

Robots Móviles

Tema 3. Localización y mapeado de un robot móvil

Parte III. Localización con filtros Discretos y filtro de Kalman Extendido

Sergio Orts Escolano
Otto Colomina Pardo

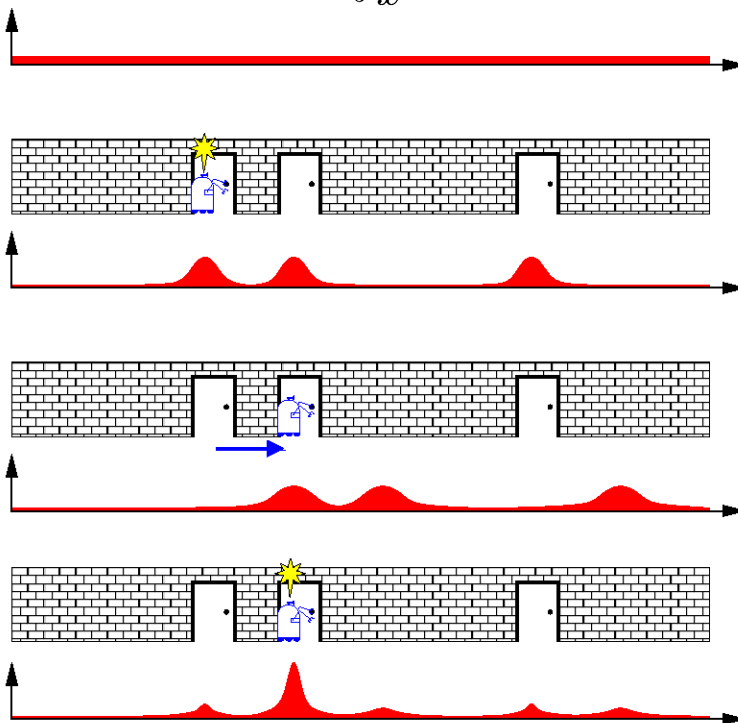
Índice

Filtros discretos

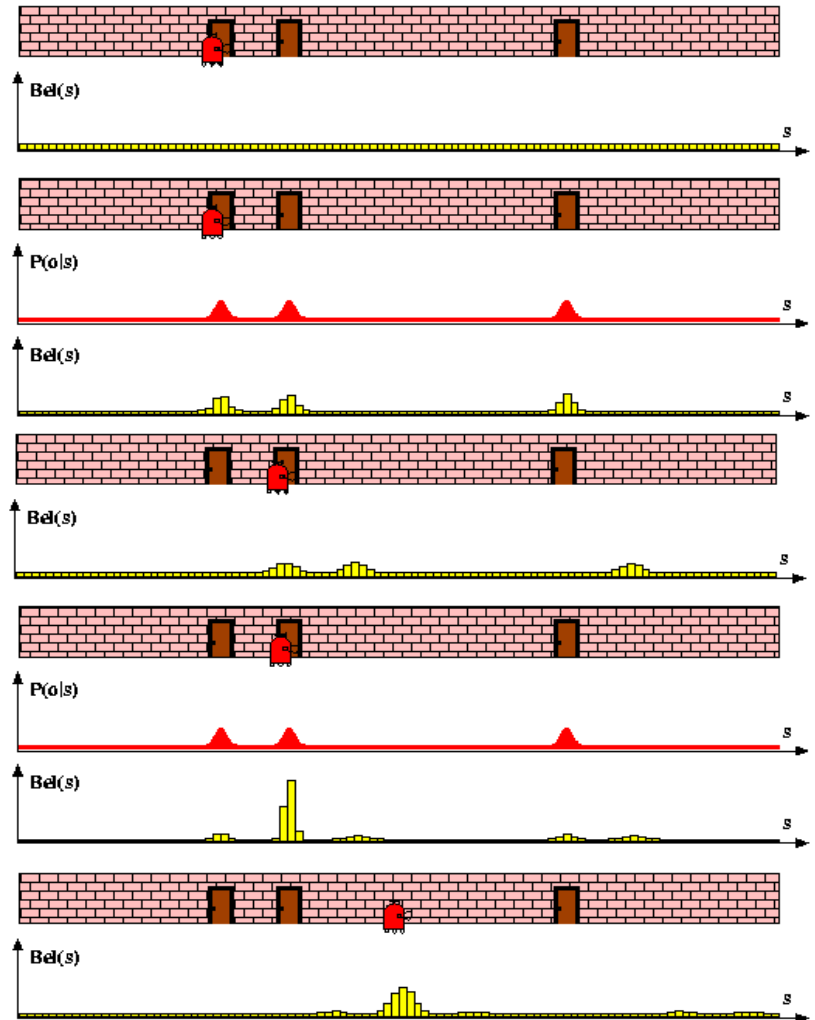
Filtro de Kalman (KF) y Filtro de Kalman Extendido (EKF)

