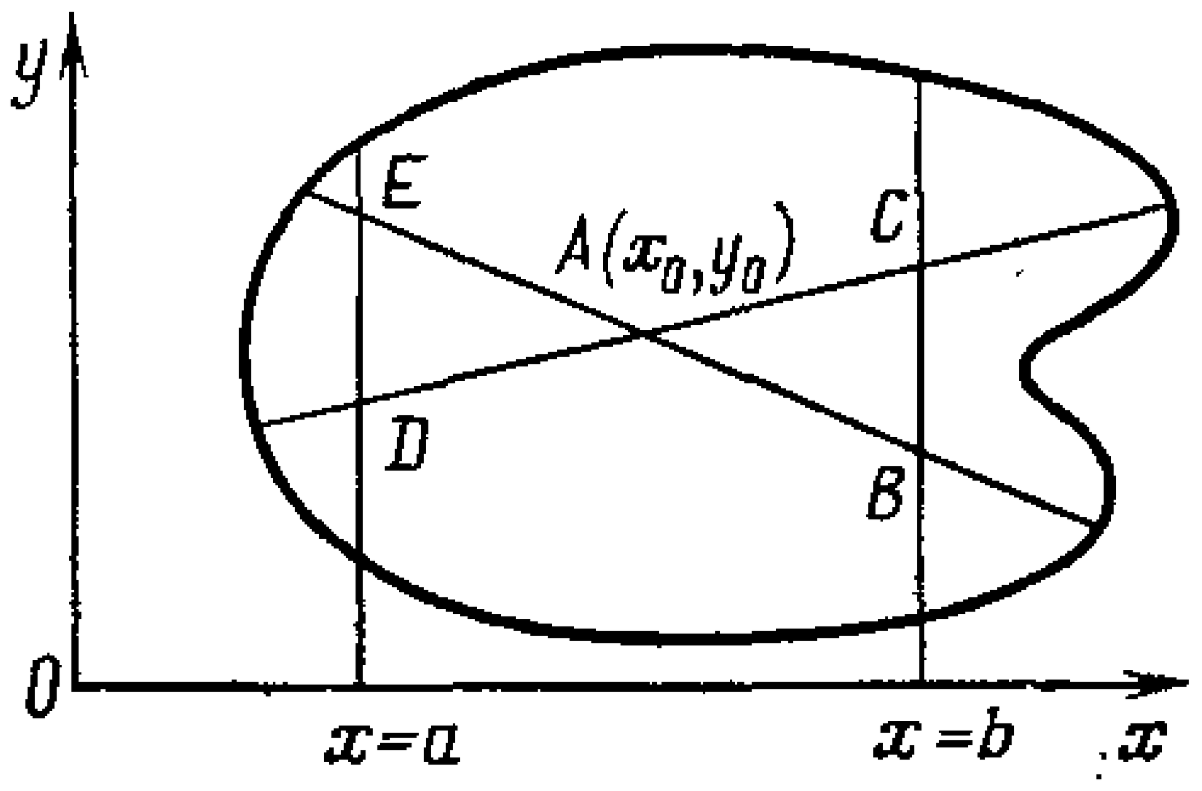

Рис. 8

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x),\ \ldots \tag{3.3}$$

обладают следующими свойствами:

1) Они определены на одном и том же конечном замкнутом интервале $[a, b]$[1]. В самом деле, функция $\varphi_k(x)$ могла бы не быть определенной на всем этом интервале только в том случае, если бы соответствующая ей ломаная Эйлера вышла из области G где-нибудь над замкнутым интервалом $[a, b]$. Но этого не может быть потому, что ломаные Эйлера не могут выйти из треугольников ABC и ADE через стороны BE или DC, так как угловые коэффициенты их звеньев по абсолютному значению не больше M.

2) Они равномерно ограничены, так как все их графики располагаются в треугольниках ABC и ADE.

3) Оценивая разность

$$\varphi_k(x'') - \varphi_k(x') = \int_{x'}^{x''} \varphi_k'(\xi)\,d\xi$$

по абсолютной величине, имеем

$$|\varphi_k(x'') - \varphi_k(x')| \leqslant M|x'' - x'|.$$

Отсюда следует, что семейство (3.3) равностепенно непрерывно. Поэтому на основании теоремы Арцеля из

---

[1] Мы обозначаем замкнутый интервал квадратными скобками, сохраняя круглые скобки для обозначения открытых интервалов.

семейства функций (3.3) можно выбрать равномерно сходящуюся на всем замкнутом интервале $[a, b]$ подпоследовательность. Пусть это будут функции

$$\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\ \ldots,\ \varphi^{(k)}(x),\ \ldots$$

Предельную функцию обозначим через $\varphi(x)$.

Ясно, что начальное условие $\varphi(x_0)=y_0$ удовлетворяется.

Докажем теперь, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет данному дифференциальному уравнению (3.2) внутри интервала (x_0, b) (аналогичные рассуждения применимы к интервалу (a, x_0)). Для этого возьмем внутри интервала (x_0, b) произвольную точку x' и покажем, что при любом положительном ε

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}-f(x', \varphi(x'))\right| \leqslant \varepsilon, \tag{3.4}$$

если только $|x''-x'|$ достаточно мало́. Для того же, чтобы доказать (3.4), достаточно показать, что если $|x''-x'|$ достаточно мало, то при достаточно больших k

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'}-f(x', \varphi(x'))\right| \leqslant \varepsilon,$$

так как при $k\to\infty$

$$\varphi^{(k)}(x')\to\varphi(x') \quad \text{и} \quad \varphi^{(k)}(x'')\to\varphi(x'').$$

В силу непрерывности $f(x, y)$ в области G любому $\varepsilon>0$ будет соответствовать такое $\eta>0$, что всегда

$$f(x', y')-\varepsilon<f(x, y)<f(x', y')+\varepsilon \quad (y'=\varphi(x'))\ ^{1)},$$

как только

$$|x-x'|<2\eta, \quad |y-y'|<4M\eta.$$

Совокупность точек (x, y) области G, удовлетворяющих последним неравенствам, образует (при достаточно малом η) прямоугольник Q (рис. 9). Выберем теперь K

---

[1] Конечно, здесь y' — не производная, а значение y.

настолько большим, чтобы для всех $k>K$ на интервале (a, b) было

$$|\varphi(x)-\varphi^{(k)}(x)|<M\eta$$

и чтобы все звенья линии L_k были короче η. Из последнего неравенства следует, что все ломаные Эйлера $y=\varphi^{(k)}(x)$ при $k>K$ и $|x-x'|<2\eta$ будут целиком содержаться в Q.

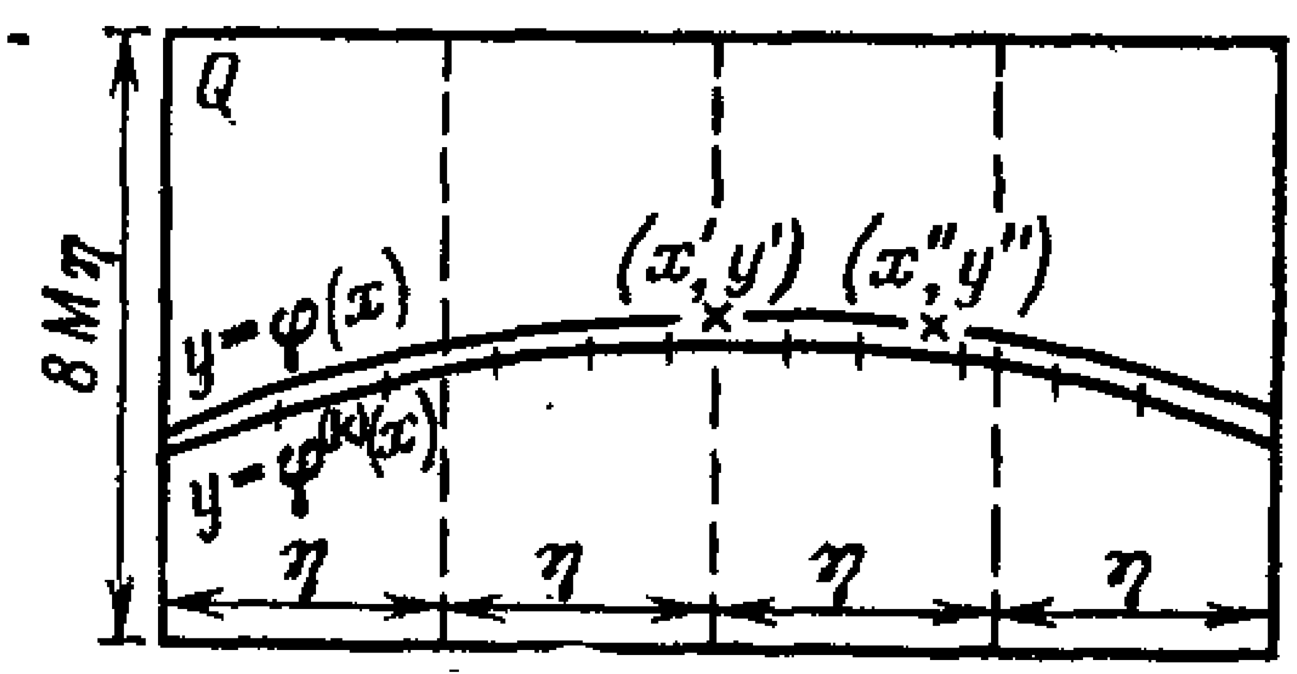

Рис. 9

С другой стороны,

$$\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')=\int_{x'}^{x''}\frac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx}\,dx.$$

Согласно предыдущему $\frac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx}$ всюду, где она существует, заключена между $f(x', y')-\varepsilon$ и $f(x', y')+\varepsilon$, если $|x''-x'|<\eta$[1]. Отсюда, считая для определенности, что $x''>x'$, получим

$$[f(x', y')-\varepsilon](x''-x')<\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')<$$
$$<[f(x', y')+\varepsilon](x''-x'),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Предыдущие рассуждения, будучи проведены для интервала (x_0, b) и $x'=x_0$, показывают, что «правая» производная от $\varphi(x)$ при $x=x_0$, т. е.

$$\lim_{x''\to x_0+0}\frac{\varphi(x'')-\varphi(x_0)}{x''-x_0}$$

равна $f(x_0, \varphi(x_0))$.

Точно так же предыдущие рассуждения, будучи проведены для интервала (x_0, b) и $x'=b$, показывают, что

[1] Мы взяли прямоугольник Q, для которого $|x-x'|$ меньше 2η, а не просто η, затем, чтобы иметь возможность оценить угловой коэффициент крайнего левого звена ломаной Эйлера, проходящей между прямыми $x=x'-\eta$ и $x=x'+\eta$, если ее начальная точка лежит левее точки (x', y'). Начало этого звена может не находиться в этой полоске, но при достаточной малости этого звена оно обязательно находится в полосе между прямыми $x=x'-2\eta$ и $x=x'$.

«левая» производная от $\varphi(x)$ при $x=b$, т. е.

$$\lim_{x''\to b-0}\frac{\varphi(x'')-\varphi(b)}{x''-b},$$

равна $f(b, \varphi(b))$. Аналогичные утверждения получаются для концов интервала (a, x_0).

Замечание 2. Теорема 1 остается справедливой, если требовать от $f(x, y)$ только непрерывность в G. В самом деле, выберем какую-либо ограниченную область G', содержащую точку (x_0, y_0) и содержащуюся в G вместе со своим замыканием. Тогда функция $f(x, y)$ ограничена на G' (почему?), и, заменив G на G', можно применить все предыдущие рассуждения.

Изложенными рассуждениями мы построили функцию $\varphi(x)$, которая при $x=x_0$ обращается в y_0 и удовлетворяет уравнению (3.2) только на замкнутом интервале $[a, b]$. Рассмотрим один из концов, например правый, построенного куска линии $y=\varphi(x)$. Так как по построению он лежит внутри G, то, взяв вместо (x_0, y_0) точку $(b, \varphi(b))$, можно применить теорему 1, ограничившись построением решения в сторону $x\geqslant b$. Таким образом, мы получим решение $\varphi(x)$ уже на интервале $[a, b_1]$ $(b_1>b)$, т. е. получим продолжение первоначально построенного куска интегральной линии. Затем можно, взяв вместо (x_0, y_0) точку $(b_1, \varphi(b_1))$, вновь применить теорему 1 и получить продолжение решения на интервал $[a, b_2]$ $(b_2>b_1)$ и т. д. Аналогично можно продолжать решения влево, т. е. в сторону убывания x.

Возникает вопрос о том, что мы можем получить в результате такого продолжения.

Решение $\varphi(x)$ какого-либо дифференциального уравнения, заданное на отрезке $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, назовем *продолжаемым вправо* (*влево*), если существует решение $\varphi_1(x)$ того же уравнения, заданное на отрезке $\alpha\leqslant x\leqslant\beta_1$ $(\alpha_1\leqslant x\leqslant\beta)$, причем $\beta_1>\beta$ $(\alpha_1<\alpha)$ и $\varphi_1(x)\equiv\varphi(x)$ при $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$. Решение, не продолжаемое ни вправо, ни влево, называется *непродолжаемым*. Аналогично определяется продолжаемость и непродолжаемость решения, заданного на открытом или полуоткрытом интервалах.

Из рассуждений, приведенных после замечания 2, вытекает, что если правая часть уравнения (3.2) определена и непрерывна в области G, то любое его решение, определенное на замкнутом или полуоткрытом интервале, всегда продолжаемо. Непродолжаемые решения можно охарактеризовать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области G. Тогда для непродолжаемости решения $\varphi(x)$ $(\alpha<x<\beta)$ уравнения* (3.2) *вправо (влево) необходимо и достаточно выполнения по крайней мере одного из трех условий:*

1) $\beta=+\infty$ $(\alpha=-\infty)$;

2) $|y(x)|\to+\infty$ *при* $x\to\beta-0$ $(x\to\alpha+0)$;

3) *расстояние от точки* $(x, \varphi(x))$ *до границы* G *стремится к нулю при* $x\to\beta-0$ $(x\to\alpha+0)$.

Доказательство. Будем для определенности рассматривать продолжаемость вправо. Если решение $\varphi(x)$ $(\alpha<x<\beta)$ продолжаемо вправо хотя бы на полуоткрытый интервал $\alpha<x\leqslant\beta$, то продолженная функция φ должна быть непрерывной, а точка $(\beta, \varphi(\beta))$ должна находиться в области G. Но это невозможно при выполнении хотя бы одного из условий 1)—3), т. е. достаточность каждого из них для непродолжаемости решения доказана.

Для доказательства необходимости допустим, что ни одно из условий 1)—3) не выполнено, и докажем, что тогда решение можно продолжить. Обозначим

$$p=\varliminf_{x\to\beta-0}\varphi(x),\quad q=\varlimsup_{x\to\beta-0}\varphi(x)\quad(-\infty\leqslant p\leqslant q\leqslant+\infty)$$

и докажем, что $p=q$. В самом деле, пусть $p<q$. Все точки интервала $(x=\beta,\ p<y<q)$ являются предельными точками для графика решения и потому предельными для G. Если бы все они принадлежали границе G, то было бы выполнено условие 3), что невозможно; значит, имеется точка (β, r) $(p<r<q)$, принадлежащая G. Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы прямоугольник П: $\beta-\varepsilon\leqslant\leqslant x\leqslant\beta$, $r-\varepsilon\leqslant y\leqslant r+\varepsilon$, целиком содержался в G, причем $p<r-\varepsilon$, $r+\varepsilon<q$. Тогда функция f на П

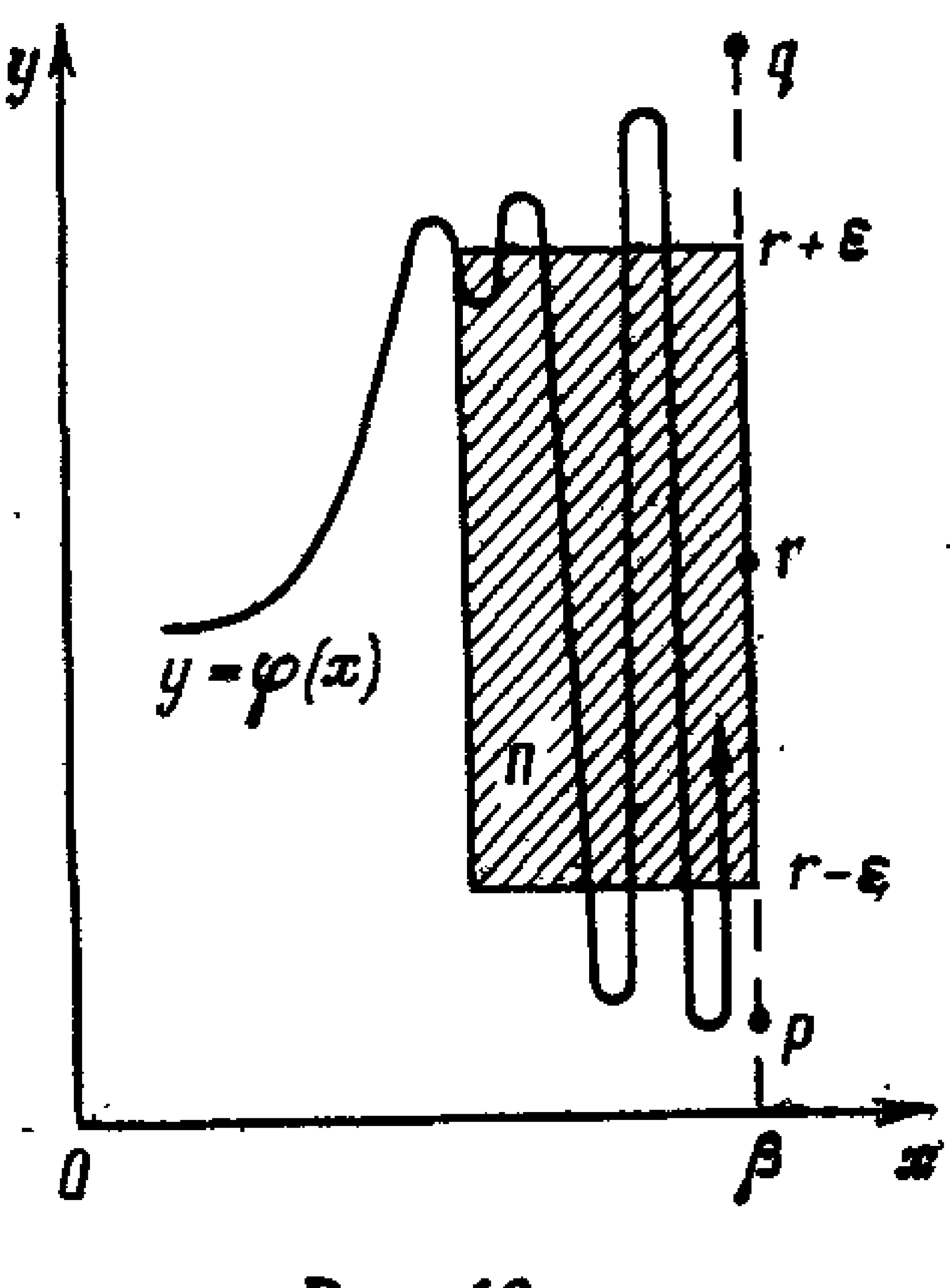

Рис. 10

ограничена, $\max\limits_{\Pi}|f|=N<+\infty$, а график функции $\varphi(x)$ при $x\to\beta-0$ бесконечно много раз переходит от верхней стороны П к нижней и обратно (рис. 10). Но в силу уравнения (3.2) и формулы конечных приращений каждый такой переход совершается на интервале оси x, длина которого не меньше $2\varepsilon/N$, тем самым переходов на интервале $\beta-\varepsilon\leqslant x<\beta$ может быть не больше $N/2$, и мы пришли к противоречию

Итак, $p=q$. Так как условие 2) не выполнено, то это значение конечно, т. е. предел $\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x)$ существует. Положив значение $\varphi(\beta)$ равным этому пределу, мы видим, что точка $(\beta, \varphi(\beta))$ принадлежит G, так как условие 3) не выполнено. Но в силу уравнения (3.2) предел $\lim\limits_{x\to\beta-0}\varphi'(x)$ существует и равен $f(\beta, \varphi(\beta))$. Значит, при $\alpha<x<\beta$ по формуле конечных приращений

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(\beta)}{x-\beta}=\varphi'(\xi)|_{x<\xi<\beta)}=f(\xi,\varphi(\xi))\to f(\beta,\varphi(\beta))$$

при $x\to\beta-0$, а потому функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (3.2) и при $x=\beta$, т. е. является продолжением исходного решения на полуоткрытый интервал $\alpha<x\leqslant\beta$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Если область G ограничена, то случаи 1) и 2) отпадают, и потому всякое непродолжаемое решение удовлетворяет условию 3). Если, кроме того, функция f на G ограничена, то при $x_1, x_2\to\beta-0$ $(x_2<x_1)$

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=(x_1-x_2)\varphi'(\xi)|_{x_2<\xi<x_1}=$$
$$=(x_1-x_2)\cdot f(\xi,\varphi(\xi))\to 0,$$

а потому по известному общему критерию Коши существования предела получаем, что для непродолжаемого решения $\varphi(x)$ $(\alpha<x<\beta)$ существует $\lim\limits_{x\to\beta-0}\varphi(x)$. С другой стороны, если область G содержит полуплоскость $x\geqslant x_0$ $(x\leqslant x_0)$ $(\alpha<x_0<\beta)$, то отпадает случай 3).

Теорема 3. *Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области G. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) этой области проходит график по крайней мере одного непродолжаемого решения уравнения* (3.2).

Доказательство. Будем строить решение только в направлении возрастания x. Обозначим через K_0 прямоугольник $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+r_0$, $|y-y_0| \leqslant r_0$, где r_0 равно половине кратчайшего расстояния от точки (x_0, y_0) до границы G, если G не совпадает со всей плоскостью, и $r_0=1$, если G есть вся плоскость x, y. Пусть $M_0=\max\limits_{K_0}|f|$; тогда по методу, примененному при доказательстве теоремы 1, решение $\varphi(x)$, удовлетворяющее заданному начальному условию, будет построено на интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h_0$, где $h_0=\min\left\{r_0, \frac{r_0}{M_0}\right\}$. Теперь обозначим $x_1=x_0+h_0$, $y_1=\varphi(x_1)$, $K_1=\{x_1 \leqslant x \leqslant x_1+r_1$, $|y-y_1| \leqslant r_1\}$, где r_1 определено аналогично r_0, продолжим решение на интервал $x_1 \leqslant x \leqslant x_1+h_1=x_2$

$$\left(h_1=\min\left\{r_1, \frac{r_1}{M_1}\right\}, \ M_1=\max_{K_1}|f|\right)$$

и т. д. Этот процесс можно продолжать неограниченно, в результате чего решение $\varphi(x)$ будет построено при $x_0 \leqslant x < \beta$, где $\beta=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant +\infty$.

Докажем, что построенное решение непродолжаемо вправо. Это ясно, если $\beta=+\infty$, или $\beta<+\infty$, $|\varphi(x)| \underset{x\to\beta-0}{\longrightarrow} +\infty$, или $\varliminf\limits_{x\to\beta-0} \varphi(x) < \varlimsup\limits_{x\to\beta-0} \varphi(x)$, так как в каждом из этих случаев функцию $\varphi(x)$ нельзя доопределить при $x=\beta$ с сохранением непрерывности. Значит, остается случай, когда $\beta<+\infty$ и $\varphi(x)$ при $x\to\beta-0$ имеет предел y_ω. Но тогда $x_n\to\beta$, $\varphi(x_n)\to y_\omega$ $(n\to\infty)$, и потому если точка (β, y_ω) принадлежит G, то $r_n\to r_\omega$, $M_n\to M_\omega$, $h_n\to h_\omega$, где r_ω, M_ω, h_ω определены для этой точки так же, как r_0, M_0, h_0 для точки (x_0, y_0); но тогда все $h_n>\text{const}>0$, т. е. $x_n\to+\infty$, и мы приходим к противоречию. Значит, точка (β, y_ω) принадлежит границе G, а потому решение $\varphi(x)$ непродолжаемо вправо.

Аналогично рассматривается продолжение решения в сторону убывания x. Теорема 3 доказана.

ЗАДАЧИ

1. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$. Докажите, что тогда утверждение теоремы 3 остается справедливым, утверждение же теоремы 2 приобретает следующий вид: если решение $\varphi(x)$ уравнения (3.2) непродолжаемо вправо, то либо область определения функции $\varphi(x)$ содержит некоторый полуоткрытый интервал $x_0 \leqslant x < \beta$, причем $\beta = +\infty$ или $|\varphi(x)| \xrightarrow[x\to\beta-0]{} +\infty$, либо же эта область содержит отрезок $x_0 \leqslant x \leqslant \beta$, причем точка $(\beta, \varphi(\beta))$ принадлежит границе области G. (Аналогично формулируются необходимые условия непродолжаемости влево.)

2. Докажите, что если область G ограничена, а функция f на G ограничена сверху или снизу, то для непродолжаемого решения $\varphi(x)$ $(\alpha < x < \beta)$ существует $\lim\limits_{x\to\beta-0} \varphi(x)$.

3. Пусть область G представляет собой полосу $a < x < a'$, причем f непрерывна и ограничена на G. Может быть, что через некоторую точку (x_0, y_0) этой области проходит более чем одна интегральная линия уравнения (3.2). Докажите, что тогда найдутся две интегральные линии $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ этого уравнения (наибольшее и наименьшее решения (Монтель)), причем $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0$, $\varphi_2(x) \leqslant \varphi_1(x)$, $a < x < a'$, и вся часть полосы G между линиями $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ целиком заполнена интегральными линиями, проходящими через (x_0, y_0), а вне этой части нет ни одной интегральной линии, проходящей через эту точку.

4. Докажите теорему о существовании решения уравнения (3.2) следующим образом (метод Перрона). Назовем *верхней* функцией на интервале (x_0, b) (см. рис. 8) всякую непрерывно дифференцируемую функцию $y = \varphi(x)$, график которой проходит целиком по G и для которой

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x) > f(x, \varphi(x)), \quad x_0 \leqslant x \leqslant b.$$

Тогда: а) верхние функции существуют; б) нижняя грань всех верхних функций является решением уравнения (3.2), график которого проходит через точку (x_0, y_0) (именно наибольшим решением, см. задачу 3). Аналогично можно было бы определить *нижние* функции и взять их верхнюю грань. То же можно сделать и для $x < x_0$.

5. Пусть на области G заданы две ограниченные функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$, причем всюду

$$F(x, y) \geqslant f(x, y).$$

Предполагается, что функция $F(x, y)$ полунепрерывна сверху, а функция $f(x, y)$ полунепрерывна снизу. Это значит, что

$$F(x, y) = \overline{\lim_{\substack{t\to x,\\ s\to y}}} F(t, s),$$

соответственно

$$f(x, y) = \varliminf_{\substack{t \to x, \\ s \to y}} f(t, s).$$

Тогда через любую точку (x_0, y_0) рассматриваемой области проходит по крайней мере одна линия $y=\varphi(x)$, для любой точки которой при $\Delta x \to 0$ все предельные значения отношения

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

заключены между $F(x, y)$ и $f(x, y)$. Вообще говоря, через каждую точку (x_0, y_0) проходит много таких кривых; среди них существует наибольшая и наименьшая в смысле, указанном в задаче 3.

§ 12. Теорема Осгуда о единственности

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ для любой пары точек (x, y_1) и (x, y_2) области G удовлетворяет условию*

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant \Phi(|y_2-y_1|), \tag{3.5}$$

где $\Phi(u)>0$ при $0<u\leqslant c$, непрерывна и такова, что $\int\limits_{\varepsilon}^{c} \frac{du}{\Phi(u)} \to \infty$, когда $\varepsilon \to 0$, то через каждую точку (x_0, y_0) области G проходит не больше одной интегральной линии уравнения (3.2).

Такими функциями $\Phi(u)$ могут быть, в частности, следующие функции:

$$Ku,\quad Ku|\ln u|,\quad Ku|\ln u|\cdot\ln|\ln u|,$$
$$Ku|\ln u|\cdot\ln|\ln u|\cdot\ln\ln|\ln u|$$

и т. д. (K означает некоторую положительную постоянную).

Особенно часто применяют теорему о единственности, полагая $\Phi(u)\equiv Ku$. В этом случае условие (3.5) перепишется так:

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant K|y_2-y_1|. \tag{3.6}$$

Условие (3.6) называется *условием Липшица по y*.

решения будет асимптотически приближаться к отрицательной части оси Ox и нигде ее не пересечет (рис. 11). В точке (x_1, z_1) кривые $z(x)$ и $y(x)$ пересекутся. Из неравенства

$$z'(x_1) < 2\Phi(z_1) = 2\Phi(y(x_1)) = y'(x_1)$$

непосредственно следует существование такого интервала $(x_1 - \varepsilon, x_1)$, $\varepsilon > 0$, на котором

$$z(x) > y(x).$$

Но это же неравенство имеет место при всяком ε, если $0 < \varepsilon \leqslant x_1$, так как в противном случае, взяв для ε его наибольшее возможное значение, мы немедленно пришли бы к противоречию. Действительно, тогда при $x = x_1 - \varepsilon = x_2$ мы имели бы

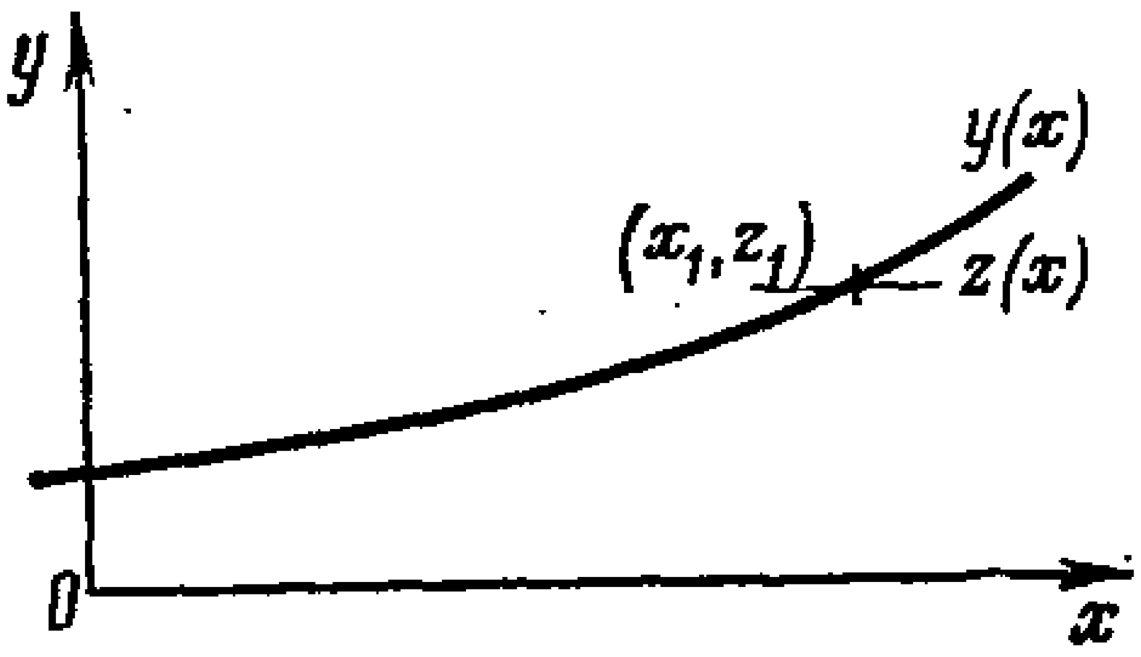

Рис. 11

$$z'(x_2) \geqslant y'(x_2) = 2\Phi(y(x_2)) = 2\Phi(z(x_2)),$$

так как правее точки x_2

$$z(x) > y(x).$$

С другой стороны, проводя рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к (3.7), получим

$$z'(x_2) < 2\Phi(z(x_2)),$$

что противоречит предыдущему.

Значит, при всяком x, если только $0 \leqslant x \leqslant x_1$,

$$z(x) \geqslant y(x) > 0,$$

в частности $z(0) > 0$, а это противоречит нашему первоначальному предположению.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(0) = 0$, то функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию (3.5), обязана быть постоянной по y, если область G выпукла по y. Так будет, в частности, если $\Phi(u) = u^p$, $p > 1$.

2. Докажите, что если в условии теоремы в качестве $\Phi(u)$ взять непрерывную функцию ($\Phi(u) > 0$ при $0 < u \leqslant c$), график ко-

торой обращен выпуклостью вверх, причем интеграл $\int\limits_0^a \frac{du}{\Phi(u)}$ сходится, то утверждение теоремы несправедливо, т. е. существует функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию (3.5), и притом такая, что через некоторую точку области G проходит более одной интегральной линии уравнения (3.2).

3. Докажите, что если $\Phi(0)=0$ и $\Phi'(0)$ существует, то $\int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{\Phi(u)} = \infty$, т. е. функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы Осгуда.

4. Если в теореме Осгуда за $\Phi(u)$ брать функции Ku, $Ku|\ln u|$ и т. д., то мы будем получать все более слабые ограничения на функции $f(x, y)$, т. е. все более сильные теоремы. Докажите, что нельзя получить «самой сильной» теоремы этого рода. Иначе говоря, докажите, что если $\Phi(u)$ удовлетворяет упомянутым в формулировке теоремы условиям, то всегда существует функция $\Phi_1(u)$, удовлетворяющая тем же условиям, для которой

$$\frac{\Phi_1(u)}{\Phi(u)} \to \infty$$

при $u \to 0$.

5. Как известно из анализа, если функция $f(x, y)$, заданная в некоторой области G, непрерывна по каждому из переменных x и y в отдельности, то она может не быть непрерывной по совокупности (x, y). Докажите, что если f непрерывна по x и удовлетворяет условию (3.5), где $\Phi(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, то f непрерывна в области G по совокупности (x, y). Справедливо ли это утверждение для функции, заданной на квадрате, круге, треугольнике вместе с их границами?

6. Докажите, что если $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в области G, то имеет место единственность решения, график которого проходит через заданную точку области G. Достаточно ли требовать только существования этой производной?

7. Пусть при $x_0 \leqslant x < b$ заданы непрерывно дифференцируемые функции $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$, причем

$$y(x_0) = z(x_0) = u(x_0) = y_0,$$

где точка (x_0, y_0) лежит в некоторой области G, на которой определена непрерывная функция $f(x, y)$. Пусть всюду на этом интервале

$$y'(x) = f(x, y);\ z'(x) > f(x, z),\ u'(x) \geqslant f(x, u).$$

Докажите, что тогда при $x > x_0$ всюду $z(x) > y(x)$. Если дополнительно потребовать, чтобы через каждую точку $(x, y(x))$ (при $x_0 \leqslant x < b$) проходила только одна интегральная линия $y = y(x)$

уравнения (3.2), то $u(x) \geqslant y(x)$ при всех $x \in [x_0, b)$. Покажите, что это дополнительное требование является существенным.

Распространите утверждение на случай, когда от функций $z(x)$ и $u(x)$ требуется только непрерывность и существование правой (или левой) производной.

8. Пусть функция $f(x, y)$ в полосе $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$ непрерывна и удовлетворяет оценке $|f(x, y)| \leqslant \Psi(|y|)$, где функция $\Psi(z) > 0$ непрерывна и $\int\limits_N^\infty \frac{dz}{\Psi(z)} = \infty$ для любого $N > 0$. Докажите, что тогда при любых начальных условиях решение можно продолжить на весь отрезок $a \leqslant x \leqslant b$. (Это верно и для $\Psi(z) \geqslant 0$.) Приведите пример непрерывной функции $\Psi(z) > 0$ $(0 \leqslant z < \infty)$, для которой $\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\Psi(z)} = \infty$, но $\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\Psi(z)+\varepsilon} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Что отсюда следует для продолжения решений? Возможен ли такой пример для монотонной функции $\Psi(z)$?

9. Пусть $y = Y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ есть наибольшее решение уравнения (3.2) с непрерывной правой частью при начальных условиях: $x = x_0$, $Y(x_0) = y_0$, причем кривая $y = Y(x)$ целиком лежит внутри G. Пусть, далее, $Y_n(x)$ есть наибольшее решение уравнения (3.2) при начальных условиях $x = x_n$, $Y_n(x_n) = y_n$, причем $y_n \geqslant Y(x_n)$ и $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Покажите, что тогда $Y_n(x)$ при достаточно большом n будет существовать на всем отрезке $[a, b]$ и при $n \to \infty$ $Y_n(x)$ будет равномерно на этом отрезке сходиться к $Y(x)$. Ср. задачу 3 § 11.

10. Пусть $y_n(x)$ есть решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) + \varphi_n(x, y),$$

где $\varphi_n(x, y) > 0$ и верхняя грань значений $\varphi_n(x, y)$ на G стремится к 0 при $n \to \infty$, с начальными условиями $y(x_0) = y_0$. Точка $(x_0, y_0) \in G$, $f(x, y)$ и $\varphi_n(x, y)$ считаются непрерывными. Пусть $y = Y(x)$ определено, как в предыдущей задаче. Докажите, что при этих условиях $y_n(x)$ при $n \to \infty$ будет равномерно сходиться на отрезке $[x_0, b]$ к $Y(x)$.

11. Докажите теорему о единственности решения в более общих предположениях, если (3.5) заменено на неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \psi(x) \Phi(|y_2 - y_1|),$$

которое должно выполняться всюду в G, кроме конечного числа значений x (впрочем, в этом пункте возможно существенное обобщение). При этом функция Φ та же, что в теореме Осгуда, а функция $\psi(x) \geqslant 0$ непрерывна всюду, кроме, быть может, указанных значений x, причем $\int\limits_a^b \psi(x) dx < \infty$ на любом конечном интервале (a, b). (Существенно ли последнее условие?)

§ 13. Дополнение о ломаных Эйлера

Теорема. *Если существует только одно проходящее через точку* (x_0, y_0) *решение* $\varphi(x)$ *уравнения* (3.2) *с непрерывной правой частью, то всякая последовательность выходящих из точки* (x_0, y_0) *ломаных Эйлера* (точнее, последовательность функций, графиками которых служат эти ломаные), *у которых длина наибольшего из звеньев стремится к нулю, равномерно приближается на замкнутом интервале* $[a, b]$, *о котором шла речь в теореме* 1 § 11, *к этому единственному решению.*

Доказательство. Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что при любом положительном ε существует только конечное число ломаных Эйлера из рассматриваемой последовательности, не расположенных целиком между линиями $y=\varphi(x)+\varepsilon$ и $y=\varphi(x)-\varepsilon$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Последнее утверждение легко доказать от противного. В самом деле, допустив противное, мы получим бесконечную последовательность проходящих через точку (x_0, y_0) ломаных Эйлера, у которых длина наибольшего из звеньев стремится к нулю с возрастанием номера и ни одна из которых не лежит целиком между линиями $y=\varphi(x)\pm\varepsilon$. Тогда, применяя к этой последовательности рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1 § 11, мы найдем последовательность ломаных Эйлера, которая равномерно сходится к интегральной линии, проходящей через точку (x_0, y_0) и отличной от линии $y=\varphi(x)$. А этого быть не может в силу предполагаемой единственности интегральной кривой уравнения (3.2), проходящей через точку (x_0, y_0).

Отметим в заключение, что многие методы численного интегрирования дифференциальных уравнений представляют собой то или иное непосредственное уточнение (улучшающее скорость аппроксимации) метода ломаных Эйлера.

ЗАДАЧИ

1. Приведите пример уравнения (3.2) с непрерывной правой частью и для него последовательность проходящих через точку (x_0, y_0) ломаных Эйлера со стремящейся к нулю длиной наибольшего

из звеньев, причем последовательность функций, графически представленных этими ломаными, не сходится ни при одном значении x, кроме $x=x_0$.

2. Приведите пример уравнения (3.2) с непрерывной правой частью, для которого предел любой последовательности ломаных Эйлера, начинающихся в произвольной точке, при стремлении к нулю длины наибольшего из звеньев существует, и в то же время через некоторые точки области проходит более одной интегральной линии.

Возможность этого связана с тем, что, вообще говоря, не каждое решение уравнения (3.2), проходящее через точку (x_0, y_0), может быть получено как предел последовательности ломаных Эйлера, начинающихся в этой точке.

3. Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица как по y, так и по x. Докажите, что тогда в обозначениях, примененных при доказательстве теоремы 1 § 11, $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leqslant Cl_k$, где l_k — наибольшая из длин звеньев ломаной L_k, а постоянная C зависит только от постоянной в условии Липшица и от $b-a$. При доказательстве можно воспользоваться задачей 7 § 12.

4. Если ломаная Эйлера строится с постоянным шагом h_k по x, то координаты вершин ломаной определяются формулами $x_{i+1}=x_i+h_k$, $y_{i+1}=y_i+f(x_i, y_i)h_k$ $(i=0, 1, \ldots)$. В одном из распространенных уточнений метода Эйлера ординаты определяются формулами

$$y_{i+1}=y_i+f\left(x_i+\frac{1}{2}h_k,\quad y_i+\frac{1}{2}f(x_i, y_i)h_k\right)h_k.$$

Укажите геометрический смысл этого уточнения и докажите, что если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то

$$\max_{a<x_i\leqslant b} |y_i-\varphi(x_i)| \leqslant Ch_k^2\ (h_k\to 0),$$

где $\varphi(x)$ — решение уравнения (3.2), такое, что $\varphi(x_0)=y_0$.

§ 14. Метод последовательных приближений

Теорема. *Пусть в области G на плоскости (x, y) функция $f(x, y)$ непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y*

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant K|y_2-y_1|\ ^{1)}$$

---

[1] Так как функция f непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y, то она непрерывна по совокупности x и y в области G. Действительно,
$f(x_2, y_2)-f(x_1, y_1)=[f(x_2, y_2)-f(x_2, y_1)]+[f(x_2, y_1)-f(x_1, y_1)]$.

в любой замкнутой ограниченной области $\bar{G}'$, содержащейся в G (постоянная K может зависеть от выбора $\bar{G}'$). Тогда для любой точки (x_0, y_0) из G можно указать такой заключающий внутри себя x_0 замкнутый интервал $[a, b]$ на оси Ox, на котором существует единственное решение дифференциального уравнения (3.2), обращающееся в y_0 при $x=x_0$.

Заметим прежде всего, что если заранее предположить существование такого решения, то, интегрируя тождество

$$y'(\xi) = f(\xi, y(\xi))$$

в пределах от x_0 до x, получим

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi. \qquad (3.8)$$

При этом под знаком интеграла стоит непрерывная функция от ξ, так как $y(\xi)$ была дифференцируема, а потому и непрерывна.

Соотношения вида (3.8), где неизвестная функция $y(\xi)$ входит под знак интеграла, называются *интегральными уравнениями.*

Таким образом, всякое решение уравнения (3.2), обращающееся в y_0 при $x=x_0$, удовлетворяет интегральному уравнению (3.8). Обратно, всякое непрерывное решение $y(x)$ интегрального уравнения (3.8) удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.2) и начальному условию $y(x_0)=y_0$. Последнее видно непосредственно. То обстоятельство, что всякая непрерывная[1] функция, удовлетворяющая уравнению (3.8), обязательно удовлетворяет и уравнению (3.2), легко доказывается дифференцированием обеих частей уравнения (3.8) по x.

По условию Липшица первая из разностей, стоящих в правой части этого равенства, по абсолютной величине не больше $K|y_2-y_1|$. Поэтому она как угодно мала, если точка (x_2, y_2) достаточно близка к (x_1, y_1). А вторая из этих разностей при этом как угодно мала в силу предполагаемой непрерывности функции $f(x, y)$ по x в точке (x_1, y_1).

[1] Мы говорим здесь о *непрерывных* решениях интегрального уравнения (3.8) только затем, чтобы избежать трудностей, возникающих при интегрировании разрывных функций.

Что дифференцирование здесь законно, видно из следующих соображений. Допустим, что в обе части уравнения (3.8) вместо y поставлено некоторое непрерывное решение этого уравнения. Тогда правая часть полученного тождества имеет производную по x. Следовательно, и левая его часть, т. е. функция $y(x)$, также имеет производную по x.

Поэтому, вместо того чтобы доказывать, что на некотором отрезке $[a, b]$ $(a<x_0<b)$ существует одно и только одно обращающееся в y_0 при $x=x_0$ решение дифференциального уравнения (3.2), мы будем доказывать, что на этом отрезке существует одно и только одно непрерывное решение интегрального уравнения (3.8).

Возьмем какую-либо замкнутую ограниченную область $\bar{G}'$, содержащуюся в G и содержащую (x_0, y_0) как внутреннюю точку, и пусть M есть верхняя грань значений $|f(x, y)|$ в $\bar{G}'$. Проведем через точку (x_0, y_0) две прямые DC и BE соответственно с угловыми коэффициентами $+M$ и $-M$. Проведем, далее, две прямые, параллельные оси Oy, так, чтобы они образовали вместе с прямыми DC и BE два равнобедренных треугольника, целиком лежащих в G' (рис. 8). Пусть уравнением прямой ED будет $x=a$, а уравнением прямой CB будет $x=b$. Несколько позже мы предположим, что числа a и b достаточно близки к x_0.

Возьмем теперь совершенно произвольно на отрезке $[a, b]$ непрерывную функцию $\varphi_0(x)$, лишь бы только ее график не выходил из области $\bar{G}'$. Подставим $\varphi_0(x)$ в правую часть уравнения (3.8). После этого правая часть станет некоторой вполне определенной функцией от x. Обозначим ее $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))\, d\xi.$$

Ясно, что *функция* $\varphi_1(x)$ *определена при* $a \leqslant x \leqslant b$, *непрерывна и обращается в* y_0 *при* $x=x_0$. Легко показать, что *ее график не выходит из треугольников* EAD *и* ABC *при* $a \leqslant x \leqslant b$. Для этого достаточно заметить, что

$$|f(\xi, \varphi_0(\xi))| \leqslant M,$$

и потому

$$|\varphi_1(x)-y_0| \leqslant M|x-x_0|.$$

Положим далее

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))\,d\xi.$$

В силу указанных выше свойств функции $\varphi_1(x)$ интеграл в правой части равенства существует. Функция $\varphi_2(x)$ также определена на $[a, b]$ и обладает всеми теми свойствами, которые мы отметили у $\varphi_1(x)$. Поэтому можно построить функции

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_3(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi; \varphi_2(\xi))\,d\xi,\\
\varphi_4(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_3(\xi))\,d\xi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varphi_n(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\,d\xi.
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Этот процесс построения функций $\varphi_n(x)$, которые мы будем называть *последовательными приближениями решения*[1], можно продолжать без конца. Таким образом, мы получим бесконечную последовательность функций

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots \tag{3.10}$$

Установим теперь, что на отрезке $[a, b]$ эта последовательность сходится равномерно к непрерывному решению уравнения (3.8). Действительно, $\varphi_n(x)$ можно представить так:

$$\varphi_n(x)=\varphi_1(x)+[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]+[\varphi_3(x)-\varphi_2(x)]+\dots$$
$$\dots+[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)].$$

[1] Метод последовательных приближений был предложен Пикаром. Этот метод оказался применимым к решению самых разнообразных математических задач.

Поэтому для доказательства равномерной сходимости последовательности (3.9) достаточно показать равномерную сходимость бесконечного ряда

$$\varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)+(\varphi_3-\varphi_2)+\ldots$$
$$+(\varphi_n-\varphi_{n-1})+\ldots \qquad (3.11)$$

Для этого оценим разность $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$. Используя условие Липшица, можно написать

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|(b-a). \qquad (3.12)$$

Поэтому, если постоянное c таково, что $|\varphi_1(x)|\leqslant c$ и $|\varphi_2(x)|\leqslant c$, и если положить $K(b-a)=m$, то по абсолютной величине члены ряда (3.11) не будут превосходить соответствующих членов ряда

$$c+2c+2cm+2cm^2+2cm^3+\ldots,$$

который сходится, если $m<1$. Будем считать интервал (a, b) настолько малым, что $K(b-a)=m<1$. Тогда ряд (3.11) сходится равномерно, и его сумма $\varphi(x)$ есть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Ее график не выходит из треугольников EAD и ABC. Следовательно, интеграл $\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi$ имеет смысл. Так как

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\,d\xi\right|,$$

то в равенствах (3.9) можно переходить к пределу при $n\to\infty$ не только слева, но и справа, а потому функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (3.8).

Чтобы доказать, что интегральное уравнение (3.8) имеет *единственное* непрерывное на замкнутом интервале $[a, b]$ решение, предположим, что кроме построенного выше решения $\varphi(x)$ имеется отличное от него решение $\psi(x)$. Легко доказать, что его график также не выходит из треугольников EAD и ABC при $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\, d\xi,$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))\, d\xi.$$

Отсюда

$$|\psi(x) - \varphi(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \psi(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))]\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant K(b-a) \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Поэтому

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |\psi(x) - \varphi(x)| \leqslant K(b-a) \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Так как $K(b-a) < 1$, то это может быть лишь при условии, что $\max|\psi(x) - \varphi(x)| = 0$, т. е. что $\psi(x)$ совпадает с $\varphi(x)$, вопреки нашему предположению.

Замечание 1. Как бы мы ни выбрали исходную при построении последовательности (3.10) функцию $\varphi_0(x)$, лишь бы только она была непрерывна и ее график проходил по $\bar{G}'$, последовательность (3.10) всегда будет сходиться на отрезке $[a, b]$ к одной и той же функции. Действительно, по доказанному прежде эта последовательность будет при любой такой функции $\varphi_0(x)$ сходиться к непрерывному и ограниченному решению уравнения (3.8), а такое решение, как мы только что доказали, единственно.

Замечание 2. Замечание 1 к теореме 1 § 11 остается в силе и теперь. Построенное решение можно продолжать, как это описано в § 11.

Замечание 3. Производя несколько точнее оценку $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$, можно показать, что ряд (3.11) сходится не только на отрезке $[a, b]$. Именно, допустим, что последовательные приближения $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... существуют на некотором отрезке $[c, d]$ (так будет, в частности, если область G содержит полосу $c \leqslant x \leqslant d$, $-\infty < y < \infty$). Кроме того, допустим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет в пересечении области G с полосой $c \leqslant x \leqslant d$ $(-\infty < y < \infty)$ условию Липшица по y с единой константой K. *Тогда и последовательные приближения равномерно сходятся на отрезке* $[c, d]$ *к решению задачи.* При этом условие ограниченности функции f, а также указанное выше ограничение на длину интервала, на котором строится решение, оказываются несущественными.

В самом деле, пусть на отрезке $[c, d]$ максимум функции $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|$ равен N. Тогда аналогично неравенствам (3.12) получаем

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))]\, d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)|\, d\xi\right| \leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} N dx\right| = \frac{|x-x_0|}{1} NK;$$

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)|\, d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} NK^2.$$

Вообще, для любого n

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{|x-x_0|^n}{n!} NK^n \quad (c \leqslant x \leqslant d). \tag{3.13}$$

Ряд же

$$\frac{|x-x_0|}{1} NK + \frac{|x-x_0|^2}{2} NK^2 + \ldots + \frac{|x-x_0|^n}{n!} NK^n + \ldots$$

сходится при всех значениях $|x - x_0|$. Поэтому и ряд (3.11) равномерно сходится.

Пользуясь соотношением

$$\varphi(x) = \varphi_m(x) + [\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)] +$$
$$+ [\varphi_{m+2}(x) - \varphi_{m+1}(x)] + \ldots$$

и применяя оценки (3.13), получим

$$|\varphi(x)-\varphi_m(x)| \leqslant NK^m|x-x_0|^m\left[\frac{1}{m!}+K\frac{|x-x_0|}{(m+1)!}+\right.$$
$$\left.+K^2\frac{|x-x_0|^2}{(m+2)!}+\ldots\right].$$

Это дает возможность оценить отклонение m-го приближения от точного, еще неизвестного решения.

Замечание 4. Иногда дифференциальное уравнение оказывается заданным в области с полностью или частично присоединенной границей. Тогда, если точка (x_0, y_0) внутренняя, то рассмотрение не меняется. Если же точка (x_0, y_0) граничная, то существование решения гарантируется далеко не всегда (хотя, например, если область имеет вид полосы $x_0 \leqslant x \leqslant b$, то решение обязательно существует). Однако доказательство того, что не может существовать двух различных решений при одинаковых начальных данных, полностью остается в силе.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $f(x, y)$ k раз непрерывно дифференцируема в G. Докажите, что тогда $\varphi_{k+1}(x)$, $\varphi_{k+2}(x), \ldots$ обладают $(k+1)$-й непрерывной производной и последовательность производных от $\varphi_n(x)$ до $(k+1)$-го порядка включительно равномерно сходится к соответствующей производной от $\varphi(x)$ на всяком конечном интервале, где существуют все $\varphi_n(x)$ (и все графики $y=\varphi_n(x)$ проходят по $\bar{G}'$).

2. Пусть

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| \leqslant c|x-x_0|^d$$
$$(a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant x_0 \leqslant b;\ c>0;\ d \geqslant 0).$$

Покажите, что при этом условии для решения $y=\varphi(x)$ выполнено неравенство

$$|\varphi(x)-\varphi_1(x)| \leqslant c|x-x_0|^{d+1}\left[\frac{K}{d+1}+\frac{K^2}{(d+1)(d+2)}+\ldots\right],$$

если только график любой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей этому неравенству, проходит по $\bar{G}'$. Эта оценка дает возможность переходить от $(n+1)$-го приближения к точному решению, если это $(n+1)$-е приближение мало отличается от n-го.

3. Докажите, что для уравнения $y'=x^2+y^2$ при начальном условии $y(0)=0$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\left|y-\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7\right)\right| \leqslant 0{,}0015\,x^8.$$

Указание. Примените результат предыдущей задачи, рассматривая заданное дифференциальное уравнение в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|y| \leqslant N$ при соответственно подобранном $N > 0$ и взяв $\varphi_0(x) = \frac{1}{3}x^3$.

4. Переход к уравнению (3.8) дает одну из возможностей ввести понятие обобщенного решения уравнения (3.2) в случае, когда функция $f(x, y)$ разрывна. Допустим, что функция f в $\overline{G}'$ непрерывна по совокупности x, y всюду, за исключением, быть может, конечного числа особых значений x; кроме того, она ограничена и удовлетворяет для неособых значений x неравенству

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \psi(x)\,|y_2 - y_1|,$$

где функция $\psi(x)$ для этих x непрерывна и $\int\limits_a^b \psi(x)dx < \infty$ ((a, b) — любой конечный интервал). Тогда обобщенным решением уравнения (3.2) при начальном условии $y(x_0) = y_0$, по определению, называется непрерывное решение уравнения (3.8). Докажите существование и единственность этого решения.

Замечание. Множество особых значений x может быть и бесконечным, но тогда требуются некоторые дополнительные предосторожности (это «обобщенное решение по Каратеодори»; см., например, кн.: Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1954, т. 2).

5. Как ведут себя последовательные приближения для уравнения $y' = y^2$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$, если принять $\varphi_0(x) \equiv 1$? То же, если уравнение заменить на $y' = y$? $y' = -y^2$?

§ 15. Принцип сжатых отображений

Изложенный в предыдущем параграфе метод последовательных приближений находит применение не только при доказательстве существования решений дифференциальных уравнений, но и во многих других вопросах анализа. Поэтому интересно выяснить возможно более широкие условия его применимости. Тогда не придется в каждом отдельном случае заново приводить весь этот метод, а достаточно будет только убедиться, что выполнены условия его применимости.

Принцип сжатых отображений. *Пусть имеется непустое семейство* $\{\varphi\}$ *функций, определенных на одном и том же множестве* (безразлично, каком) $\mathfrak{M}$ *и обладающих следующими свойствами:*

1. *Каждая функция* φ *ограничена* (быть может, своей константой)

$$|\varphi| \leqslant M_\varphi.$$

2. *Предел всякой равномерно сходящейся последовательности функций семейства также есть функция этого семейства.*

3. *На данном семействе* $\{\varphi\}$ *определен оператор* $A(\varphi)$, *который каждую функцию этого семейства переводит в функцию того же семейства.*

4. *Для любой пары функций* φ_1 *и* φ_2 *семейства*

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leqslant m \sup |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

где $0 \leqslant m < 1$, $\sup |\varphi_2 - \varphi_1|$ — верхняя грань значений $|\varphi_2 - \varphi_1|$ на множестве $\mathfrak{M}$.

Тогда уравнение

$$\varphi = A(\varphi) \tag{3.14}$$

имеет одно и только одно решение среди функций рассматриваемого семейства.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированной теоремы, укажем несколько примеров ее применения.

Пример 1. Покажем прежде всего, как применить **принцип сжатых отображений** к доказательству существования и единственности непрерывного решения интегрального уравнения (3.8) или, что все равно, к доказательству существования и единственности принимающего при $x = x_0$ значение y_0 решения дифференциального уравнения (3.2).

За множество $\mathfrak{M}$ примем отрезок $a \leqslant x \leqslant b$, о котором шла речь в предыдущем параграфе. За семейство функций $\{\varphi\}$ примем семейство непрерывных функций, графики которых проходят в замкнутой области $\overline{G}'$ между прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 8). Такие функции удовлетворяют, очевидно, условиям 1 и 2 принципа сжатых отображений [1]. Положим далее

$$A(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\, d\xi.$$

---

[1] Мы рассматриваем здесь замкнутую область $\overline{G}'$ только затем, чтобы удовлетворить условию 2.

В предыдущем параграфе мы видели, что этот оператор удовлетворяет условиям 3 и 4, если отрезок $[a, b]$ достаточно мал. Значит, на основании принципа сжатых отображений уравнение (3.8) имеет одно и только одно решение в классе функций $\{\varphi\}$, а следовательно, вообще только одно непрерывное решение при $a \leqslant x \leqslant b$.

Пример 2. Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

где $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, функция $K(x, \xi)$ (ядро) непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant \xi \leqslant b$, при достаточно малом λ (λ — некоторое постоянное) имеет одно и только одно непрерывное на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ решение $\varphi(x)$.

Чтобы применить здесь принцип сжатых отображений, за множество $\mathfrak{M}$ примем отрезок $[a, b]$, за семейство $\{\varphi\}$ — семейство всех непрерывных на этом интервале функций. Тогда, очевидно, условия 1 и 2 принципа сжатых отображений выполнены. Оператор A определим так:

$$A(\varphi) \equiv f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Для него, очевидно, выполняется условие 3. Так как

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| = \left| \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, [\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)]\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|\, M \max_{a \leqslant \xi \leqslant b} |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)|\, (b - a),$$

то условие 4 выполняется, если $(b - a)\, |\lambda|\, M < 1$. Здесь M есть верхняя грань значений $|K(x, \xi)|$.

Пример 3. Уравнение

$$x = f(x)$$

имеет единственное решение, если функция $f(x)$ определена при всех действительных x и удовлетворяет условию Липшица с константой $K < 1$.

Чтобы применить здесь принцип сжатых отображений, будем считать множество $\mathfrak{M}$ состоящим из одной точки. Тогда каждая функция на $\mathfrak{M}$ принимает только одно значение. Рассмотрим семейство $\{\varphi\}$ всех таких функций. Тогда, очевидно, условия 1 и 2 принципа сжатых отображений будут выполнены. За оператор A примем функцию f. По условию она определена при всех действительных значениях аргумента x; каждое действительное число она переводит в некоторое действительное же число; следовательно, условие 3 выполнено. Условие 4 выполнено потому, что

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant K|x_2-x_1|.$$

Пример 4. (Теорема о неявной функции.) *Пусть функция $f(x, y)$ определена при $a \leqslant x \leqslant b$ и любых действительных значениях y, непрерывна по x и всюду имеет производную по y, которая ограничена и всегда превосходит некоторое постоянное $m>0$. Тогда уравнение*

$$f(x, y)=0 \tag{3.15}$$

имеет на замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ одно и только одно непрерывное решение $y(x)$.

Чтобы применить принцип сжатых отображений, за множество $\mathfrak{M}$ примем отрезок $[a, b]$, за семейство $\{\varphi\}$ — семейство всех непрерывных на этом отрезке функций. Тогда, очевидно, условия 1 и 2 принципа сжатых отображений будут выполнены. Положим далее

$$A(\varphi) \equiv \varphi-\frac{1}{M} f(x, \varphi),$$

где M есть верхняя грань значений $f'_y(x, y)$. Такой оператор, очевидно, удовлетворяет условию 3. С другой стороны, так как

$$|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)|=\left|\varphi_2-\frac{1}{M} f(x, \varphi_2)-\left(\varphi_1-\frac{1}{M} f(x, \varphi_1)\right)\right|=$$

$$=\left|(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{f'_\varphi(x, \varphi_1+\theta(\varphi_2-\varphi_1))}{M}(\varphi_2-\varphi_1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant|\varphi_2-\varphi_1|\left(1-\frac{m}{M}\right),$$

дельная функция принадлежит семейству $\{\varphi\}$, и потому оператор $A(\varphi)$ имеет смысл. Заметим далее, что

$$|A(\varphi)-A(\varphi_{n-1})| \leqslant m \sup |\varphi-\varphi_{n-1}|.$$

А так как $|\varphi-\varphi_{n-1}| \to 0$ равномерно при $n \to \infty$, то $A(\varphi_{n-1})$ при этом равномерно сходится к $A(\varphi)$. Поэтому в равенстве $\varphi_n = A(\varphi_{n-1})$ можно перейти к пределу при $n \to \infty$, и мы получим

$$\varphi = A(\varphi).$$

Если бы уравнение (3.14) имело в семействе $\{\varphi\}$ два решения φ_1 и φ_2, то было бы

$$|\varphi_2-\varphi_1| = |A(\varphi_2)-A(\varphi_1)| \leqslant m \sup |\varphi_2-\varphi_1|$$

и, следовательно,

$$\sup |\varphi_2-\varphi_1| \leqslant m \sup |\varphi_2-\varphi_1|,$$

что возможно только при $\varphi_2 \equiv \varphi_1$, так как $m<1$ [1].

---

[1] Для читателей, знакомых с понятием метрического пространства, сделаем следующее добавление. Пусть задано отображение A метрического пространства U с метрикой ρ в себя; это отображение называется *сжатым* (точнее, *сжимающим*), если существует постоянная m, $0 \leqslant m < 1$, для которой $\rho(Ax, Ay) \leqslant m\rho(x, y)$ при любых x и y из U. Тогда принцип сжатых отображений формулируют так: *сжатое отображение полного метрического пространства в себя имеет одну и только одну неподвижную точку*, т. е. в U существует один и только один элемент x, для которого $Ax = x$. (Напомним, что метрическое пространство называется *полным*, если в нем любая последовательность $x_1, x_2, \ldots$, для которой $\rho(x_n, x_k) \underset{n, k \to \infty}{\to} 0$, стремится к пределу.) Доказательство принципа в такой формулировке повторяет его доказательство, проведенное выше: начиная от любого элемента x_0 из U, строят последовательные приближения по формуле $x_{n+1} = Ax_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; тогда $\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant m^n \rho(x_1, x_0)$ $(n=1, 2, \ldots)$, следовательно, $\rho(x_n, x_k) \to 0$ при $n, k \to \infty$, поэтому полученная последовательность сходится к элементу, который и является единственной неподвижной точкой отображения. Справедливость принципа, приведенного в начале параграфа, следует из этого более общего предложения, если под пространством U понимать семейство $\{\varphi\}$ с метрикой $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\limits_{\mathfrak{M}} |\varphi_1-\varphi_2|$; условие 2 равносильно требованию полноты полученного пространства.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что условие 1 можно заменить на следующее более слабое: разность любых двух функций из $\mathfrak{M}$ ограничена.

2. Покажите на примерах существенность каждого из четырех условий теоремы этого параграфа для ее справедливости. Проверьте также, что нельзя полагать $m=1$.

§ 16. Геометрическая интерпретация принципа сжатых отображений

Будем рассматривать функции семейства $\{\varphi\}$ как точки некоторого множества Φ. За «расстояние» между «точками» φ_1 и φ_2 будем принимать $\sup|\varphi_2-\varphi_1|$. Тогда условие 2 можно интерпретировать так, что всякая «предельная точка» для бесконечной последовательности «точек» множества Φ принадлежит Φ, т. е. что множество Φ замкнуто. Условие 3 состоит в том, что оператор A переводит «точку» φ, принадлежащую Φ, в некоторую «точку», также принадлежащую Φ. Наконец, условие 4 состоит в том, что если оператор A переводит «точку» φ_1 в «точку» $\overset{*}{\varphi}_1$ и «точку» φ_2 в «точку» $\overset{*}{\varphi}_2$, то «расстояние» между $\overset{*}{\varphi}_1$ и $\overset{*}{\varphi}_2$ сокращается по сравнению с «расстоянием» между «точками» φ_1 и φ_2 не менее чем в $1/m$ раз.

