

Matematik 2B

Sammanfattning

Otto Martinwall

29 april 2022

Innehåll

1	Förkunskaper (träna detta så att det sitter!)	3
1.1	Negativa tal	4
1.2	Prioriteringsregler	5
1.3	Bråk	6
1.3.1	Addition av bråk	6
1.3.2	Multiplikation av bråk	7
1.3.3	Division av bråk	7
1.4	Potenser	8
1.4.1	Potensregler	9
1.5	Ekvationer	10
1.6	Pythagoras Sats	14
2	Linjära modeller	15
2.1	Koordinatsystem	16
2.1.1	Avståndsformeln	17

2.1.2	Mittpunktsformeln	20
2.2	Funktion	21
2.3	Räta linjens ekvation	22
2.4	Ekvationssystem	23
2.4.1	Substitutionsmetoden	24
2.4.2	Additionsmetoden	27
3	Ickelinjära modeller	29
3.1	Konjugat och kvadreringsreglerna	30
3.2	Polynom	32
4	Statistik	33

-
- 1 Förkunskaper (träna detta så att det sitter!)

1.1 Negativa tal

Ett negativt tal är bara den additiva inversen av samma tal. Om a är ett reellt tal och $-a$ är dess additiva invers, så är $a + (-a) = 0$. Ett sätt att se på det är att den additiva inversen (negativa varianten) av ett tal är lika långt från 0 på tallinjen, men åt andra hållet.

Multiplikation får några egenskaper utav detta, som att negativt gånger negativt blir positivt. Att vända dig om och sedan backa blir detsamma som att bara gå rakt fram från början.

Några regler kring detta är då:

$$(-a)(-b) = ab \quad (1)$$

$$(-a)b = -ab \quad (2)$$

$$a(-b) = (-a)b \quad (3)$$

$$\frac{(-a)}{b} = \frac{a}{(-b)} \quad (4)$$

1.2 Prioriteringsregler

Prioriteringsregler har vi, då att om vi fick välja helt fritt så skulle alla få olika svar. Ordningen är såhär:

1. Paranteser
2. Multiplikation/Division
3. Addition/Subtraktion

Om två av samma prioritet är efter varann, börja från vänster.

Ett exempel är

$$6 \div 2(1 + 2) =$$

$$6 \div 2(3) =$$

$$6 \div 2 \cdot 3 =$$

$$3 \cdot 3 =$$

$$9$$

1.3 Bråk

Bråk är tal som representeras som kan skrivas som en kvot¹ av två heltal. Det kan t.ex vara $\frac{3}{7}$, vilket kan tänkas som *tre sjundedelar*.

1.3.1 Addition av bråk

Lättaste metoden för addition av bråk är att skriva om bråken så att de får samma nämnare²:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \quad (5)$$

$$\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \quad (6)$$

$$\frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \quad (7)$$

$$\frac{13}{12} \quad (8)$$

Metoden jag brukar använda för att skriva om bråken, är att multiplicera täljaren och nämnaren på det ena bråket, med nämnaren på det andra, och tvärt om. I exemplet ovan så har ena bråket nämnaren 3, så jag multiplicerar täljaren och nämnaren med just 3 på det andra bråket, och tvärt om med talet 4 på det förstnämnda bråket. Genom denna metod får bråken samma nämnare då $ab = ba$, som ses i nämnarna på rad (6) till (7). Efter det så kan man addera täljarna på bråken.

¹resultatet av en division

²nedre parten hos ett bråk

Addition och subtraktion fungerar likadant här.

1.3.2 Multiplikation av bråk

Multiplikation av bråk är mycket enkelt.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (9)$$

1.3.3 Division av bråk

Division är en typ av multiplikation, vilket gör denna ganska enkel men aningen klurigare. Division är inversen av multiplikation, så att dividera med 5 är samma sak som att multiplicera med $\frac{1}{5}$. Detta resulterar i att:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \quad (10)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \quad (11)$$

$$\frac{ad}{bc} \quad (12)$$

Det andra bråket vänder alltså bara på sig vid utbytet av divisionstecken mot multiplikationstecken.