Localización probabilística

$$Bel(x \mid z, u) = \alpha p(z \mid x) \int_{x'} p(x \mid u, x') Bel(x') dx'$$

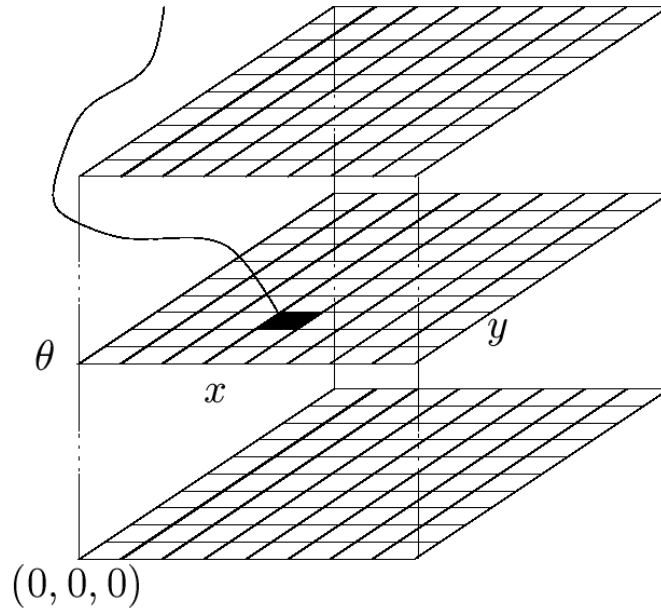


Los filtros discretos usan una representación discretizada (histogramas)



Representación en un robot móvil real

$$Bel(x_t = \langle x, y, \theta \rangle)$$



Algoritmo Filtro Discreto Bayes

1. Algorithm **Discrete_Bayes_filter**($Bel(x), d$):
2. $\eta = 0$
3. If d is a **perceptual** data item z then
4. For all x do
5. $Bel'(x) = P(z | x) Bel(x)$
6. $\eta = \eta + Bel'(x)$
7. For all x do
8. $Bel'(x) = \eta^{-1} Bel'(x)$
9. Else if d is an **action** data item u then
10. For all x do
11. $Bel'(x) = \sum_{x'} P(x | u, x') Bel(x')$
12. Return $Bel'(x)$

Optimizar la fase de medida

- Para actualizar la creencia sobre la medida del sensor y llevar a cabo la normalización se tiene que iterar sobre todas las células de la rejilla (*línea 4 algoritmo anterior*)
- Cuando la creencia está concentrada en un pico (habitual en localización cuando se conoce la pos. inicial), se quiere evitar actualizar partes irrelevantes del espacio de estados.
- Un enfoque es no actualizar subespacios enteros del espacio de estados.
- Esto, sin embargo, requiere monitorizar si el robot está localizado o no.
- Para lograr esto, se puede considerar la probabilidad de las observaciones para las partes “activas” del espacio de estado.