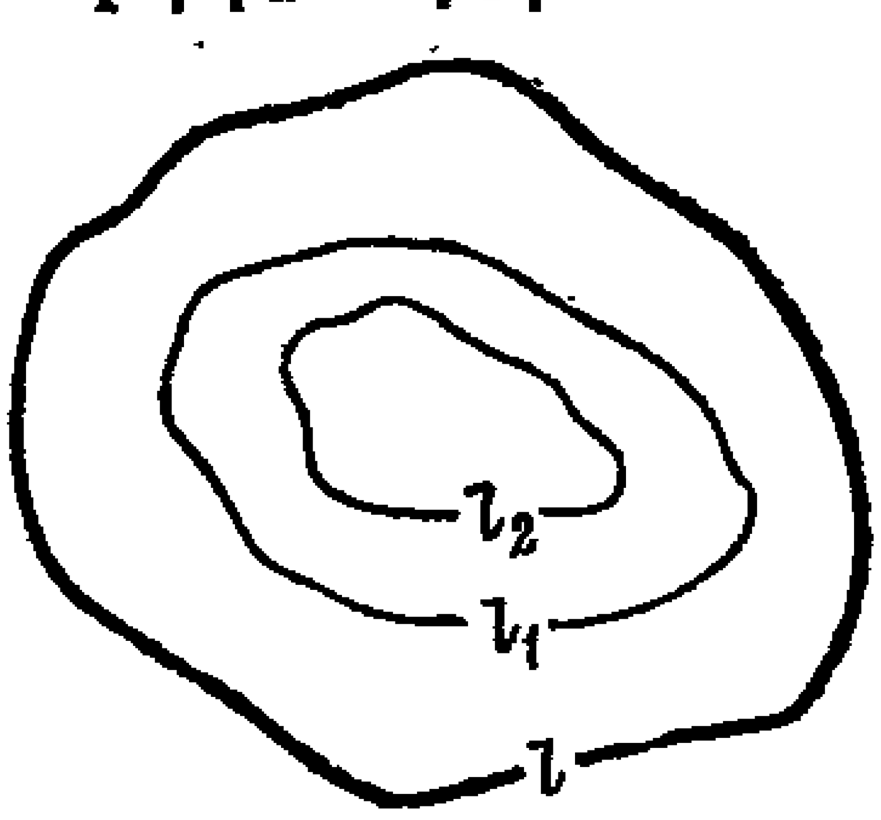

Рис. 12

Найти решение уравнения (3.14) в классе функций $\{\varphi\}$ — это значит найти такую «точку» множества Φ, которая остается неподвижной при действии оператора A.

Необходимость существования такой «точки» геометрически очевидна, если допустить, что множество Φ ограничено. Тогда существует верхняя грань «расстояний» между ее «точками». Эту верхнюю грань мы будем называть *диаметром* множества Φ. Пусть этот диаметр равен d. Изобразим тогда множество Φ в виде некоторой замкнутой области (рис. 12), которая ограничена линией l. После действия оператора A на все «точки» этого множества мы получим множество Φ_1, которое, согласно условию 3, целиком заключено в Φ. На рис. 12

Φ_1 ограничено линией l_1. По условию 4 диаметр Φ_1 не больше md. Применим теперь оператор A к «точкам» множества Φ_1. Получим множество Φ_2, целиком заключенное в Φ_1, потому что уже при действии этого оператора на Φ получаются только «точки» Φ_1, при действии же A на Φ_1, т. е. на часть Φ, конечно, не может получиться ничего, кроме «точек» из Φ_1. По условию 4 диаметр Φ_2 не больше чем m^2d. На рис. 12 Φ_2 ограничено линией l_2. Продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3, ..., диаметры которых стремятся к нулю. Поэтому общая часть всех этих множеств будет состоять только из одной точки, которая, очевидно, будет оставаться неподвижиой при действии оператора A.

Двух «точек», которые оставались бы неподвижными при действии оператора A, быть не может, потому что тогда «расстояние» между ними оставалось бы неизменным и положительным после операции A, а это противоречит условию 4.

ЗАДАЧИ

1. Пусть F — замкнутая ограниченная часть n-мерного пространства отображается в себя посредством оператора A так, что всегда при $p \neq q$

$$\rho[A(p), A(q)] < \rho[p, q]. \qquad (*)$$

Здесь $\rho[p, q]$ — расстояние между точками p и q. Докажите, что при этом только одна точка остается неподвижиой. Верно ли это для иезамкнутых ограниченных множеств? Для замкнутых неограниченных миожеств?

2. Докажите, что если неравенство $(*)$ заменить неравенством

$$\rho[A(p), A(q)] \leqslant m\rho[p, q] \quad (0 \leqslant m < 1),$$

то теорема о существоваиии неподвижной точки верна для любых замкнутых множеств (даже неограниченных). Вериа ли она для незамкнутых ограннченных множеств?

3. Пусть неравенство $(*)$ заменено неравенством

$$\rho[A(p), A(q)] \leqslant \rho[p, q] \qquad (**)$$

Докажите, что тогда теорема о существовании неподвижной точки верна для случая, когда F — отрезок прямой нли контур равнобедренного прямоугольного треугольника, и неверна, если F — окружность. Если ρ означает наименьшее расстояние, измеренное по контуру, то теорема не будет верна и для контура прямоугольного равнобедренного треугольника.

Теорема при предположении (**) верна также для любого выпуклого замкнутого ограниченного множества (для доказательства надо рассмотреть вспомогательное преобразование подобия). Приведите пример замкнутого ограниченного множества, для которого возможно отображение, удовлетворяющее неравенству (**), не имеющее неподвижных точек и не сводящееся к движению; может ли быть таким множеством окружность?

4. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, причем $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$. Докажите, что тогда найдется значение x_0 $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$, для которого $\varphi(x_0) = x_0$. Эта теорема может быть выражена так: при непрерывном отображении отрезка в себя существует по крайней мере одна неподвижная точка. Отметим, что аналогичная теорема справедлива и для n-мерного шара (см. § 59).

5. (О. А. Олейник.) Пусть функция $f(x, y)$ $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по y, причем $f(x+T, y) \equiv f(x, y)$ для некоторого положительного T и $f(x, y_1) f(x, y_2) < 0$ $(-\infty < x \leqslant \infty)$ для некоторых y_1 и y_2. Используя задачу 4, докажите, что тогда уравнение (3.2) имеет по крайней мере одно периодическое решение с периодом T. Примените эту теорему к уравнению $y' = a(x) y + b(x)$, если $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные периодические функции с периодом T, причем $a(x) \not\equiv 0$.

§ 17. Теорема Коши о дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ с голоморфной правой частью

Если функция $f(x, y)$ голоморфна в окрестности точки (x_0, y_0), то существует, и притом только одно, решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3.18}$$

голоморфное в окрестности точки x_0 и удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *голоморфной* по всем своим аргументам в окрестности

$$|x_i - x_i^0| < r \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой окрестности она разлагается в степенной ряд по

$$(x_1 - x_1^0), \ldots, (x_n - x_n^0).$$

Как ее аргументы, так и сама функция могут принимать при этом не только действительные значения, но и комплексные. *Производной* от голоморфной функции $F(x_1, ..., x_n)$ по комплексному аргументу x_k называется функция, представляемая рядом, который получается почленным дифференцированием ряда, представляющего $F(x_1, ..., x_n)$. Так полученный ряд имеет по крайней мере такой же радиус сходимости, как и ряд, которым представляется $F(x_1, ..., x_n)$ (см., например, Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969, т. 2, с. 450). Если $F(x_1, ..., x_n)$ и $x_1, ..., x_n$ принимают только действительные значения, то определенная так производная совпадает с обычной. Все обычные правила дифференцирования суммы, произведения, функции от функции и т. д. при этом сохраняются.

Во всех рассуждениях настоящего параграфа совершенно безразлично, принимают ли рассматриваемые величины только действительные значения или они принимают также и комплексные значения.

Исторически доказательство теоремы Коши было первым доказательством существования и единственности решения, принимающего при $x=x_0$ заданное значение y_0, для дифференциального уравнения довольно общего вида. Ограничиться только этим доказательством нельзя было потому, что требование голоморфности рассматриваемых функций часто бывает весьма искусственным. Очень многие вопросы физики приводят к дифференциальным уравнениям, правые части которых неголоморфны.

Доказательство теоремы Коши. Предварительно заметим, что без ограничения общности можно считать $x_0=y_0=0$, так как общий случай можно привести к этому, полагая $x-x_0=x^*$ и $y-y_0=y^*$.

Допустим сначала, что данное уравнение имеет голоморфное решение, обращающееся в нуль при $x=0$. Пусть оно представляется рядом

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\dots$$

Тогда, очевидно, должно быть $C_0=y(0)=0$. Подставляя этот ряд в уравнение (3.18) вместо y, дифференцируя полученное тождество по x один, два, три и т. д. раз и сравнивая значения обеих частей полученных тождеств при $x=y=0$, замечаем, что коэффициенты C_i будут последовательно вычисляться следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= y'(0) = f(0,0), \\ 2C_2 &= y''(0) = f'_x(0,0) + f'_y(0,0)\,y'(0) = \\ &= f'_x(0,0) + f'_y(0,0)\,C_1, \\ 2\cdot 3\cdot C_3 &= y'''(0) = f''_{xx}(0,0) + 2f''_{xy}(0,0)\,y'(0) + \\ &+ f''_{yy}(0,0)\,y'^2(0) + f'_y(0,0)\,y''(0) = \\ &= f''_{xx}(0,0) + 2f''_{xy}(0,0)\,C_1 + f''_{yy}(0,0)\,C_1^2 + f'_y(0,0)2C_2 \end{aligned}\right\} \quad (3.19)$$

и т. д.

Отсюда видно, что коэффициенты C_i определяются однозначно и, следовательно, голоморфных решений нашего уравнения, обращающихся в нуль при $x=0$, не может быть больше одного. Кроме того, для дальнейшего важно отметить, что коэффициент C_i разложения в ряд по степеням x решения $y(x)$ выражается через коэффициенты разложения в ряд по степеням x и y функции $f(x, y)$ и $C_1, C_2, \ldots, C_{i-1}$, и притом только при помощи действий сложения и умножения.

Чтобы доказать существование решения уравнения (3.18), составим формально ряд по степеням x с коэффициентами C_i, определяемыми равенствами (3.19). Если этот ряд, который мы будем обозначать римской цифрой I, сходится, то он и будет, очевидно, представлять требуемое решение. Действительно, тогда при подстановке вместо y в уравнение (3.18) этого ряда при разложении правой части в степенной ряд по x[1] коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях будут одинаковыми. Для доказательства сходимости составим вспомогательное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = F(x, z), \qquad (3.20)$$

[1] Здесь мы пользуемся теоремой о возможности подстановки ряда в ряд (см., например, Г. М. Фихтенгольц. Там же, с. 485—487).

правая часть которого также голоморфна в окрестности (0, 0), причем все коэффициенты разложения $F(x, z)$ неотрицательны и не меньше по абсолютной величине соответствующих коэффициентов в разложении $f(x, y)$. Уравнение (3.20) называется *мажорирующим* для уравнения (3.18), а функция $F(x, z)$ называется *мажорирующей* (или *мажорантой*) для $f(x, y)$. Если $f(x, y)$ голоморфна в окрестности (0, 0)

$$|x|<r, \quad |y|<r,$$

можно, например, положить

$$F(x,z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)},$$

где $0<r'<r$, а M — некоторое положительное постоянное (см., например, Г. М. Фихтенгольц. Там же, с. 502).

Если нам удастся получить голоморфное решение $z(x)$ этого уравнения, которое при $x=0$ принимает значение, равное нулю, то отсюда будет следовать сходимость ряда I во всяком случае всюду, где сходится ряд для $z(x)$. Действительно, как уже отмечалось выше в аналогичном случае, коэффициент C_i^* при i-й степени разложения $z(x)$ по степеням x получается только при помощи действий сложения и умножения над коэффициентами разложения $F(x, z)$ по степеням x и z и C_1^*, C_2^*, ..., C_{i-1}^*. Поэтому

$$C_i^* \geqslant |C_i|;$$

это сразу вытекает из возможности перехода от $i-1$ к i, т. е. при помощи метода полной индукции.

Очевидно, при построении $z(x)$ достаточно рассматривать только действительные значения x. Если же x действительное, то уравнение

$$\frac{dz}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)}$$

легко интегрируется разделением переменных:

$$\int_0^z \left(1-\frac{u}{r'}\right)du = \int_0^x \frac{Md\xi}{1-\frac{\xi}{r'}}.$$

Отсюда

$$z-\frac{z^2}{2r'} = -r'M\ln\left(1-\frac{x}{r'}\right).$$

Это квадратное уравнение имеет решение

$$z(x) = r' - r'\sqrt{1+2M\ln\left(1-\frac{x}{r'}\right)},$$

которое обращается в нуль при $x=0$ и является голоморфной функцией от x при достаточно малых значениях $|x|$, а именно при

$$|x| < r'\left(1-e^{-\frac{1}{2M}}\right)^{1)}.$$

Следовательно, при достаточно малом $|x|$ утверждение о сходимости формально построенного для $y(x)$ ряда доказано. Его сумма и будет голоморфным решением дифференциального уравнения (3.18).

Следствие. *Если правая часть дифференциального уравнения* (3.2) *голоморфна и действительна при действительных значениях x и y, изменяющихся в некоторой области*[2]*, то все действительные решения этого уравнения, графики которых проходят в этой области, голоморфны.*

В самом деле, раз правая часть этого уравнения голоморфна в некоторой области, то для каждой точки (x_0, y_0) этой области существует окрестность, где она удовлетворяет условию Липшица по y. А тогда в этой окрестности есть только одно решение, которое при $x=x_0$ обращается в y_0. Следовательно, оно совпадает с только что построенным голоморфным.

---

[1] См. сноску на с. 75.

[2] Функция называется *голоморфной* в некоторой *области* G, если она голоморфна в некоторой окрестности каждой точки G.

Замечание. Если правая часть уравнения (3.18) линейная относительно y, то для области существования решения этого уравнения можно дать лучшие оценки, чем в общем случае. В самом деле, пусть наше уравнение имеет вид (2.10), где $a(x)$ и $b(x)$ — голоморфные функции от x при $|x|<r$. Тогда за мажорирующее уравнение можно принять уравнение

$$\frac{dz}{dx}=\frac{M}{1-\frac{x}{r'}}(z+1) \quad (0<r'<r);$$

здесь коэффициент при $(z+1)$ является общей мажорантой для $a(x)$ и $b(x)$. Это последнее уравнение имеет голоморфное при $|x|<r'$ решение

$$z=\left(1-\frac{x}{r'}\right)^{-Mr'}-1,$$

обращающееся в нуль при $x=0$.

Отсюда, так же как это прежде было показано для общего случая, следует, что наше линейное уравнение имеет голоморфное при $|x|<r$ решение, обращающееся в нуль при $x=0$.

ЗАДАЧА

Найдите первые четыре члена разложения решения уравнения $y'=e^{xy}$ ($y(0)=0$) в ряд по степеням x. Оцените остаточный член и радиус сходимости ряда сверху и снизу.

§ 18. О степени гладкости решений дифференциальных уравнений

Теорема. *Если $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и y до p-го ($p\geqslant 0$) порядка*[1], *то всякое решение уравнения* (3.2) *имеет непрерывные производные по x до $(p+1)$-го порядка.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ есть какое-нибудь решение дифференциального уравнения (3.2). Тогда

[1] Под производной 0-го порядка всюду понимается сама функция.

должно иметь место тождество

$$y'(x)=f(x,\ y(x)). \qquad (3.21)$$

Раз функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.2), то она всюду имеет производную по x и потому непрерывна. Поэтому, если $f(x,\ y)$ непрерывна по x и y, то правая часть (3.21) непрерывна по x. Значит, $y'(x)$ также непрерывна.

Допустим теперь, что $p\geqslant 1$. Тогда правая часть (3.21) имеет непрерывную производную по x. Значит, и левая часть этого тождества имеет непрерывную производную по x. Следовательно, функция $y(x)$ имеет непрерывную производную 2-го порядка. Продифференцировав (3.21) по x, получим $y''(x)=f'_x(x,\ y(x))+f'_y(x,\ y(x))y'(x)$.

Применяя к этому тождеству те же рассуждения, какие мы применили к тождеству (3.21), если $p\geqslant 2$, найдем, что $y(x)$ имеет непрерывную производную 3-го порядка и т. д.

ЗАДАЧА

Приведите пример уравнения (3.2) с непрерывной, но не всюду дифференцируемой правой частью, все решения которого аналитичны.

§ 19. Зависимость решения от начальных данных и от правой части уравнения

До сих пор мы исследовали решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее фиксированному начальному условию $y(x_0)=y_0$. Если изменять x_0 и y_0, то будет меняться и решение. Возникает важный в приложениях вопрос: как оно будет при этом меняться. Этот вопрос, как указал Адамар, имеет и большое принципиальное значение. Действительно, если какая-нибудь физическая задача приводит к нахождению удовлетворяющего некоторым начальным условиям решения дифференциального уравнения, то эти начальные условия обычно находятся измерением из опыта. Но за абсолютную точность измерения ручаться нельзя. И найденное из условия, что оно обращается в y_0 при $x=x_0$, решение дифференциального уравнения представляло бы очень мало интереса для приложений, если бы даже незначительные погрешности в измерении y_0 могли привести к сильному изменению решения дифференциального уравнения.

К сказанному надо добавить, что при изучении реального процесса с помощью дифференциального уравнения мы производим некоторую идеализацию, которая позволяет выделить в этом процессе его наиболее существенные стороны. Например, в примере 2 § 1 мы отвлекались от молекулярного строения вещества и т. п. Поэтому реальный процесс описывается дифференциальным уравнением и начальным условием лишь приближенно. Можно с равным основанием говорить об удовлетворении всех достаточно близких между собой уравнений или начальных условий, если эта близость не выходит за рамки точности, учитываемой при данной идеализации процесса; скажем, в примере 2 § 1 с равным правом можно говорить об удовлетворении начальных условий, если они отличаются друг от друга на величину, меньшую веса атома радия. Поэтому решения таких близких уравнений при близких начальных данных должны быть также достаточно близки между собой (неотличимы друг от друга в рамках данной идеализации), чтобы применение данного дифференциального уравнения к изучению рассматриваемого процесса было законным.

Мы покажем, что при некоторых предположениях решение дифференциального уравнения зависит непрерывным образом от самого уравнения и от начальных данных.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$, заданная в области G, непрерывна, ограничена и если через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит график только одного решения дифференциального уравнения*

$$y'=f(x, y), \tag{3.2}$$

то это решение непрерывно зависит от правой части

$f(x, y)$ и от точки (x_0, y_0) [1]. *Более точно, пусть через точку (x_0, y_0) проходит график решения $y_0(x)$ уравнения (3.2), определенного на отрезке $[\alpha, \beta]$ $(\alpha<x_0<\beta)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при*

$$|\bar{x}_0-x_0|<\delta, \quad |\bar{y}_0-y_0|<\delta, \quad |\bar{f}(x, y)-f(x, y)|<\delta \text{ в } (G)$$

($\bar{f}(x, y)$ — непрерывная функция, заданная в G) *решение $\bar{y}_0(x)$ уравнения*

$$y'=\bar{f}(x, y), \tag{3.22}$$

график которого проходит через точку $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, существует на отрезке $[\alpha, \beta]$ и отличается там от $y_0(x)$ меньше чем на ε.

Доказательство. Пусть наше утверждение неверно. Тогда найдутся $\varepsilon_0>0$ и последовательность $\{y_k(x)\}$ решений уравнений

$$y'=f_k(x, y)$$

при начальном условии $y(x_k)=y_k$, где

$$x_k\to x_0, \quad y_k\to y_0, \quad \sup_G|f_k-f|\to 0 \quad (k\to\infty),$$

причем при продолжении решения $y_k(x)$ на весь отрезок $[\alpha, \beta]$ неравенство

$$|y_k(x)-y_0(x)|<\varepsilon_0 \tag{3.23}$$

нарушается.

Пусть M — какое-нибудь число, большее верхней грани значений $|f(x, y)|$ в области G. Рассмотрим треугольник

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant Ma,$$

лежащий целиком в области G. Тогда при достаточно больших k функции $y_0(x)$ и $y_k(x)$ будут определены на всем отрезке $|x-x_0|\leqslant a$. (Почему?)

Покажем, что при всяком положительном ε на всем этом отрезке

$$|y_k(x)-y_0(x)|<\varepsilon,$$

если k достаточно велико. В самом деле, допустим, что это утверждение не верно. Тогда существует такое по-

[1] В § 22 при более сильных предположениях непрерывная зависимость решения от начальных данных доказывается независимо от доказательства только что сформулированной теоремы. Читатель может пропустить приведенное ниже доказательство.

ложительное ε и такая бесконечная последовательность номеров $k_1 < k_2 < \ldots$, что при всяком $i \geqslant 1$ и при некотором $\bar{x}_i$ из отрезка $|x - x_0| \leqslant a$ будет

$$|y_{k_i}(\bar{x}_i) - y_0(\bar{x}_i)| \geqslant \varepsilon. \tag{3.24}$$

Последовательность функций $y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ равностепенно непрерывна, так как производная каждой функции с достаточно большим индексом нигде не превышает по абсолютной величине M и, следовательно, для таких k

$$|y_k(x'') - y_k(x')| \leqslant M|x'' - x'|.$$

Поэтому из последовательности функций $y_{k_i}(x)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\overset{*}{y}_1(x)$, $\overset{*}{y}_2(x)$, ..., $\overset{*}{y}_k(x)$, ... Рассуждая аналогично тому, как это делалось в § 11, найдем, что эта последовательность сходится к решению уравнения (3.2), график которого проходит через точку (x_0, y_0), т. е. к решению $y_0(x)$, так как мы предполагаем, что такое решение единственно. Но равномерная сходимость последовательности $\overset{*}{y}_k(x)$ к $y_0(x)$ на отрезке $|x - x_0| \leqslant a$ противоречит неравенству (3.24). Таким образом предположение (3.24) привело нас к противоречию.

Итак, показано, что на отрезке $|x - x_0| \leqslant a$ величина $|y_k(x) - y_0(x)|$ становится как угодно малой, если k достаточно велико.

Построим прямоугольник Q_1

$$|x - x_0'| \leqslant a_1, \quad |y - y_0'| \leqslant Ma_1,$$

целиком лежащий в области G; здесь

$$x_0' = x_0 \pm a, \quad y_0' = y_0(x_0').$$

По доказанному выше, если k достаточно велико, то точка $(x_0', y_k(x_0'))$ становится как угодно близкой к точке (x_0', y_0'). Поэтому, применяя к решениям $y_0(x)$ и $y_k(x)$ на отрезке $|x - x_0'| \leqslant a_1$ все те рассуждения, какие мы провели прежде для отрезка $|x - x_0| \leqslant a$, найдем, что и на отрезке $|x - x_0'| \leqslant a_1$ при каком угодно положительном ε

$$|y_k(x)-y_0(x)|<\varepsilon,$$

если k достаточно велико.

Пусть $[\alpha, \beta]$ — такой отрезок, что кривая $y=y_0(x)$ при $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ проходит строго внутри области G. Строя тогда достаточно большие прямоугольники Q_k, лежащие целиком в области G и определяемые неравенствами

$$|x-x_0^{(k)}|\leqslant a_k, \quad |y-y_0^{(k)}|\leqslant Ma_k,$$

где

$$x_0^{(k)}=x_0^{(k-1)}\pm a_{k-1}, \quad y_0^{(k)}=y_0(x_0^{(k)}),$$

и повторяя для них те же рассуждения, какие мы провели для Q_1, докажем, что неравенство (3.23) выполняется на отрезке $[\alpha, \beta]$ для всех достаточно больших k. А это противоречит предположению, сделанному в начале доказательства. Отсюда и следует наша теорема.

Замечание. Если функция $f(x, y)$, заданная в области G, непрерывна, ограничена и если через *некоторую* внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит график только одного решения уравнения (3.2), то к этому решению равномерно сходится *всякое* решение уравнения (3.22), график которого проходит через точку $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, когда $\bar{x}_0\to x_0$, $\bar{y}_0\to y_0$ и $\sup|\bar{f}-f|\to 0$. Действительно, по существу только это использовалось при доказательстве теоремы.

Иногда бывает важно не только установить непрерывную зависимость решения от начальных данных, но и доказать существование производных от решения по начальным данным.

Для этого прежде всего заметим следующее. Пусть начальные данные будут: $y=y_0$ при $x=x_0$. Обозначим соответствующее им решение дифференциального уравнения

$$y'=f(x, y)$$

через $y(x, x_0, y_0)$ и введем новую функцию z, положив

$$z=y(x, x_0, y_0)-y_0,$$

и новую независимую переменную t, положив

$$t=x-x_0.$$

Тогда значениям $x=x_0$, $y=y_0$ будут соответствовать значения $t=0$, $z=0$. Функция z запишется так:

$$z=y(t+x_0,\ x_0,\ y_0)-y_0,$$

а дифференциальное уравнение (3.2) преобразуется в уравнение

$$\frac{dz}{dt}=f(t+x_0,\ z+y_0). \tag{3.25}$$

Следовательно, изучение зависимости решения дифференциального уравнения (3.2) от начальных данных свелось к исследованию зависимости решения дифференциального уравнения (3.25) от параметров, входящих в его правую часть. Этой задачей занимался Пуанкаре. При решении ее мы будем опираться на лемму Адамара, которую и докажем в следующем параграфе.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если в формулировку теоремы этого параграфа не вводить уравнение (3.22), а предположить просто, что функция $\bar{y}_0(x)$ удовлетворяет неравенству $|y'-f(x,\ y)|<\delta$, то функцию $\bar{y}_0(x)$ можно считать кусочно-гладкой. Докажите также, что при таком обобщении теорема § 13 является следствием данной теоремы.

2. Пусть непрерывные функции $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant b)$ удовлетворяют соотношениям

$$y(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,\ y(s))ds,\qquad z(x)>y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,\ z(s))ds,$$

$$u(x)\geqslant y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,\ u(s))ds,$$

где функция $f(x,\ y)$ непрерывна в области, содержащей графики всех трех функций, и не убывает по y. Докажите, что тогда $z(x)>$ $>y(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant b)$, а если к тому же решение уравнения (3.2) при начальном условии $y(x_0)=y_0$ единственно, то $u(x)\geqslant y(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant b)$. (Если единственности нет, то в правой части надо взять наименьшее решение уравнения (3.2) при условии $y(x_0)=y_0$; определение наименьшего решения см. в задаче 3 § 11.) Распространите результат на неравенства противоположного смысла. Существенно ли требование неубывания функции $f(x, y)$?

3. (Лемма Гронуолла.) Если непрерывная функция $y(x)$ $(x_0 \leqslant x \leqslant b)$ удовлетворяет неравенству

$$y(x) \leqslant A + \int_{x_0}^{x} B(s)y(s)ds,$$

где функция $B(x) \geqslant 0$ непрерывна, то имеет место оценка:

$$y(x) \leqslant A \exp \int_{x_0}^{x} B(s)ds \quad (x_0 \leqslant x \leqslant b).$$

(При $x \leqslant x_0$ надо в условии и в утверждении леммы рассматривать интеграл от x до x_0.) Распространите этот результат на случай, когда функция $B(x)$ разрывна и даже не ограничена. Получите (в соответствующих предположениях) аналогичную оценку для функции $y(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$y(x) \leqslant A(x) + \int_{x_0}^{x} B(s)y(s)ds.$$

С помощью леммы Гронуолла получите достаточные условия единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$.

4. Найдите оценку для непрерывной функции $y(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$y(x) \leqslant A + \int_{x_0}^{x} B(s)\varphi(y(s))ds \quad (x_0 < x),$$

где $A = \text{const}$, $\varphi(u) \geqslant 0$ — неубывающая функция, $B(x) \geqslant 0$, непрерывна и $\int_{x_0}^{x} B(s)ds < \infty$.

Получите с помощью этой оценки достаточные условия единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$. Сравните с условием Осгуда.

5. Опираясь на результаты задачи 3, получите явную оценку отклонения $\bar{y}_0(x)$ от $y_0(x)$ в теореме § 19, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет по y условию Липшица.

Из полученной оценки в свою очередь выведите явную оценку отклонения ломаной Эйлера, с заданным наибольшим звеном от точного решения, если функция f удовлетворяет условию Липшица по обеим переменным.

6. Докажите, что непрерывная зависимость, о которой говорится в теореме § 19, равномерна по $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, если точка с координатами $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ находится в достаточно малой окрестности линии

$$y = y_0(x) \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta).$$

имеющих непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ *до порядка* $p-1$ *включительно, что*

$$F(y_1, \ldots, y_n;\ z_1, \ldots, z_m) - F(x_1, \ldots x_n;\ z_1, \ldots, z_m) \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n;\ z_1, \ldots, z_m)(y_i - x_i). \quad (3.26)$$

Доказательство[1]. Исходим из очевидного равенства

$$F(y_1, \ldots, y_n;\ z_1, \ldots, z_m) - F(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) -$$
$$= \int_0^1 F'_t(x_1 + t(y_1 - x_1), \ldots, x_n + t(y_n - x_n);\ z_1, \ldots, z_m)\, dt,$$

справедливого в силу предполагаемой выпуклости по $x_1, \ldots, x_n$ области G. Выражая F'_t через производные от F по

$$x_1 + t(y_1 - x_1),\ x_2 + t(y_2 - x_2),\ \ldots,\ x_n + t(y_n - x_n),$$

которые мы обозначим соответственно $F_1, F_2, \ldots, F_n$, получим

$$F(y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_m) - F(x_1, \ldots, x_n;\ z_1, \ldots, z_m) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \int_0^1 F_1(x_1 + t(y_1 - x_1), \ldots, x_n + t(y_n - x_n);$$
$$z_1, \ldots, z_m)\, dt.$$

Стоящие в правой части этого равенства интегралы можно принять за функции φ_i, о которых говорилось в лемме Адамара; они обладают всеми свойствами, требуемыми этой леммой.

ЗАДАЧИ

1. Однозначно ли представление функции F, гарантируемое леммой Адамара?

2. Докажите, что если приращение функции F представлено в виде (3.26), где функции φ_i имеют непрерывные производные по

---

[1] Это доказательство принадлежит М. А. Крейнесу.

$x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ до k-го ($k \geqslant 0$) порядка включительио, то функция F $(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$ имеет в G иепрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $k+1$ включительно. Это утверждеиие до некоторой степени обратно лемме Адамара.

§ 21. Теорема о зависимости решения от параметров

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n). \tag{3.27}$$

Предположим, что $\bar{G}_{xy}$ есть некоторая замкнутая область на плоскости (x, y), а $\bar{G}$ — множество таких точек $(x, y, \mu_1, \ldots, \mu_n)$, что:

a) точки (x, y) принадлежат $\bar{G}_{xy}$,

b) $|\mu_i| < \mu_i^0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, где μ_i^0 — некоторые положительные постоянные.

Тогда:

1) *Если $f(x, y, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ непрерывна в $\bar{G}$ по совокупности всех своих аргументов, ограничена и удовлетворяет там условию Липшица по y:*

$$|f(x, y_2, \mu_1, \ldots, \mu_n) - f(x, y_1, \mu_1, \ldots, \mu_n)| \leqslant K|y_2 - y_1|$$

(K не зависит от переменных x, y и μ), *то для каждой точки (x_0, y_0), лежащей внутри $\bar{G}_{xy}$, можно указать на оси Ox такой замкнутый интервал $[a, b]$, заключающий внутри себя точку x_0, на котором решение дифференциального уравнения (3.27) обращающееся в y_0 при $x = x_0$, непрерывно по совокупности переменных x, μ_1, μ_2, ..., μ_n.*

2) *Если f и ее производные до p-го ($p \geqslant 1$) порядка по y и всем μ внутри $\bar{G}$ непрерывны по совокупности x, y, μ_1, ..., μ_n и ограничены, то решение*

$$y(x, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$

имеет по параметрам μ непрерывные по совокупности x, μ_1, ..., μ_n производные также до p-го порядка, когда x принадлежит замкнутому интервалу $[a, b]$, о котором говорилось в предыдущем пункте, а $|\mu_i| < \mu_i^0$ $(i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$.

При доказательстве высказанных предложений мы ограничимся случаем уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \tag{3.28}$$

правая часть которого содержит только один параметр. В общем случае рассуждения проводятся аналогично.

1. Будем искать решение уравнения (3.28), обращающееся в y_0 при $x = x_0$, методом последовательных приближений. Последовательные приближения здесь имеют вид

$$\varphi_1(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi), \mu) d\xi,$$

$$\varphi_2(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi, \mu)\, \mu)\, d\xi$$

и т. д.

Легко видеть, что все функции $\varphi_i(x, \mu)$ непрерывны по совокупности обоих аргументов, когда x изменяется в некотором замкнутом интервале $[a, b]$ (о котором говорилось в § 14) и когда $|\mu| < \mu_0$. Повторяя те же рассуждения, что и в § 14, мы убедимся, что последовательность $\varphi_i(x, \mu)$ сходится равномерно по x и μ, если x изменяется в замкнутом интервале $[a, b]$, содержащем внутри себя точку x_0, и если $|\mu| < \mu_0$. Следовательно, предельная функция $\varphi(x, \mu)$ — единственное решение, график которого проходит через точку (x_0, y_0), — непрерывна по совокупности переменных x и μ при $a \leqslant x \leqslant b$ и $|\mu| < \mu_0$.

2. Если в соответствии с п. 2 теоремы допустить, что f имеет непрерывные производные 1-го порядка по y и μ, то решение $\varphi(x, \mu)$ имеет непрерывную производную по μ при тех же значениях x и μ, что и в предыдущем пункте.

В самом деле, пусть функции $\varphi(x, \mu)$ и $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ обращаются в y_0 при $x = x_0$, и пусть первая из них удовлетворяет уравнению (3.28), а вторая — уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu + \Delta\mu). \tag{3.29}$$

Подставив эти функции в соответствующие им дифференциальные уравнения (3.28) и (3.29) и вычитая получившиеся тождества, имеем

$$\frac{d[\varphi(x, \mu+\Delta\mu)-\varphi(x, \mu)]}{dx} = f(x, \varphi(x, \mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - \\ - f(x, \varphi(x, \mu), \mu).$$

Применяя к правой части лемму Адамара и полагая $\varphi(x, \mu+\Delta\mu)-\varphi(x, \mu)=\Delta\varphi$, перепишем последнее равенство так:

$$\frac{d\Delta\varphi}{dx} = \Delta\varphi\Phi_1 + \Delta\mu\Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 — непрерывные функции от x, $\varphi(x, \mu)$, $\varphi(x, \mu+\Delta\mu)$, μ и $\mu+\Delta\mu$ и, следовательно, по доказанному в п. 1, непрерывны по x и $\Delta\mu$ (μ считаем фиксированным). Разделим последнее равенство на $\Delta\mu$; тогда для определения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ мы получаем линейное уравнение

$$\frac{d\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\right)}{dx} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\Phi_1 + \Phi_2. \tag{3.30}$$

Функция $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ до сих пор была определена только при $\Delta\mu\neq 0$. Определим ее при $\Delta\mu=0$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению (3.30) и при $x=x_0$ обращалась в нуль. Правая часть уравнения (3.30) непрерывна по x и $\Delta\mu$ (которые входят в Φ_1 и Φ_2) и имеет ограниченную производную по $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$. Последнее следует из того, что, как было показано в предыдущем параграфе, Φ_1 равно интегралу от значений $\frac{\partial f}{\partial y}$, а $\frac{\partial f}{\partial y}$ ограничена. Кроме того, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}=0$ для всякого $\Delta\mu$ при $x=x_0$. Поэтому из доказанного в п. 1 настоящего параграфа следует, что решение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ уравнения (3.30) непрерывно по $\Delta\mu$ при всех достаточно малых по абсолютному значению

$\Delta\mu$. Поэтому при $\Delta\mu \to 0$ величина $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ стремится к определенному пределу. А это означает существование производной по μ от $\varphi(x, \mu)$.

Кроме того, так как в силу леммы Адамара при $\Delta\mu \to 0$

$$\Phi_1 \to \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$\Phi_2 \to \frac{\partial f}{\partial \mu},$$

то производная $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{\partial f}{\partial\mu} \tag{3.31}$$

при начальном условии $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right|_{x=0} = 0.$

Поэтому, применяя к этому уравнению первую часть теоремы, мы найдем, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ непрерывна по совокупности переменных x и μ.

3. Если f имеет непрерывные производные по y и μ до p-го порядка, где $p \geqslant 2$, то, применив к уравнению (3.31) те же рассуждения, что и для уравнения (3.28) в п. 2 настоящего параграфа, и взяв $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ вместо φ, найдем, что $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}$ существует и непрерывна по совокупности x и μ. Продолжая эти рассуждения, мы полностью докажем сформулированную в начале этого параграфа теорему.

Замечание 1. Подобно тому как это мы сделали в § 19, можно было бы доказать непрерывную зависимость от $\mu_1, \ldots, \mu_n$ решения дифференциального уравнения (3.27) или дифференцируемость его по этим параметрам при значениях x не только на отрезке $[a, b]$, но и на любом отрезке, для которого график решения проходит внутри $\bar{G}_{xy}$.

Замечание 2. Если известно некоторое решение, соответствующее значению параметра $\mu=\mu_0$, то производная по параметру при $\mu=\mu_0$ и при значениях x и y, связанных уравнением данного решения, получается при помощи квадратур без нахождения прочих решений. Действительно, при таких предположениях эта производная находится из линейного уравнения (3.31) с известными коэффициентами.

Следствие. Применяя только что доказанную для уравнения (3.28) теорему к уравнению (3.25) § 19, мы получим:

Если правая часть уравнения

$$y'=f(x, y) \tag{3.2}$$

имеет по x и y непрерывные производные до p-го порядка, то функция $y(x, x_0, y_0)$, которая удовлетворяет этому уравнению и при $x=x_0$ обращается в y_0, имеет непрерывные производные по x_0 и y_0 также до p-го порядка ($p\geqslant 1$).

ЗАДАЧИ

1. Дано уравнение $y'=\sin(xy)$ и начальное условие $x_0=0$, $y_0=0$. Найдите (при любом x) $\dfrac{\partial y}{\partial x_0}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}$, используя уравнение (3.31).

2. Дано уравнение $y'=x^2+y^2$ и начальное условие $x_0=0$, $y_0=0$. Найдите с точностью до 0,0001, чему равно $\dfrac{dy}{dy_0}$ при $x=1$. При вычислении $y(x)$ можно пользоваться, например, методом последовательных приближений.

3. Докажите, что если f в уравнении (3.2) непрерывно дифференцируема, то

$$\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0}=-f(x_0, y_0)\exp\int_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t))\,dt,$$

$$\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}=\exp\int_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t))\,dt.$$

4. Пусть M и N в уравнении (2.13) непрерывно дифференцируемы и $M^2(x_0, y_0)+N^2(x_0, y_0)\neq 0$, (x_0, y_0) — точка в области G.

Докажите, что тогда в некоторой окрестности этой точки уравнение (2.13) имеет непрерывный интегрирующий множитель.

5. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет по y условию Липшица $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$, причем $f(x, y) > 0$ для $y < F(x)$ и $f(x, y) < 0$ для $y > F(x)$ ($F(x)$ — некоторая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$). Тогда при $\mu > 0$ решение $y(x, \mu)$ уравнения

$$\mu \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

для начальных данных $y(x_0) = y_0$ [здесь $a < x_0 < b$, $y_0 > F(x_0)$] непрерывно зависит от (x, μ) и определено при $a \leqslant x \leqslant b$. Докажите, что

$$\lim_{\mu \to +0} y(x, \mu) = +\infty \quad (a \leqslant x < x_0), \quad \lim_{\mu \to +0} y(x, \mu) = F(x) \quad (x_0 < x \leqslant b),$$

причем последнее соотношение выполняется равномерно по x на каждом отрезке $[c, b]$ $(x_0 < c < b)$.

Таким образом, поведение решения уравнения при изменении малого сомножителя у производной существенно отличается от поведения решения уравнения с малым параметром, входящим в правую часть уравнения (3.2).

Приведенное выше утверждение является частным случаем значительно более общей теоремы А. Н. Тихонова [Матем. сборник, 1948, т. 22, с. 193—204].

6. Докажите, что в условиях задачи 5 при любом ε из интервала $(0, y - F(x_0))$ значение $h = h(\mu)$, для которого $y(x_0 + h, \mu) = F(x_0 + h) + \varepsilon$, $|y(x, \mu) - F(x)| < \varepsilon$ на интервале $x_0 + h < x < b$, имеет при $\mu \to +0$ порядок μ. (Интервал $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h(\mu)$ называется *пограничным слоем*.)

§ 22. Особые точки

Определение. Пусть точка P лежит внутри области G, где мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.2}$$

и соответственно

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y) \tag{3.2'}$$

(см. § 2), или на ее границе, где уравнения (3.2) и (3.2′) также могут быть заданы.

Если можно указать такую окрестность $\mathfrak{A}$ точки P[1], что через каждую точку этой окрестности проходит одна и только одна интегральная линия и, кроме того, по крайней мере одна из функций $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ в $\mathfrak{A}$ непрерывна, то точку P мы будем называть *обыкновенной точкой* уравнения (3.2) или (3.2').

Чтобы точка P была обыкновенной, достаточно, чтобы в $\mathfrak{A}$ функция $f(x, y)$ была непрерывна по x и удовлетворяла условию Липшица по y или чтобы функция $f_1(x, y)$ была непрерывна по y и удовлетворяла условию Липшица по x. (Вместо условия Липшица достаточно потребовать ограниченности соответствующей частной производной.) Однако эти условия не необходимы, что видно на примере уравнения

$$y' = \begin{cases} y \ln |y| & \text{при } y \neq 0, \\ 0 & \text{при } y = 0. \end{cases}$$

Хотя в точках оси x условие Липшица нарушается, но все точки плоскости обыкновенные.

Если точка P не обыкновенная, то она называется *особой точкой* для уравнения (3.2) или (3.2'). Мы видим, что точка P может быть особой в трех случаях:

a) Точка P лежит на границе области G; всякая такая граничная точка является особой. Так, для уравнений (1.4) и (1.7) начало координат служит граничной особой точкой, так как область G в этих примерах — это вся плоскость, за исключением начала координат.

b) Может оказаться, что точка P является *точкой неединственности*, т. е. такой точкой, что в любой ее окрестности через нее проходит более одной интегральной линии. Точка P может также быть предельной для точек неединственности.

c) Наконец, само заданное поле направлений может иметь в точке P разрыв (этот случай в примерах встречается редко).

Конечно, возможна и комбинация этих случаев (граничная точка неединственности и т. д.).

---

[1] Под окрестностью точки P мы всюду понимаем *полную* окрестность точки P, а не только ту ее часть, которая принадлежит G. Такую окрестность можно представлять себе в виде достаточно малого круга с центром в точке P.

Изолированные особые точки (т. е. такие особые точки в некоторой окрестности которых нет других особых точек) в приложениях чаще всего встречаются при исследовании уравнений вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — функции, имеющие непрерывные частные производные по x и y высоких порядков. Легко видеть, что для таких уравнений все внутренние точки рассматриваемой области, где $M(x, y)\neq 0$ или $N(x, y)\neq 0$, являются обыкновенными точками.

Рассмотрим теперь какую-нибудь внутреннюю точку (x_0, y_0), где и $M(x, y)=0$, и $N(x, y)=0$. Для упрощения записи будем предполагать, что $x_0=0$ и $y_0=0$. Разлагая тогда $M(x, y)$ и $N(x, y)$ по степеням x и y и ограничиваясь при этом членами второго порядка, получим в окрестности точки $(0, 0)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M_x'(0, 0)\,x+M_y'(0, 0)\,y+O(x^2+y^2)}{N_x'(0, 0)\,x+N_y'(0, 0)\,y+O(x^2+y^2)}\ ^{1)}. \tag{3.32}$$

Это уравнение не определяет $\frac{dy}{dx}$ при $x=0$ и $y=0$. Но если

$$\begin{vmatrix} M_x'(0, 0) & M_y'(0, 0) \\ N_x'(0, 0) & N_y'(0, 0) \end{vmatrix}\neq 0,$$

то, как бы мы ни задали $\frac{dy}{dx}$ в начале координат, это начало координат будет точкой разрыва для значений $\frac{dy}{dx}$ и потому особой точкой для нашего дифференциального уравнения.

Перрон[2] показал, что на характер поведения интегральных линий около изолированной особой точки (у нас — начала координат) члены $O(x^2+y^2)$, стоящие в

[1] $O(x^2+y^2)$ означает величину, отношение которой к x^2+y^2 остается ограниченным.

[2] Math. Zeitschrift, Bd 15 (1922) и Bd 16 (1923). См. § 56 и 57.

числителе и знаменателе, не оказывают существенного влияния, если только действительные части обоих корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - M_y'(0,\ 0) & -M_x'(0,\ 0) \\ -N_y'(0,\ 0) & \lambda - N_x'(0,\ 0) \end{vmatrix} = 0$$

отличны от нуля. Поэтому, чтобы составить себе представление об этом поведении, изучим поведение около начала координат интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}, \tag{3.33}$$

для которого

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Можно показать, что линейным неособым преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x &= k_{11}\xi + k_{12}\eta \\ y &= k_{21}\xi + k_{22}\eta, \end{aligned}\right\}$$

где k_{ij} действительны, это уравнение приводится к одному из следующих трех типов (см. дальше, § 48):

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ \frac{d\eta}{d\xi} = k\frac{\eta}{\xi} \quad (k \neq 0), \\ &\text{б)}\ \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi+\eta}{\xi}, \\ &\text{в)}\ \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi+k\eta}{k\xi-\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

Рассмотрим подробно каждый из этих трех случаев. Заметим предварительно следующее. Если оси Ox и Oy были взаимно перпендикулярными, то оси $O\xi$ и $O\eta$ не будут уже, вообще говоря, образовывать между собой прямой угол. Но для упрощения выполнения рисунков мы будем изображать $O\xi$ и $O\eta$ взаимно перпендикулярными.

1-й случай. Общим интегралом служит уравнение $a\eta + |b\xi|^k = 0$. Поведение интегральных линий в этом случае схематически изображено на рис. 13, 1, 14 и 15.

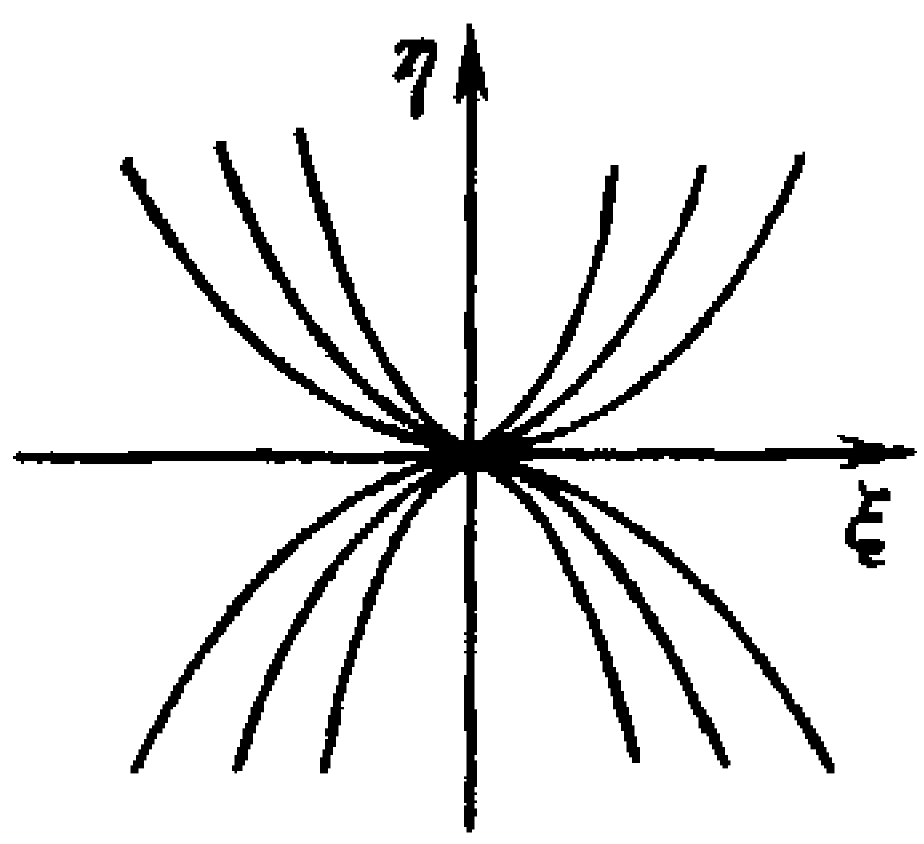

Рис. 13

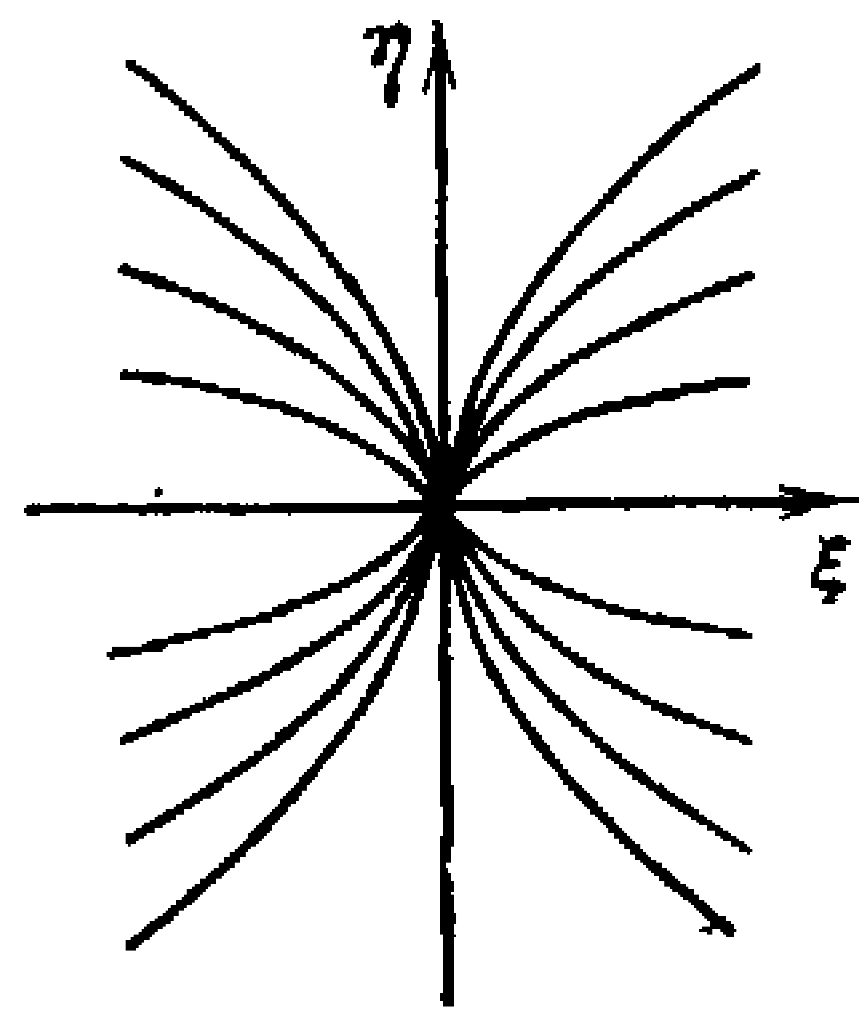

Рис. 14

Рис. 13 относится к случаю, когда $k>1$. Здесь все интегральные линии касаются в O оси $O\xi$, за исключением только обеих половин оси $O\eta$. Сами оси $O\xi$ и $O\eta$ являются интегральными линиями всюду, за исключением, конечно, самой точки O, где уравнение (3.34,а) не определяет никакого направления.

Случай, когда $k=1$, был разобран нами во введении (рис. 1).

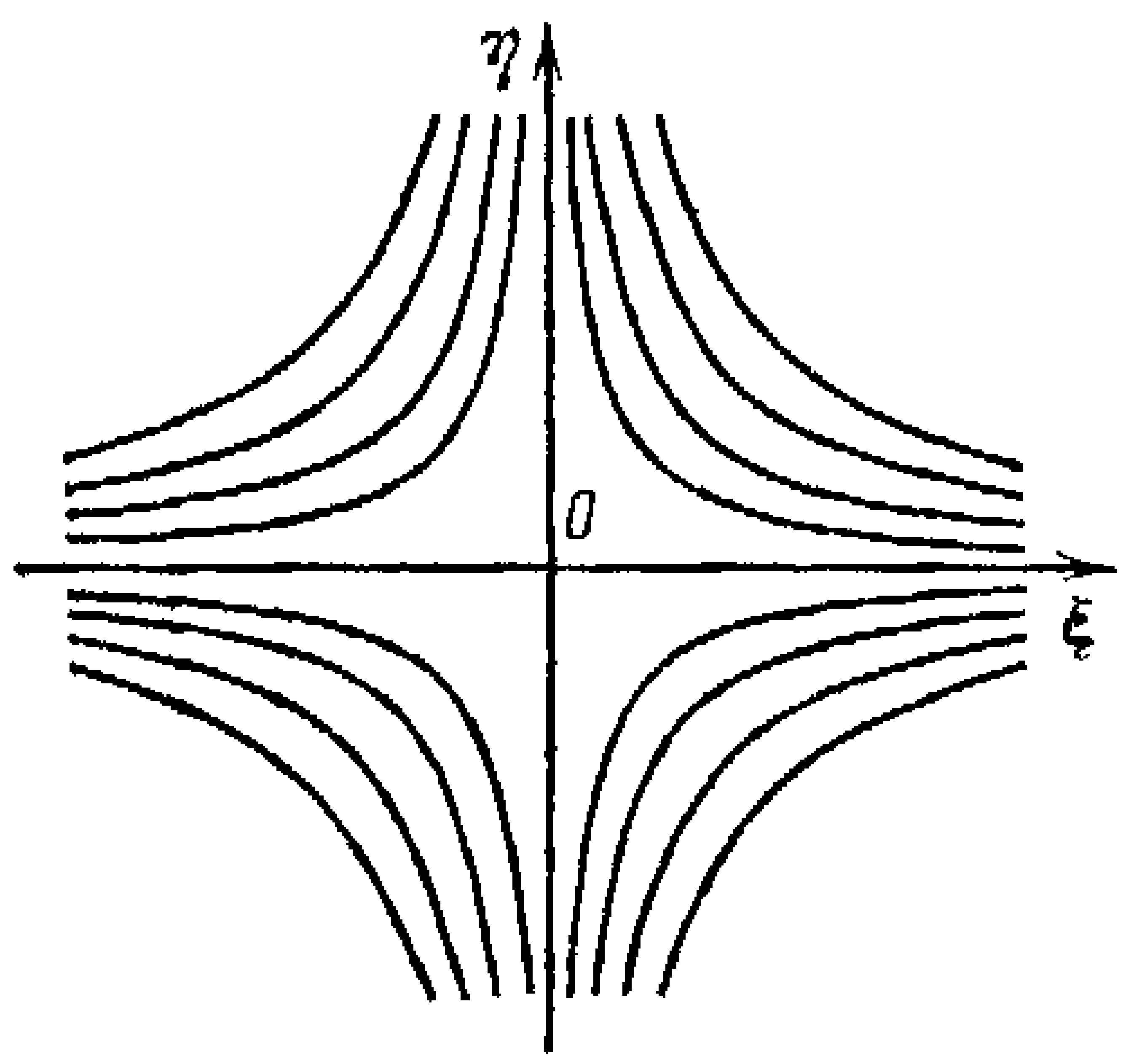

Рис. 15

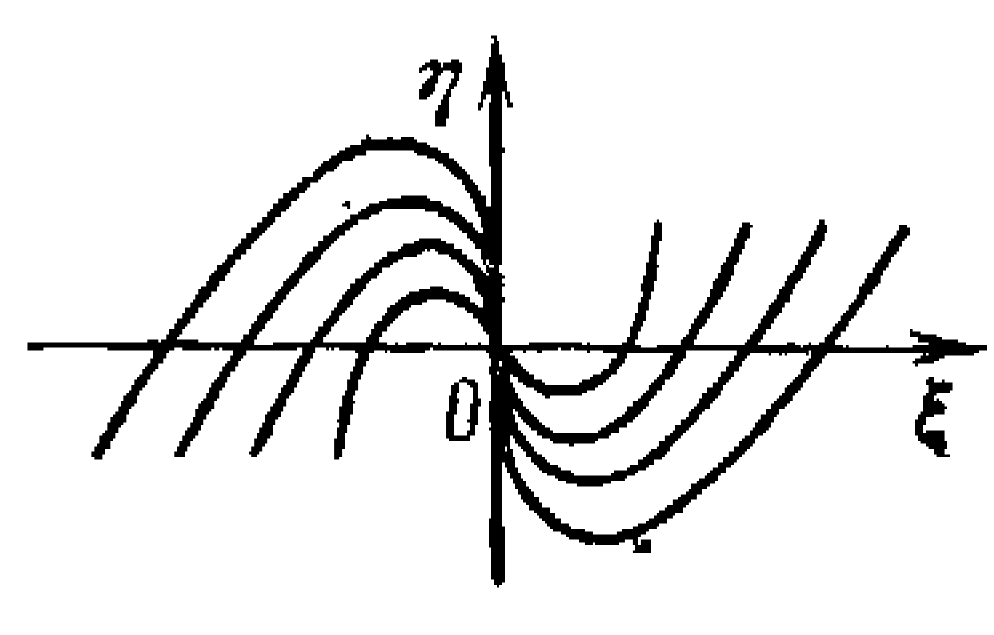

Рис. 16

При $0<k<1$ (рис. 14) все интегральные линии, за исключением только обеих половин оси $O\xi$, касаются оси $O\eta$.

Во всех случаях, когда $k>0$, всякая интегральная линия подходит к O по определенному направлению, т. е. имеет в O определенную касательную. Вообще, когда всякая интегральная линия, имеющая точки, достаточно близкие к O, приближается к O как угодно близко, и притом по определенному направлению, то точку O называют *узлом*. Значит, при $k>0$ точка O есть узел для интегральных линий уравнения (3.34,а).

Поведение интегральных линий $\eta|\xi|^{-k}=c$, когда $k<0$, изображено на рис. 15. В этом случае к точке O подходят как угодно близко только четыре интегральные линии: две полуоси $O\xi$ и две полуоси $O\eta$. Всякая же другая интегральная линия, приблизившись достаточно близко к точке O, потом начинает от нее удаляться. Такие точки называются *седлами*. Именно такой вид имеют на карте линии уровня перевала между двумя горами (седловины).

2-й случай. Общим интегралом служит уравнение $b\eta=\xi(a+b\ln|\xi|)$ (рис. 16). Все интегральные линии касаются в точке O оси $O\eta$. Из координатных осей только ось $O\eta$ является интегральной линией. Точка O в этом случае есть также узел, как и при $k>0$ в первом случае.

3-й случай. Уравнение (3.34,в) легче всего проинтегрировать, если перейти к полярным координатам. Положим

$$\xi=\rho\cos\varphi, \qquad \eta=\rho\sin\varphi.$$

Тогда после вычислений получим

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=k\rho$$

и, следовательно,

$$\rho=Ce^{k\varphi}.$$

Если $k>0$, все интегральные кривые приближаются к O, бесконечно навиваясь на эту точку, когда $\varphi\to-\infty$ (рис. 17). При $k<0$ то же самое происходит, когда $\varphi\to+\infty$. В этих случаях точку O называют *фокусом*. Если же $k=0$, семейство интегральных кривых уравнения (3.34,в) состоит из окружностей с центром в O. Вообще, если некоторая окрестность точки O целиком заполнена замкнутыми интегральными линиями, содержащими внутри себя O, то такую точку называют *центром*. Центр может легко перейти в фокус, если к числителю и знаменателю правой части уравнения (3.32) приписать члены какого угодно высокого порядка; следовательно, в этом случае поведение интегральных кривых вблизи O не определяется членами 1-го порядка. Позже, в § 48, мы увидим, что k обращается в нуль только тогда, когда действительная часть корней λ детерминанта

$$\begin{vmatrix} \lambda - b & -a \\ -d & \lambda - c \end{vmatrix}$$

обращается в нуль. Ни в каких других из рассмотренных выше случаев эта действительная часть в нуль не обращается.

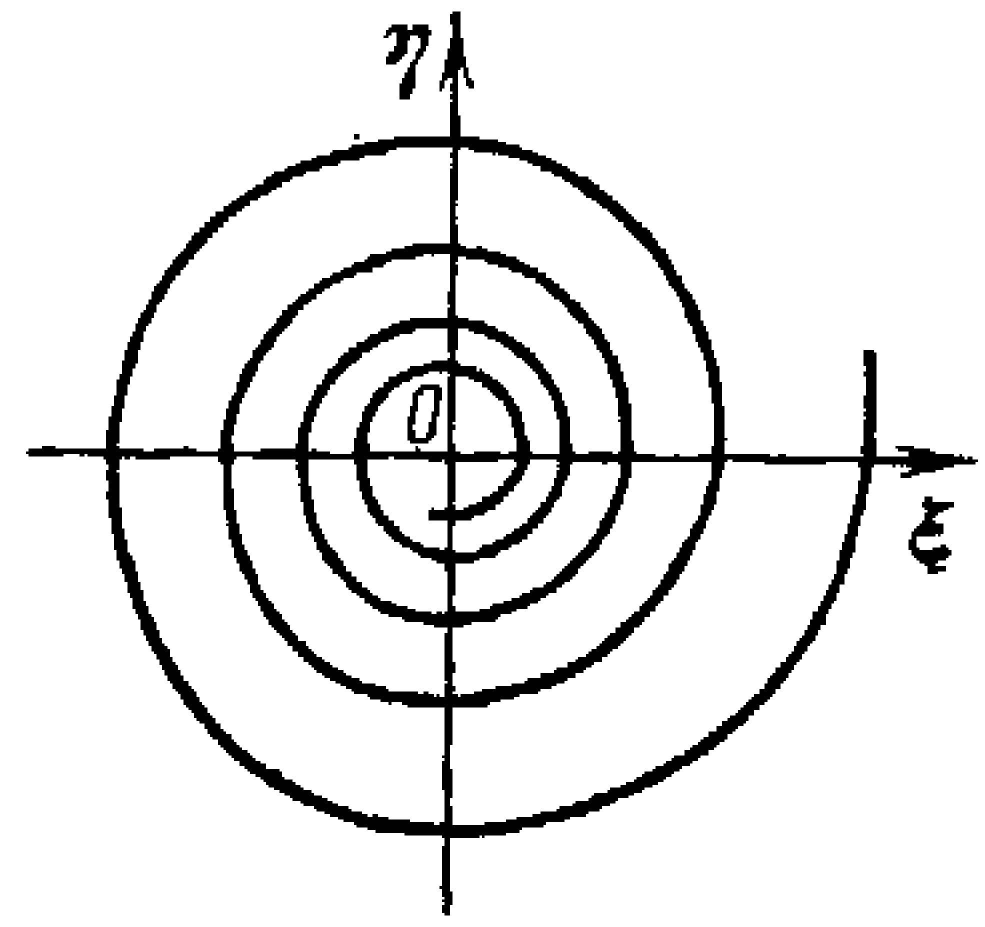

Рис. 17

Изложенная в этом параграфе классификация особых точек принадлежит Пуанкаре.

ЗАДАЧИ

1. Представьте поведение интегральных кривых вблизи особых точек для следующих уравнений:

$$y' = \frac{y}{x^2}, \quad y' = \frac{x}{y^2}, \quad y' = \frac{x^2}{y^2}, \quad y' = \frac{y^2}{x^2}, \quad y' = x^m y^n$$

(m и n — целые).

2. Представьте поведение интегральных кривых для уравнений

$$y' = \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\pm 1} \left(\sin\frac{1}{y}\right)^{\pm 1}$$

(четыре случая).

3. Как расположены интегральные линии уравнения (3.33), если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0?$$

4. Приведите пример особой точки, в некоторой окрестности которой через каждую точку проходит единственная интегральная кривая.

5. При каких a, b, c, d уравнение (3.33) переходит в себя при всех аффинных однородных преобразованиях? При всех вращениях?

§ 23. Особые линии

Определения: 1. Линию, все точки которой являются особыми для уравнения (3.2) или (3.2′), будем называть *особой*.

2. Если особая линия является в то же время интегральной для уравнения (3.2) или (3.2′), то ее будем называть *особой интегральной* линией этого уравнения.

Примеры. Примером особой, но не интегральной линии может служить всякая неинтегральная линия уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — функция, построенная М. А. Лаврентьевым (ср. § 9).

Ось Ox является особой интегральной линией для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y \ln^2 |y|, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0; \end{cases}$$

это интегральная линия неединственности.

В конкретных примерах обычно наибольший интерес представляет разыскание именно интегральных линий неединственности, так как их знание помогает представить картину интегральных линий в целом.

Всякая линия, являющаяся частью границы области G, где определена одна из функций $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ в уравнении (3.2) или (3.2′), является особой линией для этого уравнения. Может случиться, что эта линия является также интегральной, если уравнение (3.2) или (3.2′) задано и на границе G (тогда это будет «граничная интегральная линия»).

В качестве примера интегральной линии, на которой поле направлений терпит разрыв, можно взять ось x для уравнения

$$y' = \operatorname{sgn} y \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \\ -1, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

§ 24. О поведении интегральных линий в целом

Иногда бывает важно построить схему поведения интегральных линий во всей области задания поля направлений «в целом», не заботясь при этом о сохранении масштаба. На рис. 13—17 мы строили подобные схемы для поведения интегральных линий в окрестности изолированной особой точки. Если все точки односвязной области G, где задана правая часть дифференциального уравнения (3.2), обыкновенные, то семейство интегральных линий можно схематически изобразить семейством отрезков параллельных прямых, так как в этом случае через каждую точку области G проходит одна интегральная линия и никакие две интегральные линии не пересекаются.