1.4 Potenser

Potenser kan ses som repeterad multiplikation i vissa fall³. Alltså att om exponenten⁴ n är ett positivt heltal så gäller detta:

$$a^n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \quad (13)$$

Roten ur kan skrivas på två sätt, där n är ett positivt heltal:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (14)$$

³andra definitioner krävs för att inkludera alla reella eller till och med komplexa exponenter. Det kommer först i universitetsmatten.

⁴En exponent är den övre delen av en potens, alltså det som brukar komma efter man säger *upphöjt till*

1.4.1 Potensregler

Dessa regler gäller för alla tal, alltså inte bara heltal för exponenterna.

$$a^b a^c = a^{b+c} \quad (15)$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \quad (16)$$

$$(a^b)^c = a^{bc} \quad (17)$$

$$(ab)^x = a^x b^x \quad (18)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (19)$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad (20)$$

$$a^0 = 1 \quad (21)$$

1.5 Ekvationer

En ekvation är ett typ av påstående, som innehåller en eller fler variabler (okända). Jag kan påstå att $3x + 2 = 8$ utan att säga vad x är. Just detta är endast sant om $x = 2$.

Ekvationer brukar kräva att man löser ut enskilda variabler i slutändan. Metoden jag brukar ha är att först och efter varje steg se om jag kan förenkla ekvationen genom addition/subtraktion, sedan om det går genom multiplikation/division, och till sist om det går genom potenser.

Exempel 1

$$\frac{x}{x+10} = \frac{24}{54} \quad (22)$$

Först så letar jag om jag kan göra något med addition/subtraktion, vilket inte hjälper här. Nästa möjlighet är om multiplikation/division kan förenkla något, vilket det kan genom multiplikation av $x + 10$ på båda sidor⁵

$$x = \frac{24}{54}(x+10) \quad (23)$$

Nu kollar vi igen. Addition/subtraktion hjälper inget, men multiplikation/division hjälper återigen här. Vi förenklar genom att multiplicera in i parantesen.

⁵Detta förenklar då multiplikation är lättare att hantera än division, så vi vill få bort divisionstecken.

$$x = \frac{24}{54}x + \frac{24}{54} \cdot 10 \quad (24)$$

Återigen så letar vi. Addition/subtraktion verkar hjälpa denna gång då målet är att få x på samma sida av likhetstecknet. Vi subtraherar med $\frac{24}{54}x$. I samma veva kan vi även multiplicera in 10 i bråket på höger sida.

$$x - \frac{24}{54}x = \frac{24}{54} \times 10 \quad (25)$$

$$x - \frac{24}{54}x = \frac{240}{54} \quad (26)$$

Nu så kikar vi igen. Multiplikation/division hjälper för att möjliggöra subtraktion av bråken på vänster sida av likhetstecknet, genom att låta dem få samma nämnare som i 1.3.1.

$$\frac{54}{54}x - \frac{24}{54}x = \frac{240}{54} \quad (27)$$

Nu kan vi alltså subtrahera bråken på vänster sida väldigt lätt.

$$\frac{30}{54}x = \frac{240}{54} \quad (28)$$

Här så hjälper inte addition/subtraktion, men multiplikation/division gör. Vi dividerar med $\frac{30}{54}$ för att x ska bli ensam på vänsterledet.

$$x = \frac{240}{54} \div \frac{30}{54} \quad (29)$$

Här så kan vi ändra om från division av bråken till multiplikation av bråken, på sättet beskrivet i 1.3.3.

$$x = \frac{240}{54} \times \frac{54}{30} \quad (30)$$

54 i nämnaren på första bråket och i täljaren på andra bråket tar ut varann, och resterande steg bör gå rätt smidigt:

$$x = \frac{240}{30} \quad (31)$$

$$x = \frac{24}{3} \quad (32)$$

$$x = 8 \quad (33)$$

Exempel 2

$$x^{\frac{1}{3}} = 3 \quad (34)$$

Här så fungerar inte addition/subtraktion, eller multiplikation/division. Nästa sak att checka är alltså potenser. Här så kan vi använda oss av potensreglerna i 1.4, där $(a^b)^c = a^{bc}$, för att ändra exponenten hos x från $\frac{1}{3}$ till

1.

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = (3)^3 \quad (35)$$

$$x^{\frac{3}{3}} = 27 \quad (36)$$

$$x^1 = 27 \quad (37)$$

$$x = 27 \quad (38)$$

1.6 Pythagoras Sats

Denna är kort, men viktig.