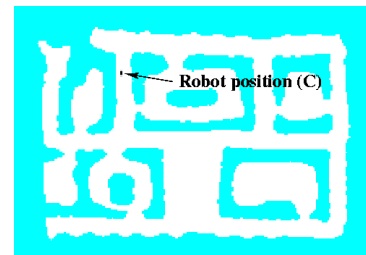
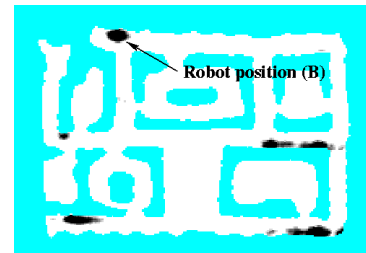
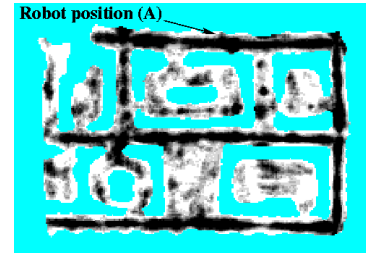
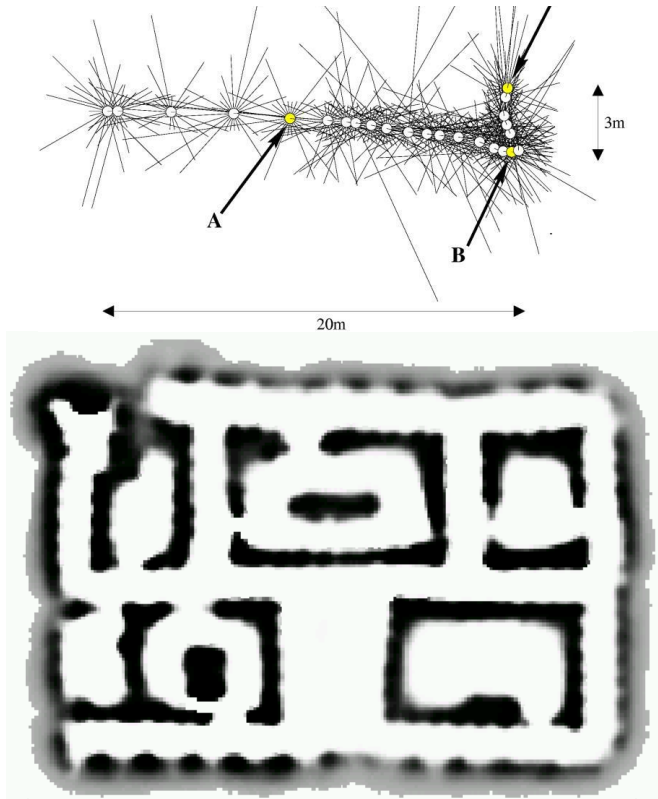
Optimizar la fase de movimiento

- El coste es de $O(n^2)$ donde n es el número de estados (líneas 10 y 11 del algoritmo)
- Posible optimización
 - Para la incertidumbre del movimiento asumir un modelo gaussiano **limitado**
 - Esto reduce el coste de actualización de $O(n^2)$ a $O(n)$
- Otra optimización
 - Paso 1: desplazar los datos en la rejilla según el movimiento medido.
 - Paso 2: convolucionar la rejilla usando un filtro Gaussiano separable.
- Ejemplo en 2 dimensiones:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ \hline 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ \hline 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|} \hline 1/4 \\ \hline 1/2 \\ \hline 1/4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ \hline \end{array}$$

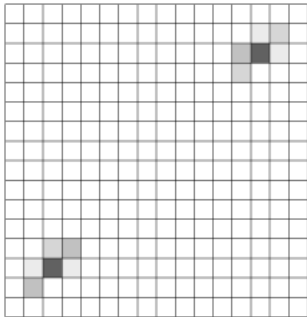
- Unas pocas operaciones aritméticas
- Fácil de implementar

Localización con sonar y rejilla de ocupación

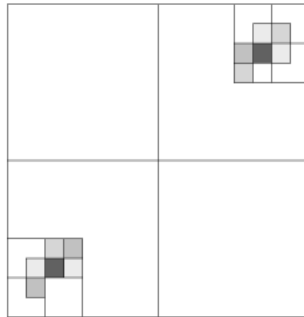


Representaciones basadas en árboles

Uniforme

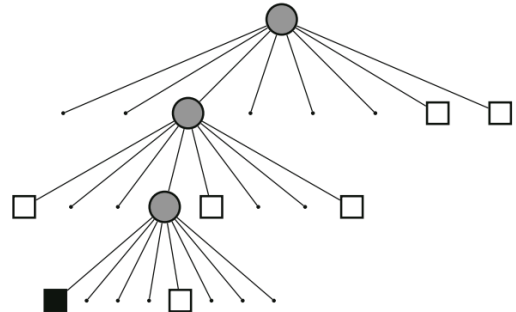
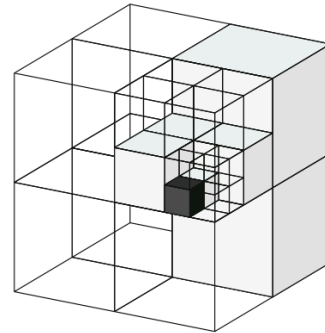