Для уравнения же более общего вида (3.2) или (3.2′), которое к тому же имеет особые точки или линии, структура интегральных линий может быть значительно сложнее[1]. Одной из самых фундаментальных задач теории дифференциальных уравнений является задача — найти по возможности более простой способ построения схемы поведения семейства интегральных линий заданного дифференциального уравнения на всей области его определения, т. е. изучение поведения интегральных линий этого уравнения «в целом». Эта задача, относящаяся к так называемой *качественной теории* дифференциальных уравнений, еще очень далека от своего разрешения даже для уравнений вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — многочлены выше 1-й степени. В связи с нею скажем несколько слов о так называемых «предельных циклах».

[1] См. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1949; С. Лефшец. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961; Э. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958; В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971; В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

Рассмотрим для примера дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho-1, \tag{3.35}$$

где ρ и φ — полярные координаты на плоскости (x, y) [1]. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\rho=1+Ce^{\varphi},$$

где C — произвольная постоянная; чтобы ρ было неотрицательным, надо, чтобы φ принимало значения, не большие чем $-\ln|C|$, если $C<0$. Семейство интегральных линий состоит (рис. 18) из:

1) окружности $\rho=1$ $(C=0)$;

2) спиралей, выходящих из начала координат O, которые изнутри приближаются к окружности $\rho=1$ при $\varphi\to-\infty$ $(C<0)$;

3) бесконечных спиралей, которые приближаются извне к окружности $\rho=1$, когда $\varphi\to-\infty$ $(C>0)$.

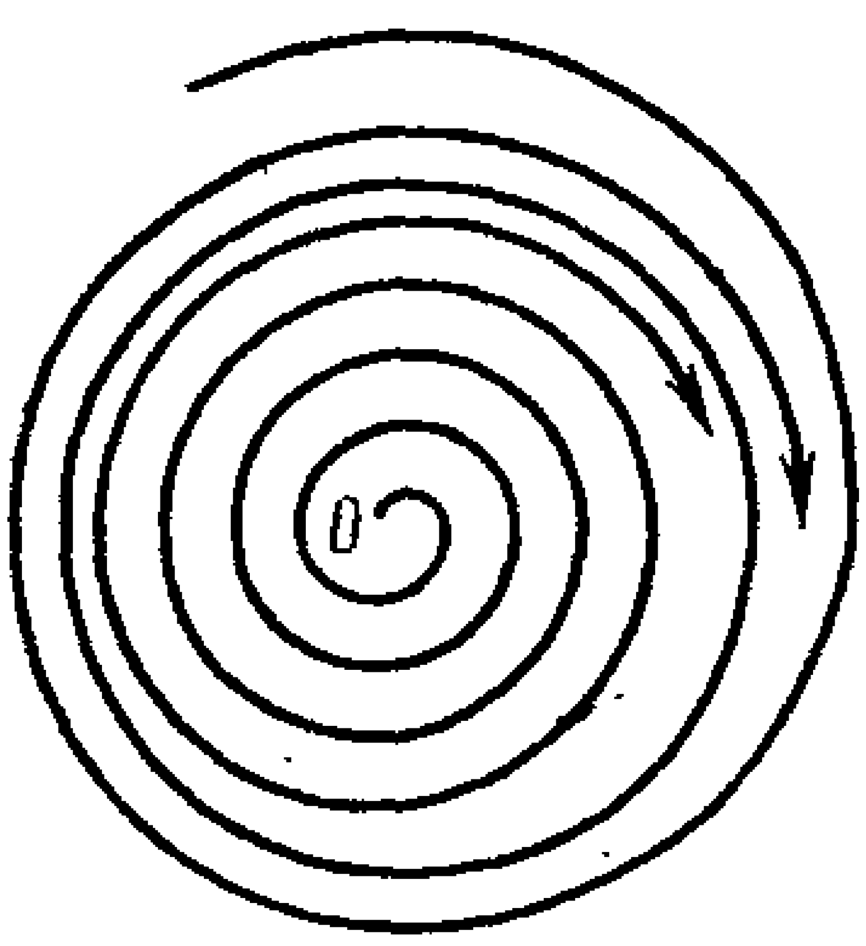

Рис. 18

Окружность $\rho=1$ называется *предельным циклом* для уравнения (3.35). Вообще *замкнутая интегральная линия L называется предельным циклом, если все ее точки обыкновенные и к ней асимптотически приближается некоторая другая интегральная линия* [2]. Разыскание предельных циклов представляет большой интерес для приложений [3].

Заметим, что все точки окружности $\rho=1$ являются обыкновенными для уравнения (3.35). В этом можно убедиться, если от полярных координат перейти к де-

[1] Значит, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-x}$.

[2] Иногда применяются другие определения предельного цикла, например, вместо последнего условия требуется, чтобы в некоторой окрестности линии L не было других замкнутых интегральных линий.

[3] См., например, А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

Указание. Сравните наклон интегральных линий этого уравнения с наклоном в той же точке интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

6. Начертите схему поведения на всей плоскости интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y-x}+(y-x)^2+(x-1)^2+\frac{2}{3}(x-1)^3-\frac{1}{3}.$$

Докажите, что оно имеет две особые точки: седло $(0, 0)$ и фокус $(1, 1)$.

Указание. Сравните наклон интегральной линии этого уравнения с наклоном в той же точке интегральной линии уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y-x},$$

которое легко интегрируется в квадратурах.

7. Докажите, что если замкнутую интегральную линию L, все точки которой обыкновенные, можно заключить в полосу, не содержащую других замкнутых интегральных линий, то L — предельный цикл.

8. Докажите, что если к некоторой замкнутой интегральной линии L без особых точек асимптотически приближаются извне и изнутри две интегральные линии, то L можно заключить в полосу, целиком заполненную интегральными линиями, асимптотически приближающимися к L.

9. Постройте пример замкнутой интегральной линии L без особых точек, не являющейся предельным циклом, причем никакая окрестность L не заполнена сплошь замкнутыми интегральными линиями.

10. Докажите, что если внутри и на самой замкнутой кривой L с непрерывно вращающейся касательной нет особых точек поля, то в точках на линии L направление поля по крайней мере два раза совпадает с направлением касательной к L и по крайней мере два раза с направлением нормали к L. (Отсюда, в частности, следует теорема Бендиксона о том, что внутри замкнутой интегральной линии должна быть по крайней мере одна особая точка поля.)

11. Докажите, что каждая интегральная линия уравнения $y'=x^2-y^2$ имеет по крайней мере одну точку перегиба и хотя бы один раз пересекается с прямой $y=x$.

Указание. Используйте задачу 5 § 2.

§ 25. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Примером таких уравнений может служить уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0. \tag{3.36}$$

Как легко видеть, оно эквивалентно уравнениям

$$\frac{dy}{dx} = 1 \tag{3.37а}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = -1. \tag{3.37б}$$

Первое из этих уравнений представляет поле направлений, наклоненных к Ox под углом 45°, а второе — поле направлений, наклоненных к Ox под углом 135°. Уравнению же (3.36) соответствует поле направлений, полученное наложением полей (3.37а) и (3.37б). Через каждую точку плоскости (x, y) проходит одна и только одна интегральная линия уравнения (3.37а) — прямая, наклоненная к Ox под углом в 45°, и одна и только одна интегральная линия уравнения (3.37б) — прямая, наклоненная к Ox под углом 135°. Значит, через каждую точку плоскости (x, y) проходят две и только две интегральные линии уравнения (3.36) (рис. 19) [1].

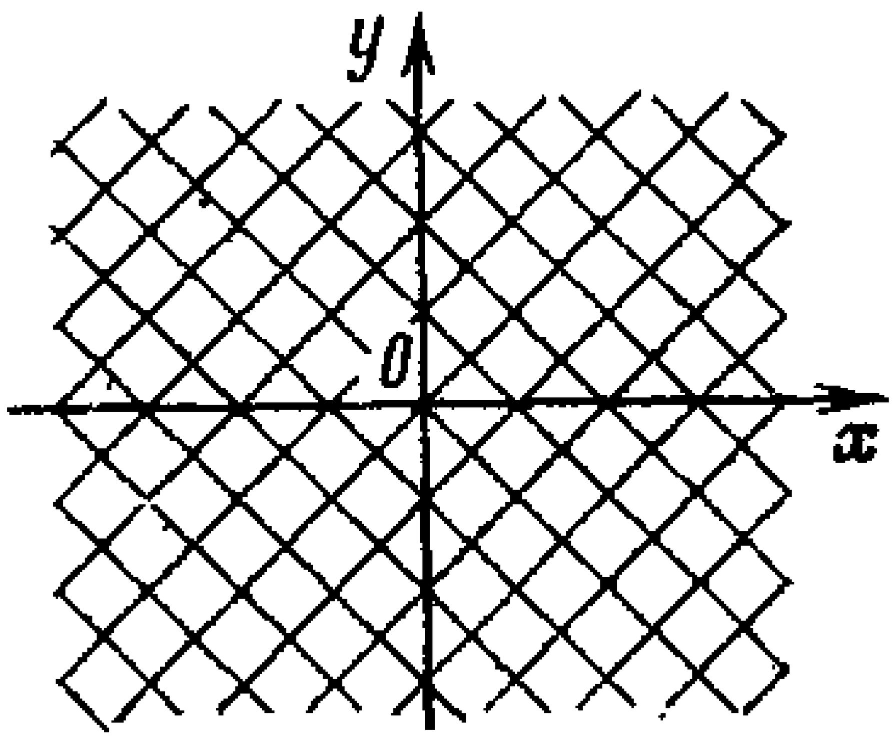

Рис. 19

Можно доказать следующую общую теорему.

Теорема. *Пусть дано уравнение*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.38}$$

где функция $F(x, y, y')$ обладает следующими тремя свойствами:

1. *$F(x, y, y')$ определена на замкнутой и ограниченной области $\bar{G}$ в пространстве (x, y, y'), где она непрерывна.*

[1] В анализе (см., например, Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969, т. 1, с. 224) доказывается, что если на некотором интервале (a, b) функция $\Phi(x)$ всюду имеет производную, равную $\varphi(x)$, и если $\varphi(x)$ в двух точках x_1 и x_2 $(a<x_1<x_2<b)$ принимает значения y_1 и y_2, то на интервале (x_1, x_2) функция $\varphi(x)$ принимает все промежуточные значения между y_1 и y_2. Поэтому не существует функции $y(x)$, которая при всяком x имела бы производную, принимающую значения, равные только ± 1, причем в одних точках эта производная равнялась бы $+1$, а в других -1.

2. *Для некоторой точки* (x_0, y_0), *лежащей на плоскости* (x, y), *число различных решений уравнения* (3.38) *относительно* y' *конечно и равно* m. *Пусть этими решениями будут числа*

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \quad (m>0).$$

3. *Каждая из точек* (x_0, y_0, b_i) $(i=1, \ldots, m)$ *лежит внутри* G, *и в некоторой окрестности* R_i[1] *каждой из этих точек функция* $F(x, y, y')$ *имеет непрерывную производную по* y *и непрерывную производную по* y', *которая по абсолютной величине всюду в* R_i *превосходит некоторое постоянное положительное число.*

Тогда существует окрестность $\mathfrak{A}$ *точки* (x_0, y_0), *расположенная в плоскости* (x, y), *причем через каждую точку* $\mathfrak{A}$ *проходит* m *и только* m *графиков решений уравнения* (3.38).

Доказательство. При сделанных предположениях, согласно теореме о неявной функции, у каждой из точек (x_0, y_0, b_i) в пространстве (x, y, y') существует такая окрестность R_i, в которой уравнение (3.38) имеет одно и только одно решение вида

$$y'=f_i(x, y) \quad (i=1, \ldots, m); \tag{3.39}$$

каждая функция $f_i(x, y)$ непрерывна по x и имеет производную по y, равную

$$-\frac{F'_y(x, y, f_i)}{F'_{f_i}(x, y, f_i)}.$$

В силу сделанных предположений о функции F эта производная ограничена. Все окрестности R_i $(i=1, \ldots, m)$ можно представлять себе в виде цилиндров с образующими, параллельными оси Oy', и с основаниями, проектирующимися на одну и ту же лежащую в плоскости (x, y) окрестность точки (x_0, y_0) (на рис. 20 $m=2$). Эту окрестность $\mathfrak{A}$ можно выбрать настолько малой, чтобы ни над ней, ни под ней не было ни одной точки (x, y, y') поверхности (3.38), не принадлежащей какой-нибудь из поверхностей (3.39). Действительно, если такие точки

[1] Под окрестностью R_i мы понимаем полную окрестность точки (x_0, y_0, b_i) в пространстве (x, y, y').

существуют, то по предыдущему они лежат вне цилиндров R_i ($i=1, \ldots, m$). Поэтому, если бы такие точки существовали при как угодно малой $\mathfrak{A}$, то в силу ограниченности и замкнутости $\bar{G}$ и непрерывности функции $F(x, y, y')$ они были бы и на прямой

$$x=x_0, \quad y=y_0$$

вне цилиндров R_i; значит, уравнение $F(x_0, y_0, y')=0$ имело бы больше чем m решений относительно y', что противоречит нашему предположению.

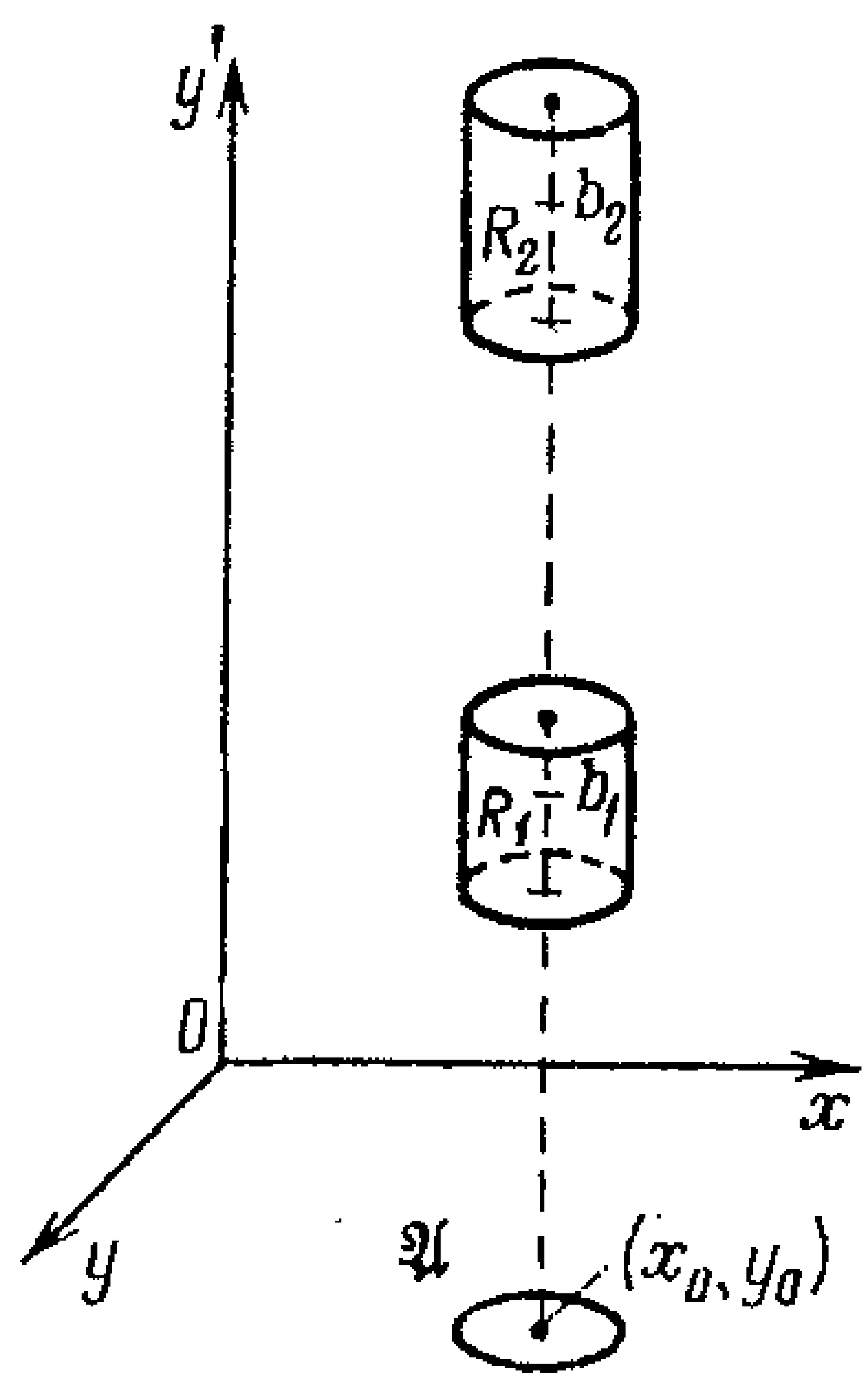

Рис. 20

Итак, мы нашли, что при сделанных предположениях относительно $F(x, y, y')$ у точки (x_0, y_0) на плоскости (x, y) существует такая окрестность $\mathfrak{U}$, в которой уравнение (3.38) имеет m и только m различных решений (3.39). Функции $f_i(x, y)$ непрерывны по x и имеют ограниченную производную по y. Поэтому для каждой точки P из $\mathfrak{U}$ каждое из уравнений (3.39)) имеет в области $\mathfrak{U}$ одну и только одну интегральную линию, проходящую через точку P. Так как все y' в каждой точке области $\mathfrak{U}$ различны, то все эти интегральные линии различны и между собой не касаются. А потому через каждую точку области $\mathfrak{A}$ проходит m и только m интегральных линий уравнения (3.38)[1], что и требовалось доказать.

Очевидно, ни одно из направлений поля, задаваемого уравнением (3.38), не параллельно оси Oy. Следовательно, ни одна из интегральных линий этого уравнения не имеет касательных, параллельных оси Oy. Чтобы не исключать направлений, параллельных оси Oy, аналогично тому, как это делалось для уравнений, разрешенных относительно производных, мы будем иногда наряду с уравнением

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (3.40a)$$

[1] См. сноску на с. 105.

рассматривать уравнение

$$F_1\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0. \tag{3.40б}$$

При этом функция $F_1\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right)$ выбраиа так, что уравнения (3.40а) и (3.40б) нигде не противоречат одно другому; другими словами, если для некоторых x, y и $\alpha \neq 0$ значения $F(x, y, \alpha)$ и $F_1\left(x, y, \frac{1}{\alpha}\right)$ определены и одно из них равно нулю, то и другое тоже равио нулю.

Иногда бывает удобнее объединять уравнеиия (3.40а) и (3.40б) в одно, написанное в дифференциалах (см. дальше пример 1). Мы будем наряду с решениями уравнений вида (3.38) рассматривать интегральные линии уравнений (3.40) (ср. § 2).

Определения. Пусть функция $F(x, y, y')$ [соответствеино $F_1(x, y, x')$] определена на некоторой области $G_{xyy'}$ (соответственно $G_{xyx'}$) в пространстве (x, y, y') [соответственно (x, y, x')] и на некоторой части ее границы. Пусть точка $P(x_0, y_0)$ лежит внутри той области G_{xy} плоскости (x, y), где уравнения (3.40а), (3.40б) определяют некоторые направления, или на границе этой области.

1. Будем называть эту точку P *обыкновенной точкой* уравнений (3.40а), (3.40б), если для нее можно указать такую окрестность $\mathfrak{A}$ в плоскости (x, y), через каждую точку которой проходит в этой окрестности одно и то же постоянное для этой окрестности конечное число интегральных линий, равное числу направлений, задаваемых в точке P уравнениями (3.40а) и (3.40б); при этом эти линии должны получаться в результате наложения друг на друга семейств интегральных линий уравнений (3.2) или (3.2') с непрерывными правыми частями.

В силу сказаниого выше для этого достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а) У точки $P(x_0, y_0)$ на плоскости (x, y) есть такая замкнутая окрестность $\bar{\mathfrak{A}}_{xy}$, что множество $\bar{G}^{*}_{xyy'}$ (либо $\bar{G}^{*}_{xyx'}$) точек, в которых определена функция $F(x, y, y')$ [соответственно $F_1(x, y, x')$] и проекции которых на плоскость (x, y) не выходят из этой окрестности, образует ограниченную и замкнутую область, а функция $F(x, y, y')$ [соответственно $F_1(x, y, x')$] на этом множестве непрерывна. Чтобы множество $\overline{\mathring{G}}_{xyy'}$ (соответственно $\overline{\mathring{G}}_{xyx'}$ не получалось неограниченным оттого, что рассматриваются как угодно большие значения y' (соответственно x'), условимся, например, пользоваться уравнением (3.40а) [соответственно (3.40б)] только тогда, когда $|y'|$ (соответственно $|x'|$) не больше некоторой константы, которая не должна равняться абсолютной величине никакого корня y' (соответственно x') уравнения $F(x_0, y_0, y')=0$ [соответственно $F_1(x_0, y_0, x')=$ $=0$].

b) Число направлений интегральных линий, задаваемых уравнениями (3.40а) и (3.40б) в точке $P(x_0, y_0)$, конечно.

c) Для каждого из направлений, задаваемых (3.40а) [соответственно (3.40б)], для функции $F(x, y, y')$ [соответственно $F_1(x, y, x')$] в точке (x_0, y_0) выполняется условие 3 только что доказанной теоремы [для $F_1(x, y, x')$ условие 3 выполняется, если в формулировке теоремы поменять ролями x и y, y' и x'].

2. Если точка $P(x_0, y_0)$ не является обыкновенной, то будем называть эту точку *особой*.

3. Пользуясь этим определением, мы определим *особые линии и особые интегральные линии* совершенно так же, как при помощи понятия об особой точке такие линии определялись в § 23. Заметим, что в силу п. 1 особые точки уравнения (3.40а) или (3.40б) с достаточно гладкими левыми частями либо являются граничными, либо удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, y')=0, \\ F'_{y'}(x, y, y')=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F_1(x, y, x')=0, \\ F'_{1x'}(x, y, x')=0 \end{cases}$$

(предполагается, что условия a) и b) выполнены).

Примеры особых точек, линий и интегральных линий, которые мы привели в § 22 и 23, пригодны и теперь. Кроме того, мы разберем еще следующие два примера.

Пример 1.

$$y'^2(1-x^2)-x^2=0, \tag{3.41а}$$

$$(1-x^2)-x^2x'^2=0, \tag{3.41б}$$

или в более симметричном виде

$$(1-x^2)\,dy^2-x^2dx^2=0. \tag{3.41}$$

Уравнение (3.41) определяет поле направлений только на полосе $|x|\leqslant 1$. Левая часть уравнения (3.41а) непрерывна всюду на этой полосе и имеет непрерывные производные по y и y'. Производная по y' от нее равна

$$2y'(1-x^2).$$

Отсюда видно, что эта производная обращается в нуль, если: 1) $x=\pm 1$, 2) $y'=0$. В силу уравнения (3.41а) последнее происходит только на прямой $x=0$. Производная по x' от левой части (3.41б) обращается в нуль на этих же прямых. Значит, для уравнения (3.41) особыми могут быть только точки трех линий

$$x=+1, \quad x=-1, \quad x=0.$$

Так как прямые $x=\pm 1$ образуют границу той области, где уравнения задают некоторые направления, то они являются особыми линиями. Из уравнения (3.41б) видно, далее, что они являются интегральными линиями.

Покажем, что прямая $x=0$ является также особой (но неинтегральной) линией. Заметим прежде всего следующее. Из уравнения (3.41) получаем, что

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда следует, что интегральными линиями уравнения (3.41) будут окружности радиуса 1, центры которых лежат на оси Oy. Все они касаются прямых $x=\pm 1$.

Теперь уже легко видеть, что прямая $x=0$ является особой. Действительно, на этой прямой из уравнения (3.41а) мы находим для y' только *одно* значение нуль, уравнение же (3.41б) не дает для x' здесь никакого значения. Но ни у какой точки B, лежащей на оси Oy, нельзя указать такой окрестности, через каждую точку которой проходила бы в этой окрестности одна и только одна интегральная линия; действительно, уже через эту самую точку B, очевидно, проходят в этой окрестности четыре интегральные линии: A_1BA_4, A_2BA_3, A_2BA_4 и A_1BA_3 (рис. 21). Значит, ось Oy будет особой, но, очевидно, неинтегральной линией. У каждой же точки полосы $-1<x<+1$, если только эта точка не лежит на оси Oy, есть такая окрестность, через каждую точку которой в этой окрестности проходят две и только две интегральные линии.

Заметим, что кроме указанных уже интегральных линий у нашего уравнения будут еще интегральные линии вида

$$P_1B_1P_4P_5B_2P_2P_1, \quad P_1B_1P_4BP_3OP_6BP_1$$

и др. Отсюда видно, что в любой окрестности любой точки $x=\pm 1$ через эту точку проходит бесконечное число интегральных линий; стало быть, эти прямые являются граничными интегральными линиями неединственности.

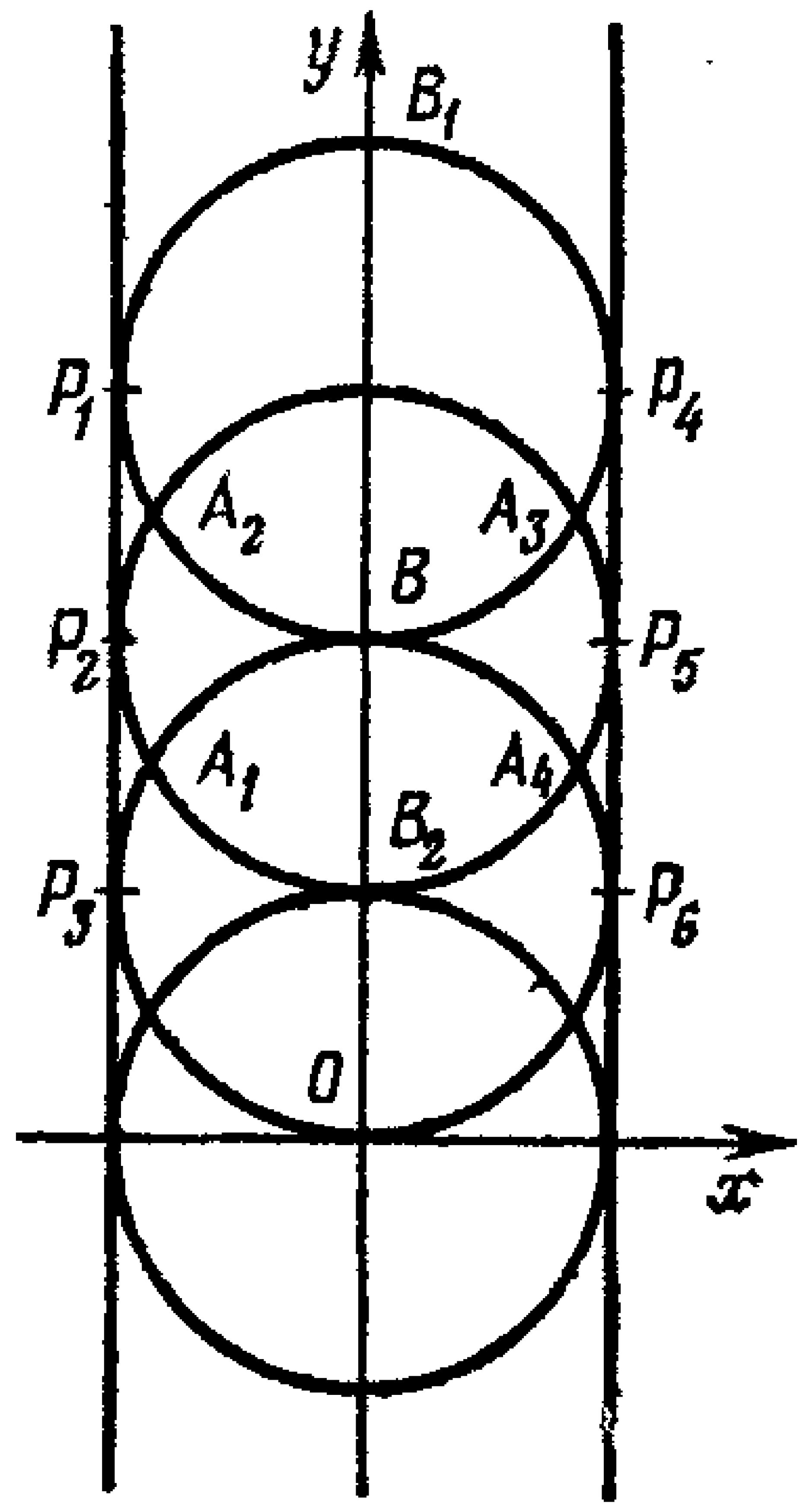

Рис. 21

Пример 2. *Уравнение Клеро.* Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$F(x,\ y,\ y') \equiv y - xy' - f(y') = 0. \tag{3.42}$$

Мы будем предполагать, что $f(y')$ определена на замкнутом интервале $a \leqslant y' \leqslant b$, непрерывна вместе со своими первыми двумя производными и что на этом интервале $f''(y')$ всюду сохраняет знак, например, отрицательна.

Тогда при всяких x и y уравнение (3.42) имеет не больше двух корней относительно y'. (Почему?) Поэтому, как легко видеть, для этого уравнения будет обыкновенной всякая точка $(x_0,\ y_0)$, для которой

1. Уравнение

$$y_0 - x_0y' - f(y') = 0 \tag{3.43}$$

не удовлетворяется ни при $y'=a$, ни при $y'=b$, но оно удовлетворяется по крайней мере при одном значении y' из интервала $(a,\ b)$.

2. Для каждого из корней y' уравнеиия (3.43)

$$F'_{y'}(x_0, y_0, y') = -x_0 - f'(y') \neq 0.$$

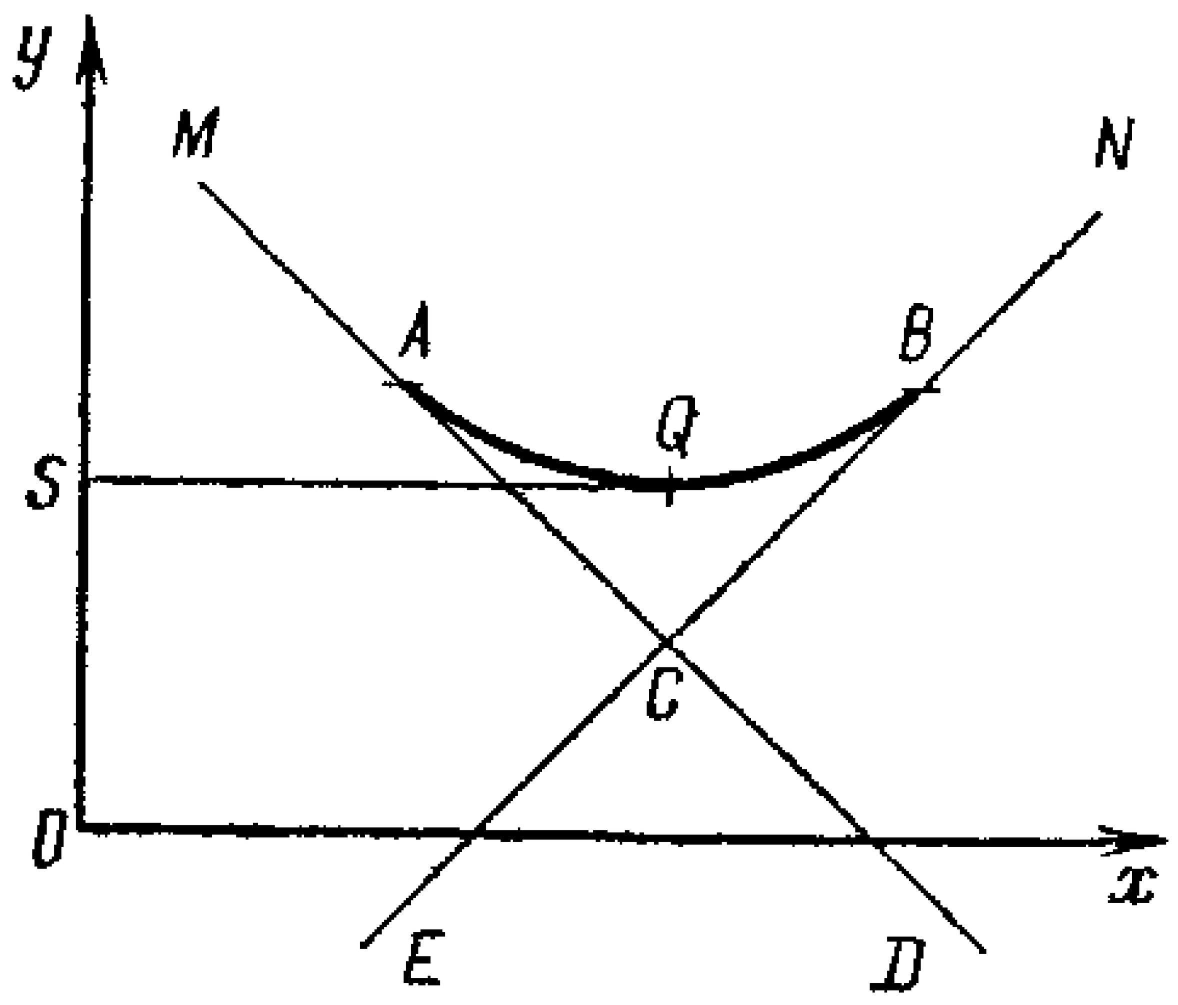

Рис. 22

Точки, не удовлетворяющие второму из этих условий, образуют некоторую линию. Если принять y' за параметр и обозначить его через p, уравнение этой линии можно написать так:

$$y = xp + f(p), \quad x = -f'(p) \tag{3.44}$$

или

$$\begin{aligned} y &= -f'(p) \cdot p + f(p), \\ x &= -f'(p), \end{aligned} \tag{3.45}$$

Эти уравнения определяют y как функцию от x. В этом можно убедиться, если второе из уравнений разрешить относительно p (что возможно, так как $f''(p)$ сохраняет знак) и найденное значение p подставить в первое из них. Легко видеть, что линия (3.45) является интегральной. Действительно, из уравнений (3.45) находим

$$\begin{aligned} dy &= [-f''(p) \cdot p - f'(p) + f'(p)]\, dp = -pf''(p)\, dp, \\ dx &= -f''(p)\, dp. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

и потому для линии (3.45) или, что все равно, для линии (3.44) уравнение (3.42) удовлетворяется.

Так как $\frac{dy}{dx} = p$, то при возрастании p величина $\frac{dy}{dx}$ также возрастает. Уравнение (3.45) показывает, что если

$$f''(p) < 0,$$

то $\frac{dx}{dp} > 0$. Поэтому выпуклость кривой (3.45) обращена вниз (рис. 22, кривая (3.45) изображается линией AQB).

Легко проверить, что при любом постоянном c ($a \leqslant c \leqslant b$) прямая

$$y = cx + f(c) \tag{3.45'}$$

является интегральной. Эта прямая, очевидно, касается линии (3.45) в точке

$$y = -f'(c) \cdot c + f(c),$$
$$x = -f'(c).$$

Обратно, каждая касательная к линии (3.45) имеет вид (3.45′). (Почему?) Поэтому уравнение (3.43) имеет столько корней относительно y', сколько касательных к дуге AQB можно провести через точку (x_0, y_0).

Проведем касательные прямые $MACD$ и $NBCE$ в концах A и B линии (3.45). Они вместе с кривой (3.45) разобьют всю плоскость (x, y) на следующие пять областей:

$$MACE, \quad NBCD, \quad AQBCA, \quad ECD, \quad MAQBN.$$

Через каждую точку, лежащую внутри углов $MACE$ и $NBCD$, проходит одна и только одна касательная к дуге AB, и потому для этих точек уравнение (3.43) имеет один и только один корень относительно y', и притом отличный от a и b. Эти точки поэтому являются обыкновенными точками уравнения (3.42). Значит, для каждой такой точки можно указать окрестность, в которой через каждую точку проходит столько интегральных линий этого уравнения, сколько оно имеет в этой точке корней относительно y', т. е. одна; этой единственной интегральной линией будет отрезок касательной к дуге AB, проведенной через эту точку. Таким же образом найдем, что каждая точка, лежащая внутри области $AQBCA$, также является обыкновенной точкой уравнения (3.42); для нее можно указать такую окрестность, через каждую точку которой проходят две и только две интегральные линии; они будут отрезками касательных к AB, проведенных через эту точку. Через каждую же внутреннюю точку областей $MAQBN$ и ECD не проходит ни одна интегральная линия уравнения (3.42). Эти точки не входят в нашу классификацию обыкновенных и особых точек.

Из всех точек плоскости (x, y), в которых уравнение (3.42) имеет корни относительно y', условию 1 (с. 111) не будут удовлетворять только точки прямых $MACD$, $NBCE$, а условию 2 — точки линии AQB. Легко видеть, что эти линии будут особыми интегральными линиями для уравнения (3.42).

Заметим в заключение, что, кроме тех интегральных линий, о которых уже шла речь, уравнение (3.42) будет иметь еще интегральные линии такого типа, как линия $SQBN$; они составлены из кусков дуги AB и кусков касательных к ней.

ЗАДАЧИ

1. Определите вид интегральных линий следующих уравнений:

$$\sin y' = 0, \quad \sin y' = x.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y') = 0.$$

Докажите, что если кривая $F(x, z) = 0$ при $x = x_0$, $z = z_0$ имеет вертикальную касательную, не пересекающую кривую, то через любую точку (x_0, y) проходит интегральная линия рассматриваемого уравнения, имеющая там точку возврата. Что соответствует в этом смысле точкам максимума кривой $F(x, z) = 0$? Точкам возврата? Точкам самопересечения? Вертикальным асимптотам? Разберите уравнения

$$(x^2 + y'^2)^2 = a^2(x^2 - y'^2), \quad x((1 + y'^0) = y'^4.$$

3. Решите уравнение Клеро $y - xy' - y' = 0$. Почему семейство интегральных линий расположено иначе, чем на рис. 22?

4. Исследуйте семейство решений уравнения (3.42), если $f''(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ обращается в нуль конечное число раз.

5. Один из методов решения системы уравнений $y = f(t)$, $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(t)$ (t — параметр) состоит в дифференцировании по t первого из уравнений, откуда

$$x = \int \frac{f'(t)}{\varphi(t)}\,dt + C;$$

это равенство вместе с соотношением $y = f(t)$ и дает параметрическое представление семейства искомых решений. Приведите достаточные условия для применимости этого метода.

§ 26. Огибающие

Допустим, что нам известно для некоторого дифференциального уравнения (3.38) семейство

$$F(x, y, C)=0 \tag{3.46}$$

интегральных линий, которое покрывает некоторую замкнутую область $\bar{G}$ плоскости (x, y) так, что через каждую точку такой области проходит по крайней мере одна, но не более конечного числа линий этого семейства. Требуется найти такую проходящую по $\bar{G}$ линию L, которая в *каждой своей точке касается некоторой линии семейства* (3.46) *и каждого куска которой касается бесконечное множество линий этого семейства*[1]. Такая линия L называется *огибающей семейства* (3.46). Очевидно, огибающая семейства интегральных линий будет также интегральной линией уравнения (3.38), так как в каждой ее точке она касается некоторой интегральной линии и, следовательно, имеет направление поля. Относительно функции $F(x, y, C)$ нам придется предположить, что она *имеет непрерывные производные по всем своим аргументам*, и сделать еще некоторые другие предположения, о которых будет сказано несколько позже и которые напечатаны курсивом.

Допустим, что искомая линия L существует. Так как она в каждой своей точке (x, y) касается некоторой линии L_C [значок C указывает то значение параметра C, при котором уравнение этой линии получается из общего уравнения (3.46)], то координаты ее точек удовлетворяют уравнению $F(x, y, C(x, y))=0$, где теперь C не постоянно, но в каждой точке линии L принимает свое значение (именно равное тому C, которое соответствует линии L_C). Будем рассматривать только такой кусок линии L, где *y есть дифференцируемая функция от x* (точно так же можно исследовать куски, где x есть дифференцируемая функция от y). Тогда можно считать C в

---

[1] Считаются различными те линии семейства (3.46), которым соответствуют различные C. Отметим, что две линии семейства могут геометрически совпадать на некотором куске, однако в силу сделанных предположений ни на каком куске огибающей не могут геометрически совпадать все линии семейства, касающиеся этого куска.

предыдущем уравнении зависящим только от x и переписать это уравнение в следующем виде:

$$F(x,\ y,\ C(x)) = 0. \tag{3.47}$$

Допустим, что *функция* $C(x)$ *дифференцируема, не постоянна ни в каком интервале рассматриваемых значений* x и нам известна. Найдем тогда из уравнения (3.47) значение y' для удовлетворяющей этому уравнению функции y от x. Продифференцируем для этого уравнение (3.47) по x, считая y функцией от x. Получим

$$F'_x + F'_y y' + F'_C C'_x = 0.$$

С другой стороны, если бы мы нашли y' для проходящей через ту же точку $(x,\ y)$ линии L_C семейства (3.46), мы получили бы

$$F'_x + F'_y y' = 0.$$

Чтобы определяемые из обоих уравнений значения y' (определить y' из этих уравнений можно, *если* $F'_y \neq 0$) были одинаковы (т. е. чтобы в этой точке линия (3.46) и линия (3.47) имели общую касательную), необходимо, чтобы было

$$F'_C C'_x = 0.$$

Чтобы это произведение было равно нулю, надо, чтобы по крайней мере один из его множителей обращался в нуль. Если $C'_x = 0$ на некотором интервале, это будет означать, что C постоянно, что противоречит предположению. Поэтому для огибающей должно быть

$$F'_C = 0. \tag{3.48}$$

Легко видеть и обратное: именно, что если при сохранении всех сделанных допущений относительно $F(x,\ y,\ C)$ уравнения (3.47) и (3.48) определяют $y(x)$ и $C(x)$ как дифференцируемые функции от x, причем $C(x)$ ни в каком интервале рассматриваемых значений x не постоянна, то $y = y(x)$ будет огибающей семейства (3.46).

Замечание 1. Так как в постановке задачи x и y были совершенно равноправны, то в ее решении роли x и y можно поменять.

Замечание 2. Огибающая семейства интегральных линий некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка всегда является особой интегральной линией для этого уравнения, так как она является интегральной линией и все ее точки особые; более точно, на любом ее куске найдутся точки, через которые в как угодно малой окрестности проходит бесконечное количество интегральных линий.

Пример 1. На всей плоскости (x, y) дано семейство кривых

$$F(x, y, C) \equiv y-(x+C)^3=0. \tag{3.49}$$

Оно состоит из кубических парабол, полученных из одной $y=x^3$ сдвигом, параллельным оси Ox.

Приравнивая F'_C нулю, получим $-3(x+C)^2=0$.

Отсюда $C=-x$. Подставляя это в уравнение семейства, получим линию $y=0$, которая, очевидно, является огибающей семейства (3.49) (рис. 23).

Замечание. Если бы мы написали уравнение нашего семейства в виде

$$F(x, y, C) \equiv y^{1/3}-(x+C)=0,$$

то было бы $F'_C=-1$ и наш метод не дал бы огибающей, которая на самом деле существует. Это происходит потому, что теперь F'_y не существует при $y=0$.

Пример 2. На всей плоскости (x, y) задано семейство кривых

$$F(x, y, C) \equiv y^5-(x+C)^3=0. \tag{3.50}$$

Приравнивая F'_C нулю, получим $-3(x+C)^2=0$. Отсюда $C=-x$. Подставляя это в уравнение (3.50), получим $y=0$.

Но легко видеть, что ось Ox не является огибающей семейства (3.50) (рис. 24). Это происходит только потому, что при $y=0$

$$F'_y=5y^4=0.$$

Пример 3. Семейство кругов

$$F(x, y, C) \equiv x^2+(y+C)^2-1=0. \tag{3.51}$$

покрывает полосу между прямыми $x=\pm 1$. Приравнивая нулю $F'_y(x, y, C)$, получим $2(y+C)=0$. Отсюда $C=$

$=-y$. Подставляя это вместо C в уравнение семейства, получим $x=\pm 1$.

Каждая из этих прямых является огибающей семейства (3.51) (см. рис. 21).

Пример 4. Уравнение

$$y-C^3x^2+2C^2x-C=0,$$

которое при $C\neq 0$ можно переписать так:

$$y-C^3\left(x-\frac{1}{C}\right)^2=0,$$

определяет семейство парабол, оси которых параллельны Oy, а вершины находятся на Ox. Очевидно, для них

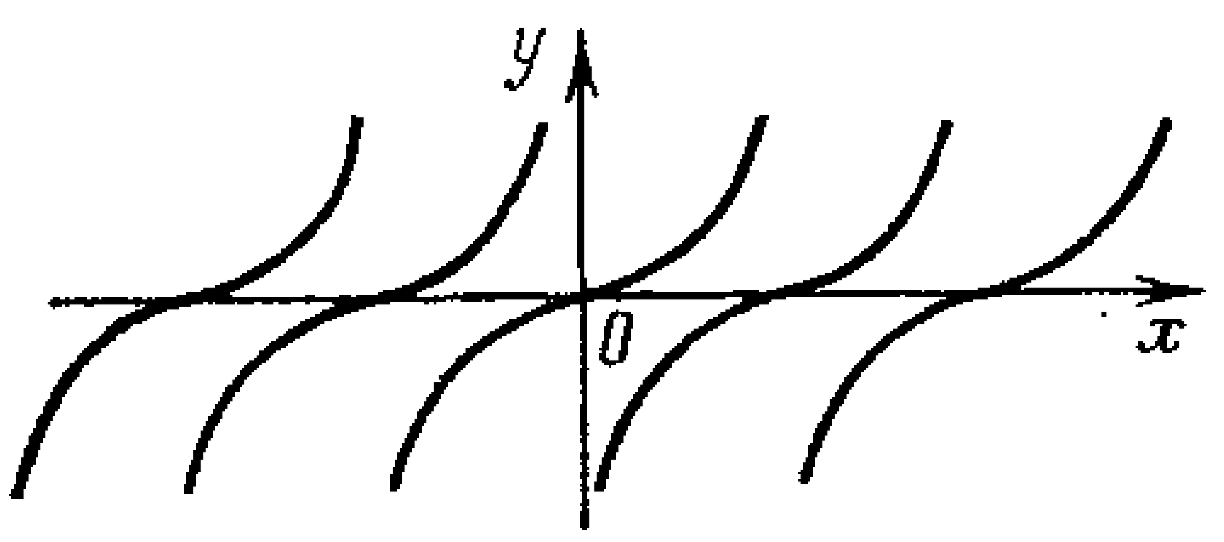

Рис. 23

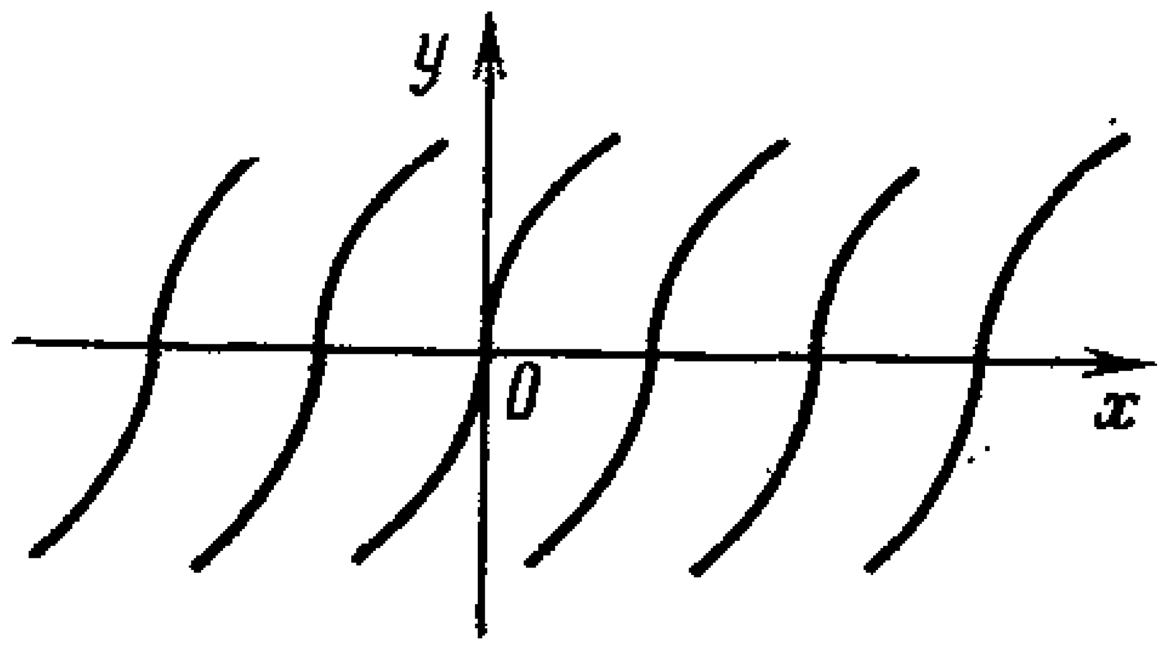

Рис. 24

Ox является огибающей, хотя она в то же время принадлежит самому рассматриваемому семейству: она получается из уравнения этого семейства при $C=0$.

ЗАДАЧА

Найдите по общему методу огибающую в примере 4; какой геометрический смысл имеет гипербола, входящая в эту огибающую?

Часть II

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА IV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

§ 27. Сведение любой системы к системе уравнений 1-го порядка

Пусть дана система

$$\Phi_i\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}};\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots;\ y_n,\ \frac{dy_n}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right)=0, \qquad (4.1)$$

$$i=1,\ \ldots,\ n.$$

В каждое уравнение этой системы входят независимое переменное x, его n искомых функций y_1, y_2, ..., y_n и их производные по x; при этом производные от y_i входят до некоторого порядка m_i.

Чтобы свести систему (4.1) к системе уравнений 1-го порядка, положим $y_i=y_i^{(0)}$,

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx}=y_i^{(k+1)},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m_i-2. \qquad (4.2)$$

Тогда систему (4.1) можно переписать так:

$$\Phi_i\left(x,\ y_1^{(0)},\ y_1^{(1)},\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)},\ \frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx};\ \ldots;\right.$$

$$\left.y_n^{(0)},\ y_n^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(m_n-1)},\ \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}\right)=0,\ i=1,\ \ldots,\ n.$$

$$(4.3)$$

где функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определены в некоторой области G пространства $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Совокупность фукнций

$$y_1(x), \; y_2(x), \; \ldots, \; y_n(x), \tag{4.5}$$

удовлетворяющих уравнениям (4.4), будем называть *решением* этой системы. Уравнения

$$y_i = y_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.6}$$

определяют в пространстве $(x, y_1, \ldots, y_n)$ линию, которая называется *интегральной линией* системы (4.4). Вместо того чтобы говорить, что $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = 1, \ldots, n$, мы будем часто говорить, что *линия* (4.6) *проходит через точку* $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$.

Тот факт, что функции $y_i(x)$ удовлетворяют при $x = x_0$ системе (4.4), можно геометрически интерпретировать так: касательной прямой к интегральной лиинии (4.6) в точке $(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0))$ является прямая L:

$$\frac{y_i - y_i(x_0)}{x - x_0} = f_i(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)), \; i = 1, \ldots, n;$$

здесь x и y_i означают текущие координаты точки, лежащей на прямой L. Поэтому задачу нахождения решения системы (4.4) можно геометрически интерпретировать следующим образом.

В некоторой области G пространства $(x, y_1, \ldots, y_n)$ задано «поле направлений», т. е. в каждой точке этой области задано некоторое направление, которое можно представлять себе, подобно тому как это мы делали в первой части курса для одного дифференциального уравнения, в виде небольшого отрезка прямой, проходящей через эту точку (оба направления этого отрезка нам безразличны). Найти интегральную линию системы (4.4) — это значит найти такую линию, у которой касательиая в каждой точке имеет заданное направление.

Совокупность функций

$$y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_m), \quad i = 1, \ldots, n,$$

будем называть *общим решением системы* (4.4) в области G, если, выбирая соответствующим образом постоянные $C_1, \ldots, C_m$, мы сможем получить любое решение, график которого проходит в этой области. Чаще всего бывает $m=n$.

Если поле направлений задается системой (4.4), то ни одно из этих направлений не лежит в плоскости, параллельной плоскости $x=0$. Это ограничение часто бывает совершенно искусственным. Можно рассматривать любое поле направлений и искать кривые, у которых направление касательной в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке. Такие линии мы будем называть *интегральными линиями этого поля*. Их уравнения, вообще говоря, уже нельзя написать в форме (4.6) уравнений, разрешенных относительно y_i, $i=1,\dots,n$, потому что плоскости, перпендикулярные к оси Ox, могут пересекать эти линии несколько раз и даже содержать целые их куски. Дифференциальные уравнения таких линий (или, что все равно, соответствующего им поля направлений) можно написать, считая x и y_i вдоль этих линий достаточно гладкими, например непрерывными вместе с их производными функциями некоторого параметра t, скажем, длины дуги интегральной кривой или времени, нужного для передвижения по интегральной кривой от какой-то фиксированной на ней точки до произвольной точки $(x, y_1, \dots, y_n)$; на отдельных участках кривой за параметр можно брать какую-нибудь из координат y_i или x. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= f_i^*(x, y_1, \dots, y_n), \quad i=1, \dots, n, \\ \frac{dx}{dt} &= f^*(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Здесь функции f_i^* и f^* не должны все обращаться в нуль в одной и той же точке $(x, y_1, \dots, y_n)$. Поле направлений в пространстве $(x, y_1, \dots, y_n)$, задаваемое уравнениями (4.7), можно задать еще следующими уравнениями:

$$\frac{dy_1}{f_1^*(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n^*(x, y_1, \dots, y_n)} = \\ = \frac{dx}{f^*(x, y_1, \dots, y_n)}. \tag{4.8}$$

Если $f_k^*(x, y_1, \ldots, y_n)$ отлична от нуля в некоторой области G, то эти уравнения можно там разрешить относительно $\frac{dy_i}{dy_k}$, $i=1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, и $\frac{dx}{dy_k}$; значит, здесь за параметр можно взять y_k. Если в области G функция $f^*(x, y_1, \ldots, y_n)$ всюду отличается от нуля, то уравнения (4.8) можно разрешить относительно $\frac{dy_i}{dx}$; здесь x играет роль параметра.

Система уравнений

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n)=0, \quad i=1, \ldots, n,$$

называется *интегралом системы* (4.8), если определяемая ими линия является интегральной для этой системы.

Система уравнений

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n, C_1, \ldots, C_m)=0, \quad i=1, \ldots, n,$$

называется *общим интегралом системы* (4.8) в некоторой области G пространства

$$(x, y_1, \ldots, y_n),$$

если, выбирая соответствующим образом постоянные

$$C_1, \ldots, C_m,$$

можно получить любую интегральную линию этой системы, проходящую в G.

Так как система (4.7) есть частный случай системы вида (4.4), где только число неизвестных на 1 больше, то мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением систем вида (4.4). Для таких систем справедливы многие теоремы, совершенно аналогичные доказанным в главе III первой части нашего курса; доказываются эти теоремы такими же методами, как и там. Поэтому мы не будем все эти теоремы заново подробно доказывать. Докажем лишь теорему Осгуда и принцип сжатых отображений, остальные же теоремы только сформулируем.

ЗАДАЧИ

1. Составьте систему двух дифференциальных уравнений 1-го порядка с искомыми функциями y и z вида (4.4) так, чтобы ее интегральными линиями были все винтовые линии с правой нарезкой, данным шагом h и осью Ox. Как можно обобщить эту задачу на случай большего числа измерений?

2. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы поле направлений в области G можно было представить уравнениями (4.8), где все знаменатели непрерывны и не обращаются в нуль одновременно? В каких областях всякое непрерывное поле направлений может быть представлено в таком виде?

§ 29. Формулировка основных теорем

Теорема существования. *Если функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны в некоторой области G пространства $(x, y_1, \ldots, y_n)$, то через каждую точку этой области проходит по крайней мере одна интегральная линия системы* (4.4).

Для доказательства этой теоремы сначала строятся ломаные Эйлера так же, как это делалось в § 9, потом переходят к пределу, используя теорему Арцеля.

Теорема единственности (Осгуд). *Пусть функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ в области G удовлетворяют соотношениям*

$$|f_i(x, y_1^{**}, \ldots, y_n^{**}) - f_i(x, y_1^{*}, \ldots, y_n^{*})| \leqslant$$
$$\leqslant \varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu^{**} - y_\nu^{*}|\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.9}$$

где $\varphi(u)$ — непрерывная функция, которая

1) *принимает положительные значения при положительных u;*

2)
$$\int_{\varepsilon}^{c} \frac{du}{\varphi(u)} \to \infty \text{ при } \varepsilon \to 0 \quad (c > 0).$$

Тогда существует не больше одной интегральной линии системы (4.4), *проходящей через любую заданную внутреннюю точку области G.*

В частности, можио считать

$$\varphi(u) \equiv Ku,$$

где K — некоторая положительная постоянная. Тогда условие (4.9) принимает вид

$$|f_i(x, y_1^{**}, \ldots, y_n^{**}) - f_i(x, y_1^{*}, \ldots, y_n^{*})| \leqslant$$
$$\leqslant K \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu^{**} - y_\nu^{*}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это условие называется *условием Липшица* по $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ для функций f_i. Если принять это условие и считать функции f_i непрерывными по всем аргументам, то теоремы существования и единственности можно доказать методом последовательных приближений (см. § 30 и 31).

Теорема Осгуда о единственности доказывается для систем дифференциальных уравнений несколько сложнее, чем для одного дифференциального уравнения. Поэтому мы изложим подробно это доказательство.

Будем опять вести доказательство от противного. Допустим, что существуют два таких решения:

$$y_1^*(x), \ldots, y_n^*(x)$$

и

$$y_1^{**}(x), \ldots, y_n^{**}(x)$$

системы (4.4), что

$$y_i^*(x_0) = y_i^{**}(x_0), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как мы предполагаем, что решения $y_i^*(x)$ и $y_i^{**}(x)$ различны, то найдется такое x_1, что

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i^{**}(x_1) - y_i^*(x_1)| > 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать $x_1 > x_0$, так как противоположный случай сводится к этому заменой x на $-x$.

Несмотря на то, что функции $y_i^*(x)$ и $y_i^{*}(x)$, а следовательно, и разности $y_i^{**}(x) - y_i^*(x)$ всюду имеют производные, абсолютные величины этих разностей могут в некоторых точках не иметь производных. Так будет во всех точках, где

$$y_i^{**}(x) - y_i^*(x) = 0, \quad \text{но} \quad \frac{d}{dx}[y_i^{**}(x) - y_i^*(x)] \neq 0.$$

Поэтому вместо производных от этих разностей мы будем рассматривать их «правые» или «левые» производные. *Правой* (соответственно *левой*) *производной* от функции $z(x)$ в точке x называется предел отношения

$$\frac{z(x+h) - z(x)}{h},$$

взятый при условии, что $h \to 0$, принимая только положительные (соответственно отрицательные) значения. Правую (соответственно левую) производную от функции $z(x)$ в точке x мы будем обозначать $D_{\text{пр}}z(x)$ [соответственно $D_{\text{л}}z(x)$]. Если для нас неважно, о какой именно из этих двух производных идет речь, то мы будем опускать значки у D. Легко видеть, что если функция $z(x)$ имеет всюду производную, то существуют также $D_{\text{пр}}|z(x)|$ и $D_{\text{л}}|z(x)|$, причем всегда

$$|D_{\text{пр}}|z(x)|| = |D_{\text{л}}|z(x)|| = |z'(x)|$$

или, как мы будем писать для краткости,

$$|D|z(x)|| = |z'(x)|.$$

Принимая это все во внимание, из тождеств

$$\frac{dy_i^*(x)}{dx} = f_i(x, y_1^*(x), \ldots, y_n^*(x)),$$

$$\frac{dy_i^{**}(x)}{dx} = f_i(x, y_1^{**}(x), \ldots, y_n^{**}(x)) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

мы на основании (4.9) получаем

$$|D|y_i^{**}(x) - y_i^*(x)|| \equiv$$

$$\equiv |f_i(x, y_1^{**}(x), \ldots, y_n^{**}(x)) - f_i(x, y_1^*(x), \ldots, y_n^*(x))| \leqslant$$

$$\leqslant \varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n} | y_\nu^{**}(x) - y_\nu^{*}(x) |\right).$$

Отсюда

$$\left| D \sum_{i=1}^{n} | y_i^{**}(x) - y_i^{*}(x) | \right| \leqslant n\varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n} | y_\nu^{**}(x) - y_\nu^{*}(x) |\right) <$$

$$< (n+1)\varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n} | y_\nu^{**}(x) - y_\nu^{*}(x) |\right) \tag{4.10}$$

Последний переход можно сделать только если

$$\sum_{\nu=1}^{n} | y_\nu^{**}(x) - y_\nu^{*}(x) | > 0.$$

В частности, в силу указанного выше предположения его можно сделать при $x = x_1$.

Положим

$$\sum_{i=1}^{n} | y_i^{**}(x) - y_i^{*}(x) | = z(x) \text{ и } z(x_1) = z_1.$$

Построим график того решения уравнения

$$\frac{dy}{dx} = (n+1)\varphi(y),$$

которое при $x = x_1$ обращается в z_1.

Такое решение существует и единственно (§ 4). Этот график будет асимптотически приближаться к отрицательной части оси Ox, нигде ее не пересекая. В точке (x_1, z_1) кривые $z(x)$ и $y(x)$ пересекутся. Из неравенства

$$| D_л z(x_1) | < (n+1)\varphi(z_1) = (n+1)\varphi(y(x_1)) = y'(x_1)$$

непосредственно следует существование такого интервала $(x_1 - \varepsilon, x_1)$, $\varepsilon > 0$, на котором

$$z(x) > y(x).$$

Но мы утверждаем, что это же неравенство имеет место при всяком $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \leqslant x_1 - x_0)$, так как в противном случае, беря для ε его наибольшее возможное значение, мы немедленно пришли бы к противоречию. Действительно, тогда при $x=x_1-\varepsilon=x_2$, с одной стороны, имели бы

$$D_{\text{пр}}z(x_2)\geqslant y'(x_2)=(n+1)\varphi(y(x_2))=(n+1)\varphi(z(x_2)),$$

так как правее точки x_2

$$z(x)>y(x).$$

А с другой стороны, из (4.10) мы получим, так как $z(x_2)>0$,

$$Dz(x_2)<(n+1)\varphi(z(x_2)),$$

что противоречит предыдущему. Значит, при всех $x\geqslant x_0$, но не бóльших x_1,

$$z(x)\geqslant y(x)>0;$$

в частности, $z(x_0)>0$, а это противоречит нашему первоначальному предположению.

Следствие для систем уравнений высших порядков. Пусть мы имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^{m_i}y_i}{dx^{m_i}}=f_i\left(x, y_1, \ldots, \frac{d^{m_1-1}y_1}{dx^{m_1-1}}, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, y_n, \ldots, \frac{d^{m_n-1}y_n}{dx^{m_n-1}}\right), \quad i=1, \ldots, n, \tag{4.11}$$

разрешенных относительно старших производных от каждой неизвестной функции. *Если функции f_i непрерывны в некоторой окрестности точки*

$$\left(x_0, y^0_1, \ldots, \left(\frac{d^{m_1-1}y_1}{dx^{m_1-1}}\right)^0, \ldots, y^0_n, \ldots, \left(\frac{d^{m_n-1}y_n}{dx^{m_n-1}}\right)^0\right)$$

и удовлетворяют в ней по всем своим аргументам, начиная со второго, условию Липшица, то на некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0, существует одна и только одна совокупность функций

$$y_1(x), \ldots, y_n(x),$$

удовлетворяющих системе (4.11) *и принимающих при* $x=x_0$ *вместе с их соответствующими производными значения*

$$y_1^0, \ldots, \left(\frac{d^{m_1-1}y_1}{dx^{m_1-1}}\right)^0, \ldots, y_n^0, \ldots, \left(\frac{d^{m_n-1}y_n}{dx^{m_n-1}}\right)^0.$$

Это следствие получается непосредственно из выше сформулированных теорем, если принять во внимание § 27. Полученное на интервале (a, b) решение можно продолжить в обе стороны так, как это мы делали в § 11.

Теорема Коши. *Если функции* $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ *голоморфны по всем своим аргументам в области* G, *то для любой точки* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *этой области существует одно и только одно голоморфное* (т. е. состоящее из голоморфных функций) *по* x *решение системы* (4.4), *для которого* $y_i(x_0)=y_i^0$, $i=1, \ldots, n$.

Следствие. *Все действительные решения системы* (4.4), *у которой правые части голоморфны по всем своим аргументам и принимают действительные значения при действительных значениях всех их аргументов, голоморфны.*

Теорема о гладкости решений. *Если функции* $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ *имеют непрерывные производные по* x *и* y_k *до* p*-го порядка* $(p\geqslant 0)$, *то все решения системы* (4.4) *имеют непрерывные производные по* x *до* $(p+1)$*-го порядка.*

Теорема о зависимости решений от параметров. *Пусть дана система*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m), \; i=1, \ldots, n. \quad (4.12)$$

Если функции f_i *и все их частные производные до* p*-го* $(p\geqslant 1)$ *порядка по всем* y_i *и* μ_k *непрерывны по всем их аргументам и ограничены, когда точка* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ находится *в области* G, *а*

$$|\mu_k| < \mu^0_k \qquad k=1, \ldots, m,$$

где μ^0_k *— некоторые положительные числа, то для каждой точки* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *области* G *можно указать такой* *интервал (a, b), заключающий внутри себя точку x_0, что при всех рассматриваемых μ_k на нем существует одна и только одна совокупность функций*

$$y_i=\varphi_i(x, \mu_1, \ldots, \mu_m), \qquad i=1, \ldots, n,$$

которые удовлетворяют системе (4.12), *имеют непрерывные производные до p-го порядка по всем μ_k и при $x=x_0$ обращаются соответственно в y_i^0 $(i=1, \ldots, n)$. Эта теорема остается верной и для $p=0$, если функции f_i удовлетворяют условию Липшица по y, с коэффициентом, не зависящим от μ.*

Следствие. *Если правые части системы* (4.4) *имеют по x и всем y_i непрерывные производные до p-го порядка, то функции $y_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, которые удовлетворяют системе* (4.4) *и при $x=x_0$ обращаются соответственно в y_i^0, имеют непрерывные производные по x_0 и y_j^0 до p-го порядка* $(p\geqslant 1)$. Это утверждение остается в силе и для $p=0$, если функции f_i таковы, что они обеспечивают единственность решения, для которого $y_i(x_0)=y_i^0$, $i=1, \ldots, n$ (ср. теорему § 19 и замечание к ней).