Sats 1. *För en rätvinklig triangel med sidlängderna a och b för vardera katet^a och c för hypotenusan, så gäller det att*

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (39)$$

^ade kanter som är direkt anslutna med det rätvinkliga hörnet

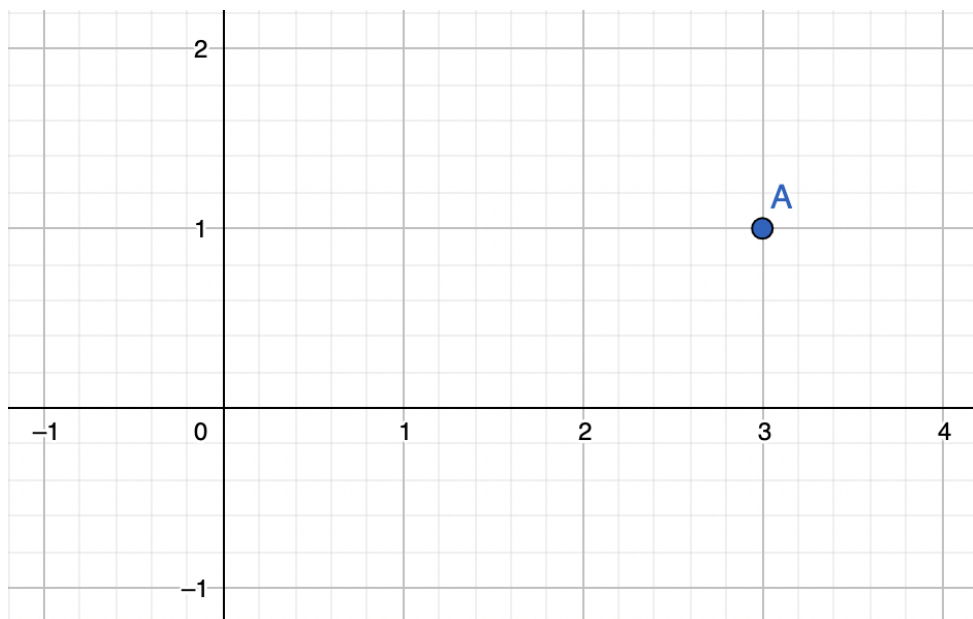
2 Linjära modeller

2.1 Koordinatsystem

Det koordinatsystem som brukar användas i Matematik 2B är tvådimensionellt och består av två reella tallinjer som är vinkelräta och möter varann i *origo* där båda är 0.

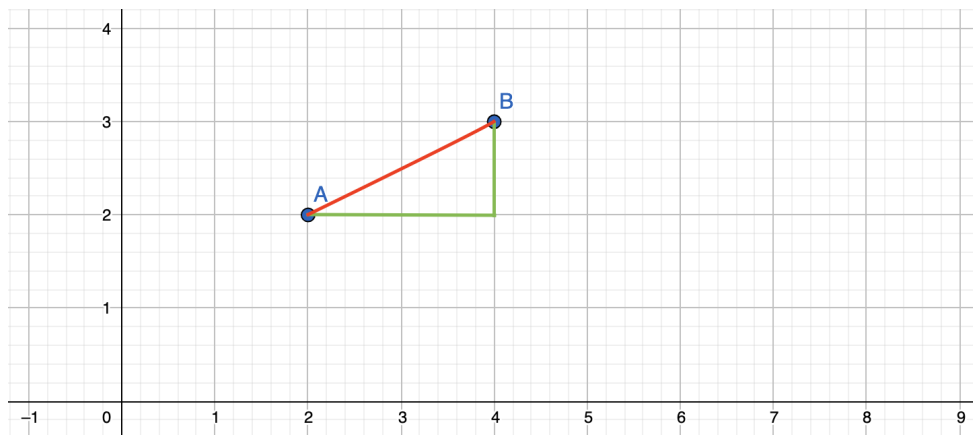
En position, eller *koordinat*, i koordinatsystemet anges som (x, y) där x anger positionen längs den horisontella *x-axeln* och y anger positionen längs den vertikala *y-axeln*.