Quadtree



2D

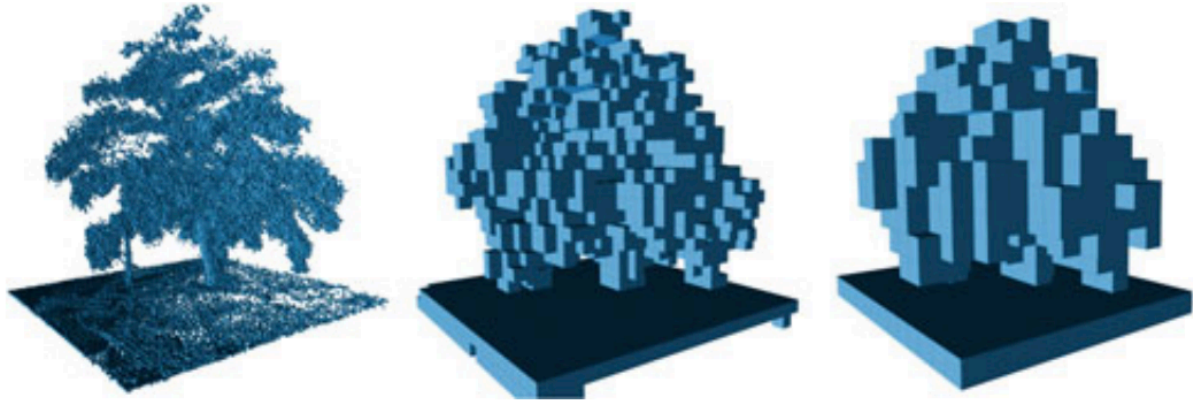
Octree



3D

Representaciones basadas en árboles

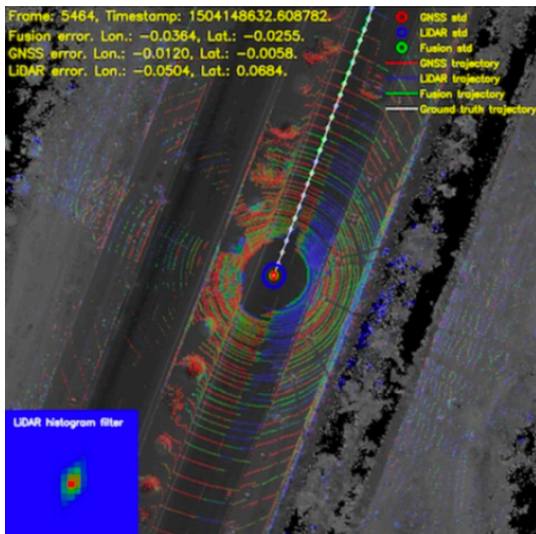
- Eficientes en espacio y tiempo
- Multi-resolución



OctoMap: an efficient probabilistic 3D mapping framework based on octrees, Armin Hornung · Kai M. Wurm · Maren Bennewitz · Cyrill Stachniss · Wolfram Burgard, *Autonomous Robots*, 34, 2013

Localización en vehículos autónomos

- Uso habitual de **filtros bayesianos discretos**
 - El GPS proporciona una estimación inicial razonable (error de algunos metros)
 - Basta con una rejilla “pequeña”



Robust and Precise Vehicle Localization based on Multi-sensor Fusion in Diverse City Scenes

Resumen

- Los filtros discretos son una forma alternativa de implementar los filtros Bayes
- Se basan en histogramas para representar la densidad.
- Su precisión depende de la resolución de la cuadrícula.
- Tienen grandes requerimientos de memoria y cómputo
- Puede recuperarse fácilmente de errores de localización
- Es necesario realizar aproximaciones especiales para que este enfoque use memoria dinámica y sea computacionalmente eficiente.

Índice

Filtros discretos
**Filtro de Kalman (KF) y Filtro de
Kalman Extendido (EKF)**

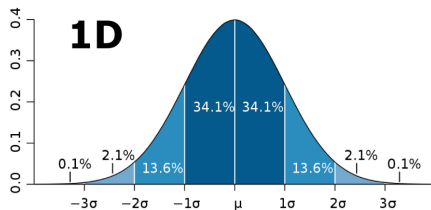
Suposición básica

- Vamos a representar **Bel** con una distribución gaussiana
 - Ventaja: simplicidad, solo necesitamos dos parámetros: media y varianza
 - Problema: unimodal, no hay “hipótesis alternativas”

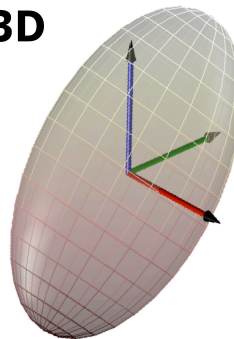
$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2):$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Univariate



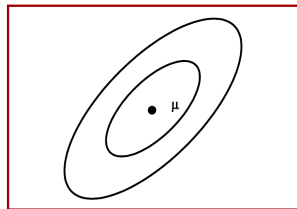
3D



$$p(\mathbf{x}) \sim N(\mu, \Sigma):$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)}$$

Multivariate



Filtro de Kalman

- Estima el estado x *de* un proceso discretizado en el tiempo

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

- Dada una observación (medida)

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

Componentes del Filtro de Kalman

A_t Matriz ($n \times n$) que describe cómo evoluciona el estado de $t-1$ a t sin controles ni ruido.