ЗАДАЧИ

1. Проведите подробные доказательства теорем Пеано, Коши и теоремы о зависимости решения от параметров и начальных условий. Сформулируйте следствия для систем высших порядков. Перенесите на системы уравнений результаты § 13, 19; задачи 8 и 11 § 12; 4 § 14; 4 и 5 § 19.

2. Распространите теорему 2 и теорему 3 § 11 на системы уравнений 1-го порядка. При этом в формулировке теоремы 2 взамен случаев 2 и 3 должно быть

$$\min\left\{\rho(x), \left(1+\sum_{i=1}^{n}|y_i(x)|\right)^{-1}\right\}\to 0 \text{ при } x\to\beta-0\ (x\to\alpha+0),$$

где $\rho(x)$ есть расстояние от точки $(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$ до границы G ($\rho(x)\equiv 1$, если G совпадает со всем пространством $x, y_1, \ldots, y_n$). Изменение формулировки вызвано тем, что при $n\geqslant 2$ и $\beta<+\infty$ возможны примеры (постройте их!), когда ни условие $\rho(x)\underset{x\to\beta-0}{\longrightarrow}0$, ни условие $\sum_{i=1}^{n}|y_i(x)|\underset{x\to\beta-0}{\longrightarrow}\infty$ не выполнены.

3. Докажите, что утверждение задачи 8 § 19 не переносится

на линии в n-мерном ($n\geqslant 3$) пространстве, но переносится на поверхности вида $y=f(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

4. Пусть все решения системы (4.4) при непрерывных правых частях и определенных начальных условиях при продолжении на отрезок $a\leqslant x\leqslant b$ (где $a\leqslant x_0\leqslant b$), остаются в области G. Докажите тогда, что если начальные условия и правые части системы изменить достаточно мало, то измененное решение может быть продолжено на весь отрезок $[a, b]$, причем это решение равномерно как угодно мало отличается от одного из решений системы (4.4), удовлетворяющих исходным начальным данным.

5. (Кнезер.) Докажите, что в условиях задачи 4 пересечение плоскости $x=c\,(a\leqslant c\leqslant b)$ с *интегральной воронкой* (совокупностью всех интегральных линий, удовлетворяющих данным начальным условиям) непусто, замкнуто, ограничено и связно (т. е. не может быть представлено в виде объединения двух непустых замкнутых непересекающихся множеств).

Указание. Рассмотрите пересечение плоскости $x=c$ с совокупностью всех ломаных Эйлера для систем с близкими правыми частями при данных начальных условиях и одинаковой длине проекций звеньев на ось x.

Постройте примеры, в которых $n=2$ и указанное пересечение представляет собой: а) круг, б) окружность.

6. Перенесите задачу 5 § 11 на случай систем вида (4.4). Дайте геометрическое истолкование (поле конусов направлений, причем конусов специального вида, вместо поля направлений). Перейдите от конусов специального вида к любым выпуклым конусам. Перенесите результаты двух предыдущих задач на системы этого вида.

Описанное обобщение связано со следующим полезным понятием *контингенции*. Пусть M — какое-либо множество точек в n-мерном пространстве и A — одна из предельных точек M. Тогда контингенцией $K_A(M)$ множества M в точке A называется совокупность всех предельных положений лучей с вершиной в точке A, проходящих через любую точку B множества M, при $B\to A$. (Рассмотрите, какова контингенция простых линий, поверхностей и тел в пространстве в различных их точках.) Интегральная линия для поля конусов — это непрерывная линия $y_i=y_i(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant b;$ $i=1, \ldots, n)$, контингенция участка $[x, b]$ которой в точке $(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$ принадлежит заданному в этой точке конусу при любом $x\,(x_0\leqslant x<b)$.

7. Пусть правая часть уравнения $y^{(m)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$ непрерывна для всех значений своих аргументов и удовлетворяет для некоторого $\varepsilon>0$ оценке $|f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})|\leqslant\Phi(x, y)\times$ $\times\left[1+|y'|^{\frac{m}{1}-\varepsilon}+|y''|^{\frac{m}{2}-\varepsilon}+\ldots+|y^{(m-1)}|^{\frac{m}{m-1}-\varepsilon}\right]$ с непрерывной $\Phi(x, y)$. Пусть это уравнение обладает непродолжимым вправо решением $\varphi(x)$ $(x_0\leqslant x<\beta<\infty)$. Тогда $\varphi(x)$ при $x\to\beta-0$ не может быть ограниченным. Для $\varepsilon=0$, $m=2$ утверждение также справедливо (С. Н. Бернштейн), для $\varepsilon=0$, $m>2$ — несправедливо.

8. Предложите какие-либо достаточные условия для существования и для единственности решения бесконечной системы уравнений с бесконечным числом искомых функций

$$dy_i/dx=f_i(x, y_1, y_2, \ldots), \quad i=1, 2, \ldots$$

§ 30. Принцип сжатых отображений для систем операторных уравнений

Теорема. *Пусть имеется непустое семейство S вектор-функций*

$$\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

определенных на одном и том же множестве $\mathfrak{M}$. Эти вектор-функции φ обладают следующими свойствами:

1) *Каждая функция φ_i ограничена (быть может, своей константой).*

2. *Предел всякой равномерно сходящейся последовательности вектор-функций φ, принадлежащих S, также принадлежит S.*

Мы говорим, что последовательность вектор-функций

$$\varphi^{(k)}=(\varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_n^{(k)}), \quad k=1, 2, \ldots,$$

сходится равномерно к вектор-фуикции

$$\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

если каждая из последовательностей функций $\varphi_i^{(k)}$, $i=1, \ldots, n$, равномерно сходится к функции φ_i.

3. *Для рассматриваемого множества S вектор-функций φ определен оператор A, переводящий каждую вектор-функцию $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ из множества S в вектор-функцию $A\varphi=(A_1\varphi, \ldots, A_n\varphi)$ из того же множества.*

4. *Для всяких двух вектор-функций $\varphi^*=(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*)$ и $\varphi^{**}=(\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_n^{**})$ из S*

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|A_i\varphi^* - A_i\varphi^{**}| \leqslant m \sum_{i=1}^{n} \sup|\varphi_i^* - \varphi_i^{**}|,$$

где m — постоянное число, причем $0 \leqslant m < 1$.

Тогда в семействе S существует одна и только одна вектор-функция

$$\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

такая, что

$$\varphi=A\varphi,$$

или, в более развернутой записи,

$$\varphi_i=A_i\varphi, \quad i=1, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Доказательство. Выберем в S какую-нибудь вектор-функцию

$$\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0).$$

Проделаем над ней операцию A. Положим

$$\varphi^{(1)} = A\varphi^0.$$

По свойству 3 $\varphi^{(1)} \in S$[1] и потому над вектор-функцией

$$\varphi^{(1)} = (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}),$$

которую мы будем называть «первым приближением» решения системы (4.13), можно производить операцию A. Произведя ее, получим «второе приближение»

$$\varphi^{(2)} = A\varphi^{(1)}.$$

Опять по свойству 3 имеем $\varphi^{(2)} \in S$. Этот процесс, очевидно, можно продолжать бесконечно. Таким образом мы получим бесконечную последовательность вектор-функций

$$\varphi^{(0)} = (\varphi_1^{(0)}, \ldots, \varphi_n^{(0)}),$$

$$\varphi^{(1)} = (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}),$$

. . . .

Покажем, что при $k \to \infty$ последовательность вектор-функций $\varphi^{(k)}$ сходится равномерно на множестве $\mathfrak{M}$. Для этого, очевидно достаточно (ср. § 14) показать, что при каждом i ряд

$$\varphi_i^0 + (\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(0)}) + (\varphi_i^{(2)} - \varphi_i^{(1)}) + \ldots \tag{4.14}$$

сходится на $\mathfrak{M}$ равномерно. Если

$$|\varphi_i^{(0)}| \leqslant M_i^0 \text{ и } |\varphi_i^{(1)}| \leqslant M_i^{(1)}$$

(свойство 1), то

$$|\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(0)}| \leqslant M_i^{(1)} + M_i^{(0)} = M_i.$$

---

[1] Запись $\varphi \in S$ означает, что φ принадлежит семейству S.

Пользуясь же свойством 4, мы найдем при всех $k \geqslant 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \sup |\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| = \sum_{i=1}^{n} \sup |A_i \varphi^{(k)} - A_i \varphi^{(k-1)}| \leqslant$$

$$\leqslant m \sum_{i=1}^{n} \sup |\varphi_i^{(k)} - \varphi_i^{(k-1)}|.$$

Поэтому члены ряда (4.14) по абсолютной величине не больше соответствующих членов следующего ряда с постоянными неотрицательными членами:

$$M + M + mM + m^2M + m^3M + \ldots$$

Здесь $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Так как предполагаем, что $m < 1$, то этот последний ряд сходится, а потому равномерно на множестве $\mathfrak{M}$ сходится и ряд (4.14) при $i = 1, \ldots, n$, а следовательно, также равномерно сходятся на этом множестве и последовательности $\varphi_i^{(k)}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Положим

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^{(k)} = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

По условию 2

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in S.$$

Следовательно, оператор $A\varphi$ имеет смысл. Покажем, что

$$A_i\varphi = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для этого заметим, что по свойству 4

$$|A_i \varphi^{(k)} - A_i \varphi| \leqslant m \sum_{i=1}^{n} \sup |\varphi_i^{(k)} - \varphi_i|.$$

А так как $\varphi_i^{(k)}$ при $k \to \infty$ равномерно сходятся к φ_i, то, следовательно, в обеих частях равенств

$$\varphi_i^{(k+1)} = A_i\varphi^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

можно переходить к пределу, а потому уравнения (4.13) удовлетворяются.

Покажем теперь, что в S существует только одна вектор-функция $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, удовлетворяющая уравнениям (4.13). Действительно, допустим, что существуют два таких решения:

$$\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$
$$\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n).$$

Тогда должны иметь место равенства

$$\varphi_i=A_i\varphi, \quad i=1, \ldots, n,$$
$$\psi_i=A_i\psi, \quad i=1, \ldots, n.$$

Вычитая почленно соответствующие равенства, получим в силу свойства 4

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|\varphi_i-\psi_i| = \sum_{i=1}^{n} \sup|A_i\varphi-A_i\psi| \leqslant m\sum_{i=1}^{n} \sup|\varphi_i-\psi_i|.$$

Так как $m<1$, то последнее соотношение может иметь место только, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|\varphi_i-\psi_i|=0,$$

и, следовательно,

$$\varphi_i\equiv\psi_i, \quad i=1, \ldots, n$$ [1].

Замечание. Положения настоящего параграфа можно интерпретировать геометрически совершенно так же, как это делалось в § 16 для $n=1$, если только под «точкой» понимать вектор-функцию φ, а под «расстоянием» между двумя «точками» $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ понимать

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|\varphi_i-\psi_i|.$$

---

[1] Доказанную теорему можно получить как следствие общего утверждения, приведенного в сноске на с. 70. Для этого надо семейство S превратить в метрическое пространство, введя метрику ρ по формуле

$$\rho((\overset{*}{\varphi}_1, \ldots, \overset{*}{\varphi}_n), (\overset{**}{\varphi}_1, \ldots, \overset{**}{\varphi}_n))=\sum_{i=1}^{n} \sup_{\mathfrak{M}}|\overset{*}{\varphi}_i-\overset{**}{\varphi}_i|.$$

ЗАДАЧА

Докажите, что свойство 4 можно обобщить так:

$$F(\sup|A_1\varphi^*-A_1\varphi^{**}|, \ldots, \sup|A_n\varphi^*-A_n\varphi^{**}|)\leqslant$$
$$\leqslant mF(\sup|\overset{*}{\varphi_1}-\overset{**}{\varphi_1}|, \ldots, \sup|\overset{*}{\varphi_n}-\overset{**}{\varphi_n}|),$$

где $F(t_1, \ldots, t_n)$ — однородная функция первой степени, определенная при $t_1\geqslant 0, \ldots, t_n\geqslant 0$, неотрицательная, непрерывная и равная нулю только в начале координат. Приведите несколько примеров таких функций.

§ 31. Приложение принципа сжатых отображений к системе дифференциальных уравнений

Теорема. *Пусть в некоторой области* G *пространства* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ *функции* $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i=1, \ldots, n)$ *непрерывны по* x *и удовлетворяют условию Липшица по всем* y_k *в каждой замкнутой ограниченной области* $\bar{G}'$, *содержащейся в* G. *Тогда для любой точки* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *области* G *можно указать такой содержащий внутри себя точку* x_0 *замкнутый интервал* $[a, b]$, *на котором существует единственное решение системы* (4.4), *график которого проходит через точку*

$$(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0). \tag{4.15}$$

Доказательство. 1. Заметим прежде всего, что если заранее предположить существование такого решения, то, интегрируя от x_0 до x тождества[1]

$$\frac{dy_i(\xi)}{d\xi}=f_i(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi)), \; i=1, \ldots, n,$$

получим

$$y_i(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))\,d\xi, \; i=1, \ldots, n. \tag{4.16}$$

Таким образом, всякое решение системы (4.4), график которого проходит через точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ удовлетворяет также системе интегральных уравнений (4.16).

[1] Возможность интегрирования получается аналогично § 14.

удовлетворяют условию 3, если интервал $[a, b]$ достаточно мал.

Пусть M есть верхняя грань значений $|f_i(x, y_1, \ldots \ldots, y_n)|$, $i=1, \ldots, n$, в $\bar{G}'$. Проведем через точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ $2n$ плоскостей

$$y_i - y_i^0 = \pm M(x - x^0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.18}$$

Построим далее две плоскости

$$x=a \quad \text{и} \quad x=b \quad (a<x_0<b)$$

так, чтобы эти плоскости вместе с плоскостями (4.18) образовывали две пирамиды P_1 и P_2 с вершиной в точке $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, целиком лежащие в G'. Несколько позже нам придется предположить, что числа a и b достаточно близки к x_0. Возьмем теперь совершенно произвольно n непрерывных на $[a, b]$ функций

$$\varphi_1^{(0)}(x), \ldots, \varphi_n^{(0)}(x), \tag{4.19}$$

лишь бы только линия

$$\varphi_i=\varphi_i^{(0)}(x), \quad i=1, \ldots, n, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

целиком лежала в $\bar{G}'$. Подставим функции (4.19) в правые части уравнений (4.16), после чего эти правые части будут некоторыми вполне определенными непрерывными функциями от x на интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Положим

$$\varphi_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, \varphi_1^{(0)}(\xi), \ldots, \varphi_n^{(0)}(\xi))\, d\xi,$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Ясно, что эти функции определены опять на интервале $a\leqslant x\leqslant b$ и

$$\varphi_i^{(1)}(x_0) = y_i^0.$$

Мы утверждаем далее, что линия

$$y_i=\varphi_i^{(1)}(x), \ i=1, \ldots, n, \ a\leqslant x\leqslant b,$$

не выходит из пирамид P_1 и P_2 и, следовательно, не выходит из $\bar{G}'$. Действительно,

$$|f_i(x, \varphi_1^{(0)}(x), \ldots, \varphi_n^{(0)}(x))| \leqslant M,$$

и потому

$$|\varphi_i^{(1)}(x)-y_i^{(0)}|\leqslant M|x-x_0|,\ i=1,\ldots,n.$$

Покажем, наконец, что если функции f_i удовлетворяют по $y_1,\ldots,y_n$ условию Липшица и если интервал $[a, b]$ достаточно мал, то для определенного равенствами (4.17) оператора $A\varphi$ выполняется и последнее, четвертое, условие применимости принципа сжатых отображений. Действительно,

$$\left|\left(y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, \varphi_1^{**}(\xi), \ldots, \varphi_n^{**}(\xi))\,d\xi\right)-\right.$$

$$\left.-\left(y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, \varphi_1^{*}(\xi), \ldots, \varphi_n^{*}(\xi))\,d\xi\right)\right|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(\xi, \varphi_1^{**}(\xi), \ldots, \varphi_n^{**}(\xi))-\right.$$

$$\left.-f_i(\xi, \varphi_1^{*}(\xi), \ldots, \varphi_n^{*}(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} K[\,|\varphi_1^{**}(\xi)-\varphi_1^{*}(\xi)|+\ldots+|\varphi_n^{**}(\xi)-\varphi_n^{*}(\xi)|\,]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant K(b-a)\sum_{\nu=1}^{n}\max|\varphi_\nu^{**}-\varphi_\nu^{*}|=\frac{m}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\max|\varphi_\nu^{**}-\varphi_\nu^{*}|,$$

где $m=K(b-a)n$. Следовательно, если $b-a$ достаточно мало, то $m<1$.

Замечания 1 и 2 к § 14 и теперь сохраняют силу.

Аналогично замечанию 3 к § 14 легко показать, что последовательность приближений равномерно сходится не только на выбранном выше интервале $[a, b]$, но и на любом конечном интервале $[c, d]$, где все эти приближения существуют, если в пересечении области G с полосой $c\leqslant x\leqslant d$, $-\infty<y_i<\infty$, $i=1,\ldots,n$, все функции f_i удовлетворяют условию Липшица по $y_1, \ldots, y_n$.

Мы не будем заниматься изучением особых точек, линий, поверхностей для систем дифференциальных уравнений, как это делалось для одного уравнения в первой части курса, а перейдем к изучению систем линейных уравнений.

ГЛАВА V

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 32. Определения. Следствия из общей теории систем дифференциальных уравнений

Линейной системой дифференциальных уравнений называется система таких уравнений, в которые неизвестные функции и их производные входят линейно. В § 27 было показано, что всякая система дифференциальных уравнений эквивалентна некоторой системе, содержащей только производные 1-го порядка; поэтому мы будем заниматься главным образом системами уравнений 1-го порядка, причем ограничимся случаем, когда эти системы разрешены относительно производных. Общий вид такой системы следующий:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j + f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Эта запись становится значительно проще, если воспользоваться матричными обозначениями. Введем квадратную, порядка n матрицу коэффициентов

$$A(x) = \|a_{ij}(x)\|$$

и вектор-функции, которые мы будем в дальнейшем записывать в виде матриц-столбцов

$$f(x) = \left\| \begin{matrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{matrix} \right\| \qquad y(x) = \left\| \begin{matrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{matrix} \right\|$$

Такие матрицы подчиняются естественным правилам действий, известным из курса линейной алгебры, правилам предельного перехода и дифференцирования. В частности, отметим, что при дифференцировании матрицы надо просто продифференцировать все ее элементы. Поэтому систему (5.1) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\,y + f(x) \tag{5.2}$$

(проверьте это, раскрыв правую часть по правилу произведения матриц).

В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что $a_{ij}(x)$ и $f_i(x)$ *непрерывны* на некотором интервале $a<x<b$. Может оказаться, что этот интервал не ограничен с одной какой-нибудь стороны или с обеих сторон. Правые части таких систем имеют ограниченные производные по всем y_i и потому удовлетворяют условию Липшица на всяком отрезке $[a_1, b_1]$, целиком лежащем внутри (a, b). Поэтому из доказанной в § 31 теоремы следует, что через каждую точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ в полосе $a<x<b$ пространства $(x, y_1, \ldots, y_n)$ проходит одна и только одна интегральная линия системы (5.1).

Действительно, при любых конечных a и b эту теорему можно непосредственно применить ко всякому параллелепипеду:

$$a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b-\varepsilon,\ -M\leqslant y_i\leqslant M,\ i=1, \ldots, n,$$

где ε — как угодно малое положительное число, а M — как угодно большое положительное число. А отсюда уже эта теорема следует и для всей полосы $a<x<b$.

Каждое решение системы (5.1) *можно продолжить на весь интервал* (a, b). Действительно, если коэффициенты $a_{ij}(x)$ и неоднородные члены $f_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a_1, b_1]$, то существование решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, на всем этом интервале следует из рассуждения, приведенного в предпоследнем абзаце § 31.

Если же коэффициенты и неоднородные члены непрерывны в открытом интервале (a, b), то только что доказанное утверждение можно применить к любому отрезку $[a_1, b_1]$, лежащему внутри (a, b). Таким образом, функции

$$y_1(x), \ldots, y_n(x),$$

составляющие решение системы (5.1), могут стать неограниченными, только если $x \to a$ или $x \to b$.

Если все $f_i(x) \equiv 0$, то мы будем называть систему (5.1) *однородной* (в этом случае в уравнении (5.2) имеем $f(x) \equiv 0$), в противном случае — *неоднородной*.

ЗАДАЧИ

1. Назовем нормой квадратной или прямоугольной матрицы сумму абсолютных величин всех ее элементов; норму матрицы A обозначим $\|A\|$. Докажите, что

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|,$$

$$\|cA\| = |c|\,\|A\| \quad (c \text{ — число}),$$

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Покажите также, что если элементы матрицы A зависят от x и имеют правую (левую) производную, то и $\|A(x)\|$ имеет правую (левую) производную, причем $|D_{\text{пр}}\|A(x)\|| \leqslant \|D_{\text{пр}}A(x)\|$.

2. Используя предыдущую задачу, оцените $|D_{\text{пр}}\|y(x)\||$, где $y(x)$ — решение уравнения (5.2); используя полученный результат и задачу 7 § 12, оцените скорость возможного возрастания решения при $x \to a$ или $x \to b$; например, при $x_0 \leqslant x < b$

$$\|y(x)\| \leqslant \|y(x_0)\| \exp \int_{x_0}^{x} \|A(\xi)\|\,d\xi + \int_{x_0}^{x} \|f(s)\| \exp\left[\int_{s}^{x} \|A(\xi)\|\,d\xi\right] ds.$$

3. Докажите, что если все $a_{ij}(x)$ и $f_i(x)$ разлагаются в ряды Маклорена с радиусом сходимости, не меньшим $R > 0$, то и всякое решение системы (5.1) разлагается в ряд Маклорена с радиусом сходимости, не меньшим R. Это утверждение доказывается так же, как аналогичное утверждение доказывалось в замечании к § 17. Для всех $a_{ij}(x)$ и $f_i(x)$ выберите одну и ту же мажорирующую функцию.

§ 33. Основные теоремы для однородных систем 1-го порядка

Пусть мы имеем m решений однородной линейной системы

$$y^{(1)}(x)=\left\|\begin{matrix} y_1^{(1)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x) \end{matrix}\right\| \quad y^{(2)}(x)=\left\|\begin{matrix} y_1^{(2)}(x) \\ y_2^{(2)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(2)}(x) \end{matrix}\right\|$$

$$\ldots, y^{(m)}(x)=\left\|\begin{matrix} y_1^{(m)}(x) \\ y_2^{(m)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(m)}(x) \end{matrix}\right\|. \tag{5.3}$$

Их *линейной комбинацией* мы будем называть вектор-функцию

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — некоторые постоянные. В частности, если все $C_k=1$, мы будем говорить о сумме решеинй; если $C_1=1$, $C_2=-1$ и $m=2$, будем говорить о разности решений $y^{(1)}(x)$ и $y^{(2)}(x)$.

Теорема 1. *Линейная комбинация решений однородной линейной системы является также решением этой системы.*

Доказательство. Пусть мы имеем m решений (5.3) однородной линейной системы

$$\frac{dy}{dx}-A(x)y=0, \tag{5.4}$$

т. е.

$$\frac{dy_i}{dx}-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j=0,\ i=1,\ldots,n. \tag{5.4'}$$

Подставим в нее $\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x)$ вместо y. Тогда получим в левой части

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x)-A(x)\sum_{k=1}^{n} C_k y^{(k)}(x)=$$

$$= \sum_{k=1}^{m} C_k \left(\frac{dy^{(k)}(x)}{dx} - A(x)\, y^{(k)}(x) \right).$$

Так как функции (5.3), по предположению, удовлетворяют системе (5.4), то при всяком k

$$\frac{dy^{(k)}(x)}{dx} - A(x)\, y^{(k)}(x) = 0,$$

а следовательно,

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{m} C_k\, y^{(k)}(x) - A(x) \sum_{k=1}^{m} C_k\, y^{(k)}(x) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Определение. *Вектор-функции* (5.3) *называются линейно зависимыми на интервале* (a, b), *если существуют такие постоянные* $C_1, \ldots, C_m$, *среди которых есть по крайней мере одна отличная от нуля, что имеет место следующее тождество:*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k\, y^{(k)}(x) \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \ldots & y_2^{(n)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского для системы вектор-функций

$$y^{(1)}(x) = \left\| \begin{matrix} y_1^{(1)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x) \end{matrix} \right\|, \qquad y^{(2)}(x) = \left\| \begin{matrix} y_1^{(2)}(x) \\ y_2^{(2)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(2)}(x) \end{matrix} \right\|, \ldots$$

$$\ldots,\ y^{(n)}(x) = \left\| \begin{matrix} y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x) \end{matrix} \right\|. \tag{5.5}$$

Теорема 2. *Если вектор-функции (5.5) линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно равен нулю.*

Эта теорема является непосредственным следствием известной теоремы алгебры.

Теорема 3. *Если определитель Вронского $W(x)$ для системы вектор-функций* (5.5), *являющихся решениями системы* (5.4), *равен нулю хотя бы в одной точке $x=x_0$, $a<x_0<b$, то эти вектор-функции линейно зависимы.*

Доказательство. Если $W(x_0)=0$, то векторы $y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)$ линейно зависимы, и потому найдутся числа $C_1^*, \ldots, C_n^*$, не все равные нулю, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^* y^{(k)}(x_0) = 0.$$

Составим вектор-функцию

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* y^{(k)}(x).$$

По теореме 1 эта вектор-функция $y^*(x)$ удовлетворяет системе (5.4). При $x=x_0$ она обращается в нуль-вектор. Но по теореме единственности существует только одна удовлетворяющая системе (5.4) вектор-функция $y(x)\equiv 0$, которая при $x=x_0$ обращается в нуль. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^* y^{(k)}(x) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если определитель Вронского, составленный для решений* (5.5) *системы* (5.4), *равен нулю в одной точке, то он тождественно равен нулю.*

Действительно, если этот определитель равен нулю в одной точке, то по только что доказанной теореме решения (5.5) линейно зависимы и по теореме 2 их определитель Вронского тождественно равен нулю.

Замечание. Если вектор-функции (5.5) не являются решениями системы вида (5.4) с непрерывными коэффициентами, то для них нельзя высказать утверждение, подобное сделанному в теореме 3. Это показывает следующий пример. Для вектор-функций

$$\begin{Vmatrix} x \\ 0 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} x^2 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

детерминант Вронского тождественно равен нулю, и тем не менее они линейно независимы.

Определение. *Совокупность n линейно независимых решений системы* (5.4) *называется ее фундаментальной системой решений.*

Теорема 4. *Фундаментальные системы решений существуют.*

Доказательство. Возьмем n^2 таких чисел $b_i^{(k)}$, что

$$\begin{vmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & b_1^{(n)} \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)} & \dots & b_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^{(1)} & b_n^{(2)} & \dots & b_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Этому условию мы удовлетворим, например, если положим

$$b_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Составим теперь $m=n$ решений (5.3) системы (5.4), которые удовлетворяют условиям

$$y_i^{(k)}(x_0) = b_i^{(k)}, \quad i, k = 1, \dots, n,$$

где x_0 есть какое-нибудь число из интервала (a, b). Тогда детерминант Вронского для этих решений отличен от нуля при $x = x_0$, и потому на основании теоремы 2 эти решения линейно независимы.

Теорема 5. *Если вектор-функции* (5.5) *составляют n линейно независимых решений системы* (5.4), *то всякое решение этой системы можно представить как линейную комбинацию этих решений с соответствующим образом подобранными постоянными коэффициентами, т. е. в виде*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^{(k)}(x).$$

Пользуясь определениями общего решения и фундаментальной системы решений теорему 5 можно сформулировать еще и так:

Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений есть линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами из решений, составляющих фундаментальную систему.

Доказательство теоремы 5. Возьмем какое-нибудь решение $y(x)$ системы (5.4). Пусть при некотором значении x, равном x_0, эта вектор-функция принимает значение $y(x_0)$. Этот вектор можно разложить по векторам $y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)$, так как по предыдущим теоремам $W(x_0) \neq 0$ и потому последняя система векторов линейно независима. Получим

$$y(x_0) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* y^{(k)}(x_0) \tag{5.6}$$

Составим теперь вектор-функцию

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* y^{(k)}(x).$$

По теореме 1 она удовлетворяет системе (5.4). С другой стороны, при $x = x_0$ эта вектор-функция принимает такое же значение, как и вектор-функция $y(x)$. Значит, по теореме единственности $y(x) \equiv y^*(x)$, т. е.

$$y(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} C_k^* y^{(k)}(x),$$

что и требовалось доказать.

Теоремы 1, 4 и 5 вместе можно кратко сформулировать так: *совокупность решений системы* (5.4) *образует n-мерное линейное пространство. Фундаментальная система решений — это базис в этом пространстве.*

ЗАДАЧИ

1. Пусть столбцами квадратной матрицы $Y(x)$ служат какие-либо n решений системы (5.4). Покажите, что такая матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y.$$

При этом либо $\det Y(x) \equiv 0$, либо $\det Y(x) \neq 0$; в последнем случае $Y(x)$ называется *фундаментальной матрицей системы* (5.4). Покажите, что если $Y(x)$ — фундаментальная матрица, то общее решение системы (5.4) имеет вид $y = Y(x)c$, где c — произвольный постоянный вектор; решение системы (5.4) при начальном условии $y(x_0) = y^0$ имеет вид $y = Y(x)[Y(x_0)]^{-1}y^0$.

2. Найдите все решения системы

$$xy_1' = 2y_1 - y_2,$$
$$xy_2' = 2y_1 - y_2.$$

Покажите, что если начальные условия задаются при $x_0 \neq 0$, то решение существует и единственно на всей оси; если же $x_0 = 0$, то решение существует, только если $2y_1^0 - y_2^0 = 0$, причем в этом случае не единственно. Покажите, что у всяких двух линейно независимых решений определитель Вронского равен Cx, где $C \neq 0$. Как согласовать со следствием из теоремы 3 то обстоятельство, что здесь определитель Вронского равен нулю только в одной точке?

3. Найдите решения системы

$$xy_1' = y_1 - 2y_2,$$
$$xy_2' = y_1 - 2y_2.$$

Докажите, что решение, определяемое начальными данными, существует на всей оси тогда и только тогда, когда $y_1^0 = 2y_2^0$. При этом такое решение всегда единственно.

4. Найдите фундаментальную систему решений и определитель Вронского для системы уравнений

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) y_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где все функции $a_j(x)$ непрерывны на интервале (a, b).

§ 34. Выражение для определителя Вронского

Если вектор-функции (5.5) *представляют собой n решений однородной линейной системы* (5.4), *то между значениями в точках x и x_0 их детерминанта Вронского W существует следующая зависимость:*

$$W(x) = W(x_0) \exp \int_{x_0}^{x} [a_{11}(\xi) + a_{22}(\xi) + \ldots + a_{nn}(\xi)]\, d\xi \ ^{1)}. \tag{5.7}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования определителей имеем

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \frac{dy_1^{(1)}}{dx} & \frac{dy_1^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_1^{(n)}}{dx} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ \frac{dy_2^{(1)}}{dx} & \frac{dy_2^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_2^{(n)}}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dy_n^{(1)}}{dx} & \frac{dy_n^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}.$$

В силу (5.4')

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j^{(k)}.$$

1) Получена в 1827 г. Н. Абелем для уравнений второго порядка и в 1838 г. Ж. Лиувиллем и М. В. Остроградским в общем случае.

Подставляя всюду в правую часть выражения для $\frac{dy_i^{(k)}}{dx}$ и пользуясь тем, что определитель не меняется, если к элементам какой-либо его строки прибавить величины, пропорциональные элементам других строк, получим

$$W'(x) = \begin{vmatrix} a_{11}\, y_1^{(1)} & a_{11}\, y_1^{(2)} & \ldots & a_{11}\, y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nn}\, y_n^{(1)} & a_{nn}\, y_n^{(2)} & \ldots & a_{nn}\, y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

или

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\, W(x).$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение для W, получим (5.7).

Следствие. Из уравиения (5.7) мы еще раз видим, что *если определитель Вронского, составленный для решений* (5.5) *системы* (5.4), *обращается в нуль в одной точке, то он равен нулю тождественно.*

§ 35. Составление однородной линейной системы дифференциальных уравнений по данной фундаментальной системе ее решений

Заметим прежде всего, что не всякие n вектор-функций $y^{(k)}(x)$, имеющие непрерывные первые производные, являются фундаментальной системой решений некоторой системы вида (5.4) с непрерывиыми коэффициентами. По теореме 3 для этого необходимо, чтобы их детерминант Вронского нигде не обращался в нуль. Покажем, что это условие является в то же время и достаточным, если эти вектор-функции непрерывны вместе с их производными.

Действительно, составим тогда следующие n линейных однородных дифференциальных уравнений относительно функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1^{(1)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2^{(1)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n^{(1)} & \ldots & y_n^{(n)} \\ \dfrac{dy_i}{dx} & \dfrac{dy_i^{(1)}}{dx} & \ldots & \dfrac{dy_i^{(n)}}{dx} \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Легко видеть, что этим уравнениям удовлетворяют вектор-функции (5.5). Кроме того, так как, по предположению, определитель, составленный из вектор-функций (5.5), нигде не обращается в нуль, то все эти уравнения можно разрешить относительно $\frac{dy_i}{dx}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Полученная система обладает всеми требуемыми свойствами.

Покажем еще, что существует только одна система вида (5.4), имеющая данную фундаментальную систему решений. Действительно, по теореме 5 из § 33 все решения такой системы определяются ее фундаментальной системой решений. Но заданием всех интегральных кривых системы (5.4) эта система, очевидно, вполне определяется, так как тем самым вполне определяется соответствующее ей поле направлений; знание поля направлений однозначно дает нам значение правых частей системы, а коэффициенты линейной формы однозначно определяются ее значениями.

ЗАДАЧА

Пусть дана система непрерывно дифференцируемых функций (5.3), причем $m<n$. Докажите, что ее можно расширить (добавлением новых функций) до фундаментальной системы решений (5.5) некоторой системы уравнений (5.4) с непрерывными коэффициентами, тогда и только тогда, когда ранг матрицы (5.3) равен m в каждой точке интервала (a, b).

Указание. Искомую систему (5.4) стройте сначала в окрестности любой точки интервала (a, b).

§ 36. Следствия для дифференциального уравнения n-го порядка

На основании сказанного в § 27 линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots$$
$$\dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \tag{5.8}$$

эквивалентно линейной однородной системе

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_0}{dx} &= y_1,\\
\frac{dy_1}{dx} &= y_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1},\\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= a_0(x)y_0 + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \dots + a_{n-1}(x)y_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Здесь через y_0 обозначено прежнее y, y_k означает k-ю производную от y.

1. Из § 32 мы заключаем поэтому, что *если коэффициенты $a_i(x)$ непрерывны на интервале $a<x<b$, то для каждого x_0 из этого интервала и любой системы чисел $y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0$ существует одно и только одно решение уравнения* (5.8), *у которого при $x=x_0$ производная i-го порядка ($i=0, 1, \dots, n-1$) обращается в y_i^0. Это решение существует на всем интервале* (a, b).

2. Очевидно, *если функции $y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)$* [1] *удовлетворяют уравнению* (5.8), *то любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x) \tag{5.10}$$

также удовлетворяет этому уравнению.

[1] Здесь $y^{(k)}(x)$ — скалярные (обычные) функции, а не вектор-функции, как в § 32—35.

3. Заметим далее следующее. Пусть мы имеем m решений системы (5.9):

$$\left\| \begin{matrix} y_0^{(k)}(x) \\ y_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}^{(k)}(x) \end{matrix} \right\|, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Если существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_m$, что при всех x на интервале (a, b)

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_0^{(k)}(x) \equiv 0, \tag{5.11}$$

то обязательно будут иметь место и следующие тождества:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_j^{(k)}(x) \equiv 0, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Поэтому мы будем называть решения $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ уравнения (5.8) *линейно зависимыми*, если существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_m$, среди которых по крайней мере одно отлично от нуля, что имеет место следующее тождество:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x) \equiv 0.$$

4. Если принять во внимание, что $y_i(x)$ есть производная i-го порядка от $y(x)$, то детерминант Вронского для системы (5.9) можно записать так:

$$\begin{vmatrix} y^{(1)} & y^{(2)} & \ldots & y^{(n)} \\ \dfrac{dy^{(1)}}{dx} & \dfrac{dy^{(2)}}{dx} & \ldots & \dfrac{dy^{(n)}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{n-1}y^{(1)}}{dx^{n-1}} & \dfrac{d^{n-1}y^{(2)}}{dx^{n-1}} & \ldots & \dfrac{d^{n-1}y^{(n)}}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{5.12}$$

разложив y в ряд Маклорена. Докажите сходимость этого рида. (Ср. задачу 3 § 32.)

4. Если для аналитических функций $y^{(1)}(x), \dots, y^{(k)}(x)$, заданных на интервале (a, b), определитель (5.12) тождественио равен нулю, то эти функции линейно зависимы.

5. (Дж. Асколн.) Пусть дана система n раз непрерывно дифференцируемых линейно независимых на интервале (a, b) функций $y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)$ $(m \leqslant n)$. Докажите, что для существования уравнения (5.8) с непрерывными коэффициентами, для которого заданные функции будут частными решениими, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\left\| \dfrac{d^k y^{(j)}}{dx^k} \right\|$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1;\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ равнялся m в каждой точке интервала (a, b) (ср. задачу § 35).

6. Докажите, что для того, чтобы функции $y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)$, непрерывные при $a \leqslant x \leqslant b$, были линейно зависимыми на этом интервале, необходимо и достаточио равенство нулю определителя Грама $\det \left\| \int\limits_a^b y^{(i)}(x) y^{(k)}(x) dx \right\|$.

§ 37. Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения

Допустим, что нам известно m линейно независимых решений уравнения (5.8) с непрерывными коэффициентамн на интервале (a, b)

$$y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x). \tag{5.13}$$

Из линейной незавнсимости функций следует, что ни одна из них не равна тождественно нулю. Пусть x_0 есть какая-нибудь точка этого интервала, где $y^{(1)}(x) \neq 0$. Так как $y^{(1)}(x)$ непрерывна, то существует некоторый интервал (a_1, b_1), заключающий внутри себя точку x_0, в котором

$$|y^{(1)}(x)| > 0.$$

Сделаем замену неизвестной функции в уравнении (5.8), положив

$$y(x) = y^{(1)}(x) z(x).$$

Легко внде́ть тогда, что функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{d^n z}{dx^n} = a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \dots$$

$$\ldots + a_1^*(x)\frac{dz}{dx} + a_0^*(x)\,z,$$

где коэффициенты $a_i^*(x)$ непрерывны на интервале (a_1, b_1). Так как уравнению (5.8) удовлетворяла функция $y_1(x)$, то последнему уравнению должна удовлетворять функция

$$z(x) \equiv 1;$$

поэтому должно быть $a_0^*(x) \equiv 0$. Положим теперь

$$\frac{dz}{dx} = y^*.$$

Тогда функция y^* удовлетворяет линейному однородному уравнению $(n-1)$-го порядка с непрерывными коэффициентами

$$\frac{d^{n-1}y^*}{dx^{n-1}} = a_{n-1}^*(x)\frac{d^{n-2}y^*}{dx^{n-2}} + $$
$$+ a_{n-2}^*(x)\frac{d^{n-3}y^*}{dx^{n-3}} + \ldots + a_1^*(x)\,y^*. \qquad (5.14)$$

Этому уравнению должны удовлетворять на интервале (a_1, b_1) функции

$$y_i^*(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(1)}(x)}\right), \quad i = 1, \ldots, m-1. \qquad (5.15)$$

Покажем, что они линейно независимы. Действительно, допустим, что существуют такие постоянные C_1, $C_2, \ldots, C_{m-1}$, среди которых по крайней мере одна не равна нулю, что на интервале (a_1, b_1) имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(1)}(x)}\right) \equiv 0.$$

Тогда на этом интервале должно быть

$$\sum_{i=1}^{m-1} C_i\, y^{(i+1)}(x) + Cy^{(1)}(x) \equiv 0,$$

где C — некоторая новая постоянная. Следовательно, функции (5.13) линейно зависимы на интервале (a_1, b_1). Отсюда вытекает, что некоторая нетривиальная линейная комбинация (5.10) тождественно равна нулю на интервале (a_1, b_1), а потому (по теореме единственности) и на интервале (a, b), т. е. эти функции зависимы на всем интервале (a, b). Но это противоречит исходному предположению о том, что функции $y_i(x)$ линейно независимы на (a, b).

Имея $m-1$ линейно независимых решений уравнения (5.14), мы можем с ним проделать все то, что мы только что проделали с уравнением (5.8). Тогда получим на некотором интервале (a_2, b_2), заключенном в (a_1, b_1), некоторое уравнение $(m-2)$-го порядка. Рассуждая таким же образом дальше, мы, наконец, придем к линейному однородному уравнению $(n-m)$-го порядка на некотором интервале (a_m, b_m).

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что в условиях данного параграфа из любого интервала $(\bar{a}, \bar{b})$, где $a<\bar{a}<\bar{b}<b$, можно выбросить конечное число точек так, что на каждом из полученных интервалов порядок уравнения понижается до $(n-m)$-го.

2. Найдите общее решение уравнения

$$(2x-3x^3)y''+4y'+6xy=0;$$

известно, что одним из его решений служит многочлен по x.

3. Укажите простой способ понижения числа уравнений в системе (5.4) при известном ненулевом частном решении.

§ 38. О нулях решений линейных однородных уравнений 2-го порядка

В этом параграфе мы будем рассматривать уравнения вида

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0 \tag{5.16}$$

с непрерывными $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$. Нас будет интересовать имеющий большое значение в приложениях вопрос о том, как часто решение такого уравнения может обращаться в нуль. Каждое значение x, при котором $y(x)=0$, будем называть *нулем* функции y. Подстановкой

$$y(x) = z(x) \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi\right]$$

уравнение (5.16) приводится к виду

$$z'' + B(x) z = 0, \tag{5.17}$$

где

$$B = -\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2} + b$$

и, следовательно, непрерывно.

В силу непрерывности $a(x)$ функции $z(x)$ и $y(x)$ обращаются в нуль одновременно.

Основной является следующая

Теорема Штурма. *Пусть даны два уравнения*

$$z_1''(x) + B_1(x) z_1(x) = 0 \quad \text{и} \quad z_2''(x) + B_2(x) z_2(x) = 0,$$

причем на всём рассматриваемом замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функции $B_1(x)$ и $B_2(x)$ непрерывны и

$$B_2(x) \geqslant B_1(x). \tag{5.18}$$

Тогда между каждыми двумя соседними[1] *нулями x_1 и x_2, $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, не тождественно равного нулю решения $z_1(x)$ первого из этих уравнений заключен по крайней мере один нуль любого решения $z_2(x)$ второго уравнения, если $z_2(x)$ не обращается в нуль при $x = x_1$ или $x = x_2$.* Короче в таких случаях говорят, что решения второго уравнения колеблются не реже, чем решения первого.

Доказательство. Подставим оба сравниваемых решения $z_1(x)$ и $z_2(x)$ в соответствующие уравнения. Первое из полученных тождеств умножим на $z_2(x)$, а второе на $z_1(x)$ и вычтем почленно из первого тождества второе. Получим

$$z_1''(x) z_2(x) - z_1(x) z_2''(x) = [B_2(x) - B_1(x)] z_1(x) z_2(x). \tag{5.19}$$

---

[1] Нетрудно показать, что если бы $z_1(x)$ имело бесконечно много нулей на отрезке $[a, b]$, то на нем обязательно нашлась бы точка, в которой обратилось бы в нуль как $z_1(x)$, так и $z_1'(x)$, и потому было бы $z_1(x) \equiv 0$. (Ср. задачу 2 к § 36.)

Так как

$$z_1''(x)\,z_2(x) - z_1(x)\,z_2''(x) = [z_1'(x)\,z_2(x) - z_1(x)\,z_2'(x)]_x',$$

то, интегрируя тождество (5.19) от x_1 до x_2 и пользуясь тем, что по условию

$$z_1(x_1) = z_1(x_2) = 0,$$

получим

$$z_1'(x_2)\,z_2(x_2) - z_1'(x_1)\,z_2(x_1) = \\ = \int_{x_1}^{x_2} [B_2(x) - B_1(x)]\,z_1(x)\,z_2(x)\,dx. \qquad (5.20)$$

Поскольку мы предполагаем, что x_1 и x_2 являются соседними нулями $z_1(x)$, то между x_1 и x_2 функция $z_1(x)$ сохраняет знак. Так как $z_1(x)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению и, следовательно, $-z_1(x)$ также является решением того же уравнения, то, не ограничивая общности, мы можем предположить, что $z_1(x)$ положительно между x_1 и x_2. Так как ни $z_1'(x_1)$, ни $z_1'(x_2)$ не могут быть нулями, иначе $z_1(x)$ тождественно равнялось бы нулю, то из положительности $z_1(x)$ на интервале (x_1, x_2) следует, что $z_1'(x_1) > 0$, а $z_1'(x_2) < 0$. Согласно (5.18)

$$B_1(x) - B_2(x) \leqslant 0.$$

Если бы доказываемая нами теорема была неверна, то существовало бы решение $z_2(x)$, которое не обращается в нуль на открытом интервале (x_1, x_2) и по крайней мере на одном из его концов. Без ограничения общности мы можем считать $z_2(x)$ на этом интервале всюду положительным. Но тогда левая часть равенства (5.20) была бы отрицательной, а правая неотрицательной. Таким образом, мы пришли к противоречию, допустив, что наша теорема неверна.

Следствия. 1. *Никакое не тождественно равное нулю решение уравнения* (5.17) *не может обратиться на каком-нибудь интервале* (a, b) *в нуль больше одного раза, если всюду на этом интервале* $B(x) \leqslant 0$.

В самом деле, если бы какое-нибудь решение $z(x)$ этого уравнения обратилось в нуль при $x=x_1$ и $x=x_2$ $(a<x_1<x_2<b)$, то по доказанной только что теореме на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ должно было бы обратиться в нуль, по крайней мере один раз, *всякое* решение уравнения $z''(x)\equiv 0$, что, очевидно, неверно.

2. *Если x_1 и x_2 — два последовательных нуля какого-нибудь решения уравнения* (5.16), *то всякое другое решение этого уравнения имеет на интервале* (x_1, x_2) *ровно один нуль, если отношение этих двух решений не постоянно.* Для доказательства этого утверждения надо воспользоваться теоремой Штурма, считая $B_1(x)\equiv B_2(x)$.

ЗАДАЧИ

1. Сравнивая решение уравнения

$$z''+\left(1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)z=0$$

(преобразованное уравнение Бесселя) с решениями уравнения $y''+y=0$ или уравнения $y''+(1+\varepsilon^2)y=0$, покажите, что при $0\leqslant n<1/2$ расстояние между соседними нулями $z(x)\ (\not\equiv 0)$ меньше π и при достаточно больших x как угодно близко к π. Как расположены нули $z(x)$ при $n>1/2$?

2. Покажите, что при неограниченном возрастании x последовательные нули всякого ненулевого решения уравнения

$$y''+xy=0$$

неограниченно сближаются.

3. Покажите для теоремы Штурма, что если хотя бы в одной точке интервала (x_1, x_2) соотношение (5.18) выполняется со знаком $>$ и если $z_2(x_1)=0$, то следующий за x_1 нуль $z_2(x)$ лежит левее x_2.

4. Пусть имеет место неравенство (5.18), причем $z_1(x_1)=z_2(x_1)=0$, $z_1'(x_1)\geqslant z_2'(x_1)>0$. Докажите, что тогда на интервале от x_1 до первого следующего за x_1 нуля функции $z_2(x)$ выполнено неравенство $z_1(x)\geqslant z_2(x)$; если же такого нуля нет, то это неравенство имеет место при всех рассматриваемых значениях $x\geqslant x_1$.

Указание. Предположите сначала, что $z_1'(x_1)>z_2'(x_1)$.

5. (Киезер.) Пусть в уравнении (5.17) функция $B(x)$, определенная при $0<a\leqslant x<\infty$, удовлетворяет неравенству

$$B(x)\geqslant\frac{\frac{1}{4}+\varepsilon}{x^2}$$

($\varepsilon=\mathrm{const}>0$). Докажите, что тогда любое решение этого уравнения имеет бесконечное число нулей. Если же $B(x)\leqslant(4x^2)^{-1}$, то любое нетривиальное решение имеет не более одного нуля. (При доказательстве этого следует предварительно сделать замену $x=e^t$.) Отметим, что многие теоремы о колебаниях решения содержатся в книге: Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954.

6. Рассмотрим уравнение

$$y''+B(x, \lambda)y=0 \ (a\leqslant x\leqslant b, \ \Lambda^*<\lambda<\Lambda^{**})$$

с коэффициентом, зависящим от параметра λ. Пусть функция $B(x, \lambda)$ непрерывна по совокупности x, λ, возрастает по λ и для любого $N>0$ существует λ, для которого $B(x, \lambda)<N^{-1}(a\leqslant x\leqslant b)$, и λ, для которого $B(x, \lambda)>N$ ($a_1\leqslant x\leqslant b_1$; $a\leqslant a_1<b_1\leqslant b$; a_1 и b_1 фиксированы). Докажите, что тогда найдется такая последовательность $\Lambda^*<\lambda_1<\ldots<\lambda_n<\ldots$, стремящаяся к Λ^{**}, что при значениях $\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и только при них рассматриваемое уравнение имеет нетривиальное решение, равное нулю при $x=a$ и $x=b$; при этом для $\lambda=\lambda_n$ это решение имеет между a и b ровно $n-1$ нулей.

§ 39. Система неоднородных линейных уравнений 1-го порядка

Теорема. *Пусть вектор-функция* $\varphi(x)$ *представляет собой одно какое-нибудь частное решение неоднородной системы* (5.2). *Тогда всякое решение этой системы можно представить в виде*

$$y(x)=v(x)+\varphi(x),$$

где вектор-функция $v(x)$ *удовлетворяет однородной системе* (5.4). *Обратно, всякая вектор-функция* $y(x)$ *такого вида удовлетворяет системе* (5.2).

Докажем прямое утверждение:

$$\frac{dv}{dx}-A(x)v=\frac{dy}{dx}-A(x)y-$$
$$-\left[\frac{d\varphi}{dx}-A(x)\varphi\right]=f(x)-f(x)=0,$$

что и требовалось доказать. Обратное предложение доказывается аналогично.

Следствие. *Всякое решение неоднородной линейной системы можно представить в виде*

$$y=\varphi+\sum_k C_k y^{(k)},$$

где вектор-функции $y^{(k)}$ *образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы, а* C_k *— некоторые однозначно определяемые для этого решения постоянные. Обратно, при произвольных* $C_1, \ldots, C_n$ *вектор-функция* $\varphi + \sum\limits_k C_k y^{(k)}$ *удовлетворяет системе* (5.2).

Иначе то же самое можно несколько короче сказать так: *общее решение неоднородной линейной системы есть сумма частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.* Значит, задача нахождения общего решения неоднородной линейной системы сводится к нахождению одного частного решения этой системы, если фундаментальная система решений соответствующей однородной системы нам известна. Для решения этой задачи применим, как и в случае одного линейного уравнения 1-го порядка (ср. § 7), *метод вариации постоянных.*

Метод вариации постоянных. Пусть вектор-функции $y^{(k)}(x)$ $(k=1, \ldots, n)$ образуют фундаментальную систему решений системы (5.4). Попытаемся удовлетворить системе (5.2), положив

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y^{(k)}(x), \tag{5.21}$$

где $C_k(x)$ не обязательно постоянны, как было прежде, а какие-то дифференцируемые функции от x. Подставляя это выражение y в (5.2), найдем, что должно выполняться следующее равенство:

$$\sum_k C_k'(x)\, y^{(k)}(x) + \sum_k C_k(x)\, y^{(k)\prime}(x) - \sum_k A(x)\, C_k(x)\, y^{(k)}(x) =$$
$$= \sum C_k' y^{(k)}(x) + \sum_k C_k(x)\left[y^{(k)\prime} - A(x)\, y^{(k)}(x)\right] =$$
$$= \sum_k C_k' y^{(k)} = f(x).$$

Записывая это векторное равенство для компонент, получим

$$\sum_k C_k'(x)\, y_i^{(k)}(x) = f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.22}$$

т. е. линейную неоднородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_k'(x)$. Детерминант, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, является детерминантом Вронского для вектор-функций $y^{(k)}(x)$ и потому отличен от нуля. Значит, из системы (5.22) можно единственным образом определить $C_k'(x)$. Пусть

$$C_k'(x) = \psi_k(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда интегрированием получаем

$$C_k(x) = \int \psi_k(x)\,dx = \Psi_k(x) + C_k, \tag{5.23}$$

где C_k — произвольные постоянные. Так как нам достаточно найти только одно частное решение системы (5.1), то эти постоянные можно считать, например, нулями. Тогда получим для искомого частного решения выражение

$$y(x) = \sum_k \Psi_k(x)\, y^{(k)}(x).$$

Если же оставить C_k произвольными, то после подстановки (5.23) в (5.21) получим общее решение системы (5.1).

ЗАДАЧИ

1. (Теорема Коши.) Пусть функции

$$y_i^{(k)}(x, \xi), \quad i, k = 1, \ldots, n,$$

при всяком фиксированном k удовлетворяют по x системе (5.4), а при $x = \xi$ удовлетворяют следующим условиям:

$$y_i^{(k)}(\xi, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Требуется доказать, что функции

$$y_i(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_k f_k(\xi) y_i^{(k)}(x, \xi)\, d\xi$$

удовлетворяют системе (5.1) и нулевому начальному условию $y(x_0)=0$; здесь x_0 — любое значение x из того интервала, где мы рассматриваем наши уравнения (5.1). С помощью фундаментальной матрицы $Y(x)$ (см. задачу 1 к § 33) это решение можно представить в виде

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} Y(x)[Y(\xi)]^{-1}f(\xi)d\xi.$$

2. До сих пор мы выделяли частное решение из общего с помощью задания начальных условий, т. е. с помощью задания всех искомых функций, составляющих решение, при одном каком-то значении независимого переменного x. Однако применяются и более общие дополнительные условия к системе дифференциальных уравнений (например, можно задавать различные искомые функции при различных значениях x, можно задавать комбинации значений искомых функций при различных x и т. д.). Рассмотрим общие линейные дополнительные условия к системе (5.2), которые мы коротко запишем в виде

$$L_k[y]=\alpha_k, \quad k=1, \dots, n,$$

где α_k — заданные числа, а L_k — заданные комбинации значений искомого решения $y(x)$ при фиксированных значениях x, удовлетворяющие условию линейности: $L_k[C_1y^{(1)}+C_2y^{(2)}]=C_1L_k[y^{(1)}]+$ $+C_2L_k[y^{(2)}]$. Докажите, что в зависимости от матрицы коэффициентов $A(x)$ и от вида функционалов L_k могут быть два случая: основной, когда поставленная задача имеет ровно одно решение при любой (непрерывной) вектор-функции $f(x)$ и при любых значениях чисел α_k, и особый. В особом случае при произвольном выборе $f(x)$ и α_k поставленная задача, как правило, не имеет ни одного решения; если же такое решение имеется, то их бесконечное множество. Чтобы имел место основной случай, необходимо и достаточно, чтобы соответствущая однородная задача (при $f(x)\equiv 0$ и всех $\alpha_k=0$) имела только тождественно нулевое решение. Для системы (5.2) с начальными условиями всегда имеет место основной случай. Приведите примеры на особый случай. Покажите на примерах, что аналогичная задача для нелинейных систем может также иметь любое конечное или счетное число решений.

§ 40. Следствие для линейного неоднородного уравнения n-го порядка

Неоднородное линейное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n}=a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots$$
$$\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y+f(x) \qquad (5.24)$$

эквивалентно линейной системе

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_0}{dx} &= y_1, \\
\frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1}, \\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= a_0(x)\,y_0 + a_1(x)\,y_1 + a_2(x)\,y_2 + \ldots \\
&\qquad \ldots + a_{n-1}(x)\,y_{n-1} + f(x).
\end{aligned}
$$

Система (5.22) обращается в систему

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)y^{(1)}(x) + C_2'(x)\,y^{(2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\,y^{(n)}(x) = 0, \\
&C_1'(x)\frac{dy^{(1)}}{dx} + C_2'(x)\frac{dy^{(2)}}{dx} + \ldots + C_n'(x)\frac{dy^{(n)}}{dx} = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&C_1'(x)\frac{d^{n-1}y^{(1)}}{dx^{n-1}} + C_2'(x)\frac{d^{n-1}y^{(2)}}{dx^{n-1}} + \ldots + C_n'(x)\frac{d^{n-1}y^{(n)}}{dx^{n-1}} = f(x).
\end{aligned}
$$

Из функций y_i теперь, очевидно, представляет интерес только $y_0(x) \equiv y(x)$, и потому найденные $C_i(x)$ надо подставлять только в равенство

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\,y^{(k)}(x).$$

ЗАДАЧИ

1. Сформулируйте условие и докажите утверждения задачи 2 § 39 применительно к уравнению (5.24). Разберите, в частности, так называемую краевую задачу

$$y'' + y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b), \quad y(a) = \alpha_1, \quad y(b) = \alpha_2,$$

а также аналогичную задачу, в которой уравнение имеет вид

$$y'' - y = f(x).$$

2. (Аналог задачи 1 § 39.) Покажите, что решение уравнения (5.24) при нулевом начальном условии $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots =$

$=y^{(n-1)}(x_0)=0$ (здесь и в задаче 3 верхний индекс в скобках означает порядок производной) имеет вид

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)G(x,\xi)d\xi,$$

где функция $G(x, \xi)$ при каждом фиксированном ξ удовлетворяет по x соответствующему однородному уравнению (5.8) и начальным условиям $y(\xi)=y'(\xi)=\ldots=y^{(n-2)}(\xi)=0$, $y^{(n-1)}(\xi)=1$.

3. Опираясь на результат задачи 2, докажите следующую обобщенную теорему С. А. Чаплыгина. Для любого x_0 на интервале непрерывности коэффициентов уравнения (5.24) найдутся положительные числа $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$, зависящие лишь от x_0 и от коэффициентов $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ и обладающие следующим свойством: если дано решение $y(x)$ уравнения (5.24), причем $f(x)\geqslant 0$, $y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-2)}(x_0)=0$, $y^{(n-1)}(x_0)\geqslant 0$, то $y^{(k)}(x)\geqslant 0$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h_k$; $k=0, 1, \ldots, n-1)$; если же дополнительно дано, что $f(x)>0$ $(x_0<x\leqslant x_0+h_k)$, то $y^{(k)}(x)>0$ $(x_0<x\leqslant x_0+h_k)$. Укажите верхнюю грань для возможных значений чисел h_k в терминах свойств функции G задачи 2. (Можно ли положить $k=n$?) Рассмотрите в качестве примера неравенство $y''+y>0$ при условиях $y(0)=0$, $y'(0)\geqslant 0$. На каком интервале гарантируется положительность его решений? Положительность производной от его решений? Докажите, что если задана оценка $|a_0(x)|, |a_1(x)|, \ldots, |a_{n-1}(x)|$ сверху, то можно получить оценку всех h_k снизу положительным числом. Приведите, опираясь на лемму Адамара, достаточные условия справедливости теоремы Чаплыгина для нелинейных уравнений.

ГЛАВА VI

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 41. Преобразование системы

В настоящей главе мы будем рассматривать линейные системы дифференциальных уравнений, у которых неизвестные функции, свободные члены и коэффициенты комплексны; независимое же переменное будем считать действительным. Пусть

$$\varphi(x)=\overset{*}{\varphi}(x)+i\overset{**}{\varphi}(x),$$

где $\overset{*}{\varphi}(x)$ и $\overset{**}{\varphi}(x)$ действительны. Тогда, по определению,

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{*}{\varphi}(x+\Delta x)-\overset{*}{\varphi}(x)}{\Delta x}+$$

$$+ i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{**}{\varphi}(x+\Delta x) - \overset{**}{\varphi}(x)}{\Delta x} = \overset{*}{\varphi}'(x) + i\overset{**}{\varphi}'(x).$$

Здесь, конечно, предполагается, что $\overset{*}{\varphi}'(x)$ и $\overset{**}{\varphi}'(x)$ существуют. Отсюда видно, что при комплексных C_j и $\varphi_j(x)$

$$[\Sigma C_j \varphi_j(x)]'_x = \Sigma C_j \varphi'_j(x),$$

точно так же как и при действительных C_j и $\varphi_j(x)$. Аналогично можно показать, что и для производной произведения комплексных функций сохраняется обычное правило.

Согласно § 32 линейную систему с постоянными коэффициентами можно записать в матричном виде

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x), \tag{6.1}$$

где A — квадратная матрица коэффициентов, а $f(x)$ и $y(x)$ — заданная и искомая матрицы-столбцы (иначе говоря, векторы). Основная идея решения системы (6.1) состоит в том, чтобы с помощью линейного преобразования искомого вектора привести эту систему к наиболее простому виду.

Линейное преобразование

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

можно коротко записать в виде

$$z = Ky,$$

где $z(x)$ — новая искомая матрица-столбец, а K — квадратная матрица преобразования. Так как нас интересуют только неособые (невырожденные) преобразования, то $\det K \neq 0$ и $y = K^{-1}z$. Подставляя это в (6.1), получим

$$K^{-1}\frac{dz}{dx} = AK^{-1}z + f(x),$$

откуда

$$\frac{dz}{dx} = KAK^{-1} z + Kf(x)$$

или окончательно

$$\frac{dz}{dx} = Bz + g(x), \tag{6.2}$$

где

$$B = KAK^{-1}, \quad g(x) = Kf(x). \tag{6.3}$$

Система (6.2) имеет тот же вид, что и система (6.1), но матрица коэффициентов изменилась по первой формуле (6.3). Естественно попытаться при заданной матрице A подобрать матрицу K так, чтобы матрица B приобрела по возможности более простой вид. В курсах линейной алгебры доказывается, что матрицу преобразования — ее мы обозначим через $\tilde{K}$ — всегда можно подобрать так, что матрица $\tilde{B} = \tilde{K}A\tilde{K}^{-1}$ имеет так называемую жорданову нормальную форму. Эта форма такова: вдоль диагонали матрицы $\tilde{B}$ стоят жордановы клетки $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, а остальные элементы матрицы $\tilde{B}$ равны нулю:

$$\tilde{B} = \begin{Vmatrix} \Pi_1 & & & 0 \\ & \Pi_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \Pi_k \end{Vmatrix}$$

Каждая клетка Π_j представляет собой квадратную матрицу некоторого порядка n_j $(1 \leqslant n_j \leqslant n)$ вида

$$\Pi_j = \begin{Vmatrix} \lambda_j & & & 0 \\ 1 & \lambda_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_j \end{Vmatrix}$$

Здесь на главной диагонали стоит один из корней *характеристического уравнения* матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

(E — единичная матрица), на соседней диагонали снизу[1] стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. При этом n_j равно степени так называемого элементарного делителя $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$, отвечающего корню λ_j. Если некоторому корню отвечает несколько элементарных делителей, то и соответствующее количество клеток в жордановой форме имеет на главной диагонали один и тот же элемент. В наиболее простом случае, когда все элементарные делители первой степени (так будет, в частности, если все корни характеристического уравнения различные), все клетки имеют первый порядок, т. е. матрица $\tilde{B}$ будет иметь чисто диагональный вид.

Если обозначить $\tilde{z}=\tilde{K}y$, $\tilde{g}(x)=\tilde{K}f(x)$, то для $\tilde{z}(x)$ получится система уравнений $\frac{d\tilde{z}}{dx}=\tilde{B}\tilde{z}+\tilde{g}(x)$ (см. (6.2)). Если перейти от матричной записи системы к обычной, скалярной записи, то получится k групп уравнений, отвечающих k жордановым клеткам матрицы $\tilde{B}$; например, первая группа имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}_1}{dx} &= \lambda_1\tilde{z}_1 + \tilde{g}_1(x), \\ \frac{d\tilde{z}_2}{dx} &= \tilde{z}_1+\lambda_1\tilde{z}_2 + \tilde{g}_2(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d\tilde{z}_{n_1}}{dx} &= \tilde{z}_{n_1-1}+\lambda_1\tilde{z}_{n_1}+\tilde{g}_{n_1}(x), \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Для дальнейшего введем «растяжение» каждой из неизвестных функций с произвольным коэффициентом, т. е. сделаем замену этих функций по формулам

$$z_1=a_1\tilde{z}_1,\ z_2=a_2\tilde{z}_2,\ \dots,\ z_{n_1}=a_{n_1}\tilde{z}_{n_1}, \tag{6.5}$$

где все a_j — произвольно выбранные отличные от нуля числа. Тогда уравнения (6.4) переходят в уравнения

[1] В жордановых клетках, применяемых в линейной алгебре, единицы обычно стоят непосредственно выше главной диагонали, а не ниже ее, как показано здесь. Однако если перенумеровать новые переменные в обратном порядке, то матрицы Π_j транспонируются, и мы придем к этой более удобной нам форме.