Här är ett exempel på en koordinat $A = (3, 1)$ i detta koordinatsystem:



2.1.1 Avståndsformeln

Avståndet mellan två punkter i koordinatsystemet från 2.1 kan beräknas med hjälp av Pythagoras Sats från 1.6. Om vi börjar med två koordinater, $A = (2, 2)$ och $B = (4, 3)$



Så kan vi se att de bildar en rätvinklig triangel, där en av kateterna är längs x-axeln och den andra längs y-axeln. Avståndet är då den röda linjen. Om vi vet längden av de två kateterna, så kan vi veta längden för hypotenusan, med pythagoras sats.

Längden av kateten längs x-axeln, som vi kan kalla a , är då absolutvärdet⁶ av differensen mellan koordinaternas x-värden, så den kateten är

⁶absolutvärdet är distansen från 0 på tallinjen, så t.ex är $|-5| = 5$. I fallet ovan så använder vi absolutvärdet då en distans aldrig kan vara negativ, men en differens mellan delar av två koordinater kan det.

$$a = \quad (40)$$

$$|2 - 4| = \quad (41)$$

$$| - 2| = \quad (42)$$

$$2 \text{ (l.e)} \quad (43)$$

Vi kan göra exakt samma sak för kateten längs y-axeln, som vi kan kalla för b .

$$b = \quad (44)$$

$$|2 - 3| = \quad (45)$$

$$| - 1| = \quad (46)$$

$$1 \text{ (l.e)} \quad (47)$$

Då vi vill veta längden av hypotenusan, vilket är avståndet mellan koordinaterna, så kan vi lösa ut variabeln c ur pythagoras sats, och sedan sätta in de värden vi har tagit fram.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (48)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (49)$$

$$c = \sqrt{2^2 + 1^2} \quad (50)$$

$$c = \sqrt{5} \text{ (l.e)} \quad (51)$$

Vi kan nu generalisera det vi gjorde ovan.

Låt $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ och l avståndet mellan koordinaterna. Då är

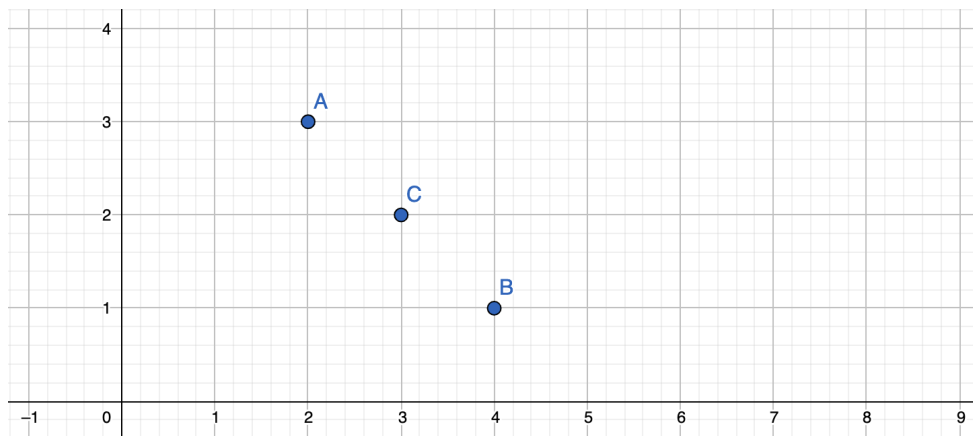
$$l = \sqrt{|a - c|^2 + |b - d|^2} \quad (52)$$

och då absolutvärdefunktionen inte behövs, då vi ändå kvadrerar båda termerna, så kan vi förenkla detta till

$$l = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \quad (53)$$

2.1.2 Mittpunktsformeln

Mittpunktsformeln är väldigt enkel. Målet är att hitta den punkt som är mitt emellan två koordinater.



Låt $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ och låt C vara deras mittpunkt. För att hitta värdet på C så kan vi ta snittvärdet för x -värdet och sedan y -värdet för A och B , vilket är x och y -värdet för C , då C är mitt emellan. Detta leder till att

$$C = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2} \right) \quad (54)$$