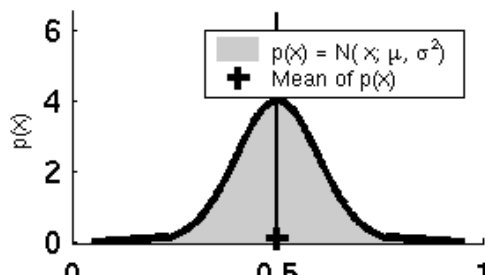
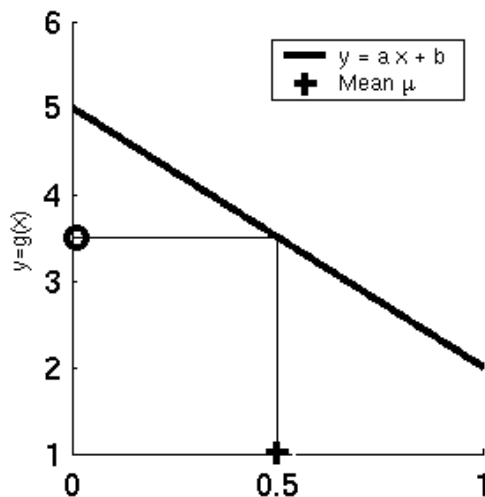
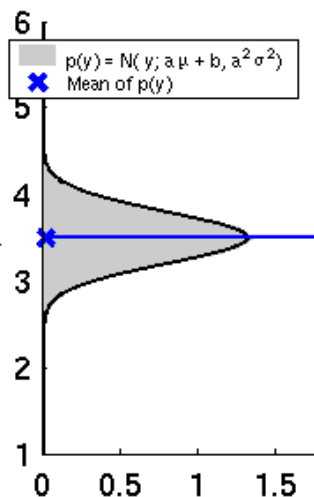
B_t Matriz ($n \times l$) que describe como el control u_t cambia el estado de $t-1$ a t .

C_t Matriz ($k \times n$) que describe como mapear el estado x_t a una observación z_t .

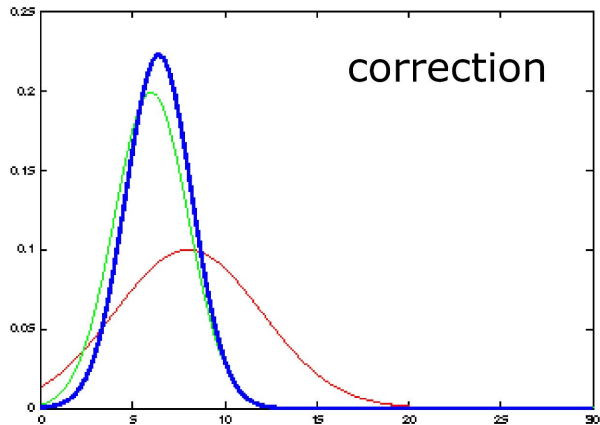
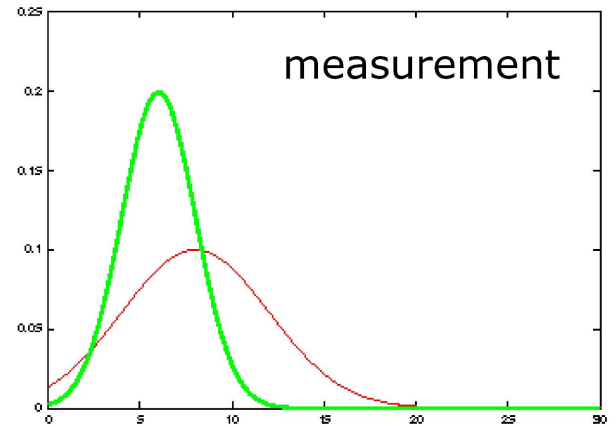
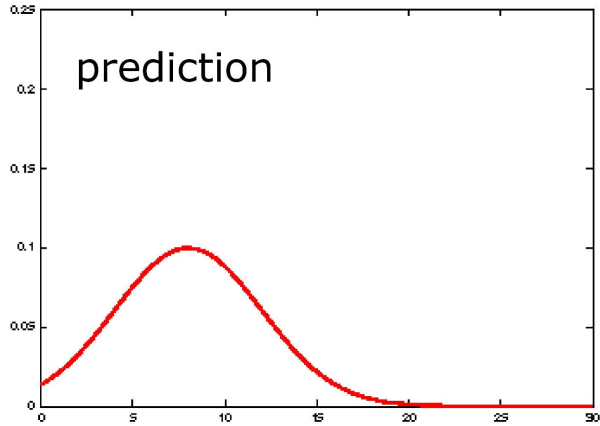
ε_t Variables aleatorias que representan el ruido de movimiento y de medición. Son independientes y normalmente distribuidas con covarianza Q_t y R_t respectivamente