(проверьте!)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + a_1\tilde{g}_1(x) = \lambda_1 z_1 + g_1(x),\\
\frac{dz_2}{dx} &= \frac{a_2}{a_1} z_1 + \lambda_1 z_2 + a_2\tilde{g}_2(x) = \alpha_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + g_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{n_1}}{dx} &= \frac{a_{n_1}}{a_{n_1-1}} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + a_{n_1}\tilde{g}_{n_1}(x) =\\
&= \alpha_{n_1-1} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + g_{n_1}(x),
\end{aligned}\right\}$$

где обозначено

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{a_1}, \ \ldots, \ \alpha_{n_1-1} = \frac{a_{n_1}}{a_{n_1-1}};$$

$$g_1(x) = a_1\tilde{g}_1(x), \ \ldots, \ g_{n_1}(x) = a_{n_1}\tilde{g}_{n_1}(x).$$

Отметим, что, подбирая коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$, можно сделать $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1-1}$ любыми наперед заданными отличными от нуля числами: для этого достаточно, например, положить $a_1 = 1$ и последовательно находить $a_2 = \alpha_1$, $a_3 = a_2\alpha_2, \ldots, a_{n_1} = a_{n_1-1}\alpha_{n_1-1}$.

Преобразование вида (6.5), совершенное над каждой группой искомых функций, можно коротко записать в виде $z = L\tilde{z}$, где L — соответствующая матрица коэффициентов. В итоге мы получаем

$$z = L\tilde{z} = L\tilde{K}y = Ky, \quad \text{где} \quad K = L\tilde{K}.$$

Если совершить такую замену переменных, то мы перейдем к системе (6.2), которая в скалярной записи в силу сказанного выше имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + g_1(x),\\
\frac{dz_2}{dx} &= \alpha_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + g_2(x),\\
\frac{dz_3}{dx} &= \alpha_2 z_2 + \lambda_1 z_3 + g_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Интегрирование линейных систем с постоянными коэффициентами подробно рассмотрено в § 45 и далее. В § 42—44 мы изложим независимую от курсов линейной алгебры теорию приведения линейных систем к каноническому виду; читатель может по своему усмотрению прочитать или пропустить эти параграфы.

ЗАДАЧА

Докажите, что формула Лагранжа конечных приращений для комплексных функций действительного переменного уже не обязана выполняться. Однако для дифференцируемой на $a \leqslant x \leqslant b$ функции $f(x)$ справедлива формула $\lambda[f(b)-f(a)]=\mu f'(\xi)$, где $a<\xi<b$, а λ и μ — некоторые действительные числа, вообще говоря, зависящие от a, b, t, причем $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$.

§ 42. Теорема о приведении к каноническому виду

Теорема. *Пусть дана линейная система уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j+f_i(x), \quad i=1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Всегда существует линейное преобразование

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}z_j,$$

у которого коэффициенты c_{ij} *постоянны,* $\det\|c_{ij}\| \neq 0$ *и которое приводит систему* (6.7) *к каноническому виду* (6.6). Функции $g_i(x)$ в новой системе суть линейные комбинации с постоянными коэффициентами из функций $f_i(x)$.

Доказательство. При $n=1$ теорема, очевидно, верна. Допустим, что она верна для числа уравнений, равного $n-1$; докажем, что тогда она верна и для числа уравнений, равного n.

Помножим i-е уравнение системы (6.7) на k_i, где k_i — некоторые постоянные, которые точнее будут определены позже. Полученные уравнения просуммируем. Получим

$$\frac{d\sum_i k_i y_i}{dx}=\sum_{ij} a_{ij}k_i y_j+\sum_i k_i f_i(x).$$

Определим теперь k_i так, чтобы тождественно по y_j было

$$\sum_{ij} a_{ij} k_i y_j = \lambda \sum_j k_j y_j,$$

где λ — некоторое постоянное, действительное или комплексное. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых y_j в обеих частях этого равенства были одинаковы, т. е. чтобы было

$$\sum_i a_{ij} k_i = \lambda k_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, для определения k_i мы получили систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, которое только и будет представлять для нас интерес, необходимо и достаточно, чтобы детерминант, составленный из ее коэффициентов, был равен нулю. Это условие можно записать так:

$$\det(\|a_{ij}\| - \lambda E) \equiv (-1)^n \det(\lambda E - \|a_{ij}\|) = 0, \tag{6.8}$$

где E — единичная матрица. Уравнение (6.8) называется еще *вековым уравнением* и играет важную роль во многих вопросах математики, физики и астрономии. Матрица же $(\lambda E - \|a_{ij}\|)$ называется *характеристической матрицей системы* (6.7).

Пусть λ_1 — один из корней уравнения (6.8). Обозначим буквами k_{1i} $(i = 1, \ldots, n)$ какую-нибудь систему чисел, не состоящую из одних нулей, которая удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_i a_{ij} k_{1i} = \lambda_1 k_{1j} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Для определенности положим, что $k_{11} \neq 0$. Очевидно, это нисколько не ограничивает общности, так как мы всегда можем достигнуть этого изменением нумерации у y_i, что сводится к неособому преобразованию. Положим далее

$$z_1 = \sum_j k_{1j} y_j. \tag{6.9}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + g_1(x),$$

где

$$g_1(x) = \sum_i k_{1i} f_i(x).$$

Запишем это уравнение вместо первого уравнения системы (6.7). Все же остальные уравнения этой системы перепишем, заменив в них y_1 его выражением, полученным из (6.9). Это выражение можно найти, так как, по предположению, $k_{11} \neq 0$. Полученную систему будем обозначать номером (6.7'). Она будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + g_1(x),\\
\frac{dy_2}{dx} &= a^*_{21} z_1 + a^*_{22} y_2 + \ldots + a^*_{2n} y_n + f_2(x),\\
\frac{dy_3}{dx} &= a^*_{31} z_1 + a^*_{32} y_2 + \ldots + a^*_{3n} y_n + f_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx} &= a^*_{n1} z_1 + a^*_{n2} y_2 + \ldots + a^*_{nn} y_n + f_n(x).
\end{aligned}\right\} \qquad (6.7')$$

Мы допустили, что доказываемая теорема верна для $(n-1)$ уравнений.

Применим ее к системе, полученной из (6.7') выбрасыванием первого уравнения. При этом будем $z_1(x)$ рассматривать как некоторую известную функцию наравне с $f_i(x)$. Тогда существует такое линейное неособое преобразование:

$$y_i = \sum_{j=2}^{n} k_{ij} y^*_j, \quad i = 2, \ldots, n,$$

которое приводит систему (6.7') к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + g_1(x),\\
\frac{dy^*_2}{dx} &= b_2 z_1 + \lambda_2 y^*_2 + \tilde{f}_2(x),\\
\frac{dy^*_3}{dx} &= b_3 z_1 + \alpha_1 y^*_2 + \lambda_2 y^*_3 + \tilde{f}_3(x),\\
\frac{dy^*_4}{dx} &= b_4 z_1 + \alpha_2 y^*_3 + \lambda_2 y^*_4 + \tilde{f}_4(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy^*_{n_1+1}}{dx} &= b_{n_1+1} z_1 + \alpha_{n_1-1} y^*_{n_1} + \lambda_2 y^*_{n_1+1} + \tilde{f}_{n_1+1}(x),\\
\frac{dy^*_{n_1+2}}{dx} &= b_{n_1+2} z_1 + \lambda_3 y^*_{n_1+2} + \tilde{f}_{n_1+2}(x),
\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy^*_{n_1+3}}{dx} &= b_{n_1+3}z_1+\beta_1 y^*_{n_1+2}+\lambda_3 y^*_{n_1+3}+\tilde{f}_{n_1+3}(x),\\
\frac{dy^*_{n_1+4}}{dx} &= b_{n_1+4}z_1+\beta_2 y^*_{n_1+3}+\lambda_3 y^*_{n_1+4}+\tilde{f}_{n_1+4}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy^*_{n_1+n_2+1}}{dx} &= b_{n_1+n_2+1}z_1+\beta_{n_2-1}y^*_{n_1+n_2}+\lambda_3 y^*_{n_1+n_2+1}+\\
&\qquad+\tilde{f}_{n_1+n_2+1}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy^*_{n-n_k+1}}{dx} &= b_{n-n_k+1}z_1+\lambda_{k+1}y^*_{n-n_k+1}+\tilde{f}_{n-n_k+1}(x),\\
\frac{dy^*_{n-n_k+2}}{dx} &= b_{n-n_k+2}z_1+\omega_1 y^*_{n-n_k+1}+\lambda_{k+1}y^*_{n-n_k+2}+\\
&\qquad+\tilde{f}_{n-n_k+2}(x);\\
\frac{dy^*_{n-n_k+3}}{dx} &= b_{n-n_k+3}z_1+\omega_2 y^*_{n-n_k+2}+\lambda_{k+1}y^*_{n-n_k+3}+\\
&\qquad+\tilde{f}_{n-n_k+3}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy^*_{n}}{dx} &= b_n z_1+\omega_{n_k-1}y^*_{n-1}+\lambda_{k+1}y^*_n+\tilde{f}_n(x).
\end{aligned}\right\} \quad (6.7'')$$

Чтобы привести систему к каноническому виду, нам остается теперь только освободиться от некоторых b_i. Так как все группы уравнений от 2-го до (n_1+1)-го, от (n_1+2)-го до (n_1+n_2+1)-го, ..., от $(n-n_k+1)$-го до n-го находятся в совершенно одинаковом положении, то мы покажем только, как освободиться от некоторых из $b_2, b_3, \ldots, b_{n_1+1}$. Нам придется при этом различать два случая, смотря по тому, равны λ_1 и λ_2, или нет.

1-й случай, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Положим $z_2=y_2^*+Kz_1$. Тогда

$$\frac{dz_2}{dx}=\frac{dy_2^*}{dx}+K\frac{dz_1}{dx}=b_2z_1+\lambda_2y_2^*+K\lambda_1z_1+g_2(x)=$$

$$=b_2z_1+\lambda_2z_2-K\lambda_2z_1+K\lambda_1z_1+g_2(x)=\lambda_2z_2+[b_2+K(\lambda_1-\lambda_2)]\,z_1+g_2(x).$$

Здесь $g_2(x)$ есть некоторая линейная комбинация из $g_1(x)$ и $\tilde{f}_2(x)$. Выберем K так, чтобы было

$$b_2+K(\lambda_1-\lambda_2)=0.$$

Это возможно, так как, по предположению, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда получим

$$\frac{dz_2}{dx} = \lambda_2 z_2 + g_2(x).$$

Значит, во втором уравнении мы уже освободились от b_2.

Положим теперь $z_3 = y_3^* + K_1 z_1$. Тогда

$$\frac{dz_3}{dx} = \frac{dy_3^*}{dx} + K_1 \frac{dz_1}{dx} = b_3 z_1 + \alpha_1 y_2^* + \lambda_2 y_3^* + K_1 \lambda_1 z_1 + g_3(x) =$$

$$= (b_3 - \alpha_1 K + K_1 \lambda_1 - K_1 \lambda_2) z_1 + \alpha_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + g_3(x).$$

Здесь $g_3(x)$ есть некоторая линейная комбинация из $g_1(x)$ и $\tilde{f}_3(x)$. Выберем K_1 так, чтобы было $b_3 - K\alpha_1 = K_1(\lambda_2 - \lambda_1)$. Так как $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то это возможно. Тогда получим

$$\frac{dz_3}{dx} = \alpha_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + g_3(x).$$

Совершенно так же можно уничтожить b_i и в других уравнениях первой группы.

2-й случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2$. Положим

$$y_{n_1+1}^* = z_{n_1+1}, \quad b_{n_1+1} z_1 + \alpha_{n_1-1} y_{n_1}^* = \alpha_{n_1}^* z_{n_1},$$

где $\alpha_{n_1}^*$ — любое число, отличное от нуля. Последнее уравнение можно разрешить относительно $y_{n_1}^*$ и z_{n_1}, так как $\alpha_{n_1}^* \neq 0$ и $\alpha_{n_1-1} \neq 0$. Тогда (n_1+1)-е и n_1-е уравнения можно переписать так:

$$\frac{dz_{n_1+1}}{dx} = \alpha_{n_1}^* z_{n_1} + \lambda_2 z_{n_1+1} + \tilde{f}_{n_1+1}(x),$$

$$\frac{dz_{n_1}}{dx} = \frac{b_{n_1+1}}{\alpha_{n_1}^*} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha_{n_1}^*} \frac{dy_{n_1}^*}{dx} = \frac{b_{n_1+1}}{\alpha_{n_1}^*} \lambda_1 z_1 +$$

$$+ \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1} z_1}{\alpha_{n_1}^*} + \frac{\alpha_{n_1-1} \alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* + \frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha_{n_1}^*} \lambda_2 y_{n_1}^* + g_{n_1}(x) =$$

$$= \frac{b_{n_1+1} \lambda_1}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1} \alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* +$$

$$+ \lambda_2 \frac{\alpha_{n_1}^* z_{n_1} - b_{n_1+1} z_1}{\alpha_{n_1}^*} + g_{n_1}(x) = \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha_{n_1}^*} z_1 +$$

$$+ \frac{\alpha_{n_1-1} \alpha_{n_1-2}}{\alpha_{n_1}^*} y_{n_1-1}^* + \lambda_2 z_{n_1} + g_{n_1}(x).$$

Положим

$$\alpha^*_{n_1-1} z_{n_1-1} = \frac{\alpha_{n_1-1} b_{n_1}}{\alpha^*_{n_1}} z_1 + \frac{\alpha_{n_1-1}\,\alpha_{n_1-2}}{\alpha^*_{n_1}} y^*_{n_1-1},$$

где $\alpha^*_{n_1-1}$ — любое число, отличное от нуля. Тогда n_1-е уравнение перепишется так:

$$\frac{dz_{n_1}}{dx} = \alpha^*_{n_1-1} z_{n_1-1} + \lambda_2 z_{n_1} + g_{n_1}(x).$$

Аналогично мы поступаем и с другими уравнениями первой группы. Таким образом мы избавимся от b_{n_1+1}, b_{n_1}, ..., b_4, b_3. От b_2 нам не удастся избавиться, если оно не равно нулю, но это при $\lambda_1=\lambda_2$ и не требуется для приведения системы к каноническому виду. Однако если $b_2\neq 0$, то подстановкой $z_1=Kz_1^*$ его можно сделать каким угодно отличным от нуля числом. Через $g_i(x)$ мы всюду здесь обозначали некоторые линейные комбинации $f_i(x)$ и $g_i(x)$.

Пусть кроме λ_2 есть еще какое-нибудь λ, например λ_3, равное λ_1. Тогда таким же способом мы сможем освободиться от b_{n_1+3}, b_{n_1+4}, ..., $b_{n_1+n_2+1}$. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем считать, что уже в уравнениях (6.7″)

$$b_3 = b_4 = \ldots = b_{n_1+1} = b_{n_1+3} = b_{n_1+4} = \ldots = b_{n_1+n_2+1} = 0.$$

Но b_2 и b_{n_1+2} могут быть отличными от нуля. Если $b_2=0$, то можно поменять местами группы уравнений, соответствующие λ_2 и λ_3, и тогда для приведения системы к каноническому виду не надо будет освобождаться от b_{n_1+2}, если оно $\neq 0$. Если же $b_2\neq 0$ и $b_{n_1+2}\neq 0$, то, предполагая, что $n_1 \geqslant n_2$, чего всегда можно достигнуть переменой мест групп уравнений, соответствующих λ_2 и λ_3, положим $z_{n_1+2} = y^*_{n_1+2} + K_1 y^*_2$. Тогда получим

$$\frac{dz_{n_1+2}}{dx} = \frac{dy^*_{n_1+2}}{dx} + K_1 \frac{dy^*_2}{dx} =$$

$$= b_{n_1+2} z_1 + \lambda_3 y^*_{n_1+2} + K_1 b_2 z_1 + K_1 \lambda_2 y^*_2 + g_{n_1+2}(x) =$$

$$z_1 + \lambda_3 z_{n_1+2} - \lambda_3 K_1 y^*_2 + K_1 b_2 z_1 + K_1 \lambda_2 y^*_2 + g_{n_1+2}(x).$$

Так как, по предположению, $b_2\neq 0$, то K_1 можно выбрать так, чтобы $k_1\ b_2 = -b_{n_1+2}$. В силу того что $\lambda_2=\lambda_3$, мы получим тогда

$$\frac{dz_{n_1+2}}{dx} = \lambda_3 z_{n_1+2} + g_{n_1+2}(x).$$

Подставляя же $z_{n_1+2}-K_1 y_2^*$ вместо $y_{n_1+2}^*$ в следующее уравнение, мы получим

$$\frac{dy_{n_1+3}^*}{dx} = -\beta_1 K_1 y_2^* + \beta_1 z_{n_1+2} + \lambda_3 y_{n_1+3}^* + \tilde{f}_{n_1+3}(x).$$

В этом уравнении можно освободиться от члена с y_2^* подстановкой $z_{n_1+3} = y_{n_1+3}^* + K_2 y_2^*$. Продолжая подобные преобразования, мы приведем систему к каноническому виду.

Заметим в заключение, что все линейные преобразования, которыми мы пользовались для приведения системы к каноническому виду, были всегда однозначно обратимыми, т. е. новые переменные всегда связывались со старыми такими линейными соотношениями, что из них вполне однозначно выражались как новые переменные через старые, так и старые через новые. Поэтому и преобразование y_i в z_i будет также линейным и обратимым, а потому неособым.

Описанный только что способ приведения системы дифференциальных уравнений (6.7) к каноническому виду на практике очень громоздок. Поэтому желательно найти методы, которые быстрее давали бы строение канонической системы: числа λ_i и числа уравнений, соответствующих каждому λ_i. Целью ближайших параграфов является указание таких методов.

§ 43. Инварианты линейного преобразования

Пусть линейная система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{B}$$

получается из системы

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{A}$$

линейным неособым преобразованием

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n\ ^{1)}.$$

[1] Чтобы не усложнять записи, мы в этом параграфе говорим всюду только об однородных системах, но доказываемые здесь теоремы справедливы, конечно, и для неоднородных систем.

Тогда имеют место две следующие теоремы.

Теорема 1. *Положим*

$$\|a_{ij}\|=A,\ \|b_{ij}\|=B,\ \|k_{ij}\|=K.$$

Через E обозначим единичную матрицу n-го порядка. Тогда

$$\lambda E-B=K(\lambda E-A)K^{-1}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Подставим в систему (B) вместо z_i их выражения через $y_1, \dots, y_n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\frac{dy_j}{dx}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\sum_{s=1}^{n} k_{js}y_s.$$

Пользуясь системой (A), мы получим отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\sum_{s=1}^{n} a_{js}y_s=\sum_{j,s=1}^{n} k_{ij}a_{js}y_s=\sum_{s,j=1}^{n} b_{ij}k_{js}y_s.$$

Так как эти соотношения должны выполняться тождественно по y_s, то при всех i и s должно быть

$$\sum_{j} k_{ij}a_{js}=\sum_{j} b_{ij}k_{js};$$

а это значит, что

$$KA=BK \text{ или } B=KAK^{-1}.$$

Это последнее равенство в точности эквивалентно (6.10), потому что

$$E=KEK^{-1}$$

Теорема 2. *Общие наибольшие делители всех миноров l-го порядка ($l=1, \dots, n$) λ-матриц*[1] *$\lambda E-A$ и $\lambda E-B$ совпадают с точностью до постоянных множителей*[2].

Отсюда непосредственно следует, что *детерминанты матриц $\lambda E-A$ и $\lambda E-B$ должны совпадать.*

Доказательство. Достаточно доказать, что общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка матрицы $\lambda E-A$ является также делителем общего наибольшего делителя всех миноров l-го порядка матрицы $\lambda E-B$. В силу равноправия перехода от (B) к (A) и от (A) к (B) отсюда будет уже следовать, что эти общие наибольшие делители просто совпадают (с точностью до постоянного сомножителя).

Для доказательства нашего утверждения отметим, что все миноры l-го порядка у матрицы $K(\lambda E-A)$ суть суммы произведений

[1] *λ-матрицами* называются матрицы, у которых элементы являются многочленами от λ.

[2] Эти наибольшие делители миноров l-го порядка находят, как у многочленов от λ.

на элементы матрицы K некоторых миноров l-го порядка λ-матрицы $\lambda E-A$. Поэтому все общие множители этих последних будут также общими множителями миноров l-го порядка матрицы $K(\lambda E-A)$, а отсюда уже прямо следует, что общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка матрицы $K(\lambda E-A)$ делится на общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка матрицы $\lambda E-A$. Аналогично совершается переход от $K(\lambda E-A)$ к $K(\lambda E-A)K^{-1}=\lambda E-B$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА

(Сильвестр.) Докажите, что каждая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е. если вместо λ подставить эту матрицу в левую часть характеристического уравнения, то получится нулевая матрица.

§ 44. Элементарные делители

Лемма. *Если квадратная матрица P порядка n содержит сплошь заполненный нулями прямоугольник Q, у которого сумма высоты a и ширины b больше n, то детерминант этой матрицы равен нулю* [1].

Доказательство. Мы всегда можем, не меняя абсолютной величины интересующего нас детерминанта, переместить прямо-

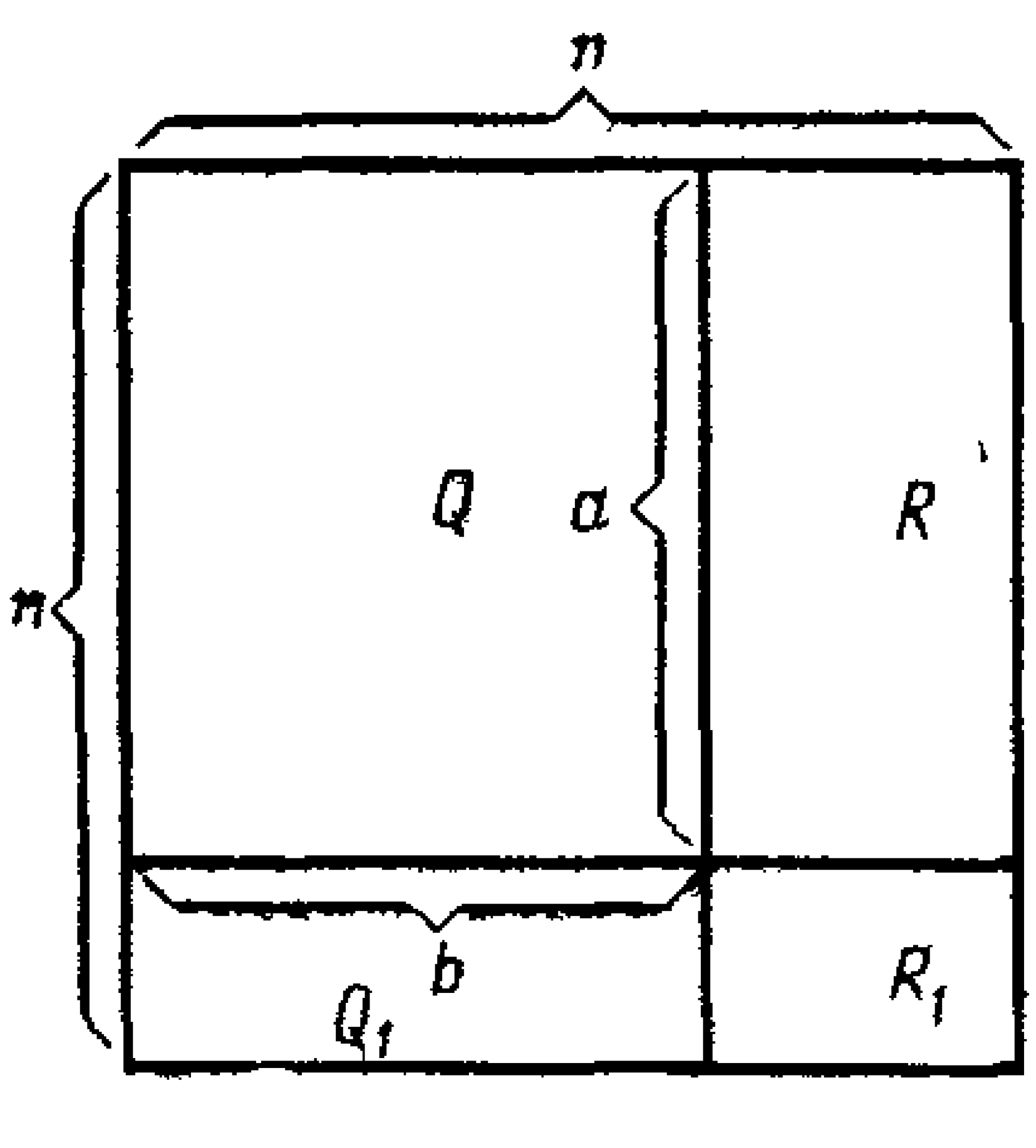

Рис. 25

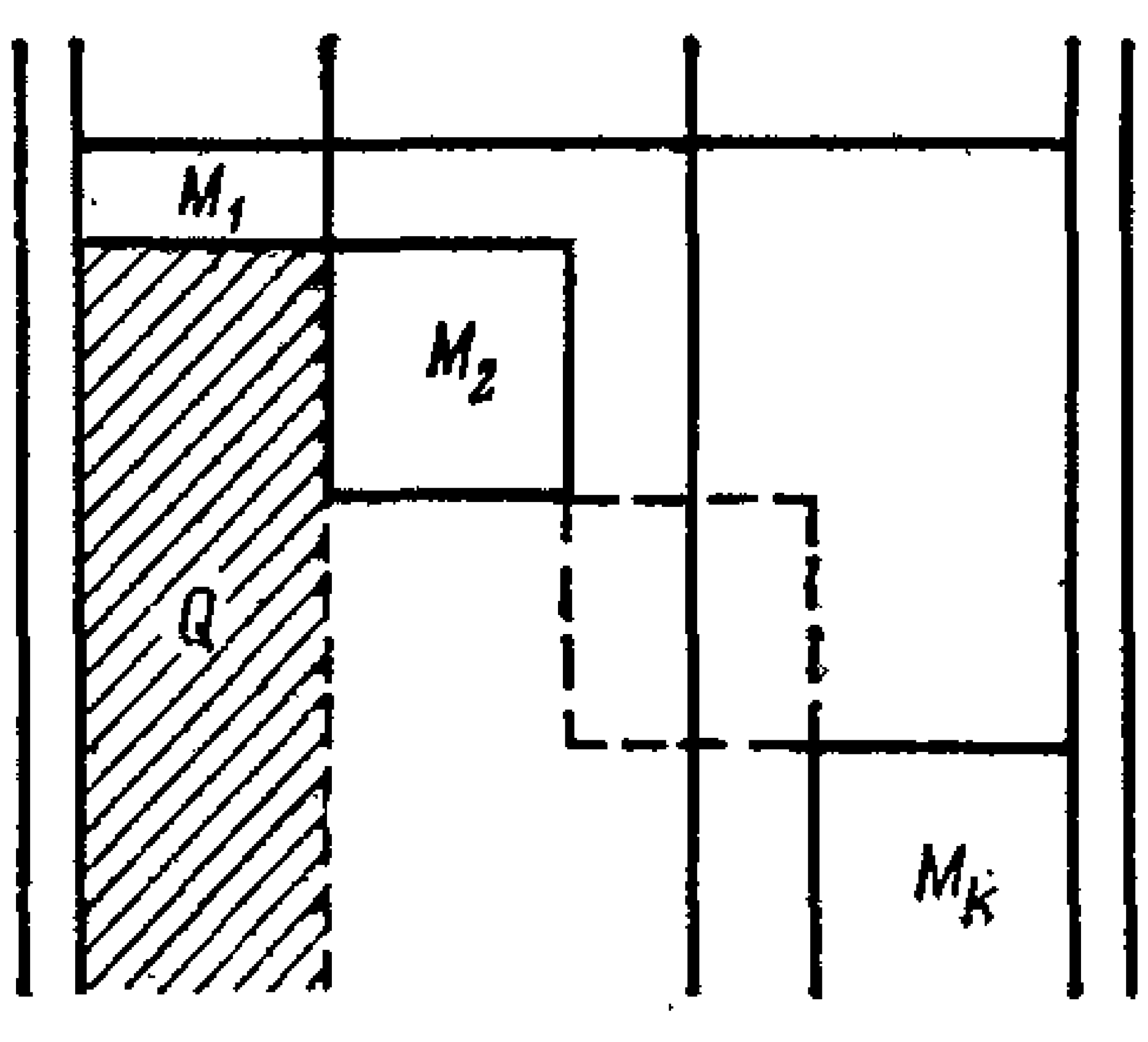

Рис. 26

угольник Q в левый верхний угол матрицы P. Схематически тогда строение матрицы P изображается рис. 25. По теореме Лапласа детерминант матрицы P равен алгебраической сумме произведений детерминантов b-го порядка D, составленных из элементов, находящихся в прямоугольниках Q_1 и Q, на соответствующие им детерминанты, составленные из элементов, находящихся в прямоугольни-

[1] На эту лемму мне указал С. Л. Соболев.

ках R и R_1. Так как $n-a<b$, то всякий детерминант D содержит по крайней мере одну строчку, составленную сплошь из нулей, и потому равен нулю. Следовательно, и весь детерминант матрицы P равен нулю.

Применим только что доказанную лемму к нахождению общего наибольшего делителя всех миноров l-го порядка матрицы

$$M = \begin{Vmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{Vmatrix},$$

где

$$M_s = \begin{Vmatrix} \lambda-\lambda_s & & & & & \\ \varepsilon_{s1} & \lambda-\lambda_s & & & & \\ & \varepsilon_{s2} & \lambda-\lambda_s & & & \\ & & & \lambda-\lambda_s & & \\ & & & \varepsilon_{sn_s-2} & \lambda-\lambda_s & \\ & & & & \varepsilon_{sn_s-1} & \lambda-\lambda_s \end{Vmatrix}$$

Здесь всюду элементы вне квадратов $M_1, M_2, \ldots, M_k$, а также все не выписанные явно элементы матрицы M_s равны нулю, числа $\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}, \ldots, \varepsilon_{sn_s-1}$ все отличны от нуля, некоторые из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ могут быть между собой равными. Матрица M с точностью до обозначений околодиагональных элементов является характеристической матрицей для приведенной к каноническому виду (6.6) системы дифференциальных уравнений (6.7).

Проведем сначала все вычисления для $l = n = \sum\limits_{s=1}^{k} n_s$, т. е. найдем сначала детерминант матрицы M. Очевидно, он равен произведению детерминантов всех матриц M_s, т. е.

$$\det M = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}.$$

Так как по теореме предыдущего параграфа $\det M$ должен совпадать с детерминантом матрицы $\lambda E - A$, то отсюда получается

Следствие. *Все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ в уравнениях* (6.6) *должны быть корнями характеристического уравнения матрицы системы* (6.7).

Перейдем теперь к нахождению общего наибольшего делителя всех миноров $(n-1)$-го порядка матрицы M. Для этого нам будет удобнее прежде всего явно выписать, какие значения принимают $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Пусть это будут различные между собой числа

$$\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)} \quad (m \leqslant k).$$

Заметим далее следующее: общий делитель всех миноров l-го порядка должен также быть делителем детерминанта всей матрицы M. Поэтому общий наибольший делитель всех миноров l-го порядка матрицы M, которой мы будем обозначать $D_l(\lambda)$, должен иметь с точностью до постоянного множителя следующий вид:

$$D_l(\lambda) = (\lambda - \lambda^{(1)})^{p_1} \ldots (\lambda - \lambda^{(m)})^{p_m},$$

где p_i — некоторые неотрицательные целые числа. Выбросим теперь из матрицы M какую-нибудь строчку и какой-нибудь столбец, которые пересекаются вне квадратов M_s, например так, как это схематически показано на рис. 26. Тогда останется матрица $(n-1)$-го порядка M', имеющая заполненный одними нулями прямоугольник Q, у которого сумма ширины и высоты равна n (этот прямоугольник на нашем рисунке заштрихован). Поэтому, согласно предыдущей лемме, детерминант матрицы M' равен нулю. Следовательно, при нахождении общего наибольшего делителя $D_{n-1}(\lambda)$ всех миноров $(n-1)$-го порядка матрицы M нам достаточно рассматривать определители только таких матриц M', которые получились из M вычеркиванием строк и столбцов, пересекающихся внутри одного из квадратов M_s, например M_{s_1}. Очевидно, для получения детерминанта такой матрицы M' надо детерминант матрицы M'_{s_1}, полученной из M_{s_1} вычеркиванием одной строки и одного столбца, помножить на детерминанты всех остальных матриц M_s. При нахождении общего наибольшего делителя всех миноров $(n-1)$-го порядка $\det M'$ для нас, очевидно, наибольший интерес будут представлять миноры, содержащие наименьшие степени

$$(\lambda - \lambda^{(1)}), \ldots, (\lambda - \lambda^{(m)}).$$

Чтобы получить наименьшую степень $\lambda - \lambda_{s_1}$ у детерминанта матрицы M'_{s_1}, нам, очевидно, надо вычеркнуть в M_{s_1} первую строку и последний столбец. После этого полученный определитель будет равен произведению

$$\varepsilon_{s_1 1}\, \varepsilon_{s_1 2} \ldots \varepsilon_{s_1 n_{s_1}-1},$$

которое отлично от нуля потому, что все $\varepsilon_{s_1 i}$ отличны от нуля. Тогда $(\lambda - \lambda_{s_1})$ входит в минор $\det M'$ в степени, на n_{s_1} единиц меньшей, чем в $\det M$. Поэтому наименьшая степень $(\lambda - \lambda^{(i)})$, которая входит во все миноры $\det M'$, равна

$$(\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i - m_i^{(1)}},$$

где через m_i обозначена сумма порядков всех матриц M_s, у которых на диагонали стоит $\lambda-\lambda^{(i)}$, а через $m_i^{(1)}$ обозначен наибольший из этих порядков. Следовательно,

$$D_{n-1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i - m_i^{(1)}}$$

Совершенно так же мы найдем, что

$$D_{n-2}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i - m_i^{(1)} - m_i^{(2)}}$$

где $m_i^{(2)}$ есть следующий по величине за $m_i^{(1)}$ порядок матриц M_s, у которых на диагонали стоит $\lambda-\lambda^{(i)}$, и т. д. Степени

$$(\lambda - \lambda^{(i)})^{m_i^{(l)}}$$

называются *элементарными делителями λ-матрицы M.*

Так как общие наибольшие делители у всех миноров матрицы M, соответствующей каноническому виду системы дифференциальных уравнений, и у матрицы $\lambda E-A$, соответствующей системе (6.7), по 2-й теореме § 43 с точностью до постоянного множителя одинаковы, то и элементарные делители у этих матриц также одинаковы; при этом, если какой-нибудь элементарный делитель у матрицы $\lambda E-A$ встречается несколько раз, то столько же раз он встречается и у матрицы M. Поэтому знание элементарных делителей матрицы $\lambda E-A$ и кратности каждого из них дает возможность указать, к какому каноническому виду она может быть приведена. При этом остаются только неопределенными околодиагональные члены у квадратов M_s. Как мы видели в § 42, их можно выбирать как угодно, лишь бы только они были отличными от нуля.

§ 45. Отыскание фундаментальной системы решений для однородной системы уравнений

Лемма. *Если m вектор-функций $z^{(1)}(x), \ldots, z^{(m)}(x)$ линейно независимы, а $z=Ky$ — линейное невырожденное преобразование, то вектор-функции $y^{(i)}(x) = K^{-1}z^{(i)}(x)$ $(i=1, \ldots, m)$ также линейно независимы.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. предположим, что существуют постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$, не все равные нулю, и такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}(x) \equiv 0.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} C_i K^{-1} z^{(i)}(x) \equiv 0,$$

т. е.

$$K^{-1} \sum_{i=1}^{m} C_i z^{(i)}(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}(x) \equiv 0,$$

что противоречит линейной независимости функций $z^{(i)}(x)$.

Мы видели, что элементарному делителю $(\lambda-\lambda_s)^{p_s}$ матрицы $\lambda E - A$ соответствует в канонической системе следующая группа однородных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{k+1}}{dx} &= \lambda_s z_{k+1},\\
\frac{dz_{k+2}}{dx} &= \varepsilon_1 z_{k+1} + \lambda_s z_{k+2},\\
\frac{dz_{k+3}}{dx} &= \varepsilon_2 z_{k+2} + \lambda_s z_{k+3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{k+p_s}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1} + \lambda_s z_{k+p_s},
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p_s-1}$ — некоторые отличные от нуля числа. Сделаем здесь замену неизвестных, положив

$$z_{k+l} = \overset{*}{z}_{k+l} e^{\lambda_s x}, \quad l = 1, \ldots, p_s.$$

Если λ_s комплексно и равно

$$\lambda_s^* + i\lambda_s^{**},$$

где λ_s^* и λ_s^{**} действительны, то мы будем понимать под $e^{\lambda_s x}$ выражение

$$e^{\lambda_s^* x}(\cos \lambda_s^{**} x + i \sin \lambda_s^{**} x)$$

(формула Эйлера). Производная по x от этого выражения равна

$$\lambda_s^* e^{\lambda_s^* x}(\cos\lambda_s^{**}x + i\sin\lambda_s^{**}x) +$$
$$+ e^{\lambda_s^* x}(-\lambda_s^{**}\sin\lambda_s^{**}x + i\lambda_s^{**}\cos\lambda_s^{**}x) =$$
$$= (\lambda_s^* + i\lambda_s^{**})e^{\lambda_s^* x}(\cos\lambda_s^{**}x + i\sin\lambda_s^{**}x) = \lambda_s e^{\lambda_s x}.$$

Поэтому после указанной подстановки получим

$$\frac{dz_{k+1}^*}{dx} = 0,$$
$$\frac{dz_{k+2}^*}{dx} = \varepsilon_1 z_{k+1}^*,$$
$$\frac{dz_{k+3}^*}{dx} = \varepsilon_2 z_{k+2}^*,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dz_{k+p_s}^*}{dx} = \varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1}^*.$$

Из первого из этих уравнений находим

$$z_{k+1}^* = C_1 = C_0^{(1)}.$$

Подставляя это во второе и интегрируя его, находим

$$z_{k+2}^* = C_1\varepsilon_1 x + C_2 = C_1^{(2)}x + C_0^{(2)}.$$

Подставляя z_{k+2}^* в третье уравнение и интегрируя его, находим

$$z_{k+3}^* = \frac{C_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}x^2 + C_2\varepsilon_2 x + C_3 = C_2^{(3)}x^2 + C_1^{(3)}x + C_0^{(3)},$$

и т. д. Наконец,

$$z_{k+p_s}^* = C_{p_s-1}^{(p_s)} x^{p_s-1} + C_{p_s-2}^{(p_s)} x^{p_s-2} + \ldots + C_1^{(p_s)} x + C_0^{(p_s)}.$$

Через C с различными индексами мы здесь всюду обозначали некоторые постоянные, действительные или комплексные.

Возвращаясь отсюда к $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{k+p_s}$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} z_{k+1} &= e^{\lambda_s x} C_0^{(1)}, \\ z_{k+2} &= e^{\lambda_s x} (C_1^{(2)} x + C_0^{(2)}), \\ z_{k+3} &= e^{\lambda_s x} (C_2^{(3)} x^2 + C_1^{(3)} x + C_0^{(3)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{k+p_s} &= e^{\lambda_s x} (C_{p_s-1}^{(p_s)} x^{p_s-1} + C_{p_s-2}^{(p_s)} x^{p_s-2} + \ldots + \\ &\qquad + C_1^{(p_s)} x + C_0^{(p_s)}). \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Эти равенства дают общее решение рассматриваемой группы дифференциальных уравнений. Применяя теорему 4 из § 33 к этой группе, мы найдем, что у нее есть p_s линейно независимых между собой решений вида (6.11). Мы удовлетворим всей однородной канонической системе, если будем считать все z_i, ~~кроме~~ (6.11), тождественно равными нулю. Так как $y_i (i=1, \ldots, n)$ выражаются линейно через $z_i (i=1, \ldots, n)$, то отсюда на основании доказанной в этом параграфе леммы получается, что каждому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ матрицы $\lambda E - A$ соответствует p_s линейно независимых между собой решений вида

$$y_i = e^{\lambda_s x} \sum_{j=0}^{p_s-1} C_j^{*(i)} x^j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Легко видеть, что в первом из этих решений можно считать равными нулю все $C_j^{*(i)}$ при $j > 0$, в то время как $\sum_{i=1}^{n} |C_0^{*(i)}| > 0$, оно соответствует $z_{k+1} \equiv \ldots \equiv z_{k+p_s-1} \equiv \equiv 0$; во втором — все $C_j^{*(i)} = 0$ при $j > 1$, в то время как $\sum_{i=1}^{n} |C_1^{*(i)}| > 0$, оно соответствует $z_{k+1} \equiv \ldots \equiv z_{k+p_s-2} \equiv 0$, и т. д.

Если матрица $\lambda E - A$ имеет несколько элементарных делителей, которые являются некоторыми степенями $(\lambda - \lambda^{(1)})$, например

$$(\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(1)}}, \ (\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(2)}}, \ \ldots, \ (\lambda - \lambda^{(1)})^{m^{(k)}},$$

то система

$$\frac{dy}{dx} = Ay,$$

т. е.

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \; i = 1, \ldots, n, \tag{6.12}$$

имеет $m^{(1)}+m^{(2)}+\ldots+m^{(k)}$ линейно независимых между собой решений вида

$$y_i = e^{\lambda^{(1)}x} \sum_{j=0}^{M-1} C_j^{(i)} x^j, \tag{6.13}$$

где M есть наибольшее из чисел $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(k)}$. Чтобы найти эти решения, надо только определить коэффициенты $C_j^{(i)}$. Это можно сделать методом неопределенных коэффициентов, подставляя в (6.12) вместо y_i выражение вида (6.13), сокращая получившиеся уравнения на $e^{\lambda^{(1)}x}$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x. Эти решения будут линейно независимыми с теми решениями, которые таким же образом будут составлены для элементарных делителей, представляемых степенями других $(\lambda-\lambda^{(p)})$, потому что этим делителям будут соответствовать другие группы уравнений в канонической системе.

З а м е ч а н и е. Если все коэффициенты в рассматриваемой однородной системе действительны, то действительная и мнимая части каждого комплексного решения этой системы в отдельности являются решениями однородной системы. Мы называем действительной (соответственно мнимой) частью решения $y^*(x)+ +iy^{**}(x)$ функцию $y^*(x)$ (соответственно $y^{**}(x)$).

Если мы имеем n линейно независимых вектор-функций

$$y^{(k)}(x) = y^{*(k)}(x) + iy^{**(k)}(x); \; k = 1, \ldots, n,$$

то среди $2n$ функций $y^{*(k)}(x)$, $y^{**(k)}(x)$, $k=1, \ldots; n$, обязательно найдется n линейно независимых между собой. (Почему?) Поэтому для системы линейных дифферен-

Теперь мы будем считать все a_i постоянными. Детерминант этой матрицы, как легко подсчитать, равен

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} \ldots - a_1\lambda - a_0 \equiv M(\lambda).$$

Вычеркивая же первый столбец и последнюю строку, мы получим матрицу, у которой определитель равен $+1$ или -1. Следовательно, *если многочлен* $M(\lambda)$ *имеет корень* λ_s *кратности* p_s, *то матрица* (6.14) *имеет элементарный делитель* $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$. *Никаких других элементарных делителей, которые представлялись бы некоторой степенью* $(\lambda - \lambda_s)$, *у этой матрицы нет.* Поэтому корню λ_s кратности p_s соответствует p_s линейно независимых между собой (и с решениями, отвечающими другим корням $M(\lambda)$) решений вида

$$(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{p_s-1}x^{p_s-1})\, e^{\lambda_s x}. \tag{6.15}$$

Легко проверить, что такими решениями могут служить

$$e^{\lambda_s x},\ xe^{\lambda_s x},\ x^2e^{\lambda_s x},\ \ldots,\ x^{p_s-1}e^{\lambda_s x}.$$

Действительно, если бы между этими функциями существовала линейная зависимость, то выражение вида (6.15), у которого по крайней мере одно из $C_i \neq 0$, тождественно равнялось бы нулю. Но так как $e^{\lambda_s x}$ никогда не обращается в нуль и многочлен, у которого не все коэффициенты равны нулю, не может тождественно равняться нулю, то это невозможно.

Если все a_i действительны, то каждому комплексному элементарному делителю $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ матрицы (6.14) соответствует сопряженный с ним элементарный делитель $(\lambda - \bar{\lambda}_s)^{p_s}$ той же матрицы. Тогда каждому решению

$$y_1(x) = x^k e^{\lambda_s x} = x^k e^{\alpha_s x}(\cos \beta_s x + i \sin \beta_s x)$$

уравнения (5.8) с постоянными коэффициентами соответствует решение

$$\bar{y}_1(x) = x^k e^{\bar{\lambda}_s x} = x^k e^{\alpha_s x}(\cos \beta_s x - i \sin \beta_s x)$$

того же уравнения ($\lambda_s=\alpha_s+i\beta_s$). Поэтому тому же уравнению будут удовлетворять действительные функции

$$\frac{y_1(x)+\overline{y}_1(x)}{2}=x^k e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,$$

$$\frac{y_1(x)-\overline{y}_1(x)}{2i}=x^k e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x.$$

Таким образом, мы получим n действительных линейно независимых между собой (почему?) решений уравнения (5.8) с постоянными коэффициентами.

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что указанное выше (напечатано курсивом) строение элементарных делителей в случае системы уравнений 1-го порядка является также достаточным условием для того, чтобы эта система после совершения неособого преобразования сводилась к системе (5.9) с постоянными коэффициентами, эквивалентной одному уравнению n-го порядка. Таким образом, мы имеем необходимое и достаточное условие для того, чтобы система n линейных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами была эквивалентна (в только что указанном смысле) одному линейному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами.

2. Найдите общее решение уравнения Эйлера

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1 x\frac{dy}{dx}+a_0 y=0,$$

где все a_i постоянны. (Для этого от независимого переменного x надо перейти к независимому переменному t, положив $x=\pm e^t$.) Здесь вместо степеней x могут стоять также степени двучлена $ax+b$ (a и b постоянны).

3. Найдите все решения уравнения

$$y'(x)=ay(x)+by(c-x),$$

существующие при $-\infty<x<\infty$ (a, b и c постоянны).

4. Выведите все основные свойства функций $\sin x$ и $\cos x$, рассматривая их как решения уравнения $y''+y=0$ при начальных условиях соответственно $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ и $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$.

5. Обозначим

$$L[f]\equiv\frac{d^n f}{dx^n}-a_{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}-\ldots-a_1\frac{df}{dx}-a_0 f.$$

Выведите формулу

$$L[e^{\lambda x}f]=e^{\lambda x}\left\{M(\lambda)f+\frac{M'(\lambda)}{1!}\frac{df}{dx}+\ldots+\frac{M^{(n)}(\lambda)}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}\right\}.$$

Получите отсюда общее решение уравнения (5.8) с постоянными коэффициентами.

§ 47. Разыскание частных решений неоднородных систем

Мы сейчас будем разбирать только тот случай, когда в системе (6.7)

$$f_i(x)=\sum_{k=1}^{m} C_i^{(k)}e^{\alpha_k x}x^{\beta_k},$$

причем α_k и $C_i^{(k)}$ здесь могут быть как действительными, так и комплексными, а β_k — целые неотрицательные числа. Очевидно, достаточно разобрать только случай, когда $m=1$, потому что в общем случае частное решение является суммой решений, составленных для этого частного случая. Итак, положим, что

$$f_i(x)=C_ie^{\alpha x}x^{\beta}.$$

Выпишем группу уравнений системы (6.6), соответствующих одному какому-нибудь элементарному делителю $(\lambda-\lambda_s)^{p_s}$ матрицы $\lambda E-A$:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{k+1}}{dx} &= \lambda_s z_{k+1} && + C^*_{k+1}x^{\beta}e^{\alpha x},\\
\frac{dz_{k+2}}{dx} &= \varepsilon_1 z_{k+1}+\lambda_s z_{k+2} && + C^*_{k+2}x^{\beta}e^{\alpha x},\\
\frac{dz_{k+3}}{dx} &= \varepsilon_2 z_{k+2}+\lambda_s z_{k+3} && + C^*_{k+3}x^{\beta}e^{\alpha x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{k+p_s}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1}z_{k+p_s-1}+\lambda_s z_{k+p_s} && + C^*_{k+p_s}x^{\beta}e^{\alpha x}.
\end{aligned}$$

Здесь C_i^* — некоторые новые постоянные. Введем новые неизвестные функции z_i^*, положив

$$z_i=z_i^*e^{\lambda_s x},\quad i=k+1,\ldots,k+p_s.$$

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz^*_{k+1}}{dx} &= \phantom{\varepsilon_1 z^*_{k+1}} \qquad C^*_{k+1}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
\frac{dz^*_{k+2}}{dx} &= \varepsilon_1 z^*_{k+1} \qquad + C^*_{k+2}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
\frac{dz^*_{k+3}}{dx} &= \varepsilon_2 z^*_{k+2} \qquad + C^*_{k+3}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz^*_{k+p_s}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z^*_{k+p_s-1} + C^*_{k+p_s}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x},
\end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

При интеграции этой системы нам придется различать два случая, смотря по тому, равны ли α и λ_s или нет.

1-й случай, когда $\lambda_s \neq \alpha$. Интегрируя уравнения (6.16) последовательно, начиная с первого, мы получим, что

$$z^*_i = M_i^{(\beta)}(x)\, e^{(\alpha-\lambda_s)x}, \quad i = k+1, \ldots, k+p_s,$$

где $M_i^{(\beta)}(x)$ — некоторые многочлены по x не выше β-й степени [1]. Отсюда

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x)\, e^{\alpha x}, \quad i = k+1, \ldots, k+p_s,$$

Если ни одно из λ_s не равно α, то все z_i, $(i = 1, \ldots, n)$ будут иметь вид

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x)\, e^{\alpha x},$$

а потому и частное решение y будет иметь вид

$$y_i = M_i^{*(\beta)}(x)\, e^{\alpha x}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.17}$$

Коэффициенты многочленов $M_i^{*(\beta)}(x)$ можно найти сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x в уравнениях (6.7) после подстановки в них вместо y_i выражений (6.17) и сокращения полученных уравнений на $e^{\alpha x}$.

[1] В теории аналитических функций показывается, что те формулы, которые получаются при интегрировании $x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x}$ в случае действительной разности $\alpha-\lambda_s$, справедливы также и в случае комплексных ее значений. Это можно проверить и непосредственно.

2-й случай, когда $\lambda_s=\alpha$. Тогда система (6.16) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{dz^*_{k+1}}{dx} &= && C^*_{k+1}x^\beta,\\
\frac{dz^*_{k+2}}{dx} &= \varepsilon_1 z^*_{k+1} && + C^*_{k+2}x^\beta,\\
\frac{dz^*_{k+3}}{dx} &= \varepsilon_2 z^*_{k+2} && + C^*_{k+3}x^\beta,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dz^*_{k+p_s}}{dx} &= \varepsilon_{p_s-1} z^*_{k+p_s-1} && + C^*_{k+p_s}x^\beta.
\end{aligned}$$

Интегрируя последовательно эти уравнения, мы найдем частное решение вида

$$z^*_{k+i}(x)=M^{(i)}_{k+i}(x)x^\beta,\quad i=1,\dots,p_s,$$

где $M^{(i)}_{k+i}$ есть многочлен не выше i-й степени по x. Отсюда

$$z_{k+i}(x)=x^\beta M^{(i)}_{k+i}(x)e^{\alpha x},\quad i=1,\dots,p_s.$$

Следовательно, система (6.7) имеет частное решение

$$y_i(x)=M^{*(\beta+p)}_i(x)e^{\alpha x}\text{[1]},\quad i=1,\dots,p_s.$$

где $M^{*(\beta+p)}_i(x)$ — многочлены не выше $(\beta+p)$-й степени по x, а p есть наивысший показатель степени у элементарных делителей $\lambda E-A$, которые имеют вид $(\lambda-\alpha)^\delta$.

Следствие для одного уравнения n-го порядка. Если для многочлена

$$\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-a_{n-2}\lambda^{n-2}-\dots-a_1\lambda-a_0$$

α есть корень кратности $p\ (p\geqslant 0)$, то уравнение

$$\frac{d^ny}{dx^n}=a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+a_1y'+a_0y+Cx^\beta e^{\alpha x}$$

---

[1] Было бы неправильно думать, что у системы (6.7) обязательно имеется частное решение вида $y_i=x^\beta M^{*(p)}_i(x)e^{\alpha x}$, так как, кроме рассматриваемой группы уравнений, для которых соответствующее $\lambda_s=\alpha$, могут быть другие группы, для которых $\lambda_s\neq\alpha$.

имеет частное решение вида

$$y(x)=M^{(p+\beta)}(x)e^{\alpha x},$$

где $M^{(p+\beta)}(x)$ есть многочлен не выше $(p+\beta)$-й степени. Вычитая отсюда решение вида (6.15) однородного уравнения, мы получим частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x)=M^{(\beta)}(x)x^pe^{\alpha x}.$$

ЗАДАЧИ

1. Получите вид частного решения уравнения, приведенного в следствии, используя результат задачи 5 § 46.

2. Докажите, что общее решение системы (6.1) имеет вид

$$y=e^{xA}C+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}f(s)\,ds,$$

где C — произвольный постоянный вектор. Решение системы (6.1) при начальном условии $y(x_0)=y^0$ имеет вид

$$y=e^{(x-x_0)A}y^0+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}f(s)\,ds.$$

3. Опираясь на последний результат и на задачу 3 § 19, докажите, что если каждое решение системы (6.12) ограничено при $x\to+\infty$, то и каждое решение системы

$$y'=[A+B(x)]y+f(x),$$

где

$$\int_{x_0}^{+\infty}\|B(x)\|\,dx<\infty,\qquad \int_{x_0}^{+\infty}\|f(x)\|\,dx<\infty$$

(матрица $B(x)$ и вектор $f(x)$ непрерывные), также ограничено при $x\to+\infty$. Если же, кроме того, все решения первой системы стремятся к нулю при $x\to+\infty$, то и все решения второй системы стремятся к нулю при $x\to+\infty$. Найдите условия, при которых аналогичные утверждения справедливы для линейных систем с переменными коэффициентами.

Большое количество подобных результатов содержится в указанной в § 38 книге Р. Беллмана.

§ 48. Приведение к каноническому виду уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}$

Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy} \tag{6.18}$$

эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt}=cx+dy, \quad \frac{dy}{dt}=ax+by, \tag{6.19}$$

где t — некоторое вспомогательное переменное. Коэффициенты a, b, c и d мы будем считать теперь действительными. В зависимости от элементарных делителей λ-матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \lambda-c & -d \\ -a & \lambda-b \end{matrix}\right\| \tag{6.20}$$

при приведении системы (6.19) к каноническому виду могут быть следующие случаи.

1-й случай. *Элементарные делители первой степени действительны.* Тогда из доказательства теоремы о приведении к каноническому виду следует, что существует такое линейное неособое преобразование с действительными коэффициентами:

$$x^*=k_{11}x+k_{12}y, \; y^*=k_{21}x+k_{22}y, \tag{6.21}$$

которое приводит систему (6.19) к виду

$$\frac{dx^*}{dt}=\lambda_1x^*, \quad \frac{dy^*}{dt}=\lambda_2y^*. \tag{6.22}$$

Если

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}\neq 0, \tag{6.23}$$

то ни одно из чисел λ_1 и λ_2 не равно нулю и уравнение (6.18) после совершения преобразования (6.21) приводится к виду

$$\frac{dy^*}{dx^*}=\frac{\lambda_2y^*}{\lambda_1x^*}.$$

2-й случай. *Элементарные делители* $(\lambda-\lambda_1)$ *и* $(\lambda-\lambda_2)$ *матрицы* (6.20) *комплексны.* Если считать a, b, c и d действительными, как это мы теперь делаем, то λ_1 и λ_2 будут взаимно сопряженными. Тогда преобразование (6.21) также приводит систему (6.19) к виду (6.22). Коэффициенты k_{21} и k_{22} можно считать при этом сопряженными соответственно с k_{11} и k_{12}. Действительно, так как $\lambda_2=\bar{\lambda}_1$, то $\bar{x}^*$ удовлетворяет тогда уравнению

$$\frac{dy^*}{dt}=\lambda_2 y^*,$$

и мы можем принять

$$y^*=\bar{x}^*.$$

Пусть

$$k_{11}=k_1^*+ik_1^{**} \text{ и } k_{12}=k_2^*+ik_2^{**}.$$

Положим

$$\xi=k_1^*x+k_2^*y,\quad \eta=k_1^{**}x+k_2^{**}y,\quad \lambda_1=\alpha+i\beta\quad (\beta\neq 0).$$

Тогда система (6.22) после разделения действительной и мнимой частей дает следующее:

$$\frac{d\xi}{dt}=\alpha\xi-\beta\eta,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\beta\xi+\alpha\eta.$$

Отсюда

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\beta\xi+\alpha\eta}{\alpha\xi-\beta\eta}.$$

Заметим, что линейное преобразование, переводящее x и y в ξ и η, неособое, так как иначе было бы

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}=0.$$

3-й случай. *Матрица* (6.20) *имеет один элементарный делитель* $(\lambda-\lambda_1)^2$. Тогда существует (ср. § 44) такое неособое линейное преобразование (6.21) с действительными коэффициентами, которое переводит систему (6.19) в систему

$$\frac{dx^*}{dt}=\lambda_1 x^*,\quad \frac{dy^*}{dt}=\varepsilon x^*+\lambda_1 y^*. \tag{6.24}$$

Если детерминант (6.23) отличен от нуля, то $\lambda_1 \neq 0$. Так как a, b, c и d действительны, то λ_1 также действительно. Здесь ε — какое-нибудь отличное от нуля число; если его считать действительным, то коэффициенты k_{ij} можно считать действительными, как это следует из рассмотрений § 42. Положим, например, $\varepsilon = \lambda_1$. Тогда из уравнений (6.24) получаем

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\lambda_1 x^* + \lambda_1 y^*}{\lambda_1 x^*} = \frac{x^* + y^*}{x^*}.$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть начало координат для уравнения (6.18) является фокусом. Выясните, при каких соотношениях между коэффициентами спирали входят в особую точку, закручиваясь против часовой стрелки, при каких соотношениях — закручиваясь по часовой стрелке. Решите аналогичный вопрос для узла (типа, изображенного на рис. 16).

2. Пусть начало координат для уравнения (6.18) является седлом или узлом. Выясните, по каким направлениям интегральные линии входят в начало (а в случае узла — и по какому направлению входит бесконечное количество линий). Если начало координат является центром, выясните, как расположены главные оси эллипсов и какая из них больше.

§ 49. Устойчивость решений по Ляпунову

Мы будем применять векторную запись и для нелинейных систем уравнений и, таким образом, систему

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

будем записывать более коротко в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где y — вектор-функция, составленная из искомых функций y_i, а f — вектор-функция, составленная из правых частей f_i. Евклидову норму вектора будем обозначать вертикальными черточками:

$$|y| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Пусть начальные данные задаются при $x=x_0$. Решение

$$y=y^0(x) \tag{6.25}$$

системы (4.4) называется *устойчивым по Ляпунову при* $x\to+\infty$, если для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\eta(\varepsilon)>0$, что при $x\geqslant x_0$ для любого решения $y(x)$ этой системы

$$|y(x)-y^0(x)|<\varepsilon,$$

если

$$|y(x_0)-y^0(x_0)|<\eta(\varepsilon).$$

Если, кроме того,

$$\lim_{x\to+\infty}(y(x)-y^0(x))=0,$$

при достаточно малых $|y(x_0)-y^0(x_0)|$, то решение (6.25) называется *асимптотически устойчивым при* $x\to+\infty$. (В дальнейшем для краткости вместо «решение устойчиво по Ляпунову при $x\to+\infty$» будем говорить «решение устойчиво».)

При этом мы считаем, естественно, что функция $y^0(x)$ определена для всех $x\geqslant x_0$, а система (4.4) определена в некоторой окрестности линии $y=y^0(x)$ вида $|y-y^0(x)|<M$, $x\geqslant x_0$.

Очевидно, мы всегда можем свести исследование к случаю

$$y^0(x)\equiv 0,$$

взяв вместо $y(x)$ за новую неизвестную вектор-функцию

$$y(x)-y^0(x).$$

Функции f_i, все y_i и x мы считаем действительными.

Фундаментальные исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений принадлежат знаменитому русскому математику А. М. Ляпунову[1].

[1] См.: А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения.— М.: ОНТИ, 1950.

Лемма Ляпунова. *Пусть для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$ *правые части системы* (4.4) *определены и непрерывны при* $x_0 \leqslant x < \infty$, $|y| \leqslant \varepsilon_0$, *и* $f(x, 0) \equiv 0$. *Пусть при* $|y| \leqslant \varepsilon_0$ *существует непрерывно дифференцируемая «функция Ляпунова»* $V(y) \geqslant 0$, *равная нулю лишь в начале координат, и притом такая, что*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j \leqslant 0. \tag{6.26}$$

Тогда нулевое решение $y(x) \equiv 0$ *системы* (4.4) *устойчиво.*

Если, кроме того, при $|y| \leqslant \varepsilon_0$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j \leqslant -W(y), \tag{6.27}$$

где $W(y) \geqslant 0$ — *некоторая непрерывная функция, равная нулю лишь в начале координат, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Обозначим через K_ε сферу $|y| = \varepsilon$ и пусть $V_\varepsilon = \min\limits_{K_\varepsilon} V$; ясно, что $V_\varepsilon > 0$. Выберем теперь $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$ столь малым, чтобы на K_η и всюду внутри K_η было $V < V_\varepsilon$. Такое η существует, потому что функция V непрерывна и обращается в нуль в начале координат. Тогда нетрудно проверить, что все интегральные линии, начинающиеся при $x = x_0$ внутри K_η, никогда при увеличении x не могут достичь K_ε, откуда и вытекает устойчивость. Для проверки этого свойства интегральных линий заметим, что вдоль каждой такой линии величина V становится сложной функцией x и в силу уравнений (4.4) получаем

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j$$

и условие (6.26) означает, что вдоль любой интегральной линии значение V не возрастает. Если такая линия, начавшаяся при $x=x_0$ внутри K_η, при увеличении x в первый раз достигнет K_ε при некотором $x=x_1$, то вдоль этой линии $V|_{x=x_0} < V_\varepsilon \leqslant V|_{x=x_1}$, и мы приходим в противоречие с невозрастанием V.

Пусть теперь выполнено более сильное условие (6.27). Выберем η по ε так же, как это было сделано выше. Тогда, как было показано, все интегральные линии, начинающиеся при x_0 внутри K_η, при увеличении x остаются внутри K_ε. Покажем, что любая такая интегральная линия l при увеличении x стремится к началу координат. Мы доказали, что при возрастании x значение V вдоль l не возрастает. Достаточно проверить, что это значение стремится к нулю (так как легко доказать, что если $V \to 0$, то и $|y| \to 0$). Пусть это не так, и значение V вдоль l превосходит некоторое положительное постоянное. Тогда l целиком расположена вне некоторого шара K_δ с достаточно малым $\delta>0$ и из (6.27) получаем, что вдоль l

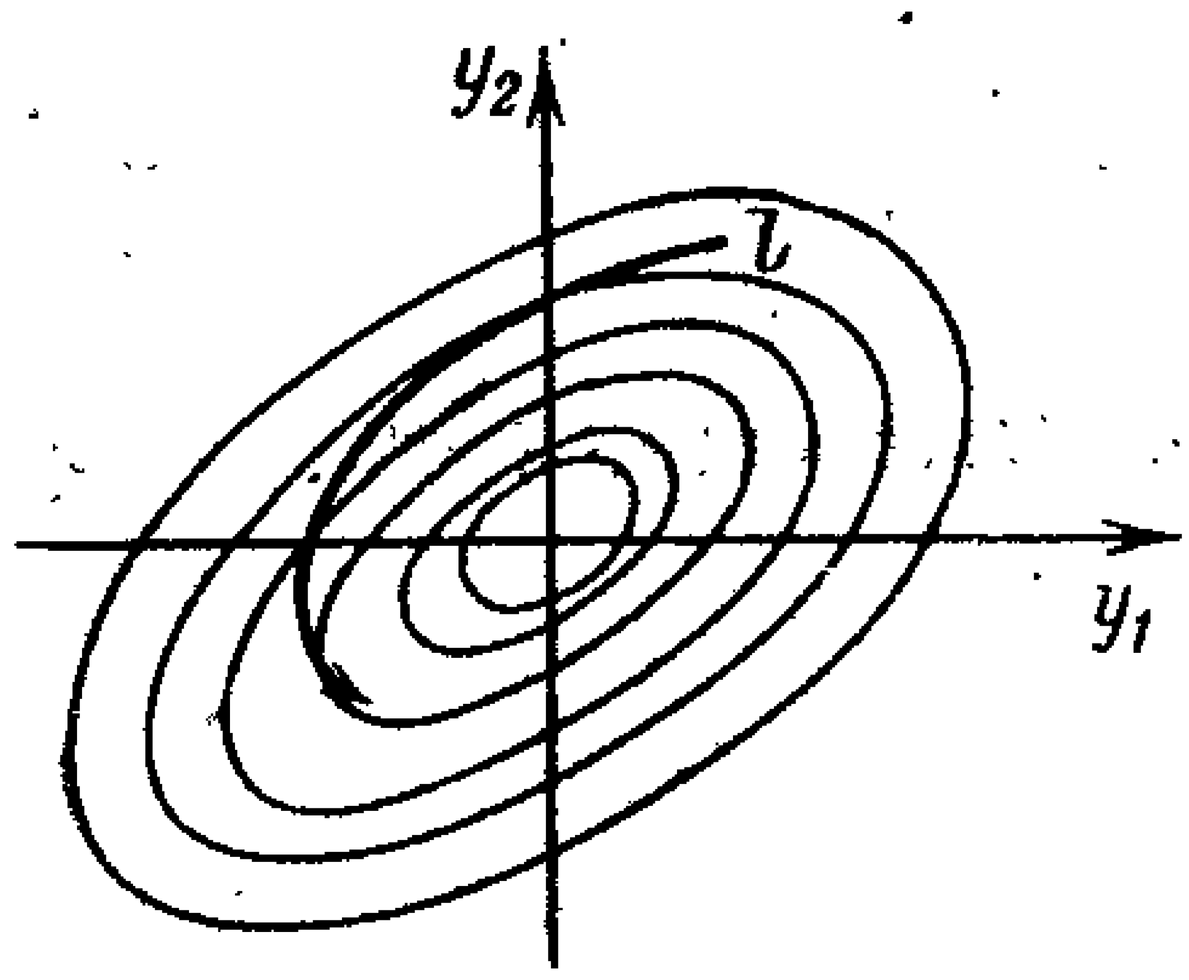

Рис. 27

$$\frac{dV}{dx} \leqslant -W \leqslant -\alpha < 0,$$

так как вне K_δ функция $W \geqslant \alpha > 0$ ($\alpha=\text{const}$).

Интегрируя это неравенство, получаем

$$V(x) \leqslant V(x_0) - \alpha(x-x_0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

что противоречит определению V. Лемма доказана.

Эта лемма имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим частный случай. Пусть $n=2$, и пусть линии $V=C$ ($C=\text{const}$) — замкнутые линии, содержащие начало координат, причем линия с меньшим значением C лежит внутри линии с бо́льшим значением C (рис. 27). Тогда условие (6.26) означает, что интегральные линии, имеющие общую точку с линией $V=C$, не выходят из области, ограниченной этой линией, откуда и следует устойчивость нулевого решения $y_1 \equiv 0$, $y_2 \equiv 0$.

При выполнении более сильного условия (6.27) интегральные линии пересекают линию $V=C$ снаружи внутрь, так как

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{V=C} \leqslant -W\Big|_{V=C} < 0;$$

кроме того, доказано, что $\lim\limits_{x\to+\infty} V=0$. Следовательно, все интегральные линии стремятся при $x\to+\infty$ к началу координат, что означает асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Замечание. Подчеркнем, что, как видно из доказательства леммы, левая часть неравенств (6.26) или (6.27) представляет собой производную $\frac{dV}{dx}$ от функции V, взятую вдоль интегральных линий системы (4.4) (как иначе говорят, *производную, взятую в силу системы* (4.4)).

Теорема. *Решение*

$$y(x)\equiv 0$$

системы (4.4) *асимптотически устойчиво, если*

$$f(x, y)=Ay+F(x, y),$$

где матрица A постоянна, действительные части всех корней λ уравнения

$$|\lambda E-A|=0 \tag{6.28}$$

отрицательны и при всех $x\geqslant x_0$ и $|y|$ достаточно малом

$$|F(x, y)|\leqslant M|y|^{1+\alpha}, \tag{6.29}$$

функции F_i $(i=1, \ldots, n)$ непрерывны по совокупности аргументов, а α и M — положительные постоянные.

В частности, условия этой теоремы удовлетворяются, если функции f_i, стоящие в правых частях системы (4.4), не зависят от x, обращаются в нуль при $y=0$ и в некоторой окрестности начала координат имеют непрерывные производные до 2-го порядка включительно, а действительные части всех корней уравнения (6.28) отрицательны. В самом деле, тогда к этим функциям можно применить формулу Тейлора, и мы получим

$$f(x, y)=Ay+O(|y|^2)^{1)}.$$

Доказательство. Заметим, что для самого простого скалярного уравнения $\frac{dy}{dx}=-ay$ $(a=\text{const}>0)$ имеем $\frac{d(y^2)}{dx}=2y\frac{dy}{dx}=-2ay^2$ и тем самым, если положить $V(y)=y^2$, $W(y)=2ay^2$, условие (6.27) и остальные условия леммы Ляпунова будут выполнены. Это наводит на мысль, в случае системы (4.4), сделав неособое линейное преобразование $z=Ky$, приводящее линейную часть системы к каноническому виду, принять за функцию Ляпунова V сумму квадратов модулей новых искомых функций. Для этого применим к системе (4.4) такое неособое линейное преобразование с постоянными (вообще говоря, комплексными) коэффициентами, которое приводит к каноническому виду систему

$$\frac{dy}{dx}=Ay;$$

при этом мы будем рассматривать только такие (вообще говоря, комплексные) значения $z_1, \ldots, z_n$, для которых соответствующие значения $y_1, \ldots, y_n$ вещественны.

Положим теперь

$$V(y)=|z|^2=\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{z}_i$$

(конечно, в правую часть надо подставить выражение z через y). Тогда

$$\frac{dV}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dz_i}{dx}\bar{z}_i+z_i\frac{d\bar{z}_i}{dx}\right).$$

Для подсчета этих производных рассмотрим одну из групп полученных уравнений, соответствующую одному какому-нибудь элементарному делителю, например (λ —

---

1) См. сноску [1] на с. 95.

$-\lambda_1)^{n_1}$ матрицы $\lambda E - A$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 & &+ F_1^*(x, z), \\ \frac{dz_2}{dx} &= \beta_1 z_1 + \lambda_1 z_2 & &+ F_2^*(x, z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_{n_1}}{dx} &= \qquad\qquad \beta_1 z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} & &+ F_{n_1}^*(x, z). \end{aligned}\right\} \qquad (6.30)$$

Здесь λ_1 равно одному из корней уравнения (6.28), а β_1 можно выбрать произвольно, лишь бы оно не равнялось нулю.

Если функции F_i удовлетворяют условию (6.29), то функции F_i^* удовлетворяют неравенству

$$|F_i^*(x, z)| \leqslant M^* |z|^{1+\alpha}, \qquad (6.31)$$

где M^* — некоторая новая постоянная. Действительно, все $F_i^*(x, z)$ являются линейными комбинациями функций $F_1(x, y), \ldots, F_n(x, y)$ с постоянными коэффициентами. Следовательно,

$$|F_i^*(x, z)| \leqslant M_1 \sum_j |F_j(x, y)| \leqslant M_2 |y|^{1+\alpha}.$$

Так как $y = K^{-1}z$, то при всяком i

$$|y_i|^{1+\alpha} \leqslant M_3 (\max|z_j|)^{1+\alpha} \leqslant M_3 |z|^{1+\alpha},$$

где M_1, M_2, M_3 — постоянные, а $\max|z_j|$ означает наибольшее из чисел $|z_1|, \ldots, |z_n|$.

Из уравнений (6.30) находим при $i > 1$

$$\frac{d|z_i|^2}{dx} = \bar{z}_i \frac{dz_i}{dx} + z_i \frac{d\bar{z}_i}{dx} = \lambda_1 z_i \bar{z}_i + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_i z_i + \beta_1 z_{i-1} \bar{z}_i + $$
$$+ \bar{\beta}_1 \bar{z}_{i-1} z_i + \bar{z}_i F_i^* + z_i \bar{F}_i^*. \qquad (6.32)$$

При $i = 1$ получаем такое же равенство, только в нем отсутствуют члены с β_1 и $\bar{\beta}_1$.

Из (6.32) находим, полагая

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = a_1$$

и пользуясь оценками (6.31),

$$\frac{d\,|z_i|^2}{dx} \leqslant 2a_1|z_i|^2 + |\beta_1|\,[|z_i|^2 + |z_{i-1}|^2] + 2M^*|z|^{2+\alpha},$$

$$i = 2, \ldots, n_1, \tag{6.33'}$$

$$\frac{d\,|z_1|^2}{dx} \leqslant 2a_1|z_1|^2 + 2M^*|z|^{2+\alpha}. \tag{6.33''}$$

Поэтому, суммируя неравенства (6.33″) и (6.33′) по всем i от 1 до n и обозначая через $-a$ наибольшую из действительных частей всех λ_i, которая, по нашему предположению, отрицательна, получим

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d\,|z|^2}{dx} \leqslant -2aV + 2\beta V + 2M^* n^2 V^{1+\alpha/2}, \tag{6.34}$$

где β есть наибольшее из чисел $|\beta_i|$. Так как числа β_i мы можем выбирать произвольно, лишь бы они отличались от нуля, то мы можем их выбрать так, что

$$\beta < \frac{a}{4}.$$

Будем, кроме того, предполагать, что все рассматриваемые y_i и, следовательно, z_i настолько малы по абсолютной величине, что

$$V^{\alpha/2} < \frac{a}{4M^* n^2}. \tag{6.35}$$

Тогда

$$\frac{dV}{dx} \leqslant -aV. \tag{6.34'}$$

Полагая $W = aV$, мы видим, что условие (6.27) и остальные условия леммы Ляпунова выполнены, и наша теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если для системы (4.4) имеет место единственность решения, проходящего через любую точку кривой $y = y^0(x)$, $x \geqslant x_0$, то свойство устойчивости не зависит от конкретного выбора x_0. Иначе говоря, если задавать начальные данные при любом фиксированном $x_0' \geqslant x_0$, то решение $y = y^0(x)$ системы (4.4) будет устойчивым тогда и только тогда, когда оно было устойчи-

6. (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский.) Пусть в условиях первой части леммы Ляпунова дополнительно дано, что функция f не зависит от x и непрерывно дифференцируема. Докажите, что тогда для асимптотической устойчивости решения $y\equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы в некотором цилиндре $-\infty<x<+\infty$, $|y|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ множество точек, где $\sum\limits_j \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j = 0$, не содержало целиком никакой интегральной линии системы (4.4), за исключением $y(x)\equiv 0$. Если, кроме того, дано, что функции f и V обладают указанными свойствами при всех y и $V(y)\xrightarrow[|y|\to\infty]{}+\infty$, то имеет место асимптотическая устойчивость в целом, т. е. тривиальное решение устойчиво и *все* остальные решения стремятся к нему при $x\to+\infty$.

7. Докажите, что в теореме настоящего параграфа и в задаче 2 условие (6.29) можно заменить на следующее, более слабое: $|F(x, y)|=o(|y|)$, т. е.

$$\frac{|F(x, y)|}{|y|}\to 0$$

(равномерно по x), когда $y\to 0$.

8. Пусть $n=1$ и два решения, удовлетворяющие начальным данным $y(x_0)=y^{01}$ и $y(x_0)=y^{02}>y^{01}$, стремятся к одному и тому же (конечному) пределу при $x\to+\infty$. Тогда, если имеет место единственность решения, определяемого начальными условиями, то каждое решение $y(x)$, для которого $y^{01}<y(x_0)<y^{02}$, устойчиво.

9. Найдите необходимое и достаточное условие устойчивости нулевого решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

10. Докажите, что, для того чтобы нулевое решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение этой системы было ограниченным.

11. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dy}{dx}=A(x)\,y$$

с непрерывными периодическими коэффициентами, т. е. $A(x+a)\equiv\equiv A(x)$ $(a=\text{const}>0)$. Пусть $Y(x)$ — фундаментальная матрица этой системы (см. задачу 1 § 33). Докажите, что тогда $Y(x+a)\equiv\equiv TY(x)$, где T — некоторая постоянная матрица. Как изменяется эта матрица при замене фундаментальной матрицы? Найдите условия устойчивости и асимптотической устойчивости решений рассматриваемой системы, выраженные в терминах свойств матрицы T.

12. (М. А. Красносельский и С. Г. Крейн.) Пусть правые части системы (4.4) определены и непрерывны всюду при $x_1\leqslant x<\infty$, $-\infty<y_i<\infty$, $i=1, \ldots, n$. Пусть существуют непрерывно дифференцируемая функция $V(y)$, определенная при всех $y_1, \ldots, y_n$, причем

$\lim\limits_{|y|\to\infty} V(y) = +\infty$, и непрерывная функция $\Phi(V) > 0$, определенная при $V_0 \leqslant V < \infty$, для которых

$$\int\limits_{V_0}^{\infty} \frac{dV}{\Phi(V)} = \infty, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j \leqslant \Phi(V), \quad V_0 = \min_y V(y).$$

Покажите, что тогда любое решение, заданное при $x = x_0$, $x_1 \leqslant x_0 < < \infty$, можно продолжить в сторону возрастания x на интервал $x_0 \leqslant x < \infty$.

Пусть правые части системы (4.4) определены и непрерывны всюду при $x_1 \leqslant x < \infty$, $|y| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, причем $f(x, 0) \equiv 0$. Сформулируйте аналогичную теорему, обеспечивающую невозможность для интегральной линии, начинающейся при $x = x_0$ $(x_1 \leqslant x_0 < \infty)$ вне начала координат пространства y, прийти при некотором конечном x в начало координат. (Тем самым, эта теорема дает достаточные условия для единственности решения, начинающегося в точках оси x.) Попробуйте объединить обе теоремы — о неограниченной продолжимости и о единственности решения — в одну общую теорему о невозможности интегральной линии покинуть при конечном x некоторую область пространства y.

§ 50. Один физический пример

Пусть материальная точка массы $m > 0$ движется по оси Ox. Обозначим через x ее абсциссу. Пусть при этом на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости,

$$-a\frac{dx}{dt}$$

и сила

$$-bx,$$

притягивающая ее к началу координат. Коэффициенты a и b постоянны, $a \geqslant 0$, $b > 0$. Такое движение можно представить себе физически как движение материальной точки в сопротивляющейся среде, например в жидкости или газе, под влиянием упругой силы пружины, действующей по закону Гука. Этот закон состоит в том, что упругая сила действует в сторону положения равновесия точки и пропорциональна уклонению от положения равновесия. Допустим еще, что на рассматриваемую материальную точку действует направленная по оси Ox периодическая сила, в момент t равная

$$A\cos\omega t,$$

где A и ω — действительные постоянные ($\omega>0$). Тогда дифференциальное уравнение движения запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=A\cos\omega t. \tag{6.36}$$

Изучим сначала случай, когда $A=0$, т. е. когда на движущуюся точку совсем не действует внешняя сила. Такие движения точки называются ее *собственными* колебаниями. Общее решение однородного уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0 \tag{6.37}$$

при условии, что $\lambda_1\neq\lambda_2$, дается формулой

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}, \tag{6.38}$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$m\lambda^2+a\lambda+b=0, \tag{6.39}$$

т. е.

$$\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4m^2}-\frac{b}{m}}.$$

Если $a>0$, то действительные части λ_1 и λ_2 отрицательны. Всякое решение уравнения (6.37) тогда стремится к нулю при $t\to+\infty$. Точно так же всякое решение $(x(t), x_1(t))$ системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x_1,\\ m\frac{dx_1}{dt}&=-ax_1-bx,\end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

соответствующей уравнению (6.37), также стремится при $t\to+\infty$ к решению $x(t)\equiv 0$, $x_1(t)\equiv 0$ этой системы. Легко видеть, кроме того, что решение $x(t)\equiv 0$, $x_1(t)\equiv 0$ этой системы является асимптотически устойчивым.

Если $a=0$, то всякое действительное решение уравнения (6.37) дается формулой

$$x(t)=C_1\sin\sqrt{\frac{b}{m}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{b}{m}}\,t=C\sin\left(\sqrt{\frac{b}{m}}\,t+v\right),$$

где

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad C_1 = C \cos v, \quad C_2 = C \sin v.$$

Отсюда

$$x_1(t) = \frac{dx}{dt} = C \sqrt{\frac{b}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m}}\, t + v\right).$$

Следовательно, точка $(x(t), x_1(t))$ на плоскости (x, x_1) движется по эллипсу, у которого направление главных осей совпадает с направлением координатных осей, а отношение длин полуосей для всех решений одно и то же: оно равно $\sqrt{\frac{b}{m}}$. Начало координат для системы (6.40) является центром. Решение $x(t)$ имеет период $\sqrt{\frac{m}{b}}\, 2\pi$, одинаковый для всех решений уравнения (6.37).

Изучим подробнее движение, когда $a>0$. Здесь возможны следующие случаи.

Случай 1. $a^2>4bm$. Оба корня характеристического уравнения (6.39) действительны и отрицательны. Начало координат для системы (6.40) является узлом (ср. § 22, рис. 13 и 14). Функция $x(t) \not\equiv 0$, определяемая формулой (6.38) (и ее производная), в случае действительных C_1 и C_2 не более чем при одном значении t обращается в нуль. Следовательно, функция $x(t)$ имеет не больше одного максимума или минимума.

Случай 2. $a^2=4bm$. Тогда общее решение уравнения (6.37) дается формулой

$$x = e^{-\frac{at}{2m}} (C_1 + C_2 t).$$

Функции $x(t) \not\equiv 0$ и $x_1(t) \not\equiv 0$ могут обратиться в нуль не больше чем при одном t. Начало координат на плоскости (x, x_1) является узлом (ср. рис. 16) для системы (6.40).

Случай 3. $a^2<4bm$. Корни характеристического уравнения (6.39) имеют не равную нулю мнимую часть. Пусть

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\beta; \quad \alpha>0, \ \beta>0.$$

Тогда начало координат на плоскости (x, x_1) для системы (6.40) является фокусом. Действительные решения уравнения (6.37) даются формулой

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + v).$$

Точка x совершает периодические затухающие колебания по оси Ox с неизменным периодом $\frac{2\pi}{\beta}$, одинаковым для всех решений уравнения (6.37), и затухающей амплитудой $Ce^{-\alpha t}$.

Разберем теперь случай, когда в уравнении (6.36) $A \neq 0$. Нам будет удобнее вместо уравнения (6.36) рассматривать уравнение

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + a\frac{dz}{dt} + bz = Ae^{i\omega t}. \tag{6.41}$$

Действительная часть всякого решения этого уравнения будет удовлетворять уравнению (6.36), и обратно, всякое решение уравнения (6.36) есть действительная часть некоторого решения уравнения (6.41). (Почему?)

Если оба корня уравнения (6.39) отличны от $i\omega$, общее решение уравнения (6.41) дается формулой

$$z = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + \frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b},$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и формулой

$$z = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t} + \frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b},$$

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Первые два члена в этих формулах дают общее решение однородного уравнения (6.37). Это решение при любых C_1, C_2 ограничено при $t > t_0$. Последнее слагаемое дает частное решение уравнения (6.41), найденное по правилу, указанному в конце § 47. Если $a > 0$, первые два слагаемых в этих формулах стремятся к нулю при $t \to +\infty$ и решение уравнения (6.41) приближается к

$$\frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + a(i\omega) + b}.$$

При неизменном A модуль этой функции будет тем больше, чем меньше модуль $m(i\omega)^2+a(i\omega)+b$.

Если $m(i\omega)^2+a(i\omega)+b=0$, что может быть только при $a=0$, то общим решением уравнения (6.41) будет

$$z = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + \frac{Ate^{i\omega t}}{2m(i\omega)}$$

Первые два члена этой суммы, дающие общее решение однородного уравнения (6.37), остаются всегда ограниченными, а последнее слагаемое, дающее частное решение уравнения (6.41), найденное согласно § 47, бесконечно растет по модулю при $t\to+\infty$. Функция $x(t)$, дающая решение уравнения (6.36), в этом случае колеблется, и амплитуда ее колебаний бесконечно растет. Это явление называется в физике *резонансом* между собственными колебаниями рассматриваемой материальной точки и внешней силой. Как видно из предыдущего, он наступает, если периоды собственных колебаний материальной точки и внешней силы совпадут. В физической действительности в случае наступления резонанса размахи, делаемые материальной точкой, часто становятся в определенный момент настолько большими, что система разрушается. Поэтому бывает важно предусмотреть возможность наступления резонанса.

ЗАДАЧИ

1. Разберите подробно случай $a<0$ — колебаний с «отрицательным трением», которое осуществляется в целом ряде физических схем при подаче энергии извне.

2. Докажите устойчивость нулевого решения системы (6.40) при помощи изучения производной по времени от так называемого интеграла энергии, равного

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{b}{2}x^2.$$

ГЛАВА VII

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 51. Общие понятия

Если в правые части системы (4.4) не входит независимая переменная x, то такая система называется *автономной*. В теории автономных систем принято истолковывать независимую переменную как время; поэтому будем записывать такую систему в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.1}$$

или, в более короткой векторной записи,

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{7.2}$$

где

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad f = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}.$$

Впрочем, под x можно понимать и точку с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для простоты будем считать, что правые части системы (7.1) определены во всем пространстве x и удовлетворяют условию Липшица по всем своим аргументам в каждой ограниченной части пространства. Тогда при начальном условии $x(0) = x^0$ существует решение $x = x(t; x^0)$ системы (7.1) (или, что все равно, (7.2)), определенное в некоторой окрестности значения $t = 0$.

Это решение можно рассматривать как закон движения точки в пространстве x, т. е. закон изменения во времени координат этой точки; при этом движении точка x описывает некоторую *траекторию* l_{x^0}, зависящую от выбора *начальной точки* x^0 (не следует путать эту траекторию с интегральной линией системы (7.1), так как интегральная линия расположена в $n+1$-мерном пространстве x, t).

Так как при законе движения $x=x(t)$ вектор скорости выражается по формуле $v=\frac{dx}{dt}$, то автономная система (7.2) задает *поле скоростей* в пространстве x, т. е. в каждой точке x задается вектор $v=f(x)$. Решением же служит такой закон движения точки, при котором эта точка в процессе движения имеет в каждом положении заданную скорость. Специфика автономной системы (7.2), у которой в правые части не входит t, состоит в том, что заданное поле скоростей не меняется с течением времени или, как говорят, является стационарным. Моделью системы (7.2) может служить стационарный поток газа в пространстве x; тогда решения определяют закон движения его частиц.

Как мы знаем, при продолжении решения $x(t;\ x^0)$ в сторону возрастания t (аналогично в сторону убывания t) может представиться два случая: либо решение будет продолжено на всю полуось $0 \leqslant t < \infty$, либо же при приближении к конечному $t=T$ точка $x(t;\ x^0)$ «уходит на бесконечность». Мы будем для простоты предполагать, что обязательно имеет место первый случай. Легко проверить, что при изучении совокупности траекторий системы (7.2) это предположение не ограничивает общности. В самом деле, рассмотрим автономную систему

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, \ldots, x_n)\, r(x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, \ldots, n, \qquad (7.3)$$

где функция $r>0$ и удовлетворяет тем же требованиям, что и f_i. Эта система обладает теми же траекториями, что и (7.1), хотя скорости прохождения этих траекторий для систем (7.1) и (7.3) различны. (Почему?) В то же время легко подобрать функцию r так, чтобы скорость движения, определяемая системой (7.3), была ограниченной, и потому движущаяся точка не могла бы в конечное время уйти на бесконечность. Для этого достаточно положить

$$r=\left(1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Итак, мы будем считать, что вектор-функция

$$x=x(t;\ x^0) \qquad (7.4)$$

определена для всех точек x^0 пространства x и для всех значений t, $-\infty<t<\infty$. Для каждого x^0 она дает решение системы (7.1); образно говоря, $x(t; x^0)$ — это та точка, в которую переместится точка x^0 через время t. Вектор-функция (7.4) обладает следующими простыми свойствами:

1° она непрерывна по совокупности переменных;

2° $x(0; x^0)\equiv x^0$;

3° $x(t_2; x(t_1; x^0))\equiv x(t_1+t_2; x^0)$.

Первое из этих свойств вытекает из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных. Второе — из определения решения $x(t; x^0)$. Наконец, третье (групповое) свойство можно доказать так. Прежде всего, из того, что в правые части системы (7.2) не входит t, нетрудно вывести (сделайте это!), что эта система наряду с решением $x=\varphi(t)$ всегда обладает решением $x=\varphi(t+t_0)$ при любом постоянном t_0. (Второе решение определяет ту же траекторию, что первое, но закон движения по ней сдвинут на t_0 назад во времени.) Поэтому две функции

$$x=x(t; x(t_1; x^0)) \text{ и } x=x(t+t_1; x^0)$$

определяют решения системы (7.2). Однако при $t=0$ оба выражения дают одну и ту же точку $x(t_1; x^0)$. Поэтому в силу теоремы единственности для систем дифференциальных уравнений

$$x(t; x(t_1; x^0))\equiv x(t+t_1; x^0).$$

Полагая $t=t_2$, получаем требуемое свойство 3°. Наглядный смысл свойства 3° состоит в следующем: чтобы выяснить, куда точка x^0 переместится за время t_1+ $+t_2$, надо посмотреть, в какую точку она перейдет за время t_1, а затем, куда эта вторая точка перейдет за время t_2.

Свойства 1°—3° настолько существенны, что часто под автономной системой (иначе, *потоком*) понимают семейство отображений (7.4) любого множества (на котором можно определить непрерывность этого отображения) в себя, если выполняются условия 1°—3°, даже когда никаких дифференциальных уравнений не задано.

Из свойств 2° и 3°, в частности, вытекает, что при каждом фиксированном t отображения

$$x=x(t;\ x^0) \text{ и } x=x(-t;\ x^0)$$

пространства x в себя являются взаимно обратными. В самом деле, точка x^0 в результате последовательного применения этих отображений переходит в

$$x(-t;\ x(t;\ x^0))=x(-t+t;\ x^0)=x(0;\ x^0)=x^0;$$

применение этих отображений в обратном порядке тоже дает x^0.

Проверим еще следующее свойство: если две траектории имеют общую точку, то они совпадают, а соответствующие решения различаются лишь постоянным сдвигом во времени. В самом деле, если $x(t^1;\ x^1)=x(t^2;\ x^2)$, то $x(t;\ x^1)\equiv x(t+(t^2-t^1);\ x^2)$; это вытекает из теоремы единственности, так как оба решения при $t=t^1$ совпадают.

В заключение отметим, что в механике часто рассматриваются системы второго порядка вида

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=f_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \frac{dx_1}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}\right),\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{7.5}$$

Такая система после введения переменных $m_i\frac{dx_i}{dt}=p_i$ (так называемых *импульсов*) приобретает вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{p_i}{m_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt}=f_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \frac{p_1}{m_1},\ \ldots,\ \frac{p_n}{m_n}\right),$$

$$i=1,\ \ldots,\ n.$$

$2n$-мерное пространство $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ называется *фазовым пространством* координат-импульсов. Таким образом, система (7.5) (получающаяся при исследовании механической системы с n степенями свободы) определяет автономную систему в $2n$-мерном фазовом пространстве.

ЗАДАЧИ

1. Пусть в n-мерном пространстве x задана вектор-функция (7.4), удовлетворяющая условиям 1°—3° и непрерывно дифференцируемая по t. Докажите, что эта вектор-функция определяется автономной системой (7.2) с непрерывными правыми частями.

2. Пусть в пространстве x задана непрерывно дифференцируемая функция $\rho(x)>0$. Эта функция называется *плотностью интегрального инварианта для системы* (7.2), если для любой конечной области G с непрерывно дифференцируемой границей интеграл $\int\limits_{G_t}\cdots\int \rho(x)\,dx_1\ldots dx_n$ не зависит от t; здесь под G_t понимается область, состоящая из всех точек $x(t;\,x_0)$ $(x_0\in G)$. (Эту плотность можно истолковать как плотность газа, движущегося в соответствии с заданным полем скоростей с сохранением масс.) Докажите, что если вектор-функция f непрерывно дифференцируема, то для того чтобы функция $\rho(x)$ была плотностью интегрального инварианта, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial(f_j\rho)}{\partial x_j}\equiv 0$. Докажите, что в важном частном случае *гамильтоновой системы* в $2n$-мерном пространстве x, y

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

где $H(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция (*функция Гамильтона*), функция $\rho(x,\ y)\equiv 1$ служит плотностью интегрального инварианта, т. е. объем области G_t не зависит от t (теорема Лиувилля).

Системы с интегральным инвариантом, или, как их еще называют, с инвариантной мерой, обладают многими замечательными свойствами; см., например, книгу: П. Халмош. Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1959.

§ 52. Три вида траекторий

Теорема. *Решение $x(t)$ автономной системы (7.2) может быть только одного из следующих трех типов:*

а) *непериодическое, для которого $x(t_1)\neq x(t_2)$ при $t_1\neq t_2$;*

б) *периодическое, для которого найдется такое постоянное $T>0$ (период), что $x(t+T)\equiv x(t)$, а $x(t_1)\neq x(t_2)$ при $0\leqslant t_1<t_2<T$;*

в) *постоянное, для которого $x(t)\equiv x^0$.*

Траектории, отвечающие решениям указанных выше типов, называются соответственно *незамкнутой, замкнутой и точкой покоя.* Замкнутая траектория иначе называется *циклом.* Отметим, что траектория, отличная от точки покоя, представляет собой *ориентированную* линию, т. е. линию, вдоль которой указано направление, принятое за положительное.

Доказательство. Пусть рассматриваемое решение $x(t)$ не принадлежит к типу а), т. е. пусть $x(t_1)=x(t_2)$ для некоторых t_1, t_2, причем $t_1 \neq t_2$. Если обозначить $t_2-t_1=\tau$, то легко проверить, что

$$x(t+\tau)\equiv x(t), \tag{7.6}$$

так как решения $x(t+\tau)$ и $x(t)$ совпадают при $t=t_1$. Рассмотрим множество K тех чисел τ, для которых удовлетворяется тождество (7.6). Нетрудно убедиться, что K вместе с каждым числом τ содержит и $-\tau$ (для этого надо в тождество (7.6) подставить $t-\tau$ вместо t) и вместе с числами τ_1 и τ_2 содержит и $\tau_1+\tau_2$ (так как $x(t+\tau_1+\tau_2)\equiv x(t+\tau_1)\equiv x(t)$). (Как говорят в алгебре, множество K представляет собой группу относительно сложения.) Отсюда следует, что вместе с числами τ_1 и τ_2 множество K содержит и $\tau_1-\tau_2$.

Возможны два случая: 1) Множество K может обладать наименьшим положительным числом T. Тогда $x(t+T)\equiv x(t)$, а $x(t_1)\neq x(t_2)$ при $0 \leqslant t_1 < t_2 < T$. В этом случае траектория является периодической, т. е. имеет место случай б). (Нетрудно проверить, что в этом случае множество K состоит из всех чисел, кратных периоду T.) 2) Если наименьшего положительного числа в множестве K нет, то в K имеются как угодно малые положительные числа. (Почему?) Следовательно, имеется последовательность положительных чисел из K таких, что $\tau_k \to +0$ при $k\to\infty$. Тогда при любом фиксированном t

$$t-\left[\frac{t}{\tau_k}\right]\tau_k \to 0 \quad (k\to\infty),$$

где квадратными скобками обозначена целая часть числа. Отсюда в силу непрерывности решения $x(t)$

$$x(t)=x\left(t-\left[\frac{t}{\tau_k}\right]\tau_k\right)\to x(0) \quad (k\to\infty),$$

т. е. $x(t)\equiv x(0)$ при всех t, и мы имеем решение, относящееся к типу в). (В этом случае множество K содержит всю ось t.)

Теорема доказана.

Отметим для дальнейшего, что точка покоя x^0 называется *устойчивой* (соответственно *асимптотически устойчивой, неустойчивой*), если решение $x(t)\equiv x^0$ системы (7.2) является устойчивым (асимптотически устойчивым, неустойчивым) (§ 49).

§ 53. Предельное поведение траекторий

Рассмотрим какое-либо решение $x(t)$ системы (7.2) и соответствующую траекторию l.

Точка $\bar{x}$ называется *предельной точкой решения* $x(t)$ (или траектории l) *при* $t\to+\infty$, если существует последовательность моментов $t_k\to+\infty$, такая, что $x(t_k)\to\bar{x}$. Совокупность всех таких точек называется *предельным множеством при* $t\to+\infty$ для рассматриваемого решения. Аналогично вводятся понятия *предельной точки* и *предельного множества при* $t\to-\infty$. (Предельные точки при $t\to+\infty$ и при $t\to-\infty$ называются также соответственно ω-*предельными* и α-*предельными* точками; аналогично называются соответствующие множества.)

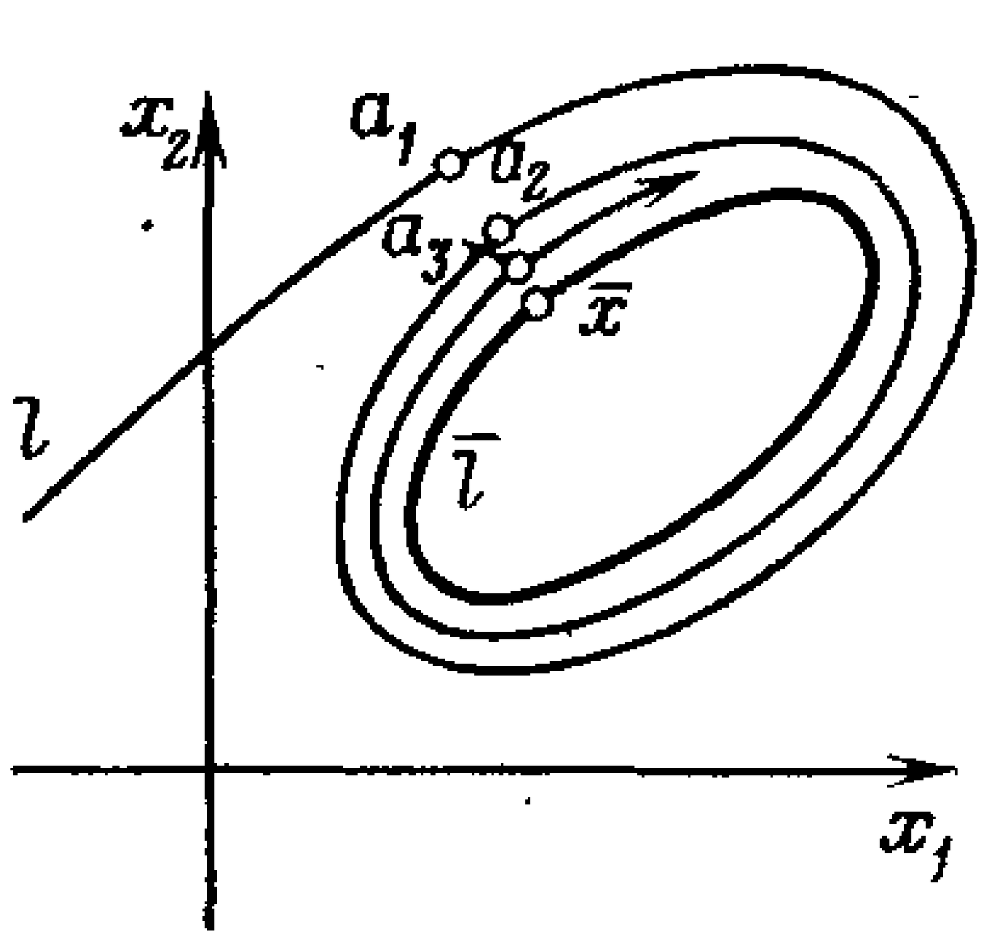

Рис. 28

Приведем некоторые примеры. Пусть при $t\to+\infty$ траектория l «спиралевидно» приближается к циклу $\bar{l}$ (рис. 28); тогда нетрудно видеть, что этот цикл и служит предельным множеством для l при $t\to+\infty$. В самом деле, выбрав любую точку $\bar{x}$ на $\bar{l}$, а точки $a_1=x(t_1)$, $a_2=x(t_2)$, $a_3=x(t_3)$, ..., так, как показано на рисунке, мы получим, что $a_k=x(t_k)\to\bar{x}$, тогда как $t_k\to+\infty$. (Почему?)

Если какой-либо цикл служит предельным множеством при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$ для некоторой отличной от него траектории, то он называется *предельным циклом* (ср. § 24).

Легко видеть, что точка покоя является своей единственной предельной точкой как при $t\to+\infty$, так и при $t\to-\infty$. Замкнутая траектория является своим собственным предельным множеством как при $t\to+\infty$, так и при $t\to-\infty$. Предельные множества для незамкнутых траекторий представляют больший интерес, так как они определяют характер поведения траектории при больших $|t|$. Рассмотрим простые свойства предельных множеств, причем для определенности мы будем иметь в виду предельное множество при $t\to+\infty$, хотя теми же свойствами обладает предельное множество при $t\to\to-\infty$.

1°. *Предельное множество замкнуто как точечное множество в n-мерном пространстве* (т. е. содержит все свои предельные точки). В самом деле, пусть $\bar{l}$ — предельное множество для траектории l с уравнением $x=x(t)$, и пусть последовательность $a_k\in\bar{l}$, $a_k\to\bar{x}$ $(k\to\infty)$. Тогда, по определению $\bar{l}$, при любом k найдется последовательность моментов $t_{k_j}\to+\infty$, для которых $x(t_{k_j})\to\to a_k$ $(n\to\infty)$. Выберем такой момент $\bar{t}_k$, для которого $\bar{t}_k>k$, а расстояние $\rho(x(\bar{t}_k),\ a_k)<1/k$ [1]. Тогда ясно, что $\bar{t}_k\to+\infty$ $(k\to\infty)$; в то же время

$$\rho(x(\bar{t}_k),\bar{x})\leqslant\rho(x(\bar{t}_k),a_k)+\rho(a_k,\bar{x})<\frac{1}{k}+\rho(a_k,\bar{x})\to 0$$
$$(k\to\infty).$$

Значит, $\bar{x}$ является предельной точкой при $t\to+\infty$, что и требовалось доказать.

2°. *Предельное множество состоит из целых траекторий*; другими словами, если $\bar{x}\in\bar{l}$, то и вся траектория $l_{\bar{x}}$ принадлежит $\bar{l}$. Для доказательства заметим, что если исходная траектория l имеет уравнение (7.4) и $x(t_n;\ x^0)\to\bar{x}(n\to\infty)$, причем $t_n\to+\infty$, то при любом фиксированном t

$$x(t_n+t;\ x^0)=x(t;\ x(t_n;\ x^0))\to x(t;\ \bar{x}),$$

т. е. и $x(t;\ \bar{x})\in\bar{l}$.

[1] Под $\rho(a,\ b)$ мы понимаем, как обычно, расстояние между точками a и b.

Свойство 2° можно сформулировать так: предельное множество является *инвариантным* относительно отображения $x_0 \to x(t; x_0)$, определяемого системой (7.2) в пространстве x при каждом t.

3°. *Для того чтобы предельное множество было пустым, необходимо и достаточно, чтобы линия $x(t)$ при $t \to +\infty$ «уходила в бесконечность», т. е. чтобы*

$$|x(t)| \to \infty \quad (t \to +\infty).$$

В самом деле, если это условие выполнено, то предельное множество, очевидно, пустое. Если условие не выполнено, то найдется шар K: $|x| \leqslant R$, внутри которого траектория $x(t)$ содержит точки при как угодно больших t. Таким образом, существует последовательность $t_m \to +\infty$ $(m \to \infty)$, для которой последовательность точек $x(t_m)$ принадлежит K. Выбрав из этой ограниченной последовательности сходящуюся подпоследовательность, получим в пределе при $t \to +\infty$ предельную точку решения $x(t)$.

4°. *Для того чтобы предельное множество состояло из единственной точки $\bar{x}$, необходимо и достаточно, чтобы траектория $x(t)$ входила в эту точку при $t \to +\infty$*, т. е.

$$x(t) \to \bar{x} \quad (t \to +\infty).$$

В самом деле, если это условие выполнено, то утверждение очевидно.

Обратно, пусть дано, что предельная точка $\bar{x}$ единственная. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$; тогда нам надо проверить, что для всех достаточно больших t будет $\rho(x(t), \bar{x}) < \varepsilon$. Предположим, что это не так; тогда найдется последовательность $t'_k \to +\infty$, для которой $\rho(x(t'_k), \bar{x}) \geqslant \varepsilon$; но по определению предельной точки найдется другая последовательность $t''_k \to +\infty$, для которой $\rho(x(t''_k), \bar{x}) < \varepsilon$. Отсюда в силу непрерывности функции $x(t)$ следует, что найдется третья последовательность $t_k \to +\infty$, для которой $\rho(x(t_k), \bar{x}) = \varepsilon$. Выбирая из ограниченной последовательности $x(t_k)$ сходящуюся подпоследовательность, получим в пределе точку $\bar{\bar{x}}$, для которой $\rho(\bar{\bar{x}}, \bar{x}) = \varepsilon$. Значит, кроме $\bar{x}$ имеется еще по крайней мере одна предельная точка, вопреки предположению.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если предельное множество $\bar{l}$ не пусто и ограничено, то оно связно, т. е. не может быть представлено в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств. (Отсюда, в частности, следует, что если $\bar{l}$ состоит более чем из одной точки, то оно содержит бесконечное множество точек.) Покажите также, что если $\bar{l}$ не ограничено, то оно может не быть связным (приведите пример); но оно становится связным, если к нему добавить «бесконечно удаленную точку пространства x», т. е. точку, к которой как бы сходятся все уходящие на бесконечность последовательности точек x.

2. Докажите, что в достаточно малой окрестности асимптотически устойчивой точки покоя не может полностью содержаться ни одна траектория, отличная от этой точки.

3. Пусть система (7.2) такова, что существует ограниченная область Q_0, для которой: а) если $x^0 \in Q_0$ и $t>0$, то $x(t;\ x^0) \in Q_0$; б) если x^0 не принадлежит Q_0, то существует значение $t>0$, для которого $x(t;\ x^0) \in Q_0$. Обозначим через Q_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ множество всех точек вида $x(k;\ x^0)$, $x^0 \in Q_0$, а через Q — пересечение всех этих множеств. Множество Q называется *аттрактором* системы (7.2) и играет важную роль в разнообразных приложениях теории дифференциальных уравнений. (Впрочем, имеются и другие определения понятия аттрактора, не равносильные приведенному). Докажите, что:

а) Q не зависит от конкретного выбора области Q_0, обладающей указанными выше свойствами;

б) множество Q — непустое, замкнутое, ограниченное, связное, оно содержит ω-предельные множества всех траекторий системы (7.2) и состоит из целых траекторий этой системы;

в) любая ограниченная траектория системы (7.2) целиком принадлежит Q (свойства б) и в) дают возможность определить Q как объединение всех ограниченных траекторий системы (7.2));

г) Q обладает свойством асимптотической устойчивости при $t \to +\infty$ (дайте точное определение по аналогии с § 49).

При $n \leqslant 2$ аттрактор имеет, как правило, довольно простой вид. В последние годы обнаружилось, что при $n \geqslant 3$, даже для несложных правых частей, аттрактор может иметь сложную структуру, например, обладать чертами совершенного нигде не плотного множества. Такие «странные аттракторы» были обнаружены, в частности, у так называемой системы Лоренца

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma\,(x_2 - x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - \beta\,x_3$$

торых τ_1, $\tau_2 \in [\alpha, \beta]$, причем $\tau_1 < \tau_2$. Тогда из сказанного в предыдущем абзаце следует, что τ_1 и τ_2 отличны от нуля и имеют одинаковый знак — для определенности, оба положительны. Из неравенств $\psi(0) < \psi(\tau_2)$, $\psi(\tau_1) \geqslant \psi(\tau_2)$ и теоремы о промежуточном значении непрерывной функции следует, что существует значение $\tau_3 \in (0, \tau_1]$, для которого $\psi(\tau_3) = \psi(\tau_2)$. Но $\tau_3 < \tau_2$, и мы, тем самым, приходим в противоречие с единственностью траектории, проведенной через точку $a(\psi(\tau_2))$ в направлении убывания t. Это противоречие и доказывает наше утверждение о возрастании функции ψ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим поведение траекторий с наружной (внешней) стороны цикла l, причем сначала предположим, что в достаточно узкой его окрестности других циклов нет. Тогда, считая β достаточно малым, получаем, что уравнение $\psi(\tau) = \tau$ при $0 < \tau \leqslant \beta$ не имеет решений и поэтому либо $\psi(\tau) < \tau (0 < \tau \leqslant \beta)$, либо $\psi(\tau) > \tau$ $(0 < \tau \leqslant \beta)$. Предположим, что имеет место первый случай.

Выберем произвольно $\tau_0 \in (0, \beta]$ и определим $\tau_1 = \psi(\tau_0)$, $\tau_2 = \psi(\tau_1), \ldots$. Из предположения о $\psi(\tau)$ вытекает, что последовательность $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ положительная и убывающая и потому она имеет предел $\tau_\infty \geqslant 0$. Переходя в равенстве $\tau_{i+1} = \psi(\tau_i)$ к пределу при $i \to \infty$ и пользуясь непрерывностью функции ψ, получаем равенство $\tau_\infty = \psi(\tau_\infty)$, из которого следует, что $\tau_\infty = 0$.

Итак, в наших предположениях траектория, проходящая через точку $a(\tau_0)$ (т. е. произвольную точку дуги трансверсали с концами $a_0, a(\beta)$), при своем продолжении в направлении возрастания t, пересекает L в точках $a(\tau_i)$, расстояния которых от a_0 стремятся к нулю при $i \to \infty$. Теперь применим теорему о непрерывной зависимости решения от начальных данных к решениям системы (7.2), удовлетворяющим начальным условиям $x|_{t=0} = a(\tau_i)$, на интервале $0 \leqslant t \leqslant \theta$, где θ — любое значение, большее периода цикла l. Из нее следует, что и вся траектория $l_{a(\tau_0)}$ стремится к l при $t \to +\infty$ (бесконечное число раз обходя вокруг l), т. е. расстояние от точки $x(t; a(\tau_0))$ до l при $t \to +\infty$ стремится к нулю. Говорят, что $l_{a(\tau_0)}$ при $t \to +\infty$ *спиралевидно приближается к* l или *навивается на* l. Таким образом, в приведенных предположениях вся наружная полуокрестность l целиком заполнена траекториями, навивающимися на l при $t \to +\infty$. (При продолжении же в сторону убывания t все эти траектории покидают рассматриваемую полуокрестность.) В этом случае цикл l называется *устойчивым снаружи.*

Мы считали, что $\psi(\tau) < \tau$ $(0 < \tau \leqslant \beta)$. Нетрудно проверить, что если $\psi(\tau) > \tau$ $(0 < \tau \leqslant \beta)$, то любая траектория $l_{a(\tau_0)}$ $(0 < \tau_0 \leqslant \beta)$ навивается на l при $t \to \infty$. Тогда говорят, что цикл l *неустойчив снаружи.*

Аналогично исследуется поведение траекторий с внутренней стороны l, т. е. при $\alpha \leqslant \tau < 0$. Здесь возможна *устойчивость изнутри* или *неустойчивость изнутри*; мы предоставляем читателю рассмотреть эти случаи. Цикл, устойчивый с обеих сторон (снаружи и изнутри), назы-

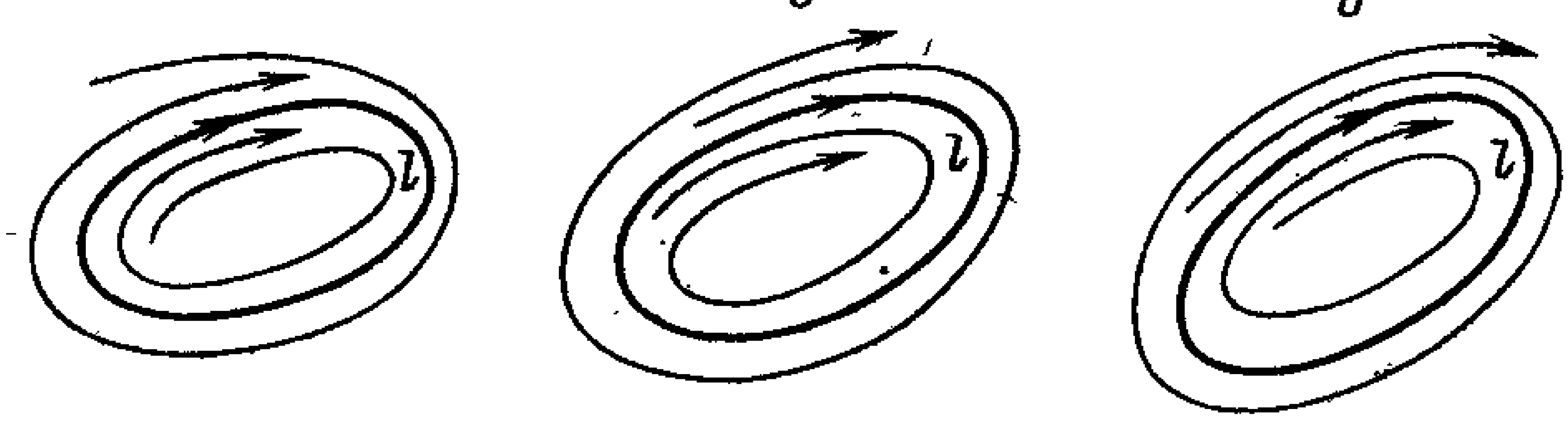

Рис. 30

вается *устойчивым*; неустойчивый с обеих сторон — *неустойчивым*; устойчивый с одной стороны и неустойчивый с другой — *полуустойчивым.* Эти три случая схематически показаны на рис. 30. Напомним, что приведенная классификация относится к *изолированным* циклам, т. е. таким, в достаточно узкой окрестности которых нет других циклов.

Скажем коротко о неизолированных циклах. Если цикл l не изолированный, то уравнение $\psi(\tau) = \tau$ $(\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta)$ имеет бесконечное число корней в любой близости от $\tau = 0$. Множество E этих корней замкнуто, как множество нулей непрерывной функции $\psi(\tau) - \tau$. Каждому $\tau \in E$ отвечает цикл $l_{a(\tau)}$, проходящий через точку $a(\tau)$. Поэтому, если $\psi(\tau) \equiv \tau$, то у l имеется окрестность, целиком заполненная циклами. Если же в любой близости от $\tau = 0$ имеются интервалы вида $\gamma < \tau < \delta$, где $\psi(\gamma) = \gamma$, $\psi(\delta) = \delta$, $\psi(\tau) \neq \tau$ $(\gamma < \tau < \delta)$, то каждому такому интервалу отвечает кольцо, ограниченное циклами $l_{a(\gamma)}$ и $l_{a(\delta)}$ и заполненное траекториями, которые при продолжении в одну сторону спиралевидно приближаются к $l_{a(\gamma)}$, а при продолжении в другую сторону — к $l_{a(\delta)}$. Это утверждение получается из рассмотрения функции последования ψ на интервале (γ, δ), и его доказательство мы предоставляем читателю.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если в системе (7.1) при $n=2$ функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы, то и функция последования ψ непрерывно дифференцируема.

Указание. Опирайтесь на теорему о дифференцируемости решения по начальным данным и теорему о неявной функции.

2. Докажите, что если в условиях задачи 1 $\psi'(0) \neq 1$, то цикл, для которого построена функция ψ, изолированный, причем устойчивый, если $\psi'(0) < 1$, и неустойчивый, если $\psi'(0) > 1$.

3. Докажите, что в условиях задачи 1 значение $\psi'(0)$ не зависит от выбора точки $a_0 \in l$ и трансверсали L; именно

$$\psi'(0) = \exp\left\{\int_l \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) dt\right\}$$

(l — исследуемый цикл).

Значение $\psi'(0)$ называется *мультипликатором* цикла l; оно характеризует скорость приближения к l (в расчете на один оборот) соседних траекторий при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), если $\psi'(0) < 1$ (соответственно $\psi'(0) > 1$).

4. Покажите на примере, что устойчивый предельный цикл может быть неустойчивым по Ляпунову. При каких дополнительных условиях устойчивость по Ляпунову все же будет иметь место?

5. Докажите, что если система (7.2) имеет устойчивый (неустойчивый) предельный цикл l, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если правые части системы (7.2) изменятся меньше чем на δ, то в ε-окрестности цикла l существует по крайней мере один цикл измененной системы. Если таких циклов конечное число, то число устойчивых на единицу больше (меньше) числа неустойчивых. Полуустойчивый предельный цикл может пропасть при как угодно малом изменении правых частей системы.

6. Рассмотрите структуру достаточно узкой окрестности неизолированного цикла. Докажите, что в случае аналитических правых частей системы эта окрестность целиком заполнена циклами или их частями.

7. Определите понятие функции последования на гладкой $(n-1)$-мерной поверхности без контакта, если автономная система (7.2) задана в n-мерном пространстве, и установите связь этой

функции с циклами. Допустив, что отображение, определяющее функцию последования, имеет в окрестности неподвижной точки главную линейную часть, сформулируйте достаточные условия устойчивости соответствующего цикла.

8. Покажите, что в n-мерном пространстве при $n \geqslant 3$ (но не при $n=2$!) траектория может иметь как в качестве ω-предельного множества, так и в качестве α-предельного множества один и тот же цикл. Траектории, обладающие этим свойством, называются *гомоклиническими*.

§ 55. Теорема Бендиксона

Для разыскания предельных циклов при $n=2$ полезной оказывается следующая теорема И. Бендиксона, которую мы приведем здесь в несколько ослабленной форме (см. задачу 1).

Теорема. *Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области $\bar{G}$ нет точек покоя заданной системы (7.2). Пусть все траектории, начинающиеся при $t=0$ в $\bar{G}$, остаются там и при $t>0$. Тогда в $\bar{G}$ имеется по крайней мере один цикл.*

Доказательство. Выберем произвольно точку $a \in \bar{G}$; тогда по условию и вся *положительная полутраектория* l_a^+, т. е. линия $x=x(t;\ a)$ $(0 \leqslant t < \infty)$, содержится в $\bar{G}$. Значит, ω-предельное множество ωl_a траектории l_a непусто и содержится в $\bar{G}$; возьмем какую-либо точку $b \in \omega l_a$. Если l_b цикл, то получаем утверждение теоремы. Предположим теперь, что траектория l_b незамкнутая, и приведем это предположение к противоречию. Для этого возьмем какую-либо ω-предельную точку c траектории l_b и проведем через c трансверсаль L; тогда l_b должна бесконечное число раз пересекать L (почему?). Возьмем две последовательные точки пересечения d и e. Дуга de траектории l_b и дуга ed трансверсали L вместе ограничивают некоторую область H («мешок Бендиксона», заштрихованный на рис. 31), причем траектории, проходящие через точки дуги ed трансверсали, либо все входят в H, либо все выходят из H.

Если траектории через дугу ed входят в H, как на рис. 31, то никакая траектория, попавшая при каком-то значении t в H, не может при возрастании t покинуть H. Так как точка e, как и каждая точка l_b, ω-предельная для l_a, то траектория l_a, начиная с некоторого t, принадлежит H. Но тогда, взяв на l_b какую-либо точку g, предшествующую d (рис. 31) и потому не принадлежащую $\bar{H}$, мы получаем, что g не может быть ω-предельной для l_a, вопреки свойству 2° из § 53.

Случай, когда через дугу ed трансверсали L траектории выходят из H, мы предлагаем читателю привести к противоречию самостоятельно с помощью рис. 32. Та-

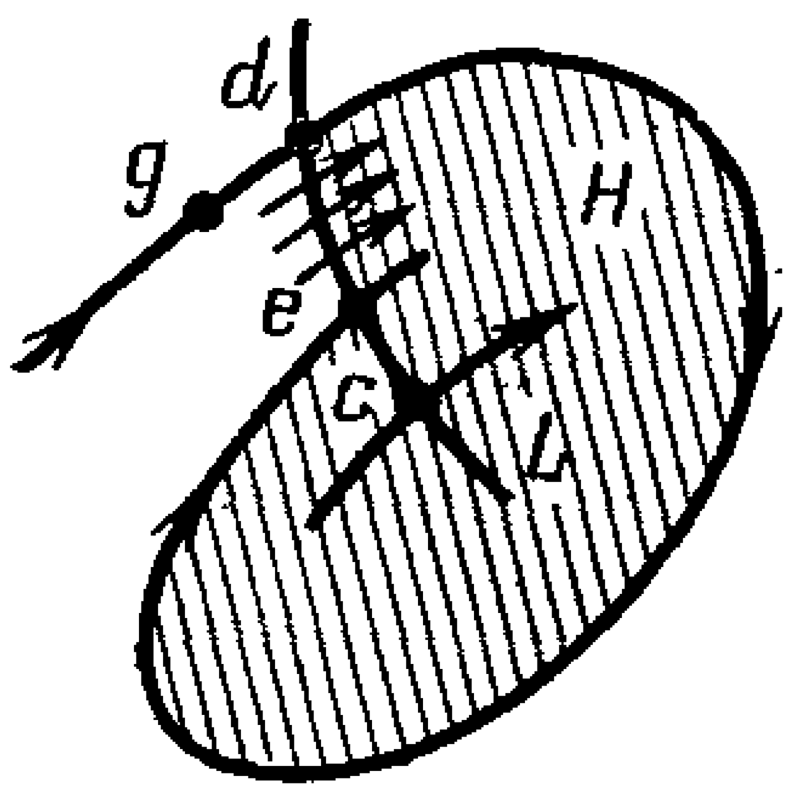

Рис. 31

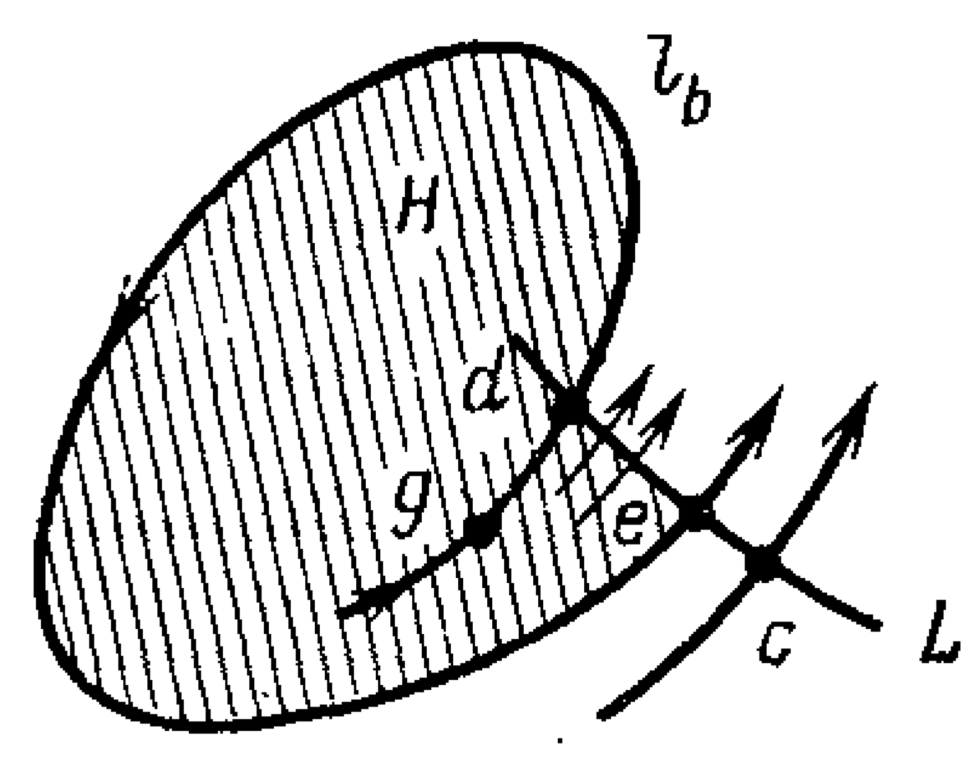

Рис. 32

ким образом, предположение, что траектория l_b незамкнутая, приводит к противоречию, что и завершает доказательство теоремы.

Приведенное доказательство существенно опиралось на то, что замкнутая линия на плоскости делит эту плоскость на две части. Оказывается, что при $n \geqslant 3$ в условиях доказанной теоремы область $\bar{G}$ может не содержать ни одного цикла.

ЗАДАЧИ

1. Докажите теорему Бендиксона в более полной формулировке: в условиях теоремы этого параграфа для любой точки $a \in \bar{G}$ полутраектория l_a^+ либо представляет собой цикл, либо спиралевидно приближается к некоторому циклу.

2. Докажите, что система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_1^3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 - x_2^5$$

имеет по крайней мере один предельный цикл. Обобщите этот результат на системы вида

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \varphi_1(x_1), \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varphi_2(x_2).$$

Указание. Рассмотрите производную от функции $x_1^2+x_2^2$ по t в силу заданной системы.

3. Докажите, что если при $n=2$ некоторая траектория содержит по крайней мере одну свою ω- или α-предельную точку, то эта траектория замкнутая или представляет собой точку покоя. Покажите на примере, что при $n\geqslant 3$ это утверждение несправедливо.

Указание. При $n=2$ используйте «мешок Бендиксона».

4. (Тун Цзиньчжу.) Рассмотрите автономную систему при $n=2$

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt}=f_2(x_1, x_2), \tag{7.7}$$

правые части которой представляют собой многочлены не выше второй степени. Докажите сначала, что никакая неинтегральная прямая не может касаться поля направлений, определенного системой (7.7), более чем в двух точках. Выведите отсюда, что всякая замкнутая траектория этой системы выпуклая и что движение по двум замкнутым траекториям происходит в противоположных (одинаковых) направлениях, если эти траектории находятся одна вне (внутри) другой. Докажите, что внутри замкнутой траектории не может быть более одной точки покоя. (Можно проверить, хотя и не просто, что точка покоя, лежащая внутри замкнутой траектории, представляет собой фокус[1].)

5. (Бендиксон.) Пусть правые части системы (7.7) непрерывно дифференцируемы. Тогда внутри каждого цикла разность $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ принимает значения обоих знаков.

6. Покажите, что система уравнений $\frac{dx_1}{dt}=x_2, \frac{dx_2}{dt}=f(x_1)$ с непрерывно дифференцируемой функцией f, порождаемая уравнением $\frac{d^2x}{dt^2}=f(x)$, является гамильтоновой (см. задачу 2 § 51). Такая система может иметь циклы (приведите пример), но не может иметь предельные циклы.

7. Опишите типы траекторий системы уравнений колебаний математического маятника $\frac{d\varphi}{dt}=\psi, \frac{d\psi}{dt}=-\sin\varphi$ (φ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия), укажите физический смысл этих типов.

§ 56. Окрестность точки покоя на плоскости. I

Нетрудно получить необходимое и достаточное условие того, чтобы точка $x=x^0$ была точкой покоя для автономной системы (7.2): так как постоянная $x(t)\equiv x^0$

---

[1] См. «Математика. Сборник переводов», 6 : 2 (1962), 150—168.

должна служить решением этой системы, то, подставляя x^0 в (7.2), получим

$$f(x^0)=0.$$

Если записать это векторное равенство в проекциях, то получим систему n уравнений с n неизвестными координатами точки покоя.

Рассмотрим, в частности, автономную систему на плоскости, заданную системой уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt}=f_2(x_1, x_2). \tag{7.8}$$

Тогда координаты точки покоя находятся из системы уравнений

$$f_1(x_1^0, x_2^0)=0, \quad f_2(x_1^0, x_2^0)=0. \tag{7.9}$$

Так как из уравнений (7.8) следует, что траектории автономной системы удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}, \tag{7.10}$$

то из равенства (7.9) видно, что точка покоя — это особая точка для уравнения (7.10) в смысле § 22. Как следует из § 22, совокупность траекторий в окрестности точки покоя может иметь сложный вид. Здесь и в § 57 мы проведем рассмотрение такой окрестности в случае, когда функции f_i имеют в точке покоя невырожденную линейную часть, т. е. система (7.8) имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1+bx_2+\psi_1(x_1 x_2), \quad \frac{dx_2}{dt}=cx_1+dx_2+\psi_2(x_1, x_2), \tag{7.11}$$

где

$$\psi_i(x_1, x_2)=o(|x_1|+|x_2|) \ (\text{при } |x_1|+|x_2|\to 0), \quad i=1, 2$$

и

$$ad-bc\neq 0. \tag{7.12}$$

Мы приняли за точку покоя начало координат, чего всегда можно достичь с помощью переноса осей координат. Условие (7.12) исключает некоторые более сложные случаи; отметим, что в § 22 мы также требовали его выполнения.

Для исследования системы (7.11) удобно перейти к полярной системе координат по формулам

$$x_1=\rho\cos\varphi,\quad x_2=\rho\sin\varphi,$$

откуда при $\rho>0$ получаем

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{\rho}\left(x_1\frac{dx_1}{dt}+x_2\frac{dx_2}{dt}\right)=\frac{1}{\rho}[x_1(ax_1+bx_2)+$$
$$+x_2(cx_1+dx_2)]+o(\rho),$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{\rho^2}\left(x_1\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dx_1}{dt}\right)=\frac{1}{\rho^2}[x_1(cx_1+dx_2)-$$
$$-x_2(ax_1+bx_2)]+o(1),$$

т. е.

$$\frac{d\rho}{dt}=\rho Q(\varphi)+o(\rho),\quad \frac{d\varphi}{dt}=R(\varphi)+o(1),\tag{7.13}$$

где для краткости обозначено

$$\begin{aligned}Q(\varphi)&=a\cos^2\varphi+(b+c)\cos\varphi\sin\varphi+d\sin^2\varphi,\\ R(\varphi)&=c\cos^2\varphi+(d-a)\cos\varphi\sin\varphi-b\sin^2\varphi.\end{aligned}\tag{7.14}$$

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда

$$(d-a)^2+4cb<0.\tag{7.15}$$

Для линейной системы, т. е. при $\psi_1\equiv\psi_2\equiv0$, в § 48 и 22 было показано, что в случае (7.15) начало координат является фокусом (при $a+d\neq0$) или центром (при $a+$ $+d=0$). Здесь мы докажем, что и *для полной системы* (7.11) *при выполнении неравенств* (7.15) *и* $a+d\neq0$ *точка покоя* (0, 0) *представляет собой фокус*, а также рассмотрим, какие варианты могут представиться при $a+d=0$.