δ_t

Sistemas lineales

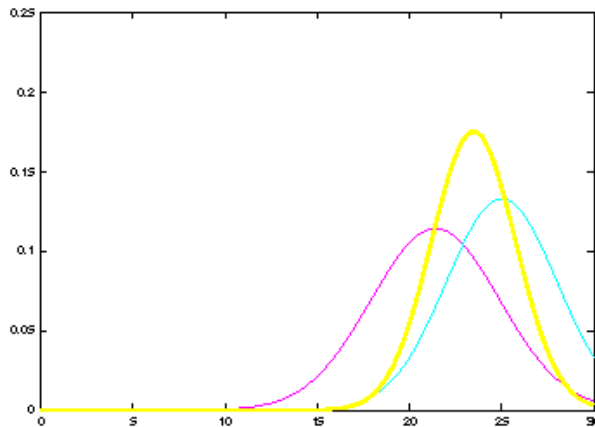
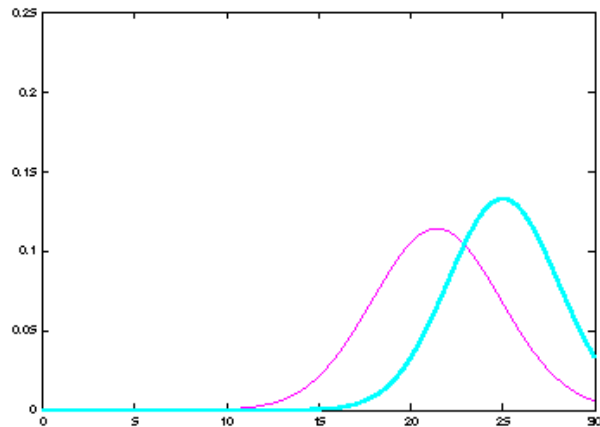
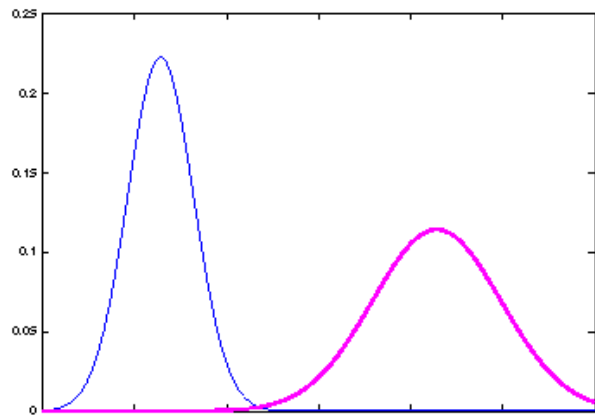
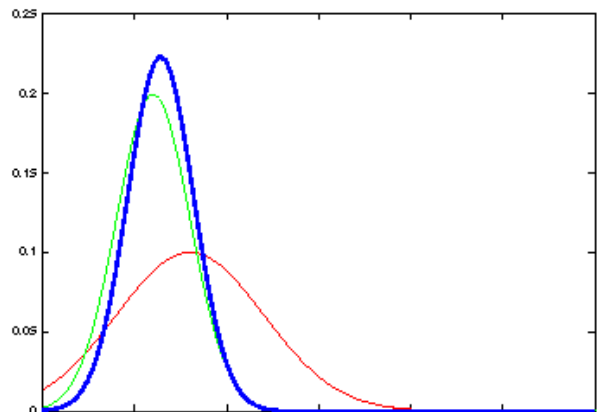


Ejemplo actualización filtro de Kalman



It's a weighted mean!