Для этой цели заметим, что, как это следует из § 48, в случае (7.15) систему (7.11) можно с помощью линейного неособого преобразования плоскости привести к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha\xi_1 - \beta\xi_2 + o(|\xi_1| + |\xi_2|), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \beta\xi_1 + \alpha\xi_2 + o(|\xi_1| + |\xi_2|), \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + d), \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{|(d-a)^2 + 4cb|}.$$

Если под ρ, φ понимать полярные координаты в плоскости ξ_1, ξ_2, то в силу формул (7.13) и (7.14), примененных к системе (7.16), получаем

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha\rho + o(\rho), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta + o(1). \tag{7.17}$$

Из второго уравнения следует, что в достаточно малом круге $K=\{\rho, \varphi\,|\,\rho<\rho^*\}\,(\rho^*>0)$ выполняется неравенство $\frac{d\varphi}{dt} \geqslant \frac{\beta}{2}$. Таким образом, вдоль любой траектории в K (за исключением самой точки покоя, что всегда в дальнейшем будет подразумеваться) функция $\varphi(t)$ возрастающая и потому φ можно принять за независимую переменную.

Из (7.17) получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\alpha + o(1)}{\beta + o(1)}.$$

и потому для любой дуги траектории, расположенной в K и начинающейся при $\varphi=0$, $\rho=\rho_0$, зависимость ρ от φ имеет вид

$$\rho(\varphi; \rho_0) = \rho_0 \exp\left[\int_0^{\varphi} \frac{\alpha + o(1)}{\beta + o(1)}\, d\varphi\right]. \tag{7.18}$$

Значит, если ρ_0 достаточно мало, то эта траектория при своем продолжении в направлении возрастания t (а потому и φ) совершит по крайней мере один оборот вокруг точки покоя, не выходя из K. Тем самым, каждому такому ρ_0 соответствует значение $\psi(\rho_0) = \rho(2\pi; \rho_0)$ и функция ψ играет для рассматриваемой точки покоя ту же роль, что функция последования (§ 54) для цикла. Рассуждая, как в § 54, мы получаем, что если $\psi(\rho)<\rho$ для всех достаточно малах ρ, то $\rho(\varphi)\to 0$ при $\varphi\to+\infty$, т. е. точка покоя представляет собой устойчивый фокус; из (7.18) видно, что для этого достаточно, чтобы было $\alpha<0$. Если $\psi(\rho)>\rho$ для всех достаточно малых ρ, то $\rho(\varphi)\to 0$ при $\varphi\to-\infty$ и точка покоя представляет собой неустойчивый фокус; так происходит в случае $\alpha>0$. Если $\psi(\rho)\equiv\rho$ для всех достаточно малых ρ, то точка покоя представляет собой центр. Наконец, если в любой близости от $\rho=0$ найдутся как значения ρ, для которых $\psi(\rho)=\rho$, так и значения, для которых $\psi(\rho)\neq\rho$, то в любой близости от точки покоя найдутся как окружающие ее циклы, так и расположенные между ними незамкнутые траектории, спиралевидно приближающиеся к этим циклам; такую точку покоя будем называть *точкой смешанного типа.*

Итак, при условии (7.15), *если* $a+d\neq 0$, *система* (7.11) *имеет при* $\rho=0$ *фокус* (устойчивый, если $a+d<0$, и неустойчивый, если $a+d>0$); *если же* $a+d=0$, *то точка* $\rho=0$ *может быть для системы* (7.11) *центром, фокусом или точкой смешанного типа.* Какая из этих возможностей представится, можно узнать, только привлекая к рассмотрению в системе (7.11) члены ψ_i высшего порядка малости; мы не будем рассматривать здесь этот сложный вопрос.

ЗАДАЧИ

1. Приведите пример автономной системы с точкой покоя смешанного типа. Рассмотрите строение окрестности точки покоя смешанного типа в общем случае.

2. Докажите непосредственно, что при выполнении условия (7.15)

$$\int_0^{2\pi}\frac{Q(\varphi)}{R(\varphi)}\,d\varphi=-2\pi\,\frac{b}{|b|}\,\frac{a+d}{\sqrt{-(d-a)^2-4cb}},\quad b\frac{d\varphi}{dt}<0,$$

и сделайте отсюда выводы о характере особой точки в начале координат.

3. Рассмотрите систему общего вида

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i(x_1, x_2) + \psi_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

где P_i — однородные многочлены степени $m \geqslant 1$, а

$$\psi_i(x_1, x_2) = o(|x_1|^m + |x_2|^m) \text{ (при } |x_1| + |x_2| \to 0).$$

Обозначив

$$Q(\varphi) = \cos\varphi \cdot P_1(\cos\varphi, \sin\varphi) + \sin\varphi \cdot P_2(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

$$R(\varphi) = \cos\varphi \cdot P_2(\cos\varphi, \sin\varphi) - \sin\varphi \cdot P_1(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

докажите, что если $R(\varphi) \neq 0 \ (0 \leqslant \varphi < \pi)$, то начало координат является для рассматриваемой системы фокусом, центром или точкой смешанного типа, причем если $\int\limits_0^\pi \frac{Q(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi \neq 0$, то последние два случая невозможны.

§ 57. Окрестность точки покоя на плоскости. II

В этом параграфе рассматривается возмущение линейной системы с точкой покоя типа седло или узел членами высшего порядка малости. Доказано, что в определенных предположениях *семейство траекторий возмущенной системы в достаточно малой окрестности точки покоя остается почти таким же, как у невозмущенной, линейной системы.* Сходство семейств траекторий двух систем в окрестности точки покоя можно определять по-разному. Во-первых, эти семейства можно считать сходными, если в некоторой окрестности точки покоя существует замена координат, переводящая траектории одной системы в траектории другой. Во-вторых, эти семейства можно считать сходными, если у них совпадают какие-нибудь существенные геометрические характеристики. Мы будем придерживаться последней точки зрения; в частности, мы докажем, что траектории возмущенной системы, стремящиеся к точке покоя при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, входят в нее по тем же направлениям, что и траектории невозмущенной, линейной системы.

Перейдем к подробному изложению. Напомним, что в силу § 48 и 22 для системы (7.11) при $\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0$ точка покоя типа седло или узел получается, если $(d-a)^2+4cb \geqslant 0$. Рассмотрим сначала «грубый» случай, когда для системы (7.11) выполнено условие (7.12) и

$$(d-a)^2+4cb>0.$$

В этом случае из § 48 следует, что систему (7.11) можно с помощью линейного неособого преобразования привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \lambda_1\xi_1 + o(|\xi_1|+|\xi_2|), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \lambda_2\xi_2 + o(|\xi_1|+|\xi_2|), \end{aligned} \tag{7.19}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a+d) + \frac{1}{2}\sqrt{(d-a)^2+4cb},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(a+d) - \frac{1}{2}\sqrt{(d-a)^2+4cb}.$$

Перейдя к полярным координатам ρ, φ в плоскости ξ_1, ξ_2, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= (\lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi)\rho + o(\rho), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= (\lambda_2-\lambda_1)\cos\varphi\sin\varphi + o(1). \end{aligned} \tag{7.20}$$

Теорема 1. *Любая траектория системы* (7.19), *входящая в точку покоя* $\xi_1=\xi_2=0$ *при* $t\to+\infty$ *или при* $t\to-\infty$, *касается в этой точке какой-либо из координатных осей.*

Доказательство. Будем изображать траектории на вспомогательной плоскости ρ, φ (рис. 33). (Такой переход переводит точку покоя в прямую и потому облегчает детальное исследование окрестности этой точки.) Будем считать для определенности, что рассматриваемая траектория l_a входит в точку покоя при $t\to+\infty$.

Тогда l_a, начиная с некоторого момента, содержится в полосе $0<\rho\leqslant\rho^*$, где ρ^* — любое заданное положительное число. Выберем произвольно малое $\varepsilon>0$ и проведем прямые $\varphi=\frac{1}{2}k\pi\pm\varepsilon$, где k — любое целое число. Рассуждая, как при анализе формулы (7.18), получаем, что если ρ^* достаточно мало́ и траектория l_a при некотором t попадает в какой-либо из незаштрихованных прямоугольников (рис. 33), то через конечный промежуток времени она окажется в том из соседних заштрихованных прямоугольников П, на горизонтальных сторонах которого поле направлено внутрь П, и потому l_a при бо́льших t уже не сможет покинуть П. Таким образом, в любом случае l_a, начиная с некоторого t, находится в одном из заштрихованных прямоугольников. Поскольку ε можно взять как угодно малым, φ при $\rho\to0$ стремится к одному из значений $\frac{1}{2}k\pi$, что и требовалось доказать.

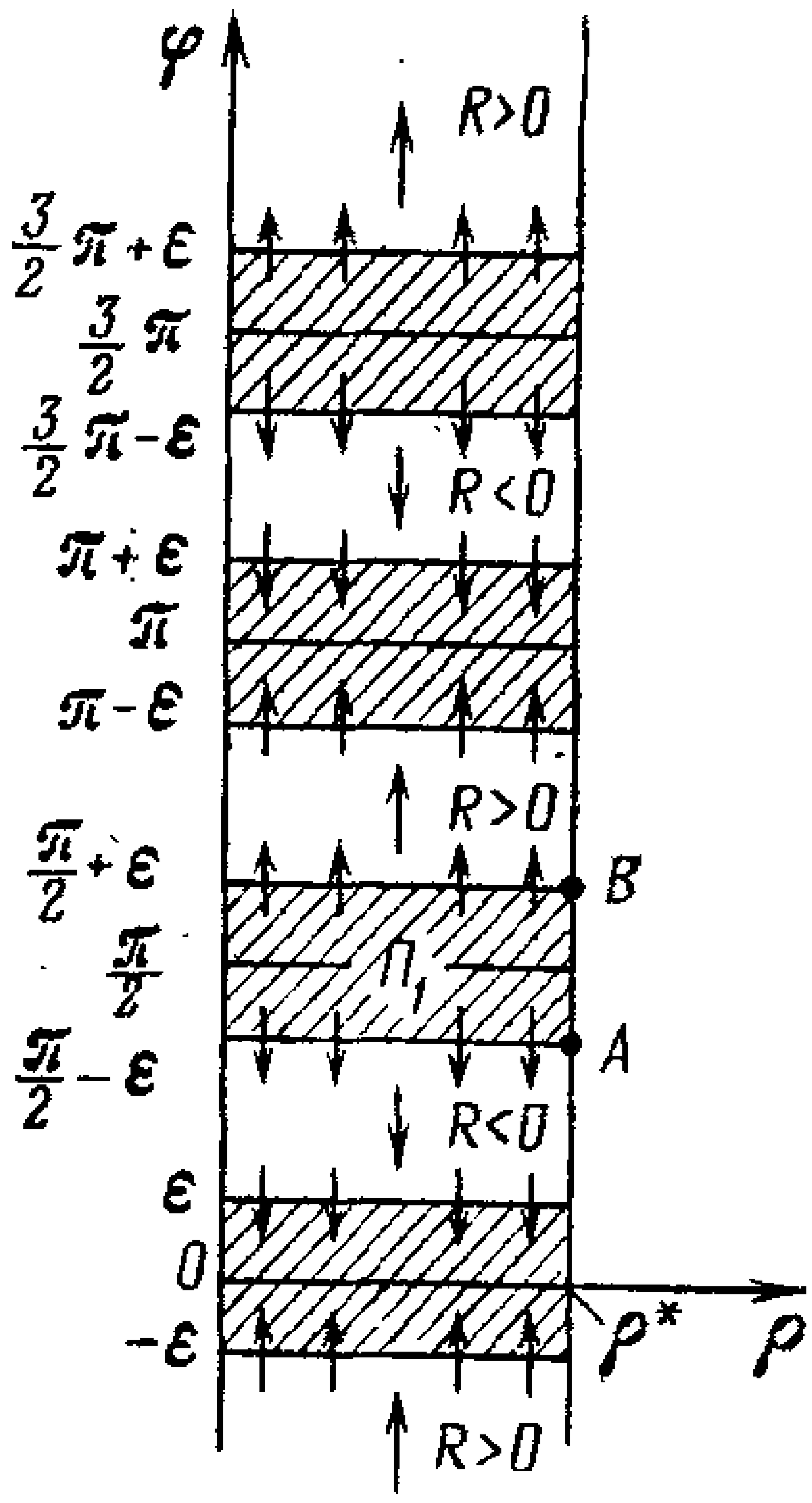

Рис. 33

Теорема 2. *Предположим дополнительно, что функции ψ_i в системе* (7.11) *непрерывно дифференцируемы. Тогда:*

если $\lambda_1\lambda_2>0$, *то точка покоя* (0, 0) *для системы* (7.19) *представляет собой узел (устойчивый, если* $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, *и неустойчивый, если* $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$), *причем в достаточно малой окрестности этой точки все траектории входят в нее, касаясь одной из осей координат, за исключением двух траекторий, входящих по взаимно противоположным направлениям, касаясь другой из осей;*

если $\lambda_1\lambda_2<0$, *то точка покоя* (0, 0) *для системы* (7.19) *представляет собой седло, в которое входят две траектории при* $t\to+\infty$ *по взаимно противоположным направлениям, касаясь одной из осей координат, и две — при* $t\to-\infty$ *по взаимно противоположным направлениям, касаясь другой из осей.*

Доказательство. Рассмотрим подробно случай, когда $\lambda_2<\lambda_1<0$. Тогда в силу первого из уравнений (7.20) для всех достаточно малых ρ получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\leqslant\frac{1}{2}\lambda_1, \text{ откуда } \rho(t)\leqslant\rho(0)\,e^{\frac{1}{2}\lambda_1 t}=$$

$$=\rho(0)\,e^{-\frac{1}{2}|\lambda_1|t}\quad(t\geqslant 0). \tag{7.21}$$

Возвращаясь к плоскости ξ_1, ξ_2, видим, что все траектории, начинающиеся в любом достаточно малом круге K с центром в точке покоя, при увеличении t остаются в K и при $t\to+\infty$ входят в точку покоя, имея там в силу теоремы 1 направление одной из осей координат. Таким образом, *точка покоя представляет собой устойчивый узел.*

Для более детального описания поведения траекторий в рассматриваемом случае заметим, прежде всего, что, рассуждая как при доказательстве теоремы 1, получаем, что *для любого* $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$ *существует такое* $\rho^*>0$, *что все траектории, начинающиеся в секторе* $0<\rho\leqslant\rho^*$, $|\varphi-k\pi|\leqslant\varepsilon$ (k — любое целое, но достаточно рассматривать $k=0$ или 1), *в дальнейшем не покидают его и входят в точку покоя с направлением* $\varphi=k\pi$.

Проверим теперь, что *по каждому направлению* $\varphi=k\pi+\frac{1}{2}\pi$ *в точку покоя входит ровно одна траектория*; для определенности примем $k=0$. Для этого проследим за траекториями, начинающимися на стороне AB прямоугольника $\Pi_1\{0<\rho\leqslant\rho^*,\ |\varphi-\pi/2|\leqslant\varepsilon\}$ в плоскости ρ, φ (рис. 33). На этой стороне (кроме концов) траектории входят в Π_1, а на горизонтальных сторонах они выходят из Π_1. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных следует, что если какая-либо траектория l_a ($a\in\Pi_1$) выходит из Π_1 через верхнюю (нижнюю) сторону, то так же ведут себя и все траектории, выходящие из достаточно малой окрестности точки a. Но тогда, взяв верхнюю грань C точек отрезка AB, через которые проходят траектории, выходящие из Π_1 через нижнюю сторону, получаем, что траектория, проходящая через C, вообще не может выйти из

Π_1 (почему?). Из (7.21) следует, что эта траектория входит в точку покоя, причем в силу теоремы 1, по направлению $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Итак, существование искомой траектории доказано.

Докажем, наконец, что такая траектория только одна. Для этого заметим, что после перехода к переменным ξ_1, ξ_2 система (7.11) примет вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \lambda_i \xi_i + g_i(\xi_1, \xi_2) \quad (i = 1, 2),$$

где функции g_i непрерывно дифференцируемы и $g_i(\xi_1, \xi_2) = o(|\xi_1| + |\xi_2|)$ при $|\xi_1| + |\xi_2| \to 0$, а потому их производные при $\xi_1 = \xi_2 = 0$ равны нулю. Перейдя к полярным координатам, получим

$$\rho\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\cdot g_2(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi) - }{(\lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi)\rho + \cos\varphi\cdot g_1(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi) +}$$

$$\frac{-\sin\varphi\cdot g_1(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}{+\sin\varphi\cdot g_2(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)} \equiv U(\rho, \varphi). \qquad (7.22)$$

Непосредственное вычисление, которое мы предоставляем читателю, показывает, что функция U имеет в Π_1 при $\rho > 0$ непрерывную производную по φ, как угодно близкую к $(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1$, если ε и ρ^* достаточно малы.

Допустим, что по направлению $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ в точку покоя входят две траектории. Подставим их уравнения $\varphi = \varphi_1(\rho)$ и $\varphi = \varphi_2(\rho)$ в (7.22), вычтем почленно одно из полученных равенств из другого и заметим, что в силу леммы Адамара

$$U(\rho, \varphi_2) - U(\rho, \varphi_1) \equiv (\varphi_2 - \varphi_1)F(\rho, \varphi_1, \varphi_2),$$

где, как видно из § 20, функция F непрерывна при $0 < \rho \leqslant \rho^*$, $\left|\varphi_i - \frac{1}{2}\pi\right| \leqslant \varepsilon\ (i = 1, 2)$ и

$$F(\rho, \varphi_1, \varphi_2) \to (\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1$$

$$\text{при } \rho \to 0,\ \varphi_i \to \frac{1}{2}\pi\ (i = 1, 2).$$

Мы приходим к равенству

$$\rho \frac{d(\varphi_2-\varphi_1)}{d\rho} = (\varphi_2-\varphi_1) F(\rho, \varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho)) \equiv$$
$$\equiv A(\rho)(\varphi_2-\varphi_1) \quad (0<\rho\leqslant\rho^*), \tag{7.23}$$

где функция $A(\rho)$ непрерывна и стремится к $(\lambda_1-\lambda_2)/\lambda_1<0$ при $\rho\to 0$. Интегрируя (7.23) как линейное однородное уравнение, получим

$$\varphi_2(\rho)-\varphi_1(\rho) = C_0 \exp\left[\int_{\rho^*}^{\rho} \frac{A(r)}{r}\,dr\right] =$$
$$= C_0 \exp\left[\int_{\rho}^{\rho^*} \left(-\frac{A(r)}{r}\right) dr\right].$$

Однако при $\rho\to 0$ последний интеграл стремится к $+\infty$, и значит, чтобы левая часть оставалась конечной, должно быть $C_0=0$, т. е. $\varphi_1(\rho)\equiv\varphi_2(\rho)$, что и требовалось доказать.

Итак, случай $\lambda_2<\lambda_1<0$ полностью разобран. Случай $0<\lambda_2<\lambda_1$ сводится к разобранному заменой t на $-t$. Мы предоставляем читателю по образцу приведенных здесь рассуждений рассмотреть случай $\lambda_1\lambda_2<0$ и тем самым завершить доказательство теоремы 2.

Рассмотрим теперь более тонкий случай системы (7.11), для которой выполнено условие (7.12) и

$$(d-a)^2+4cb=0, \tag{7.24}$$

т. е. характеристическое уравнение матрицы коэффициентов при линейных членах имеет кратный корень $\lambda_1 = \frac{1}{2}(a+d)$.

Теорема 3. *Пусть корню λ_1 соответствует элементарный делитель второй степени и*

$$\psi_i(x_1, x_2) = O(|x_1|^\eta + |x_2|^\eta) \quad (\text{при } |x_1|+|x_2|\to 0);\ i=1,2;\ \eta>1.$$

Тогда точка покоя (0,0) *является узлом с единственной парой взаимно противоположных направлений входа траекторий.*

Доказательство. Из § 48 следует, что в рассматриваемых предположениях систему (7.11) можно привести к виду

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1\xi_1 + O(|\xi_1|^\eta + |\xi_2|^\eta),$$

тогда как наклон самой стороны $\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)_{\text{II}} = h\rho^{h-1}$. Значит, если принять $h<\eta-1$, то в точках стороны AC при достаточно малом ρ^*.

$$\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)_{\text{I}} < \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)_{\text{II}},$$

а потому и через эту сторону траектории входят внутрь треугольника. Таким образом, все траектории, начинающиеся при $\rho>0$ в треугольнике ABC, при увеличении t не могут его покинуть и потому при $t\to+\infty$ входят в точку A, что и требовалось доказать.

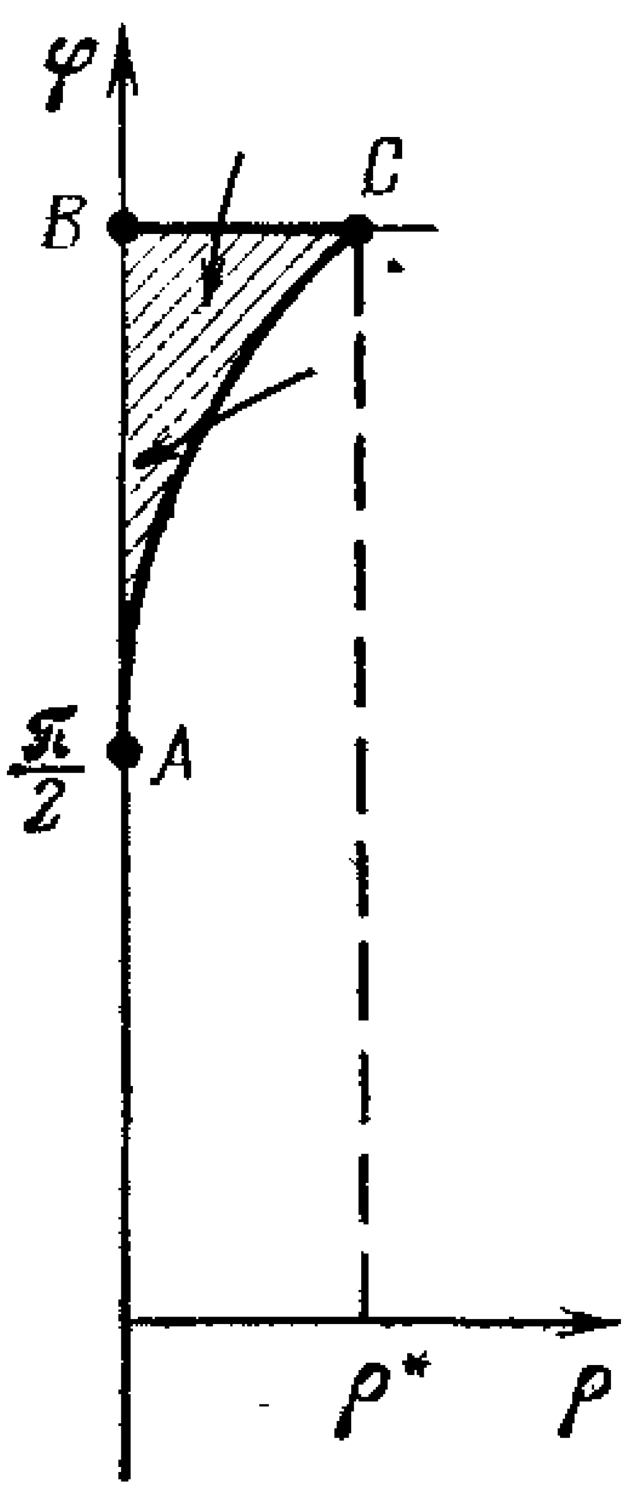

Рис. 34

Случай $\lambda_1>0$ приводится к случаю $\lambda_1<0$ с помощью замены t на $-t$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть корню λ_1 соответствуют два элементарных делителя первой степени и функции ψ_i имеют непрерывные производные первых двух порядков. Тогда точка покоя* (0, 0) *является узлом, причем по каждому направлению в нее входит только одна траектория.*

Доказательство. В рассматриваемом случае система (7.11) имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_1 x_i + \psi_i(x_1, x_2) \quad (i=1,\ 2),$$

и после перехода к полярным координатам получаем уравнение

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\cos\varphi\cdot\psi_2(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi) - \sin\varphi\cdot\psi_1(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)}{\rho\,[\lambda_1\rho + \cos\varphi\cdot\psi_1(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi) + \sin\varphi\cdot\psi_2(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)]} \equiv V(\rho,\ \varphi). \quad (7.26)$$

Функция V первоначально определена в полосе $0<\rho\leqslant\rho^*$. Однако, разлагая функции ψ_i по формуле Тейлора с точностью до членов второго порядка малости, видим, что V имеет предел

$$\frac{1}{\lambda_1}[\cos\varphi\cdot(a_{211}\cos^2\varphi + 2a_{212}\cos\varphi\sin\varphi + a_{222}\sin^2\varphi) - \\ - \sin\varphi\cdot(a_{111}\cos^2\varphi + 2a_{112}\cos\varphi\sin\varphi + a_{122}\sin^2\varphi)]$$

$$\left(a_{ijk} = \left.\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\,\partial x_k}\right|_{x_1=x_2=0}\right)$$

при $\rho\to0$, так что ее можно считать определенной и непрерывной на полосе $0\leqslant\rho\leqslant\rho^*$. Кроме того, нетрудно непосредственно проверить, что функция V имеет ограниченную производную по φ. Поэтому утверждение теоремы 4 вытекает из теоремы § 14 о существовании и единственности решения, примененной к уравнению (7.26) с начальным условием $\varphi(0)=\varphi_0$, где φ_0 — любое заданное число. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите систему общего вида, приведенного в задаче 3 § 56, если введенная там функция $R(\varphi)$ имеет нули. Докажите, что:

а) если какая-либо траектория входит в точку покоя $\rho=0$ (при $t\to+\infty$ или при $t\to-\infty$) с определенного направления $\bar\varphi$, то $R(\bar\varphi)=0$;

б) если $R(\varphi)$ принимает значения обоих знаков, то любая траектория, входящая в точку покоя, имеет там определенное направление;

в) если $R(\bar\varphi)=0$, $Q(\bar\varphi)\neq 0$ и при переходе φ через $\bar\varphi$ функция $R(\varphi)$ меняет знак, то в точку покоя по направлению $\varphi=\bar\varphi$ входит по крайней мере одна траектория; при этом, если $R(\varphi)Q(\varphi)$ меняет знак с — на +, то по направлению $\bar\varphi$ входят все траектории из некоторого сектора $0<\rho\leqslant\rho^*$, $|\varphi-\bar\varphi|\leqslant\varepsilon$;

г) если $R(\bar\varphi)=0$, $R'(\bar\varphi)Q(\bar\varphi)<0$ и функции ψ_i имеют непрерывные производные первого порядка, равные $o(\rho^{m-1})$ при $\rho\to 0$, то по направлению $\bar\varphi$ в точку покоя входит только одна траектория;

д) если $R(\varphi)\not\equiv 0$, $R(\bar\varphi)=0$, $Q(\bar\varphi)\neq 0$, при переходе φ через $\bar\varphi$ функция $R(\varphi)$ не меняет знака и $\psi_i=O(\rho^\eta)$ ($i=1, 2$; $\eta>m$), то по направлению $\bar\varphi$ в точку покоя входит бесконечное множество траекторий;

е) если $R(\varphi)\equiv 0$, $Q(\varphi)\not\equiv 0$ и функции ψ_i можно представить в виде суммы однородных многочленов степени $m+1$ и членов высшего порядка малости, то по каждому направлению $\bar\varphi$, для которого $Q(\bar\varphi)\neq 0$, в точку покоя входит по крайней мере одна траектория; если дополнительно дано, что функции ψ_i имеют непрерывные производные первого порядка, равные $o(\rho^m)$ при $\rho\to 0$, то по направлению $\bar\varphi$ входит только одна траектория;

ж) если функции ψ_i равны $o(|x_1|^m+|x_2|^m)$ при $|x_1|+|x_2|\to 0$ и аналитичны, то для них выполняются все добавочные предположения, приведенные в этой задаче. Отметим, что это справедливо и для основного текста книги, где надо положить $m=1$.

2. Докажите, что для системы, рассмотренной в задаче 6 § 55, особые точки типа центр или седло возможны, а узел и фокус

(как и для любой системы с интегральным инвариантом) — невозможны.

3. Проведите классификацию изолированных точек покоя автономной системы при $n=3$ в случае линейных правых частей и различных корней характеристического уравнения; изобразите геометрическую картину пяти возможных типов точек. Проведите аналогичную классификацию для любого n. Какие из точек являются «грубыми», т. е. не меняют своего типа при достаточно малом изменении коэффициентов системы? Отметим, что точки покоя для нелинейных автономных систем в случае любого n рассмотрены в указанной в § 24 книге В. В. Немыцкого и В. В. Степанова.

§ 58. Теория индексов

Пуанкаре с успехом применил к исследованию автономных систем на плоскости понятие вращения векторного поля. Пусть на плоскости задана автономная система (7.2) и дана гладкая или кусочно-гладкая ориентированная линия L (замкнутая линия или дуга, содержащая свои концы), не проходящая через точки покоя системы.

Вращением векторного поля, определенного системой (7.2), *вдоль линии* L называется деленное на 2π приращение угла, составляемого вектором поля в точке $A\in L$ с некоторой фиксированной осью l, когда эта точка A проходит линию L в заданном на L направлении обхода. Подразумевается, что при подсчете приращения угла мы следим за его определенной ветвью, т. е. считаем угол изменяющимся непрерывно. Например, на рис. 35 приращение угла равно 2π, и потому вращение поля вдоль L равно 1 независимо от того, примем ли мы в исходной точке A_0 указанный угол равным

$$\frac{5\pi}{12} \text{ или } \left(\frac{5\pi}{12}+2\pi\right) \text{ или } \left(\frac{5\pi}{12}-2\pi\right)$$

и т. д. Кроме того, нетрудно видеть, что вращение заданного поля вдоль заданной линии не зависит от выбора оси l, а если линия L замкнутая, то не зависит и от выбора начала обхода A_0.

Нетрудно получить явную формулу для вращения поля

$$f(x)=f_1(x_1,\ x_2)e_1+f_2(x_1,\ x_2)e_2,$$

где e_1 и e_2 — единичные векторы осей координат. Приняв за l ось x_1, получим угол наклона поля к оси

$$\vartheta = \operatorname{Arctg} \frac{f_2}{f_1},$$

откуда вращение $\varkappa_L$ поля вдоль L равно

$$\varkappa_L = \frac{1}{2\pi} \int_L d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{1}{f_1^2 + f_2^2} \left[\left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) dx_1 + \right.$$

$$\left. + \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_2 \right]$$

(при этом мы считаем функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемыми).

Укажем некоторые свойства вращения.

1. При перемене ориентации линии L на противоположную вращение меняет только знак.

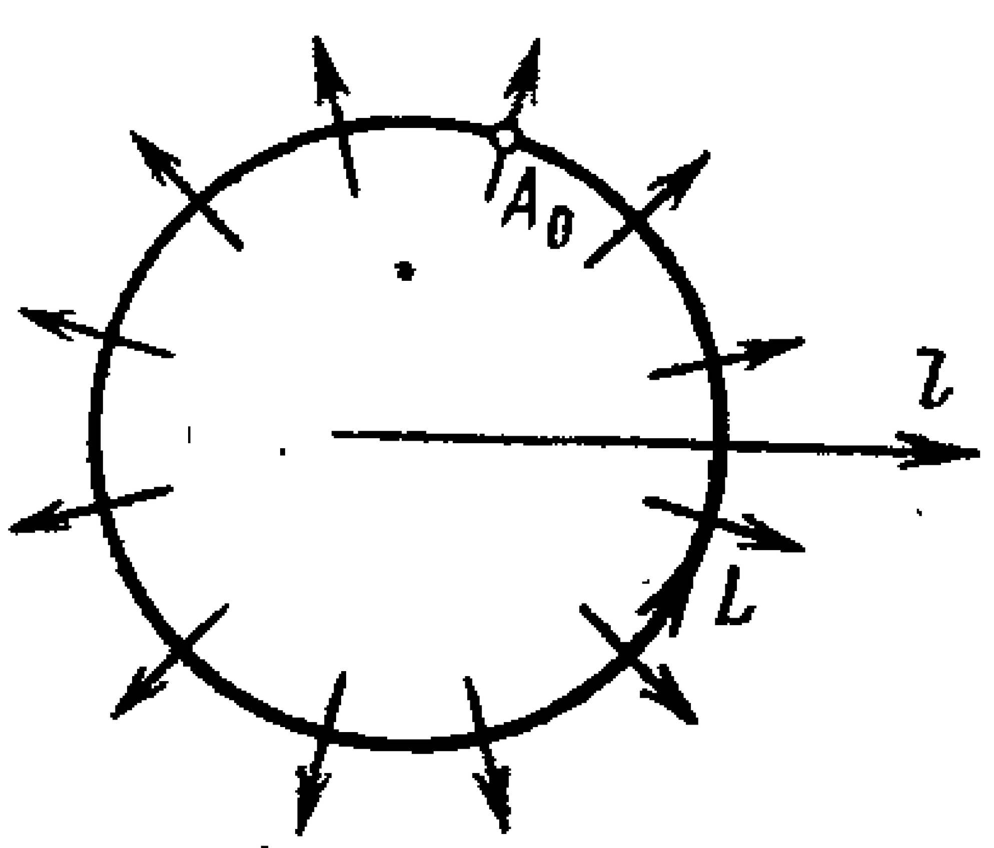

Рис. 35

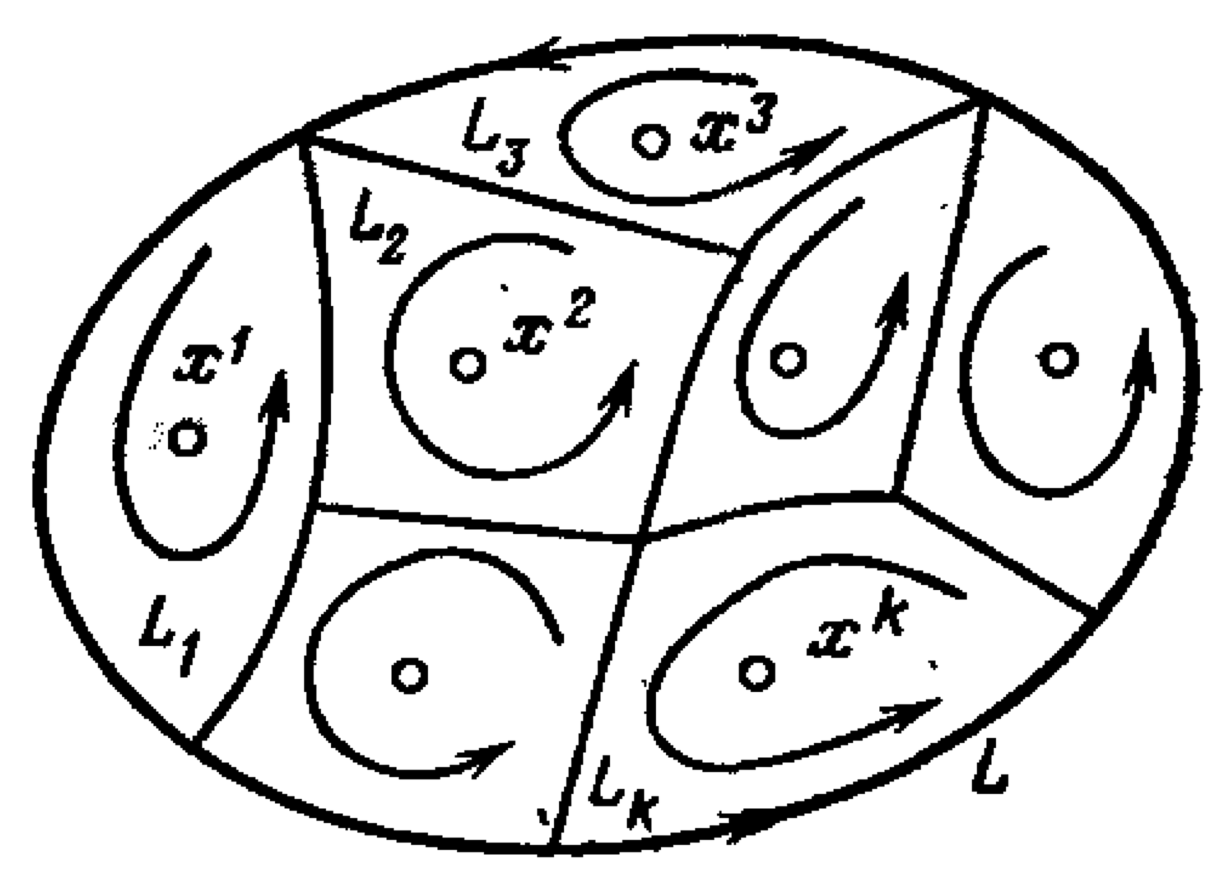

Рис. 36

2. Если линия L разбита на конечное число частей, то вращение поля вдоль L равно сумме вращений поля вдоль этих частей.

Эти два свойства почти очевидны.

3. Если линия L замкнутая, то вращение равно целому числу. В самом деле, тогда вектор поля в начале и в конце пути один и тот же, т. е. он мог повернуться лишь на целое число оборотов.

4. Если замкнутая линия L непрерывно деформируется, причем в процессе деформации она не проходит через точки покоя системы, то вращение поля вдоль нее остается постоянным. Действительно, при такой деформации поле вдоль линии, а потому и вращение поля меняются непрерывно. Поэтому в силу свойства 3 получаем наше утверждение.

5. Если внутри замкнутой линии L без самопересечений нет точек покоя системы, то вращение поля вдоль L равно нулю. В самом деле, непрерывно стянем линию к какой-нибудь точке, не являющейся точкой покоя; при этом на основании свойства 4 вращение поля в процессе деформации не изменится. Но ясно, что если замкнутая линия находится в достаточной близости от точки, не являющейся точкой покоя, то при обходе этой линии вектор поля не может сделать полного оборота, т. е. вращение поля вдоль такой линии равно нулю. Значит, вращение и вдоль исходной линии L равно нулю.

Следствие. *Внутри любой замкнутой траектории системы* (7.2) *(на плоскости) находится по крайней мере одна точка покоя этой системы.* Действительно, если такую траекторию обходить в положительном направлении (против часовой стрелки), то вектор поля, направленный все время вперед или назад по касательной, сделает полный оборот в положительном направлении[1]. Значит, вращение поля вдоль замкнутой траектории равно 1, и потому наше утверждение вытекает из свойства 5.

Рассмотрим изолированную точку покоя x^0, т. е. точку покоя, обладающую окрестностью, в которой нет других точек покоя. Выберем какую-либо линию L, окружающую x^0, и будем проходить ее в направлении против часовой стрелки. Тогда вращение поля вдоль линии L называется *индексом точки покоя* x^0. В силу свойства 4 индекс точки покоя не зависит от конкретного выбора линии L. Если выбрать, например, в качестве такой линии малую окружность с центром в точке по-

[1] Это утверждение, наглядно очевидное, может быть доказано без всякой ссылки на наглядность; см., например, указанную в § 24 книгу С. Лефшеца.

коя и проследить за изменением вектора поля при обходе этой окружности, то легко проверить (проделайте это!), что индексы узла, центра и фокуса равны 1, тогда как индекс седла равен —1.

Теорема. *Если на замкнутой линии L без самопересечений нет точек покоя системы, а внутри L имеется лишь конечное число таких точек, то вращение поля вдоль линии L, проходимой в направлении против часовой стрелки, равно сумме индексов всех точек покоя, содержащихся внутри L.*

Доказательство. Проведем внутри L дополнительные линии так, чтобы область, содержащаяся внутри L, разбилась на части, каждая из которых содержит лишь одну точку покоя (рис. 36). Ориентируем контур L_k каждой из частичных областей в направлении против часовой стрелки; тогда

$$\varkappa_L = \sum_k \varkappa_{L_k}. \tag{7.27}$$

В самом деле, в этой сумме каждое слагаемое можно разделить на части, отвечающие отдельным дугам разбиения; после этого в силу свойства 1 слагаемые, отвечающие внутренним дугам, взаимно уничтожатся (почему?), тогда как слагаемые, отвечающие дугам, лежащим на L, сложатся и дадут в сумме левую часть формулы (7.27). Из формулы (7.27) на основании определения индекса точки покоя и вытекает утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть внутри замкнутой траектории имеются точки покоя только простейшего типа, именно центры, фокусы, узлы и седла. Тогда общее число этих точек нечетно, причем число седел на единицу меньше общего числа всех остальных точек покоя.* В самом деле, это вытекает из приведенных перед формулировкой теоремы значений индексов указанных точек покоя.

Подробное изложение теории и приложений понятия вращения векторного поля даны в книге: М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $P(z)$ — многочлен от $z=x+iy$ не менее первой степени. Обозначив $P=Q+iR$ и рассмотрев вращение векторного поля Qe_1+Re_2 по окружности достаточно большого радиуса с центром в начале координат, докажите, что $P(z)$ имеет по крайней мере один нуль.

2. Можно доказать, что у изолированной точки покоя a, не типа центр и не смешанного типа (см. § 56) существует окрестность U следующей структуры. В U имеется конечное число «эллиптических областей», целиком заполненных траекториями, входящими обоими концами в a; конечное число «гиперболических областей», целиком заполненных траекториями, выходящими обоими концами на границу U; те и другие области простираются от a до границы U и отделены друг от друга «зонами параболичности», целиком заполненными траекториями, одним концом входящими в a, а другим выходящими на границу U. Пусть число областей каждого типа известно; чему равен индекс точки покоя?

3. Понятие вращения векторного поля можно ввести и в n-мерном пространстве. Пусть дана замкнутая гладкая или кусочно-гладкая ориентированная (т. е. с указанием наружной стороны) $(n-1)$-мерная поверхность S или поверхность с краем, удовлетворяющая аналогичным требованиям. Пусть в окрестности S задано непрерывно дифференцируемое векторное поле

$$a(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,e_i,$$

где e_i — единичный вектор по оси x_i. Тогда *вращением поля $a(x)$ на поверхности S* называется интеграл

$$\varkappa_S=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_S \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_{i-1}} & a_1 & \frac{\partial a_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_{i-1}} & a_n & \frac{\partial a_n}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\cos(\widehat{\mathbf{n}, x_i})\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-\frac{n}{2}} dS,$$

где ω_{n-1} — $(n-1)$-мерная мера единичной $(n-1)$-мерной сферы, а $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к S. Рассмотрите какие-либо примеры вращения поля в трехмерном и n-мерном пространствах, выясните геометрический смысл вращения, докажите какие-либо свойства вращения.

4. Дайте определение индекса изолированной точки покоя автономной системы в n-мерном пространстве. Докажите, что для случая линейных правых частей этот индекс равен ±1. (В зави-

симости от чего?) Сформулируйте следствие об индексе точки покоя для нелинейной системы с линейной главной частью.

5. Рассмотрите непрерывно дифференцируемое поле касательных векторов на сфере R в трехмерном пространстве и соответствующую автономную систему на R. Определите понятие индекса точки покоя и докажите, что если точек покоя конечное число, то сумма их индексов равна 2. Докажите отсюда с помощью аппроксимации, что всякое непрерывное поле касательных векторов на R имеет по крайней мере один нуль-вектор. Рассмотрите также случаи, когда R представляет собой поверхность тора или «кренделя» (сферы с двумя ручками).

§ 59. Теорема Брауэра о неподвижной точке

Следующая теорема широко применяется в теории дифференциальных уравнений и в других разделах математики. Она была впервые сформулирована и доказана голландским математиком Л. Брауэром в 1910 г.; равносильное утверждение было доказано и применено к теории дифференциальных уравнений латвийским математиком П. Г. Болем в 1904 г.

Теорема. *Пусть n-мерный $(n \geqslant 1)$ замкнутый шар K непрерывно отображен в себя, т. е. каждой точке $x \in K$ отвечает точка $f(x) \in K$, причем функция $f(x)$ непрерывна. Тогда по крайней мере одна точка $x_0 \in K$ при этом отображении переходит в себя, т. е. $f(x_0) = x_0$.*

Перед доказательством теоремы выскажем несколько общих соображений. Пусть в n-мерном пространстве даны два множества K_1 и K_2. Они называются *гомеоморфными* друг другу, если между ними можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие, другими словами, если существует такое непрерывное отображение $x^2 = \varphi(x^1) \in K_2$ $(x^1 \in K_1)$ множества K_1 на множество K_2, что обратное отображение $x^1 = \bar{\varphi}(x^2)$ будет непрерывным отображением K_2 на K_1. Так, нетрудно проверить, что n-мерный шар гомеоморфен n-мерному кубу или n-мерному тетраэдру (и даже любому n-мерному выпуклому телу), но не гомеоморфен, например, множеству, состоящему из двух шаров без общих точек[1])

---

[1]) Свойства, общие для всех гомеоморфных друг другу множеств, изучает область математики, называемая *топологией*. С точки зрения топологии гомеоморфные множества считаются эквивалентными

Нетрудно проверить топологический характер теоремы Брауэра, другими словами, проверить, что если некоторое множество K_1 обладает по крайней мере одной неподвижной точкой при непрерывном отображении в себя, то этим свойством обладает и любое множество K_2, гомеоморфное K_1. В самом деле, пусть f — непрерывное отображение множества K_2 в себя, а φ — гомеоморфное отображение K_1 на K_2. Тогда $\bar{\varphi} f \varphi$ представляет собой непрерывное отображение K_1 в себя, и потому существует точка $a^1 \in K_1$, для которой $\bar{\varphi}(f(\varphi(a^1))) = a^1$. Но тогда $f(\varphi(a^1)) = \varphi(a^1)$, т. е. точка $\varphi(a^1) \in K_2$ переходит при отображении f в себя.

При $n=1$ теорема Брауэра сразу вытекает из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции (проверьте это). Мы докажем эту теорему для $n=2$, предоставив случай произвольного n читателю.

Лемма. (Шпернер.) *Пусть треугольник ABC разбит на конечное число треугольников так, что любые два треугольника разбиения либо не имеют друг с другом общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону. Пусть, далее, каждая из вершин треугольников разбиения обозначена одной из букв A, B, C, причем так, что на стороне AB (соответственно BC, AC) основного треугольника употребляются только буквы A и B (соответственно B и C, A и C). Тогда найдется по крайней мере один треугольник разбиения, все вершины которого обозначены различными буквами.*

Доказательство начнем со следующего простого замечания. Пусть некоторый отрезок AB разбит на конечное число отрезков, причем каждая из точек деления обозначена одной из букв A или B. Тогда число отрезков разбиения, концы которых обозначены различными буквами, *нечетно.* В самом деле, обозначим через p_{AA} и p_{AB} число отрезков разбиения, имеющих указанный набор концов, а через p'_A — число точек деления, обозначенных буквой A. Тогда, подсчитывая число кон-

(так же, как, например, в элементарной геометрии конгруэнтные фигуры считаются эквивалентными), поэтому такие понятия, как угол, длина, прямолинейность и т. д., не являются топологическими. Топологическими являются наиболее «грубые» свойства тел, такие как связность, размерность и т. д., хотя проверка этого бывает далеко не проста.

цов A у всех отрезков разбиения, получим $2p_{AA}+p_{AB}=2p'_A+1$, откуда и вытекает нечетность числа p_{AB}.

Пусть теперь выполнены условия леммы; докажем, что число треугольников разбиения, все вершины которых обозначены различными буквами, *нечетно*, откуда и будет следовать утверждение леммы. Для этого обозначим через p_{AAB}, p_{ABB} и p_{ABC} количества треугольников разбиения, имеющих указанный набор вершин, а через p'_{AB} и p''_{AB} количества сторон треугольников разбиения, обозначенных буквами A, B и расположенных внутри или соответственно на границе основного треугольника. Выпишем теперь подряд все стороны всех треугольников разбиения независимо один от другого и подсчитаем, сколько раз при этом встретится сторона AB. С одной стороны, это количество равно $2p_{AAB}+2p_{ABB}+p_{ABC}$ (почему?). Но оно же равно $2p'_{AB}+p''_{AB}$, так как каждая «внутренняя» сторона AB подсчитывается дважды. Итак,

$$2p_{AAB}+2p_{ABB}+p_{ABC}=2p'_{AB}+p''_{AB}. \tag{7.28}$$

Однако «граничные» стороны AB могут располагаться только на стороне AB основного треугольника, и потому по доказанному в предыдущем абзаце число p''_{AB} нечетное. Поэтому из (7.28) мы получаем, что и число p_{ABC} нечетное. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу сказанного перед формулировкой леммы, теорему достаточно доказать для какого-либо из множеств, гомеоморфных кругу. Поэтому предположим, что дано непрерывное отображение f треугольника ABC в себя. Зададим произвольное число $\varepsilon_1>0$ и произведем «триангуляцию» заданного треугольника, т. е. разбиение его на треугольники, обладающие указанными в лемме свойствами, и притом такое, что сторона каждого из треугольников разбиения меньше ε_1. Мы предположим, что при отображении f ни одна точка не переходит в себя, и обозначим любую из вершин треугольника разбиения буквой A (соответственно B, C), если эта вершина при отображении f приближается к стороне BC (соответственно AC, AB) основного треугольника. Если же точка при отображении приближается сразу к двум сторонам основного треугольника, например BC и AC, то ее обозначаем по произволу буквой A или B. Тогда легко проверить, что при этом выполняются условия леммы и потому найдется треугольник разбиения, вершины которого обозначены различными буквами; обозначим его $(ABC)_1$.

Выберем теперь последовательность $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \to +0$ и осуществим указанную конструкцию для каждого ε_n. Если перейти к подпоследовательности, то можно без ограничения общности предполагать, что последовательность вершин соответствующих треугольников $(ABC)_n$ сходится к некоторой точке a (почему?). Так как точка a при отображении f не остается на месте, то она удалится от какой-либо из сторон основного треугольника. Но тогда и все точки треугольника $(ABC)_n$ при достаточно больших n в результате отображения f удалятся от этой стороны, что противоречит построению. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

1. Докажите теорему Брауэра для n-мерного шара; при этом надо усилить формулировку леммы Шпернера (доказать наличие нечетного числа искомых тетраэдров разбиения) и применить метод индукции.

2. Проведите доказательство теоремы Брауэра при любом n иным способом: для достаточно гладкого отображения — на основе теории вращения (§ 58), а для любого непрерывного отображения — с помощью его аппроксимации гладкими отображениями.

3. Докажите с помощью теоремы Брауэра, что никакое замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства, обладающее внутренними точками, нельзя непрерывно отобразить на свою границу так, чтобы при этом каждая точка границы перешла в себя.

§ 60. Приложения теоремы Брауэра

Первое приложение обобщает теорему § 58 о точке покоя внутри замкнутой траектории.

Теорема 1. *Пусть в n-мерном пространстве задана автономная система* (7.2) *и дано множество K, гомеоморфное замкнутому шару, и притом такое, что траектории, начинающиеся на K, при увеличении t никогда*

К не покидают. Тогда в К имеется по крайней мере одна точка покоя.

Доказательство. Зададим произвольно значение $\tau_1>0$ и поставим каждой точке $x^0\in K$ в соответствие точку $x(\tau_1;\ x^0)$. По условию этим определяется отображение K в себя, которое будет непрерывным, и потому по теореме Брауэра найдется точка $x^1\in K$, для которой $x(\tau_1;\ x^1)=x^1$ (т. е. траектория, начавшаяся в x^1, через время τ_1 вновь попадет в x^1).

Выберем теперь последовательность значений $\tau_1, \tau_2, \ldots$ $\ldots, \tau_m, \ldots \to +0$; тогда для каждого τ_m существует точка $x^m\in K$, для которой $x(\tau_m;\ x^m)=x^m$. После перехода к подпоследовательности можно считать без ограничения общности, что последовательность $\{x^m\}$ сходится к некоторой точке $\bar{x}\in K$; проверим, что $\bar{x}$ — точка покоя. В самом деле, зафиксируем любое t; тогда

$$x\left(\left[\frac{t}{\tau_m}\right]\tau_m;\ x^m\right)=x^m.$$

Если переходить в этом равенстве к пределу при $m\to\infty$, то в левой части получим $x(t;\ \bar{x})$ (почему?), а в правой $\bar{x}$, т. е. $x(t;\ \bar{x})=\bar{x}$ при всех t. Теорема 1 доказана.

Второе приложение примыкает к теореме Бендиксона (§ 55) о циклах. Чтобы продемонстрировать методику применения теоремы Брауэра, мы приведем формулировку в довольно специальном виде, в частности только в трехмерном пространстве, предоставив обобщения читателю.

Теорема 2. *Пусть в трехмерном пространстве задана автономная система (7.2) и, кроме того, задан тор T, обладающий тем свойством, что траектории, начинающиеся в нем, при увеличении t не могут покинуть T. Пусть далее все точки, движущиеся в торе в силу системы (7.2), обладают положительной скоростью вращения вокруг оси тора. Тогда в T имеется по крайней мере один цикл.*

Отметим, что если выбрать ось x_3 по оси тора, то требование на скорость вращения можно записать так:

$$x_1\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dx_1}{dt}\equiv x_1f_2(x_1,x_2,x_3)-x_2f_1(x_1,x_2,x_3)>0.$$

Доказательство. Проведем поперечное круговое сечение К тора (рис. 37) и проследим за траекторией

l_{x^0}, начинающейся в некоторой точке $x^0 \in K$. По условию эта траектория при возрастании t остается в торе. Но угловая скорость вращения точек вокруг оси тора, будучи непрерывной, имеет положительный минимум, и потому траектория l_{x^0} через некоторый (конечный) промежуток времени вновь пересечет K в какой-то точке x^1, зависящей от x^0, $x^1 = \varphi(x^0)$. Таким образом, определено отображение K в себя, играющее роль функции последования (§ 54). Но из непрерывной зависимости решения от начальных условий вытекает, что отображение φ непрерывное; поэтому в силу теоремы Брауэра существует точка $\bar{x} \in K$, для которой $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$. Таким образом, через $\bar{x}$ проходит цикл. Теорема 2 доказана.

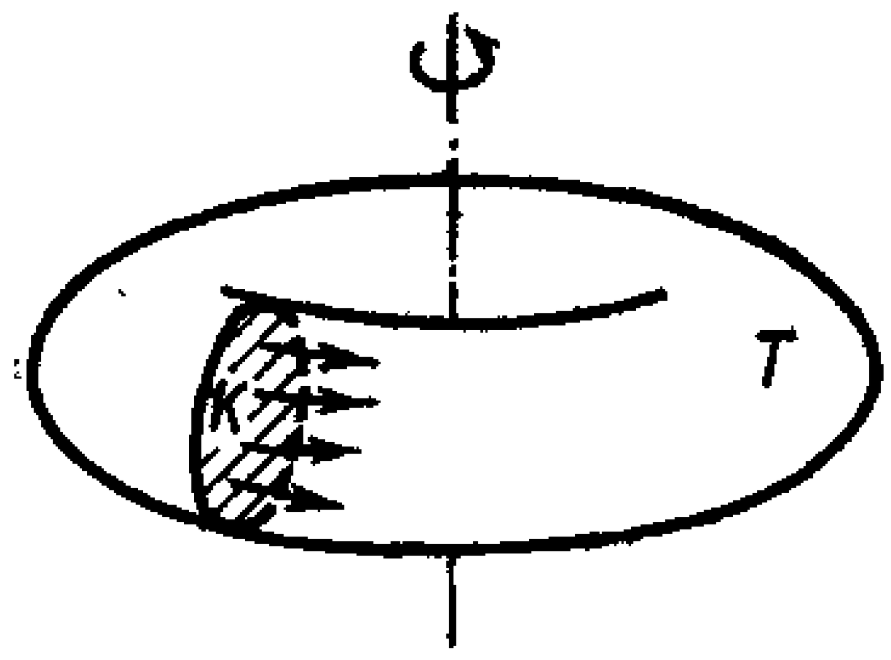

Рис. 37

ЗАДАЧИ

1. Пусть в n-мерном пространстве задана автономная система (7.2) и дано множество K, гомеоморфное шару, с границей Γ. Пусть для каждой точки $a \in \Gamma$ определен прямой круговой n-мерный конус P_a с вершиной в a, целиком содержащийся в K, причем конусы P_a конгруэнтны друг другу и непрерывно зависят от a. Пусть в каждой точке $a \in \Gamma$ вектор $-f(a)$, приложенный к точке a, не направлен в P_a. Тогда в K имеется по крайней мере одна точка покоя. Докажите это и выведите отсюда, в частности, что если множество K ограничено гладкой поверхностью, на которой поле скоростей нигде не направлено по внешней нормали, то в K имеется по крайней мере одна точка покоя.

2. Пусть дана система уравнений в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t, x), \qquad (*)$$

где матричная функция $A(t)$ непрерывна при всех t, а вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна и ограничена во всем пространстве t, x и удовлетворяет условию Липшица по x, причем $A(t+T) \equiv A(t)$, $f(t+T, x) \equiv f(t, x)$ для некоторого $T > 0$. Докажите с помощью теоремы Брауэра и результатов задач 1 § 39 и 11 § 49, что если нулевое решение системы $\frac{dx}{dt} = A(t)\,x$ асимптотически устойчивое, то система $(*)$ имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.

Дополнение

ГЛАВА VIII

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 1-ГО ПОРЯДКА ОТ ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

Основным фактом теории этих уравнений является то, что нахождение всех их решений сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. В следующих параграфах описано это сведение.

§ 61. Полулинейные уравнения

Мы будем рассматривать в этом параграфе уравнения несколько более общего вида, чем линейные, а именно уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x, u) = 0, \qquad (8.1)$$

где под x понимается точка с координатами $x_1, \ldots, x_n$. При этом мы допускаем, что искомая функция u входит в $b(x, u)$, вообще говоря, нелинейно. Пусть коэффициенты $a_k(x)$ имеют в рассматриваемой области G пространства x непрерывные частные производные 1-го порядка по всем их аргументам, и пусть в этой области

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 > 0.$$

Относительно $b(x, u)$ мы будем предполагать, что эта функция определена при $|u| < M$, когда точка x находится в области G, и имеет по всем своим аргументам непрерывные первые производные. Сделанные относительно $b(x, u)$ предположения выполняются, в частности, в том случае, когда $b(x, u)$ есть линейная функция от u (в этом случае уравнение (8.1) называется *линейным*) с коэффициентами, которые имеют непрерывные первые производные по всем x_k.

Напишем автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k(x), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{8.2}$$

В силу сделанных относительно a_k предположений правые части этих уравнений имеют непрерывные производные по всем x_i. Поэтому через каждую точку области G проходит одна и только одна траектория этой системы. Эти линии называются *характеристиками* уравнения (8.1).

Теорема единственности. *Если функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет в области G уравнению* (8.1) *и имеет непрерывные первые производные, то все значения этой функции на дуге любой характеристики H, где $|u|<M$, вполне определяются ее значением в одной какой-нибудь точке $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ этой дуги.*

Доказательство. Принимая во внимание уравнения (8.1) и (8.2), получим

$$\sum_k a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + b = \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + b =$$

$$= \frac{du}{dt} + b = 0. \tag{8.3}$$

Замена $\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}$ на $\frac{du}{dt}$ возможна в силу предполагаемой непрерывности первых производных от u (Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1969, т. 1, с. 387). Пусть характеристика H проходит через некоторую точку x^0 области G, и пусть $|u(x^0)|<M$. Вдоль этой характеристики

$$x_k=\varphi_k(t, x^0), \; k=1, \ldots, n, \tag{8.4}$$

где φ_k вместе с их первыми производными суть непрерывные функции от t и x^0. Подставляя эти выражения x_k в b, мы получим, что вдоль H функция $u(x(t))$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dt} = \psi(t, u, x^0), \tag{8.5}$$

где ψ имеет непрерывные первые производные по всем ее аргументам. Поэтому значение u во всякой точке дуги H, на которой $|u| < M$, вполне определяется значением в какой-нибудь одной точке этой дуги, в частности в точке x^0.

Теорема существования. *Допустим, что S есть какая-нибудь $(n-1)$-мерная поверхность*[1], *содержащаяся в области G и имеющая непрерывно вращающуюся касательную плоскость. Допустим, кроме того, что S не касается ни одной из характеристик уравнения* (8.1).

Пусть на S задана произвольная функция f, обладающая следующими свойствами:

1) *ее значения по абсолютной величине меньше M;*

2) *у каждой точки поверхности S существует такая окрестность, где f можно представить как функцию каких-нибудь $(n-1)$-й из координат $x_1, \ldots, x_n$, имеющую непрерывные первые производные по этим $(n-1)$-й координатам.*

Допустим, наконец, что имеется окрестность R_0 поверхности S, обладающая следующими свойствами:

1) *R_0 содержится в G;*

2) *характеристика, проходящая через любую точку поверхности S, при своем продолжении в обе стороны внутри R_0 не встречает S; при этом через каждую точку R_0 проходит одна из таких дуг характеристик;*

3) *для любой точки x^0 поверхности S решение уравнения* (8.5) *при начальном условии $u(0) = f(x^0)$*[2] *возможно продолжить вдоль всей дуги характеристики, содержащейся внутри R_0, причем это решение остается по абсолютной величине меньше M.*

Тогда в R_0 существует функция $u(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) *имеет непрерывные первые производные по всем x_k,*

---

[1] Ее можно считать либо замкнутой, либо поверхностью с краем; в последнем случае ее край к ней не причисляется.

[2] Мы считаем $t=0$ на поверхности S.

ляется значением z в точке A_0 пересечения H с S, то, взяв все такие характеристики, получим искомое решение. Проведем это построение подробнее. Определим на каждой пересекающей S характеристике H функцию z так, чтобы она удовлетворяла на ней уравнению (8.10) и в точке пересечения этой характеристики с линией S принимала значение заданной функции f. Функцию z, вообще говоря, нельзя определить таким образом на всей характеристике H, так как мы можем при продолжении z по H выйти из области тех значений z, при которых определена функция $c(x, y, z)$, или пересечь S вторично. Однако в силу условия теоремы мы можем определить u на всей окрестности R_0 линии S. После этого остается только показать, что построенная нами функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x, y; тогда на R_0 справедливо соотношение

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt},$$

и потому функция z удовлетворяет не только уравнению (8.10), или, что все равно, уравнению (8.8), но и уравнению (8.6).

Прежде чем доказывать существование и непрерывность частных производных от z по x, y в какой-нибудь точке $A(x, y)$ области R_0, мы введем в окрестности этой точки новые криволинейные координаты следующим образом.

Пусть характеристика H, проведенная через A, пересекает S в точке $A_0(x^0, y^0)$. Допустим для определенности, что касательная в точке A_0 к линии S не параллельна оси Oy (все наши последующие рассуждения сохраняют силу и в том случае, если вместо оси Oy взять ось Ox). Тогда кусок линии S вблизи точки A_0 можно представить уравнением

$$y^0=F(x^0),$$

где функция F имеет непрерывную производную. С другой стороны, так как функции $\varphi(t, x^0, y^0)$ и $\psi(t, x^0, y^0)$ имеют непрерывные производные по t и по x^0, y^0 (§ 29), то функции

$$\varphi(t, x^0, F(x^0)) \equiv \widetilde{\varphi}(t, x^0),\ \psi(t, x^0, F(x^0)) \equiv \widetilde{\psi}(t, x^0)$$

имеют непрерывные производные по t и x^0. Выберем t и x^0 за новые координаты. Докажем, что якобиан системы функций $x=\widetilde{\varphi}(t, x^0)$, $y=\widetilde{\psi}(t, x^0)$ всегда отличен от нуля. Для этого заметим, что эти функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (8.7). Подставим сюда вместо x функцию $\widetilde{\varphi}$, а вместо y — функцию $\widetilde{\psi}$. Тогда получим следующие тождества по t, x^0:

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{\varphi}(t, x^0)}{dt} &\equiv a(\widetilde{\varphi}(t, x^0),\ \widetilde{\psi}(t, x^0)),\\ \frac{d\widetilde{\psi}(t, x^0)}{dt} &\equiv b(\widetilde{\varphi}(t, x^0),\ \widetilde{\psi}(t, x^0)). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Так как функции $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, a и b имеют непрерывные частные производные по всем их аргументам, то правые части этих тождеств имеют непрерывные производные по t и x^0. Значит, и левые части имеют непрерывные производные по этим аргументам. Поэтому, дифференцируя обе части каждого из равенств (8.11) по t, x^0 и полагая

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t} = D_0\widetilde{\varphi},\quad \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t} = D_0\widetilde{\psi},\quad \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x^0} = D_1\widetilde{\varphi},\quad \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x^0} = D_1\widetilde{\psi},$$

получим [1]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dD_p\widetilde{\varphi}}{dt} &\equiv \frac{\partial a}{\partial\widetilde{\varphi}} D_p\widetilde{\varphi} + \frac{\partial a}{\partial\widetilde{\psi}} D_p\widetilde{\psi},\\ \frac{dD_p\widetilde{\psi}}{dt} &\equiv \frac{\partial b}{\partial\widetilde{\varphi}} D_p\widetilde{\varphi} + \frac{\partial b}{\partial\widetilde{\psi}} D_p\widetilde{\psi} \end{aligned}\right\} \quad (p = 0, 1).$$

[1] Мы опираемся на следующую теорему, доказываемую в курсах анализа. Пусть в области G на плоскости (x, y) задана функция f, имеющая непрерывные f'_x, f'_y и f''_{xy}. Тогда f''_{yx} всюду в G существует и равна f''_{xy} (Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. Т. 1, с. 407).

Здесь коэффициенты $\frac{\partial a}{\partial \tilde{\varphi}}, \ldots, \frac{\partial b}{\partial \tilde{\psi}}$ не зависят от p. Таким образом, мы находим, что функции $D_p\tilde{\varphi}$ и $D_p\tilde{\psi}$ удовлетворяют при $p=0$, 1 одной и той же системе линейных однородных уравнений. Поэтому, чтобы детерминант Вронского

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^0} & \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x^0} & \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля на всей дуге H, необходимо и достаточно, чтобы он был отличен от нуля в точке A_0, где эта характеристика пересекается с линией S. Но в этой точке

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \\ \frac{dF}{dx^0} & \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - \frac{dF}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}$$

Последнее выражение равно косинусу угла между нормалью в точке A_0 к линии S и касательной к характеристике H, проведенной в той же точке A_0, умноженному на отличный от нуля сомножитель. (Почему?) Этот косинус по условию отличен от нуля. Значит, якобиан W всюду на H отличен от нуля.

Следовательно, по теореме о неявной функции мы найдем, что в окрестности H система уравнений

$$x=\tilde{\varphi}(t, x^0), \quad y=\tilde{\psi}(t, x^0)$$

может быть однозначно разрешена относительно t, x^0. При этом, так как функции $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ имеют непрерывные производные по их аргументам, то величины t, x^0 будут также иметь непрерывные частные производные по x, y. Отсюда, чтобы доказать, что построенная нами прежде на области R_0 функция z имеет непрерывные частные производные по x, y, достаточно доказать, что если ее рассматривать в окрестности H как функцию от t, x^0, то она имеет непрерывные частные производные по t, x^0. А для этого заметим следующее.

Подставляя в правую часть уравнения (8.10) вместо y^0 функцию $F(x^0)$, мы найдем, что функция z удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{\chi}(t, z, x^0),$$

где функция $\tilde{\chi}$ имеет непрерывные частные производные по всем ее аргументам. Кроме того, начальные значения функции z при $t=0$ (на линии S), по предположению, имеют непрерывную производную по x^0. Поэтому, применяя известную теорему (§ 21), мы найдем, что в окрестности H построенная нами функция z действительно имеет непрерывные частные производные по t, x^0.

Замечание 1. Пусть поверхность S и функция f на ней удовлетворяют условиям теоремы существования. Тогда легко проверить, что окрестность R_0, удовлетворяющая условиям этой теоремы, существует. Для этого надо принять R_0 составленной из достаточно малых дуг характеристик, проходящих через точки S. Таким образом, можно гарантировать существование решения задачи Коши в достаточно «тонкой» окрестности S.

Замечание 2. Если не предполагать, что функции a_k и b, входящие в левую часть уравнения (8.1), имеют непрерывные производные, то это уравнение может не иметь ни одного решения с непрерывными частными производными. Таким примером (Н. М. Гюнтер) может служить уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = b(x-y), \tag{8.12}$$

где $b(w)$ — непрерывная функция Вейерштрасса, нигде не имеющая производной по w. Чтобы доказать это, введем вместо x и y новые независимые переменные v и w, положив $x+y=v$ и $x-y=w$, $z(x, y)=u(v, w)$.

Допустим, что в некоторой области на плоскости (x, y) существует решение $z(x, y)$ [1] уравнения (8.12), имею-

[1] *Решением уравнения* (8.12) мы называем функцию $z(x, y)$, которая имеет всюду в рассматриваемой области частные производные по x и y, удовлетворяющие этому уравнению.

щее непрерывные производные по x и y. Тогда, выразив по обычным формулам производные от z по x и y через производные от u по v и w, получим

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1}{2} b(w).$$

Все решения этого уравнения даются формулой

$$u(v, w) = \frac{1}{2} b(w) v + c(w),$$

где $c(w)$ — любая функция от w. Значит,

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(x + y) b(x - y) + c(x - y). \qquad (8.13)$$

Но легко показать, что нет такой области на плоскости (x, y), где даваемая этой формулой функция z имеет производные по x и y. Для этого заметим следующее: если бы эти производные существовали в точках (x, y) и $(x+\varepsilon, y+\varepsilon)$, то существовали бы также производные в точке (x, y) у функции

$$z(x+\varepsilon, y+\varepsilon) - z(x, y) = \varepsilon b(x - y),$$

что невозможно. Значит, функция $z(x, y)$ не может удовлетворять уравнению (8.12), и наше первоначальное предположение было неверно.

Можно показать[1], что всякое *непрерывное* решение уравнения (8.12) имеет вид (8.13), если даже не требовать, чтобы это решение имело непрерывные производные. Тогда мы придем к выводу, что уравнение (8.12) ни в какой области не имеет непрерывного решения.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если начальные данные задаются на характеристике, то уравнение (8.6) или не имеет ни одного решения, или имеет бесконечно много решений. Когда имеет место первый случай и когда второй?

---

[1] Baire. Sur les fonctions de variables réeles. — Annali di mathematica (3), t. 3 (1899), 101—121.

2. Покажите, что если $n=2$ и область G односвязна, то решение линейного уравнения можно продолжить на любую область, состоящую из точек характеристик, проведенных через S. Если область не односвязна, то это не всегда возможно (постройте пример). Заметим, что при $n>2$ это не всегда возможно и для односвязной области.

3. Теория существенно упрощается, если рассматривать обобщенные решения уравнения (8.1), под которыми здесь следует понимать непрерывные функции, удовлетворяющие вдоль каждой характеристики уравнению (8.3). Рассмотрите обобщенные решения уравнения $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ в некоторой области G плоскости x, y, если условие Коши задано на некоторой кусочно-гладкой линии S, лежащей в G. Найдите условия существования (обобщенного) решения задачи Коши, условия существования единственного решения. Найдите условие того, что нулевым данным Коши отвечает лишь тождественно нулевое решение. (В чем отличие этого требования от предыдущего?) Всегда ли из единственности решения задачи Коши в большей области R следует единственность в меньшей области, содержащейся в первой? Попробуйте перенести какие-либо из этих результатов на уравнение

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad (a^2+b^2>0) \qquad (*)$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями a и b. Приведите пример такого уравнения в некоторой области R, все решения которого обязательно постоянны.

4. Рассмотрите примеры, в которых через некоторые точки проходит более одной характеристики. Пусть уравнение $(*)$ рассматривается в полуплоскости $x\geqslant 0$, а условие Коши задается на оси $x=0$ с непрерывной начальной функцией, причем коэффициенты a и b считаются непрерывными, $a\neq 0$ и для простоты $\sup|b/a|<\infty$. Докажите, что (обобщенное) решение, если существует, то обязательно единственно. Если характеристики продолжаются в сторону убывания x однозначно, то решение существует, в противном случае может и не существовать. Каково необходимое и достаточное условие существования решения задачи Коши? Какие новые моменты появятся, если не требовать ограниченности b/a?

§ 62. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Из предыдущего изложения следует, что автономная система, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений (8.2) и уравнения

$$\frac{du}{dt}+b=0,$$

определяет в пространстве (x, u) семейство траекторий, из которых состоят *интегральные поверхности* $u=u(x)$, т. е. графики решений уравнения (8.1) (t рассматривается как параметр). Запишем эти обыкновенные дифференциальные уравнения в симметрической форме так:

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{du}{-b}. \qquad (8.14)$$

Иногда бывает легко найти не равные ни в какой области тождественно постоянному функции $\varphi(x, u)$, которые сохраняют постоянные значения на всякой интегральной линии системы (8.14). Такие функции называются *первыми интегралами* этой системы. Приведенное определение, очевидно, равносильно такому: при любом постоянном C множество $\varphi=C$ не содержит внутренних точек и целиком состоит из интегральных линий системы (8.14). (Последнее свойство выражают словами: множество $\varphi=C$ есть *интегральное многообразие* системы (8.14).)

Рассмотрим вновь уравнение (8.6) с двумя независимыми переменными. Для этого уравнения интегральные линии, из которых состоят интегральные поверхности, определяются системой

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{-c}. \qquad (8.15)$$

Пусть каким-то образом мы нашли два[1] таких первых интеграла системы (8.15)

$$\varphi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z),$$

что в каждой точке рассматриваемой области G_z пространства (x, y, z) по крайней мере один из миноров 2-го порядка матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{matrix}\right\|$$

[1] В случае системы (8.14) для получения результатов, аналогичных приведенным ниже, требуется знание n первых интегралов; рассмотрение этого случая мы предоставляем читателю.

отличен от нуля. Тогда система уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \varphi(x^0, y^0, z^0), \\ \psi(x, y, z) &= \psi(x^0, y^0, z^0) \end{aligned} \tag{8.16}$$

определяет в области G_z некоторую линию L, так как в окрестности каждой точки, в которой оба уравнения удовлетворяются, эта система по теореме о неявной функции определяет две какие-то координаты как функции третьей координаты. Эта линия, вообще говоря, может состоять из нескольких кусков. *Будем предполагать, что в рассматриваемой области G_z каждая из линий* (8.16) *состоит только из одного куска.* По определению первого интеграла каждая из функций $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ принимает одно и то же значение $\varphi(x^0, y^0, z^0)$ и соответственно $\psi(x^0, y^0, z^0)$ вдоль проходящей через точку (x^0, y^0, z^0) интегральной линии системы (8.15). Следовательно, эта интегральная линия целиком совпадает в области G_z с линией (8.16). Отсюда следует, что система уравнений

$$\varphi(x, y, z) = C_1, \quad \psi(x, y, z) = C_2 \tag{8.17}$$

представляет собой интеграл системы (8.15) в области G_z, так как, выбирая за постоянные C_1, C_2 значения $\varphi(x^0, y^0, z^0)$, $\psi(x^0, y^0, z^0)$, получим интегральную линию системы (8.15), проходящую через любую точку (x^0, y^0, z^0) области G_z, т. е. получим любую интегральную линию этой системы.

Пусть теперь требуется найти интегральную поверхность уравнения (8.6), проходящую через линию

$$x = \alpha(v), \quad y = \beta(v), \quad z = \gamma(v). \tag{8.18}$$

При этом предполагается, что

1) функции α, β, γ имеют непрерывную производную по v,

2) детерминант

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\alpha}{dv} & a(\alpha, \beta) \\[2ex] \dfrac{d\beta}{dv} & b(\alpha, \beta) \end{vmatrix}$$

всегда отличен от нуля. Геометрически это последнее условие можно интерпретировать как требование того, чтобы лежащая в плоскости (x, y) линия

$$x=\alpha(v), \quad y=\beta(v)$$

нигде не касалась характеристик уравнения (8.6).

Тогда, согласно основным теоремам § 61, в некоторой окрестности линии (8.18) существует одна и только одна интегральная поверхность уравнения (8.6), проходящая через линию (8.18). Так как по предыдущему эта интегральная поверхность состоит из интегральных линий системы (8.15), проходящих через точки линии (8.18), то уравнение искомой интегральной поверхности можно получить, подставляя в правые части уравнения (8.16) вместо x^0, y^0, z^0 соответственно $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$, что дает

$$\varphi(x, y, z)=\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=\Phi(v),$$

$$\psi(x, y, z)=\psi(\alpha, \beta, \gamma)=\Psi(v),$$

и исключая из этих двух равенств параметр v.

Замечание. Всякий первый интеграл $\chi(x, y, z)$ системы (8.15) на области G_z есть функция от $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$. Действительно, по определению первого интеграла $\chi(x, y, z)$ должно сохранять постоянные значения на каждой интегральной линии этой системы. А каждая такая линия, согласно предыдущему, вполне определяется значениями на ней функций $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$.

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}+5=0, \tag{8.6'}$$

проходящую через линию

$$x=a_1v, \quad y=a_2v, \quad z=a_3v;$$

при этом постоянные a_1, a_2, a_3 выбраны так, что детерминант

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2 \\ a_2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8.19}$$

Система уравнений (8.15) теперь принимает вид

$$\frac{dx}{2}=\frac{dy}{3}=\frac{dz}{-5}. \tag{8.15'}$$

Интегрируя уравнения

$$\frac{dx}{2}=\frac{dy}{3}$$

и

$$\frac{dx}{2}=\frac{dz}{-5},$$

мы получим следующие первые интегралы системы (8.15′):

$$\varphi\equiv 3x-2y \quad \text{и} \quad \psi=5x+2z.$$

Так как детерминант

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то уравнения

$$3x-2y=C_1 \quad \text{и} \quad 5x+2z=C_2 \tag{8.17'}$$

дают общий интеграл системы (8.15′) во всем пространстве (x, y, z). При любых значениях постоянных C_1 и C_2 система (8.17′) определяет некоторую линию (прямую), состоящую только из одного куска. Поэтому уравненне искомой интегральной поверхности уравнения (8.6′) можно написать так:

$$3x-2y=3a_1v-2a_2v,$$

$$5x+2z=5a_1v+2a_2v.$$

Из этих уравнений можно исключить v. Для этого достаточно решить первое из них относительно v, что возможно в силу условия (8.19), и найденное значение v подставить во второе уравнение.

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что знание k функционально независимых первых интегралов системы (4.4) позволяет, вообще говоря, понизить число искомых функций в этой системе на k.

2. В задачах с физическим содержанием первые интегралы часто выражают те или иные законы сохранения. Получите первый интеграл для системы

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad m\frac{dv}{dt} + bx = 0,$$

равносильной уравнению

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0$$

свободных колебаний материальной точки без трения, исходя из закона сохранения полной энергии точки.

§ 63. Квазилинейные уравнения

Квазилинейными мы называем уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, u) = 0, \; x = (x_1, \ldots, x_n). \qquad (8.20)$$

Это уравнение линейно относительно производных от u, но не относительно самого u. Мы будем предполагать, что $a_i(x, u)$ и $b(x, u)$ имеют непрерывные частные производные по всем аргументам в некоторой области пространства (x, u) и что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x, u) > 0.$$

Предположим, что нам известно какое-нибудь решение $u(x)$ этого уравнения, имеющее непрерывные первые частные производные. Составим вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x, u(x)), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (8.21)$$

где t — некоторый параметр. Подставим это решение $u(x)$ в уравнение (8.20). Тогда получим тождество

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, u) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + b(x, u) = \frac{du}{dt} + b(x, u) = 0. \tag{8.22}$$

Задача Коши для уравнения (8.20) формулируется так же, как и для уравнения (8.1): *требуется найти такое решение уравнения* (8.20), *которое на некоторой* $(n-1)$*-мерной поверхности* S *пространства* x *принимает заданные значения.* Более общая постановка: *через заданную в пространстве* (x, u) $(n-1)$*-мерную поверхность* $\bar{S}$ *требуется провести* n*-мерную интегральную поверхность* T *уравнения* (8.20) [1].

Докажем единственность этого решения в достаточной близости $\bar{S}$ в предположении, что решение непрерывно дифференцируемо и поверхность $\bar{S}$ нигде не имеет касательных прямых, проекции которых на плоскость $u=0$ имеют направляющие косинусы, пропорциональные значениям правых частей уравнений (8.21) в точке касания. Для этого мы укажем процесс, который единственным способом определяет решение задачи Коши в предположении, что такое решение существует. Этот процесс позволяет практически решать задачу Коши для квазилинейных уравнений. Мы уже доказали, что для всякого непрерывно дифференцируемого решения уравнения (8.20) удовлетворяются также следующие уравнения:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x, u), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\frac{du}{dt} = -b(x, u). \tag{8.23}$$

[1] При этом T уже может представлять неоднозначную функцию x, т. е. каждому рассматриваемому набору значений $x_1, \ldots, x_n$ может отвечать некоторое множество значений u. Однако в достаточной близости от любой своей точки T должна представлять однозначную функцию $u(x)$, удовлетворяющую (8.20). Например, T может иметь вид геликоида с осью Ou, рассматриваемого вне некоторой окрестности этой оси.

Начальные значения (при $t=0$) x_i и u в каждой точке (x^0, u^0) поверхности $\bar{S}$ нам известны. По этим начальным данным система (8.23) единственным образом определяет u и все x_i как функции от t.

Соответствующая линия в пространстве x, u

$$x_i = x_i(t, x^0, u^0), \quad i=1, \ldots, n,$$

$$u = u(t, x^0, u^0)$$

называется *характеристикой* уравнения (8.20)[1]. Таким образом, для любого достаточно малого куска $\bar{S}$ мы однозначно определили u в той окрестности проекции этого куска на плоскость x, которую покрывают проекции пересекающих $\bar{S}$ характеристик. «Ширина» этой окрестности нигде не сузится до нуля. В самом деле:

1) *$\bar{S}$ не имеет касательных прямых, параллельных оси Ou.* Действительно это сразу следует из конечности $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=1, \ldots, n)$ на поверхности T, существующих по предположению.

2) *$\bar{S}$ не имеет касательных прямых, проекции которых на плоскость $u=0$ имеют направляющие косинусы, пропорциональные правым частям уравнений* (8.21). Действительно, это было оговорено особо.

Итак, любые две интегральные поверхности, проходящие через $\bar{S}$, совпадают в некоторой окрестности каждой точки $\bar{S}$; объединяя эти окрестности, получаем, что указанные поверхности совпадают в некоторой окрестности $\bar{S}$.

При доказательстве существования решения задачи Коши для уравнения (8.20) мы будем, как и в § 61 и 62, рассматривать случай двух независимых переменных x, y и обозначать искомую функцию $z=z(x, y)$. Тогда

---

[1] Так как полулинейные уравнения являются частным случаем квазилинейных, то для полулинейных уравнений имеются два понятия характеристик: в смысле § 61 и в смысле § 63. Легко проверить, что характеристики в первом смысле представляют собой проекции характеристик во втором смысле на пространство x.

дифференциальное уравнение имеет вид

$$a(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x, y, z)=0 \quad (a^2+b^2>0); \tag{8.24}$$

система уравнений характеристик принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt}=b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt}=-c(x, y, z); \tag{8.25}$$

сами характеристики имеют уравнения

$$\begin{gathered} x=\varphi(t, x^0, y^0, z^0), \quad y=\psi(t, x^0, y^0, z^0), \\ z=\chi(t, x^0, y^0, z^0), \end{gathered} \tag{8.26}$$

а линия $\bar{S}$ — уравнения

$$\begin{gathered} x^0=\alpha(v), \; y^0=\beta(v), \; z^0=\gamma(v) \\ (\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2>0), \end{gathered} \tag{8.27}$$

где v — параметр, изменяющийся в некотором замкнутом интервале. Мы будем предполагать все заданные функции непрерывно дифференцируемыми, а линию $\bar{S}$ лежащей в области определения коэффициентов уравнения (8.20). Кроме того, если ставится задача не о проведении интегральной поверхности, а о нахождении однозначного решения задачи Коши, то надо требовать, чтобы проекция S линии $\bar{S}$ на плоскость $z=0$ не имела самопересечений.

Тогда условия 1) и 2), напечатанные выше курсивом, означают:

$$\alpha'^2+\beta'^2>0, \; \alpha'b-\beta'a\neq 0 \; (\text{вдоль } \bar{S}). \tag{8.28}$$

В силу сказанного выше искомая интегральная поверхность T состоит из характеристик, проведенных через все точки линии $\bar{S}$ (рис. 39); значит, уравнения характеристик (8.26) и линии $\bar{S}$ (8.27) надо рассмотреть совместно. Проверим, что уравнения (8.26) и (8.27) определяют в пространстве в некоторой окрестности линии $\bar{S}$ поверхность T, которая вблизи каждой своей точки имеет уравнение $z=z(x, y)$ с непрерывно дифференцируемой правой частью. Тогда то, что уравнение (8.24) удовлетворяется, вытекает сразу из равенств (8.25), а выполнение начального условия очевидно.

В силу теоремы о неявной функции достаточно проверить, что в точках линии $\bar{S}$

$$\frac{D(t, y)}{D(s, v)} \neq 0,$$

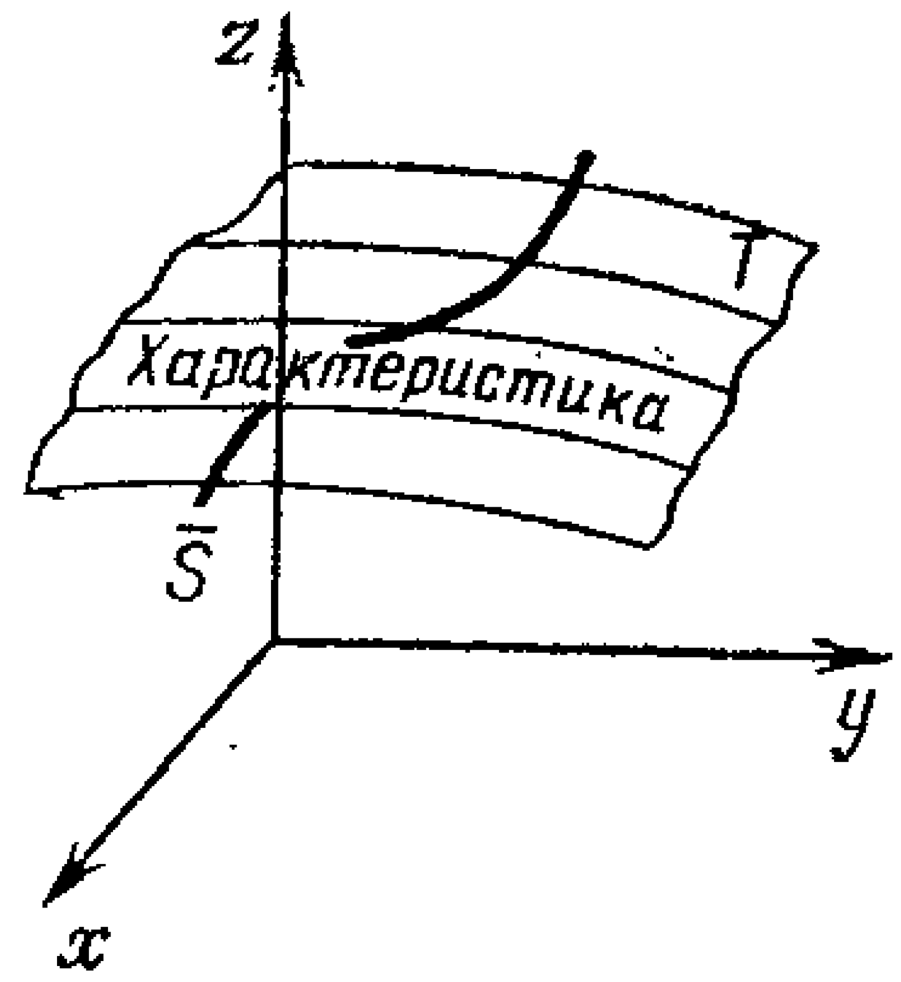

Рис. 39

так как тогда в окрестности каждой точки $\bar{S}$ можно два первых уравнения (8.26) разрешить относительно t и v и подставить результат в третье. (Непрерывная дифференцируемость функций φ, ψ и χ вытекает из теоремы о зависимости решения системы (8.25) от начальных данных.) Однако на $\bar{S}$, т. е. при $t=0$, имеем $x=\alpha(v)$, $y=\beta(v)$, и потому в силу равенств (8.25)

$$\frac{D(x, y)}{D(t, v)} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix} \right|_{t=0} = \left| \begin{matrix} a & b \\ \alpha'(v) & \beta'(v) \end{matrix} \right| = \\ = a\beta'(v) - b\alpha'(v) \neq 0.$$

Существование решения задачи Коши доказано.

Подчеркнем, что существование решения гарантируется только в некоторой, достаточно узкой, заранее не фиксированной окрестности линии S. То, что это объясняется существом дела, будет ясно из следующего параграфа.

§ 64. Обобщенные решения линейных и квазилинейных уравнений

В § 61 для линейного уравнения с частными производными первого порядка было построено решение задачи Коши и доказана его единственность. При этом предполагалось, что поверхность S, заданная на ней функция f и все коэффициенты уравнения являются достаточно гладкими. Примеры показывают, что если ослабить эти предположения, то решения задачи Коши может не существовать. Один из таких примеров приведен в конце § 61.

В связи с различными физическими задачами представляет интерес так расширить понятие решения задачи Коши, чтобы оно существовало при меньших требованиях гладкости на f и коэффициенты уравнения и при этом имела место теорема единственности.

Ниже мы изложим один из возможных подходов к решению этого вопроса[1]. Будем для простоты рассматривать случай двух независимых переменных t и x и линейные уравнения вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u = c(t, x), \qquad (8.29)$$

где a, b, c являются непрерывно дифференцируемыми функциями t и x. Будем рассматривать задачу Коши с условием на отрезке прямой $t=0$:

$$u(0, x) = f(x), \qquad (8.30)$$

которое будем называть начальным условием. Очевидно, что прямая $t=0$ не касается характеристик уравнения (8.29). Если в некоторой области G функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (8.29), то, очевидно, при любой непрерывно дифференцируемой функции F, равной нулю в окрестности границы G,

$$\iint\limits_G [L(u) - c]\, F\, dt\, dx = 0. \qquad (8.31)$$

Обратно, если для некоторой непрерывно дифференцируемой в G функции $u(t, x)$ равенство (8.31) выполняется при любой указанной выше функции F, то $L(u)=c$, т. е. $u(t, x)$ является решением уравнения (8.29) в G. Действительно, если $L(u) \neq c$ в точке (t^0, x^0),

[1] С основными фактами теории обобщенных решений линейных и квазилинейных уравнений 1-го порядка можно познакомиться в книге: Р. Курант. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964, приложение 2 к гл. II, а также гл. V, § 9; в статье: О. А. Олейник. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. — УМН, 12, № 3 (1957), с. 3—73; см. также: И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961, с. 141—144.

ции F, равной нулю в окрестности границы G, выполняется равенство (8.33).

Легко проверить, что обобщенное решение $u(t,x)$ уравнения (8.29) может иметь разрывы только вдоль характеристик. Действительно, пусть $x=\varphi(t)$ — линия разрыва $u(t,x)$ и пусть $F(t,x)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю вне достаточно малой окрестности Ω кривой $x=\varphi(t)$. Мы можем предположить, что в каждой из областей Ω_1 и Ω_2, на которые кривая $x=\varphi(t)$ разбивает Ω, функция $u(t,x)$ непрерывно дифференцируема, а поэтому в Ω_1 и Ω_2 она удовлетворяет уравнению (8.29). Пользуясь равенством (8.33), получим

$$\begin{aligned} 0 &= \iint\limits_{\Omega} [L^*(F)u - cF]\,dt\,dx = \iint\limits_{\Omega_1} [L^*(F)u - cF]\,dt\,dx + \\ &+ \iint\limits_{\Omega_2} [L^*(F)u - cF]\,dt\,dx = \iint\limits_{\Omega_1} [L(u) - c]\,F\,dt\,dx + \\ &+ \iint\limits_{\Omega_2} [L(u) - c]\,F\,dt\,dx + \int\limits_{x=\varphi(t)} [u]\,F\,dx - [u]\,aF\,dt = \\ &= \int\limits_{x=\varphi(t)} [u]\left(\frac{d\varphi}{dt} - a(t,\varphi(t))\right)F\,dt, \end{aligned}$$

где последние два интеграла взяты вдоль кривой $x=\varphi(t)$ и $[u]=u(t,\varphi(t)-0)-u(t,\varphi(t)+0)$. Так как F — произвольная функция на кривой $x=\varphi(t)$, то из равенства нулю последнего интеграла следует, что $\frac{d\varphi}{dt}-a=0$, т. е. кривая $x=\varphi(t)$ является характеристикой уравнения (8.29).

Нетрудно проверить, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ также могут иметь разрывы лишь вдоль характеристик. Действительно, пусть решение $u(t,x)$ непрерывно вдоль линии $x=\varphi(t)$, не являющейся характеристикой. Тогда в силу теоремы единственности оно, как в $\overline{\Omega}_1$, так и в $\overline{\Omega}_2$, совпадает с обычным, непрерывно дифференцируемым решением, равным $u(t,\varphi(t))$ на линии $x=\varphi(t)$. Значит, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ не могут иметь на ней разрывов. Точно так же легко проверить, что всякая кусочно-гладкая функция $u(t, x)$, удовлетворяющая уравнению (8.29) в точках непрерывной дифференцируемости и имеющая разрывы только вдоль характеристик, является обобщенным решением уравнения (8.29).

Обобщенным решением задачи Коши в области G для уравнения (8.29) с условием (8.30) будем называть такое обобщенное решение $u(t, x)$ уравнения (8.29), которое в точках непрерывности при $t=0$ совпадает с заданной функцией $f(x)$. Легко проверить, что такая функция $u(t, x)$ для любой непрерывно дифференцируемой в G функции F, равной нулю в некоторой окрестности границы G, удовлетворяет равенству

$$\iint\limits_{G_1} [L^*(F)u - cF]\,dt\,dx - \int\limits_{a_1}^{a_2} F(0, x) f(x)\,dx = 0,$$

где G_1 — пересечение G с полуплоскостью $t \geqslant 0$, а отрезок $[a_1, a_2]$ — пересечение замыкания G с прямой $t=0$. Это равенство можно взять за определение обобщенного решения задачи Коши в области G_1, для уравнения (8.29) с начальным условием (8.30).

Отметим одно важное свойство линейных уравнений с частными производными первого порядка, вытекающее из § 61. Окрестность R_0 поверхности S, в которой гарантируется существование решения задачи Коши, не зависит от заданной на S функции f. Можно доказать, что обобщенное решение задачи Коши для уравнения (8.29) с условием (8.30) существует в такой же окрестности интервала (a_1, a_2) прямой $t=0$, если $f(x)$ непрерывно дифференцируема всюду, за исключением конечного числа точек, где она и ее производная имеют разрывы первого рода, и это решение единственно. Этот факт можно установить таким же путем, как в § 61 доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Рассмотрим теперь квазилинейные уравнения 1-го порядка. Для квазилинейных уравнений с частными производными 1-го порядка, как это легко видеть на примерах, в отличие от линейных уравнений, область, в которой определяется решение задачи Коши, зависит от величины функции f и ее производных. Так, например, для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (8.34)$$

решение задачи Коши, удовлетворяющее условию

$$u(0, x) = -\operatorname{th}\frac{x}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

определяется только при $t<\varepsilon$, ибо, как легко проверить, проекции характеристик на плоскость (t, x), соответствующих начальной функции $-\operatorname{th}(x/\varepsilon)$, пересекаются при $t>\varepsilon$ и приносят в эти точки разные значения u.

По аналогии с линейными уравнениями мы можем ввести понятие обобщенного решения для квазилинейных уравнений 1-го порядка, записанных в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a(t, x, u)}{\partial x} + b(t, x, u) = 0. \qquad (8.35)$$

Уравнения такого вида иногда называются законами сохранения. Понятие обобщенного решения квазилинейного уравнения играет важную роль в задачах газовой динамики и других разделов механики и физики[1].

Под обобщенным решением уравнения (8.35) в области G будем понимать кусочно-гладкую функцию $u(t, x)$ такую, что при любой непрерывно дифференцируемой функции $F(t, x)$, равной нулю в окрестности границы G, выполняется равенство

$$\iint\limits_G \left[\frac{\partial F}{\partial t}u + \frac{\partial F}{\partial x}a(t, x, u) - b(t, x, u)F\right]dt\,dx = 0. \qquad (8.36)$$

Обобщенное решение уравнения (8.35), удовлетворяющее условию (8.30) в точках непрерывности, называется решением задачи Коши (8.35), (8.30).

Точно так же, как и для уравнения (8.29), можно показать, что на линиях разрыва $x=\varphi(t)$ обобщенного решения $u(t, x)$ уравнения (8.35) выполняется условие

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{a(t, x, u(t, x+0)) - a(t, x, u(t, x-0))}{u(t, x+0) - u(t, x-0)}. \qquad (8.37)$$

Легко видеть, что линия разрыва $u(t, x)$, вообще гово-

[1] См. литературу, указанную в сноске на с. 272.

ря, не является проекцией характеристики уравнения (8.35).

В отличие от линейного уравнения, равенство (8.36) не определяет единственного обобщенного решения уравнения (8.35), принимающего при $t=0$ заданные значения $f(x)$ во всех точках непрерывности $u(t, x)$. Так, например, обобщенным решением задачи Коши в полуплоскости $t \geqslant 0$ для уравнения (8.34)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x} = 0,$$

удовлетворяющим начальному условию

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{8.38}$$

является при любом $\alpha \geqslant 1$ функция $u_\alpha(t, x)$, определенная равенствами:

$$u_\alpha(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant \dfrac{1-\alpha}{2} t, \\ -\alpha, & \text{если } \dfrac{1-\alpha}{2} t < x \leqslant 0, \\ \alpha, & \text{если } 0 < x \leqslant \dfrac{\alpha-1}{2} t, \\ -1, & \text{если } \dfrac{\alpha-1}{2} t < x. \end{cases} \tag{8.39}$$

(Проекции характеристик $u_\alpha(t, x)$ на плоскость (t, x) изображены на рис. 40.)

Таким образом, для определения единственного обобщенного решения задачи Коши для уравнения (8.35) с условием (8.30) нужны дополнительные условия. Для случая $\frac{\partial^2 a}{\partial u^2} \geqslant 0$ таким дополнительным условием для уравнения (8.35) в области G, лежащей в полуплоскости $t > 0$, является выполнение на линиях разрыва соотношения [1]

$$u(t, x-0) > u(t, x+0). \tag{8.40}$$

[1] Доказательство этого утверждения содержится в указанной выше статье О. А. Олейник.

Это соотношение, как легко видеть, выделяет из всех функций (8.39) только одно обобщенное решение $u_\alpha(t,x)$ при $\alpha=1$. Согласно (8.39) имеем: $u_1(t,x)=1$ при $x<0$ и $u_1(t,x)=-1$ при $x>0$.

В отличие от линейных уравнений, обобщенное решение задачи Коши для квазилинейного уравнения (8.35), вообще говоря, не может быть построено с по-

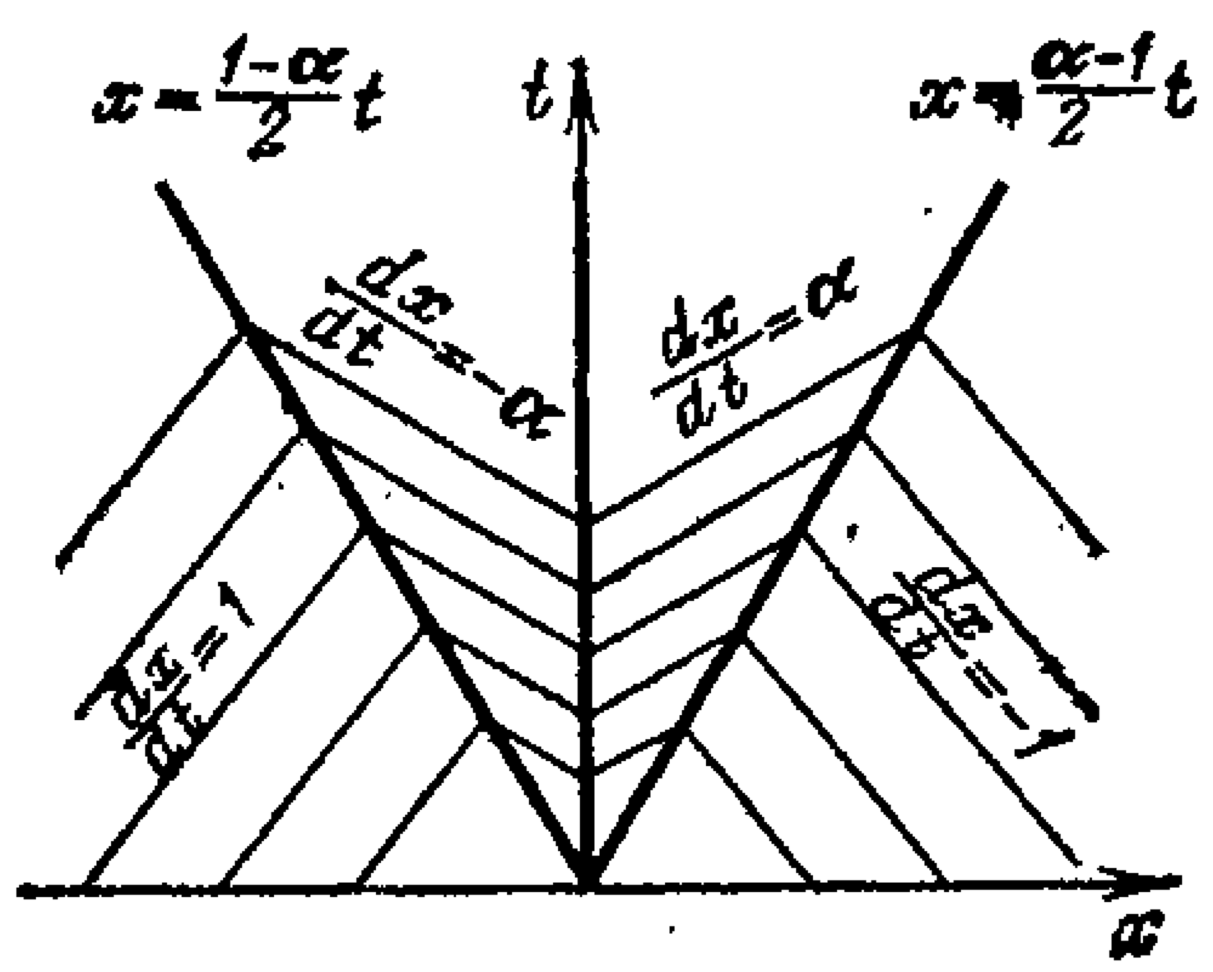

Рис. 40

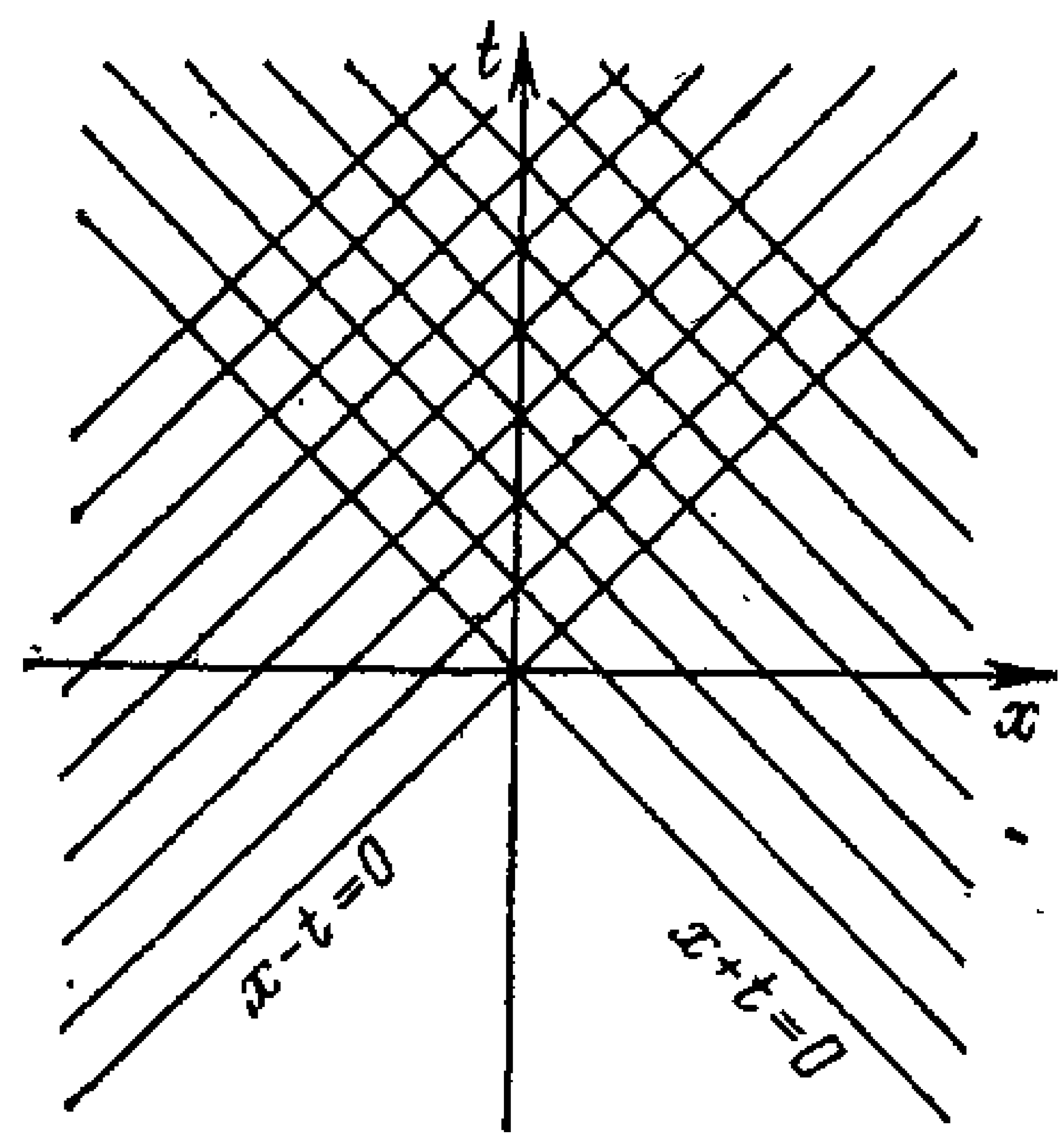

Рис. 41

мощью характеристик, проходящих через точки $(0,\ x,\ u(0,x))$. В качестве примера рассмотрим снова задачу Коши для уравнения (8.34) с начальным условием (8.38). Легко видеть, что обобщенное решение этой задачи Коши не определяется однозначно с помощью характеристик даже в сколь угодно малой окрестности прямой $t=0$. Действительно, проведем в пространстве (t,x,u) через точки $(0,\ x,\ u(0,x))$, где $-\infty<x<+\infty$, характеристики уравнения (8.34), т. е. решения системы уравнений

$$\frac{du}{dt}=0, \quad \frac{dx}{dt}=u.$$

Поверхность, составленная из этих характеристик, в случае гладкой функции $u(0,x)$ определяет решение задачи Коши в окрестности прямой $t=0$, причем эта окрестность зависит от начальной функции $u(0,\ x)$.

Если $u(0,x)=f(x)$, где $f(x)$ определена условием (8.38), то проекции этих характеристик на плоскость

(t, x) дважды покрывают точки, лежащие при $t>0$ между прямыми $x-t=0$ и $x+t=0$, и притом с различными значениями u, и не покрывают точки, лежащие между этими прямыми при $t<0$ (рис. 41). Существуют другие методы построения обобщенных решений квазилинейиых уравнений. Важное значение имеет так называемый метод введения «малой вязкости», который ведет свое начало от задач газовой динамики[1].

Вопросы о продолжении решения для всех значений $t>0$, о построении обобщенных решений квазилинейных уравнений и об условиях единственности обобщенного решения задачи Коши представляют большой интерес для газовой динамики и некоторых других разделов механики.

Условие на разрывах (8.37), которые в механике называют ударными волнами, соответствует в газовой динамике законам сохранения массы, энергии и импульса при переходе через ударную волну, а условие (8.40) соответствует закону неубывания энтропии.

ЗАДАЧИ

1. Определите обобщенное решение задачи Коши для линейного уравнения с частиыми производиыми 1-го порядка со многими независимыми перемениыми. При предположении, что f — кусочио-гладкая фуикция, докажите теорему существования и единствеиности, а также выведите соотношеиие, которому удовлетворяют поверхиости разрыва обобщеиных решений.

2. Для уравнения (8.12) из § 61 определите с помощью соотношения (8.33) иепрерывное обобщенное решение задачи Коши с непрерывной начальной фуикцией $f(x)$. Докажите его существование и едииствеиность.

3. Постройте обобщеиное решеиие задачи Коши для уравнеиия (8.34) в области $t>0$, удовлетворяющее условию (8.40), если $f(x)$ — кусочно-постоянная фуикция с конечным числом разрывов (рассмотрите сиачала случай, когда $f(x)$ имеет один или два разрыва). Докажите едииственность этого решения.

4. Докажите, что условие (8.40) определяет единственное обобщеииое решение задачи Коши для уравнения (8.34) в полуплоскости $t\geqslant 0$.

---

[1] Подробиое описание этого метода можио найти в указанной иа с. 272 литературе.

§ 65. Нелинейные уравнения

Мы рассмотрим уравнение

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{8.41}$$

и предположим, что функция F по всем своим аргументам в некоторой области $(2n+1)$-мерного пространства имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и что

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\}} \right]^2 > 0. \tag{8.42}$$

Для сокращения записи положим

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i.$$

Задача Коши для уравнения (8.41) ставится аналогично тому, как и для уравнения (8.20); ниже мы уточним эту постановку.

Допустим, что $u(x)$ есть какое-нибудь решение уравнения (8.41), имеющее непрерывные частные производные 2-го порядка. Подставим это решение в уравнение (8.41) и полученное тождество продифференцируем по каждому x_k, $k=1, \ldots, n$. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + X_k + Up_k = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + X_k + Up_k = 0. \tag{8.43}$$

Эти уравнения квазилинейны относительно p_k. Построим в пространстве x траектории автономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.44}$$

где в правых частях вместо u и p_s подставлено рассматриваемое решение $u(x)$ и его соответствующие производные. Тогда уравнения (8.43) можно переписать в виде

$$\frac{dp_i}{dt} = -X_i - Up_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.45}$$

Найдем, наконец, производную от $u(x)$ по параметру t. Получим

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} P_i p_i. \tag{8.46}$$

Система, состоящая из уравнений (8.44), (8.45) и (8.46), определяет однозначно x_i, p_i и u как функции от t, если задать их начальные значения. Траектории этой автономной системы в пространстве $(x, u, p_1, \ldots, p_n)$ называются *характеристиками* уравнения (8.41); они зависят только от этого уравнения [1].

Пусть поверхность S, на которой заданы значения u, не имеет самопересечений и задается уравнениями $x_i = x_i(v_1, \ldots, v_{n-1})$, $i=1, \ldots, n$. Тогда заданную на S функцию u можно также рассматривать как функцию от $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Мы будем предполагать, что *функции $x_i(v_1, \ldots, v_{n-1})$ и $u(v_1, \ldots, v_{n-1})$ непрерывны вместе с их частными производными по $v_1, \ldots, v_{n-1}$ до 2-го порядка включительно и в каждой точке поверхности S отличен от нуля по крайней мере один из миноров $(n-1)$-го порядка матрицы*

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим вопрос о том, как задание u на S определяет значения p_i на S. Если в равенство $u = u(x)$ подставить выражения u и x через v, то оно обратится в тождество. Дифференцируя это тождество, получим

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} = \frac{\partial u}{\partial v_k}, \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{8.47}$$

[1] Проекции этих линий на пространство x или пространство (x, u) также иногда называются характеристиками.

(здесь p_i берутся, конечно, на S). С другой стороны, на S должно иметь место равенство (8.41). Оно дает

$$F(x,\ u,\ p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{8.48}$$

где вместо x, u следует подставить их выражения через v. Соотношения (8.47) и (8.48) представляют собой систему n уравнений с неизвестными функциями $p_1, \ldots, p_n$ от аргументов $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Поэтому для применения теоремы о неявных функциях необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8.49}$$

при всех рассматриваемых значениях $v_1, \ldots, v_{n-1}$, т. е. всюду на S.

Исходя из этого, впредь при постановке задачи Коши для уравнения (8.41) мы будем считать, что *на S не только дано $u(v_1, \ldots, v_{n-1})$, но также выбраны значения $p_1, \ldots, p_n$, непрерывно зависящие от $v_1, \ldots, v_{n-1}$, причем так, чтобы удовлетворялись соотношения* (8.47)—(8.49). Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что $p_1, \ldots, p_n$ имеют непрерывные производные по $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Следует отметить, что в силу нелинейности уравнения (8.48) при заданной u на S значения p_i на S определяются, вообще говоря, неоднозначно. Однако если выполняются условия, сформулированные в предыдущем абзаце, и если $p_i^{(1)}(A) = p_i^{(2)}(A)$, $i = 1, \ldots, n$, в какой-нибудь точке A поверхности S, то $p_i^{(1)} \equiv p_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, n$, всюду на S; это следует из теоремы о неявных функциях в силу условия (8.49).

Геометрически условие (8.49) означает, что в каждой точке x^0 поверхности S проекция на пространство $\boldsymbol{x}$ характеристики, проходящей через точку $(x^0,\ u^0,\ p_1^0, \ldots, p_n^0)$ (u^0, $p_1^0, \ldots, p_n^0$ определяются из начальных условий), не касается S. (Проверьте!).

Из единственности решения системы (8.44)—(8.46) следует единственность решения задачи Коши. Действительно, так как мы предположили, что функция F имеет непрерывные производные по всем ее аргументам до 2-го порядка, то в силу условия (8.42) правые части уравнений (8.44) имеют непрерывные производные 1-го порядка по всем их аргументам, что обеспечивает единственность решения системы (8.44)—(8.46).

Переходя к доказательству существования решения задачи Коши в некоторой окрестности поверхности S, мы предположим, что S и заданная на ней функция u удовлетворяют условию, напечатанному на с. 281 курсивом, и что, кроме того, на S выбраны $p_1, \ldots, p_n$ так, что всюду на S выполняются условия (8.47)—(8.49). Как в § 61—63, мы будем проводить доказательство для случая двух независимых переменных. Тогда уравнение имеет вид

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \tag{8.50}$$

система уравнений характеристик (в пятимерном пространстве) (x, y, z, p, q) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = P, \qquad \frac{dy}{dt} = Q, \tag{8.51}$$

$$\frac{dp}{dt} = -X - pZ, \qquad \frac{dq}{dt} = -Y - qZ, \tag{8.52}$$

$$\frac{dz}{dt} = pP + qQ, \tag{8.53}$$

где

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$P = \frac{\partial F}{\partial p}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Начальные условия определяются соотношениями $x = x(v)$, $y = y(v)$, $z = z(v)$, $p = p(v)$, $q = q(v)$, причем первые три функции дважды непрерывно дифференцируемы и $\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 > 0$, а последние две функции непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют соотношениям (8.50),

$$p\frac{dx}{dv}+q\frac{dy}{dv}=\frac{dz}{dv} \tag{8.54}$$

и

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8.55}$$

Чтобы доказать существование решения при этих предположениях, достаточно проверить, что построенные согласно системе (8.51)—(8.53) по начальным данным решения

$$x(t, v),\ y(t, v),\ z(t, v),\ p(t, v),\ q(t, v) \tag{8.56}$$

(мы считаем $t=0$ на S) обладают следующими свойствами:

1. Система уравнений $x=x(t, v)$, $y=y(t, v)$ может быть однозначно разрешена относительно t, v в некоторой окрестности линии S, причем решения имеют непрерывные производные по x, y. Тогда в этой окрестности линии S величины t, v могут быть приняты за криволинейные координаты. Так как мы предполагаем, что функции $x(v), \ldots, q(v)$, заданные на линии S, имеют непрерывные производные по v, и так как правые части уравнений (8.51)—(8.53) имеют непрерывные производные по всем их аргументам, то построенные нами решения (8.56) имеют непрерывные производные по t, v. Поэтому, если в полученное нами выражение для z через t, v подставить вместо t, v их выражения через x, y, мы получим z как функцию от x, y, имеющую непрерывные первые производные по x, y.

2. Функции (8.56) всюду в рассматриваемой окрестности S удовлетворяют уравнению (8.50).

3.
$$p\equiv\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q\equiv\frac{\partial z}{\partial y}. \tag{8.57}$$

Чтобы доказать первое из этих утверждений, нам достаточно доказать, что при всех достаточно малых значениях $|t|$ детерминант

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{8.58}$$

отличен от нуля. Так как элементы детерминанта непрерывны по t, v, то нам достаточно доказать, что этот детерминант отличен от нуля на самой линии S, а это последнее следует из (8.55) и (8.51).

Утверждение второе, очевидно, справедливо на самой линии S; начальные значения p, q мы выбираем так, чтобы они удовлетворяли уравнению (8.50). Чтобы доказать, что не только на линии S, т. е. при $t=0$, но и при всех достаточно малых $|t|$ выполняется это соотношение, покажем, что если в левую часть уравнения (8.50) подставить вместо x, y, z, p, q решение (8.56) системы (8.51)—(8.53), то результат подстановки не будет зависеть от t. Действительно,

$$\frac{dF}{dt} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

Подставляя вместо $\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{dz}{dt}$ правые части уравнений (8.51)—(8.53), получим нуль.

Вместо того чтобы доказывать третье утверждение, т. е. (8.57), покажем сначала, что во всей рассматриваемой нами окрестности линии S

$$\frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t} - q\frac{\partial y}{\partial t} = 0. \tag{8.59}$$

Справедливость второго равенства следует из того, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = Q$$

в силу уравнений (8.51) и потому соответствующее уравнение (8.59) совпадает с уравнением (8.53). О первом уравнении (8.59) нам известно пока только, что оно справедливо при $t=0$: начальные значения для p, q на линии S мы выбрали так, чтобы соотношение (8.54) удовлетворялось.

Чтобы доказать, что это уравнение удовлетворяется и при других t, положим $U\equiv\frac{\partial z}{\partial v}-p\frac{\partial x}{\partial v}-q\frac{\partial y}{\partial v}$ и найдем $\frac{dU}{dt}$.

Дифференцирование U по t возможно. Это следует из того, что построенные нами решения системы (8.51)—(8.53) имеют непрерывные производные по t, v, как мы уже отмечали. Если подставить эти решения в уравнения (8.51)—(8.53), то правые части полученных тождеств будут иметь непрерывные производные по t, v. Значит, и левые части также имеют непрерывные производные по этим аргументам, т. е. существуют непрерывные производные $\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial v}$. Итак,

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v}-p\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial t}-q\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial t}. \tag{8.60}$$

Продифференцируем теперь по v справедливое, как мы только что показали, при всех рассматриваемых значениях t, v тождество

$$\frac{\partial z}{\partial t}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t}\equiv 0.$$

Получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial v}-\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t}-p\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial v}-q\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial v}\equiv 0. \tag{8.61}$$

Вычитая почленно (8.61) из (8.60), находим

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Если воспользоваться равенствами (8.51) и (8.52), то полученное только что соотношение можно переписать так:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial p}{\partial v}P+\frac{\partial q}{\partial v}Q+\frac{\partial x}{\partial v}(X+Zp)+\frac{\partial y}{\partial v}(Y+Zq). \tag{8.62}$$

Дифференцируя доказанное прежде тождество

$$F(x, y, z, p, q)\equiv 0$$

по v, находим

$$X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}+P\frac{\partial p}{\partial v}+Q\frac{\partial q}{\partial v}+Z\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

Вычитая это соотношение из (8.62), получим

$$\frac{dU}{dt}=-Z\left(\frac{\partial z}{\partial v}-p\frac{\partial x}{\partial v}-q\frac{\partial y}{\partial v}\right)=-ZU.$$

Следовательно,

$$U(t)=U(0)\exp\left[-\int_0^t Z\,dt\right].$$

Так как $U(0)=0$, то при всех других t величина $U(t)=0$.

Итак, мы доказали, что во всей рассматриваемой окрестности линии S

$$\frac{\partial z}{\partial v}\equiv p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial t}\equiv p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Докажем теперь справедливость равенства (8.57). Для этого заметим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Подставляя сюда значения $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ из предыдущих тождеств, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x}=$$

$$=p\frac{\partial x}{\partial x}+q\frac{\partial y}{\partial x}=p,$$

так как $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, $\frac{\partial y}{\partial x}=0$. Аналогично находим $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пример. Найти решение уравнения

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1=0, \tag{8.63}$$

график которого проходит через окружность $x^2+y^2=1$, $z=0$.

Введя параметр v, запишем уравнение этой окружности

$$x=\sin v,\ y=\cos v,\ z=0. \tag{8.64}$$

Уравнения (8.51)—(8.53) принимают вид

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{2q}=\frac{dz}{2(p^2+q^2)}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=dt. \tag{8.65}$$

Из последних двух уравнений находим $p=C_1$ и $q=C_2$, где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Подставляя найденные p и q в первые уравнения, получаем

$$x=2C_1t+C_3;$$
$$y=2C_2t+C_4;$$
$$z=2(C_1^2+C_2^2)t+C_5,$$

где C_3, C_4, C_5 — некоторые постоянные.

Чтобы удовлетворялось данное дифференциальное уравнение, должно быть

$$C_1^2+C_2^2=1. \tag{8.66}$$

Поэтому $z=2t+C_5$.

Чтобы при $t=0$ линия

$$x=2C_1t+C_3,$$
$$y=2C_2t+C_4,$$
$$z=2t+C_5$$

проходила через точку, определяемую параметром v на окружности (8.64), надо, чтобы было

$$C_3=\sin v,$$

$$C_4=\cos v,$$
$$C_5=0.$$

Тогда уравнение интегральной поверхности уравнения (8.63), проходящей через окружность (8.64), запишется в виде $x=2C_1t+\sin v$, $y=2C_2t+\cos v$, $z=2t$, где t и v — параметры. Чтобы при $t=0$ выполнялось соотношение

$$\frac{\partial z}{\partial v}=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v},$$

надо, чтобы $0=p\cos v-q\sin v$ или $C_1\cos v=C_2\sin v$. Принимая во внимание (8.66), находим отсюда

$$C_1=\varepsilon\sin v,\quad C_2=\varepsilon\cos v,\quad \text{где}\quad \varepsilon=\pm 1.$$

Из соображений непрерывности следует, что ε постоянно вдоль всей кривой. Следовательно, окончательно мы получаем такие параметрические уравнения интегральной поверхности: $x=(2t\varepsilon+1)\sin v$; $y=(2t\varepsilon+1)\cos v$; $z=2t$. Исключая отсюда t и v, найдем

$$x^2+y^2=(1\pm z)^2. \tag{8.67}$$

Таким образом, мы нашли две интегральные поверхности уравнения (8.63), проходящие через окружность (8.64). Это два круглых конуса в пространстве (x, y, z), у которых в основании лежит окружность (8.64) и общая ось совпадает с осью Oz.

Замечание. Из рассмотренного примера видно, что сделанная нами на с. 284—285 оговорка о том, что детерминант (8.58) отличен от нуля только вблизи линии S, вызывается существом дела. Нельзя думать, что проходящие через линию $\bar{S}$ (сохраняя обозначения § 63) проекции

$$x=x(t, x^0, y^0),\quad y=y(t, x^0, y^0),\quad z=z(t, x^0, y^0)$$

траекторий системы (8.51)—(8.53) на пространство (x, y, z) образуют гладкую поверхность при как угодно больших значениях параметра t. Несмотря на то что траектории системы (8.65) определяются этой системой при как угодно больших t, нельзя как угодно далеко продолжать интегральные поверхности уравнения (8.63),

§ 66. Уравнение Пфаффа

Уравнением Пфаффа в пространстве (x, y, z) называется уравнение вида

$$Pdx+Qdy+Rdz=0, \tag{8.68}$$

где P, Q и R — функции от x, y, z.

Существуют две трактовки этого уравнения. В первой x, y и z считаются функциями одного какого-либо параметра t. Задавая две из величин x, y, z как функции этого параметра, мы придем к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения третьей величины. Можно произвольно задать некоторое соотношение между x, y и z

$$\Phi(x, y, z)=0. \tag{8.69}$$

Рассматривая здесь x, y и z как функции некоторого параметра t и дифференцируя (8.69) по t, получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=0. \tag{8.70}$$

При весьма общих предположениях относительно функций Φ, P, Q, R два уравнения (8.68) и (8.70) можно разрешить относительно отношений двух из дифференциалов dx, dy, dz к третьему, например относительно $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dy}{dx}$. Тогда получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения z и y как функций от x. Условие (8.69) оставит, вообще говоря, одну произвольную постоянную в общем решении.

В другой трактовке уравнения Пфаффа одна из величин, например z, рассматривается как функция двух других. Будем предполагать, что в рассматриваемой области

$$R\neq 0.$$

Тогда из уравнения (8.68) получаем

$$dz=P_1dx+Q_1dy, \tag{8.71}$$

где

$$P_1=-\frac{P}{R} \text{ и } Q_1=-\frac{Q}{R}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P_1(x, y, z), \tag{8.71'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q_1(x, y, z). \tag{8.71''}$$

Будем считать, что z имеет непрерывные частные производные второго порядка по x и y, а P_1 и Q_1 — первые непрерывные производные по своим аргументам. Тогда

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z} P_1, \tag{8.72}$$

так как должно быть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

При дифференцировании P_1 и Q_1 по x и y мы учли их зависимость и от z, которое, по предположению, есть функция от x и y. Условие (8.72) можно записать так:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{8.73}$$

Допустим, что условие (8.73), или, что все равно, условие (8.72) выполняется *тождественно* в рассматриваемой области G пространства (x, y, z) и что функции P_1 и Q_1 имеют непрерывные производные по всем их аргументам до 2-го порядка включительно. *Тогда через каждую точку G проходит одна и только одна интегральная поверхность системы* (8.71'), (8.71'') *или, что все равно, уравнения* (8.68).

Доказательство. Докажем прежде всего единственность решения системы (8.71), проходящего через заданную точку $A(x_0, y_0, z_0)$. Для этого заметим следующее. Уравнение (8.71′), в котором y постоянно равно y_0, определяет единственную интегральную линию L, проходящую через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ в плоскости $y=y_0$. Уравнение же (8.71″), в котором x сохраняет некоторое постоянное значение x_0, определяет единственную интегральную кривую $l(x_0)$, проходящую в плоскости $x=x_0$ через лежащую в этой плоскости точку кривой L. Совокупность линий $l(x)$, построенных для всех точек линии L, единственным образом определяет интегральную поверхность S системы (8.71), проходящую через точку (x_0, y_0, z_0).

Докажем теперь, что построенная только что поверхность действительно есть интегральная поверхиость системы (8.71′), (8.71″). Прежде всего, непрерывность поверхности вытекает из непрерывной зависимости решения уравнения (8.71″) от параметра x и начального условия. Из самого построения этой поверхности очевидно, что для всех ее точек удовлетворяется уравнение (8.71″). Остается доказать, что для всех ее точек удовлетворяется и уравнение (8.71′). Что построенная нами функция $z=z(x, y)$ действительно всюду имеет непрерывную производную по x, следует из дифференцируемости решения по параметру и начальным данным. Остается доказать, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ удовлетворяет уравнению (8.71′). Для этого заметим, что, согласно самому построению поверхности S, это уравнение удовлетворяется при $y=y_0$. Чтобы доказать, что оно удовлетворяется и при других значениях y, положим

$$\frac{\partial z}{\partial x} - P_1(x, y, z) = F$$

и найдем $\frac{\partial F}{\partial y}$ (тот факт, что у функции z существует производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, следует из того, что эта функция удовлетворяет уравнению (8.71″), правая часть которого имеет непрерывные производные по x, y и z):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} P_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial z} F - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_1. \quad (8.74)$$

Мы преобразовали $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, пользуясь тем, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q_1.$$

При дифференцировании Q_1 по y мы учли, что и z зависит от y. Пользуясь тождеством (8.72), мы можем равенство (8.74) переписать в виде $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z} F$. Отсюда

$$F(x, y) = F(x, y_0) \exp \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_1}{\partial z}\, dy.$$

Следовательно, $F(x, y)$ равно нулю при всех рассматриваемых y, поскольку оно равно нулю при $y = y_0$, что и требовалось доказать.

Геометрически решение уравнения Пфаффа в первой его трактовке означает построение кривых, ортогональных заданному полю направлений в пространстве (в каждой точке (x, y, z), направление задается вектором с проекциями P, Q, R). При второй трактовке строятся поверхности, ортогональные тому же полю (или, что то же, имеющие в каждой точке пространства заданную касательную плоскость).

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите уравнение Пфаффа $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, dx_k = 0$ в n-мерном пространстве при соответствующих предположениях о коэффициентах. Сколько трактовок допускает такое уравнение? Разберите наиболее подробно ту трактовку, в которой «интегральными многообразиями» считаются $(n-1)$-мерные поверхности; при этом

уравнение целесообразно переписать в форме системы $(u=x_n)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=b_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, u), \quad k=1, \ldots, n-1.$$

2. Уравнения и системы уравнений Пфаффа рассматривают также в виде *уравнений с многомерным временем*

$$dx_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n)\, dt_j, \quad i=1, \ldots, n.$$

Напишите аналогичные (8.73) *условия совместности* такой системы, обеспечивающие существование и единственность решения при начальных условиях $x_i(t_1^0, \ldots, t_m^0)=x_i^0$, $i=1, \ldots, n$. Укажите, в частности, вид этих условий и общего решения для линейной автономной системы $dx=\sum_{j=1}^{m} A_j x\, dt_j$, где x — вектор, а A_j — постоянные квадратные матрицы. Рассмотрите линейные автономные системы при $n=3$, $m=2$ и укажите все 4 *грубых* (сохраняющих основные свойства при малом изменении коэффициентов) типа особых точек в начале координат.