Ejemplo actualización filtro de Kalman (II)



Algoritmo Filtro de Kalman

1. Algorithm **Kalman_filter**(μ_{t-1} , Σ_{t-1} , u_t , z_t):

2. Prediction:

3. $\mu_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$

4. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + Q_t$

K: ganancia de Kalman, en qué grado influye la medida del sensor

5. Correction:

6. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + R_t)^{-1}$

7. $\mu_t = \mu_t + K_t (z_t - C_t \mu_t)$

8. $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \Sigma_t$ *Innovación: diferencia entre la medida real y la predicha*

9. Return μ_t , Σ_t

Sistemas no lineales

La mayoría de sistemas robóticos reales requieren funciones no lineales

$$\cancel{x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t}$$



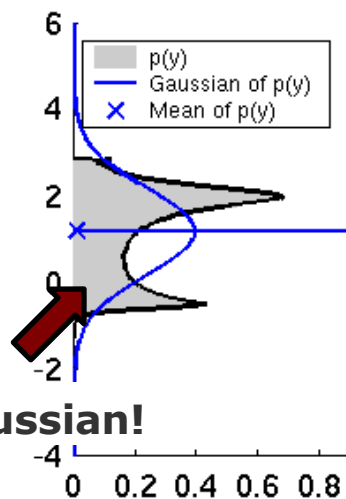
$$x_t = g(u_t, x_{t-1})$$

$$\cancel{z_t = C_t x_t + \delta_t}$$

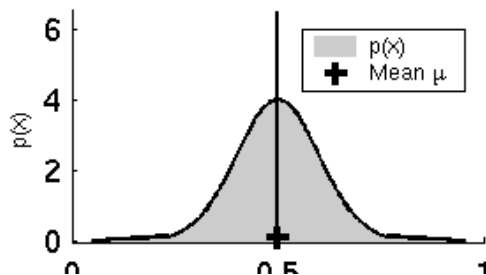
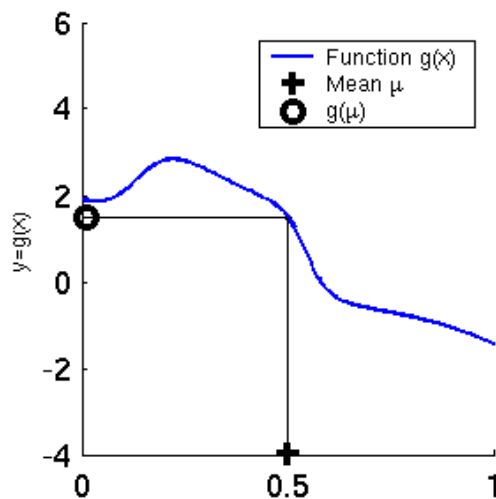


$$z_t = h(x_t)$$

Sistemas no lineales



Non-Gaussian!



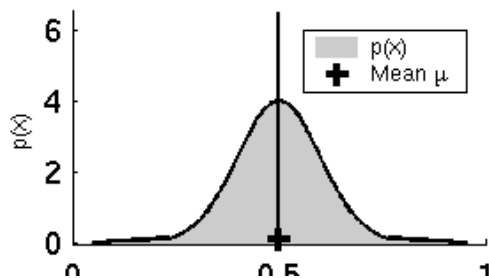
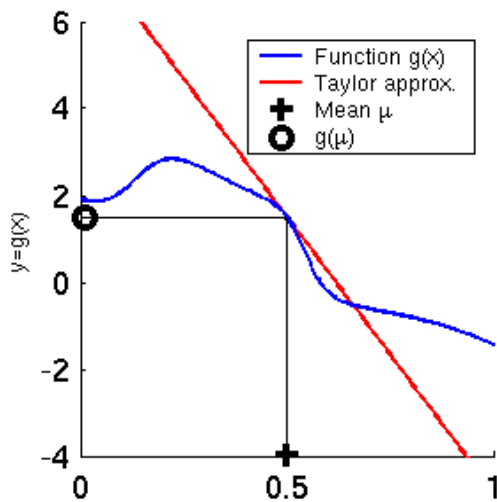
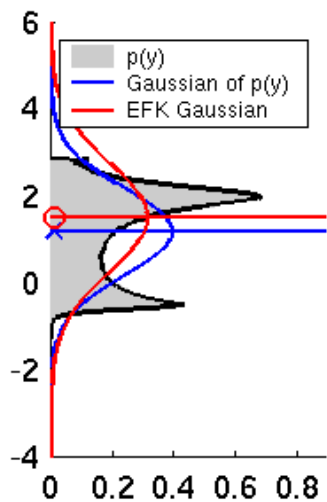
Distribuciones no Gaussianas

- Las funciones no lineales conducen a distribuciones no gaussianas
- El filtro de Kalman no es aplicable en estos casos!

Cómo podemos resolver este problema?

Linealización: Teorema Expansión de Taylor

EKF: Linealización



Algoritmo EKF

1. **Extended_Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):

2. Prediction:

$$3. \quad \bar{\mu}_t = \underline{g(u_t, \mu_{t-1})} \quad \longleftarrow \quad \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$$

$$4. \quad \bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + Q_t \quad \longleftarrow \quad \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + Q_t$$

5. Correction:

$$6. \quad K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + R_t)^{-1} \quad \longleftarrow \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + R_t)^{-1}$$

$$7. \quad \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - \underline{h(\bar{\mu}_t)}) \quad \longleftarrow \quad \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$$

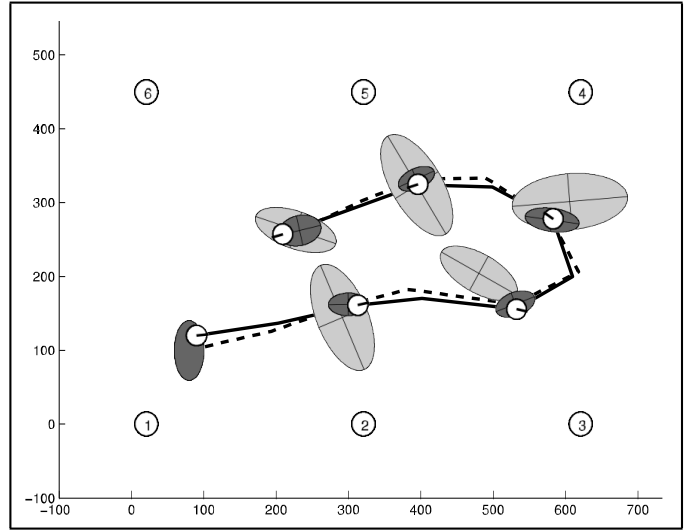
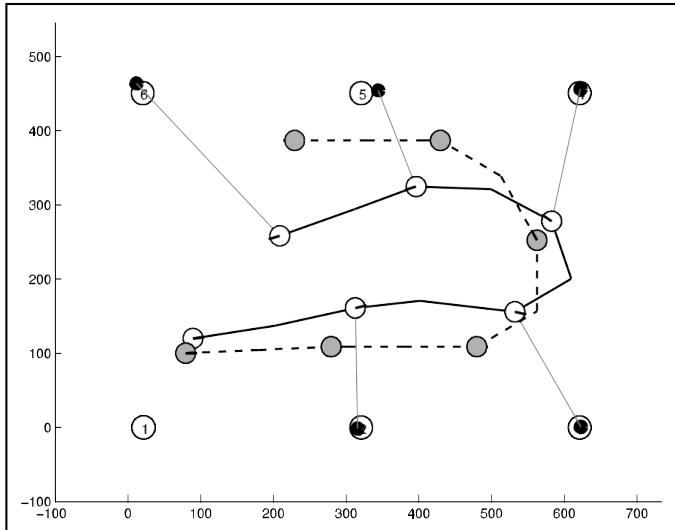
$$8. \quad \Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t \quad \longleftarrow \quad \Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$$

9. Return μ_t, Σ_t

$$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t}$$

$$G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

Ejemplo EKF



Resumen

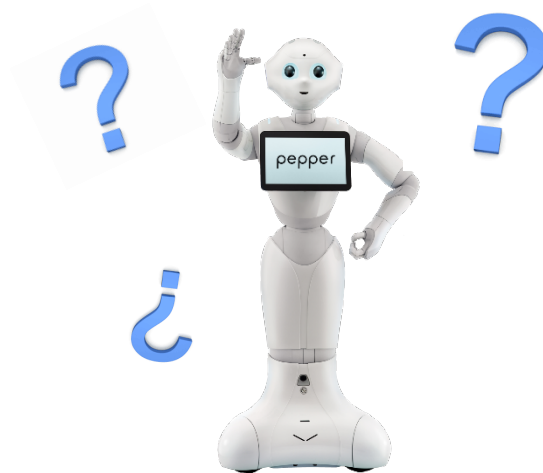
- El EKF es una solución ad-hoc para tratar las no linealidades.
- Realiza linealización local en cada paso
- Funciona bien en la práctica para no linealidades moderadas (ejemplo: localización de marcadores).
- Es óptimo si la medición y el modelo de movimiento son lineales, en cuyo caso el EKF se reduce a KF.
- EKF es una solución aproximada (no es una solución “closed-form”)

Bibliografía/Referencias

- Thrun, Burgard, Fox. Probabilistic Robotics. MIT Press, 2005.
 - Cap. 4 filtros discretos en general, Cap. 8 aplicación a la localización
 - Cap. 3. KF, EKF, cap. 7 aplicación a la localización
- Algunas transparencias/figuras tomadas de <http://www.probabilistic-robotics.org>

Robots Móviles

Filtros Discretos y Filtro de Kalman Extendido



Sergio Orts Escolano
Otto Colomina Pardo

sorts @ ua.es