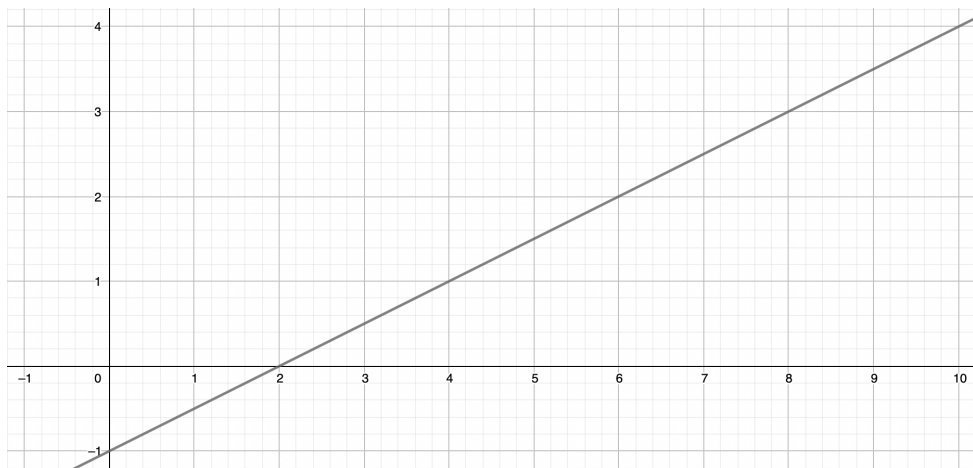
2.2 Funktion

En funktion inom Matematik 2B är något som översätter ett nummer till ett annat. Ett exempel är denna funktion f ,

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad (55)$$

som översätter 2 till 0, eller 4 till 1.

vi kan rita up f grafiskt i koordinatsystemet från 2.1, genom att låta $f(x) = y$.



2.3 Räta linjens ekvation

Räta linjens ekvation brukar skrivas såhär:

$$y = kx + m \quad (56)$$

eller som en funktion:

$$f(x) = kx + m. \quad (57)$$

k -värdet styr förändringshastigheten, alltså hur mycket y -värdet förändras av en ändring hos x , $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Om $y = 3x$ så kommer y -värdet öka med 3 då x -värdet ökar med 1. Om vi väljer två koordinater som ligger på grafen av en linjär funktion f , $A = (x_1, y_1)$ och $B = (x_2, y_2)$, så gäller det att

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (58)$$

m -värdet styr hur mycket vi puttar upp eller puttar ner hela grafen, då det bara är en adderad konstant. m värdet är också det y -värde där en funktion $f(x) = kx + m$ korsar y -axeln, då $f(0) = m$.

$$f(x) = kx + m \Rightarrow f(0) = m \quad (59)$$

2.4 Ekvationssystem

Detta under kallas för ett ekvationssystem. De kan egentligen bestå av flera hundra eller mer ekvationer och variabler, men vi nöjer oss med två.

$$\begin{cases} y + 2x = 8 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad (60)$$

I ett ekvationssystem så kan tre fall inträffa.

- Ekvationssystemet har en lösning
- Ekvationssystemet saknar lösning
- Ekvationssystemet har ett oändligt antal lösningar

Ett sätt att visualisera dessa tre fall, är att skriva om ekvationerna i ekvationssystemet till formen $y = kx + m$ och sedan tänka på dem som linjer i ett koordinatsystem.

$$\begin{cases} y + 2x = 8 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (61)$$

Om två linjer har olika lutning, alltså olika k -värde, så kommer linjerna att korsa varann någonstans och därmed ha en lösning (koordinaten av korsningspunkten är lösningen). Om linjerna har samma k -värde och olika m -värde så är de pararella och möts aldrig, så ekvationssystemet saknar lösning. Om linjerna har samma k -värde och samma m -värde så möts lin-

jerna på ett oändligt antal koordinater, och därmed har ekvationssystemet ett oändligt antal lösningar.

Testa att checka vad för fall som gäller för ekvationssystemet i (60)!

2.4.1 Substitutionsmetoden

Substitutionsmetoden är en metod för att få fram lösningen på ett ekvationssystem. Här under har vi ett ekvationssystem med två variabler

$$\begin{cases} y + 2x = 8 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad (62)$$

För att lösa det, så kan vi följa en viss stegmetod

1. Lös ut en variabel ur den ena ekvationen.
2. Ersätt variabeln i den andra ekvationen med detta uttryck och lös ekvationen.
3. Lösningen till ekvationen sätts in i någon av de ursprungliga ekvationerna, som därefter löses.

I fallet ovan så kan det se ut såhär:

Steg 1, vi börjar med att lösa ut en variabel ur den ena ekvationen.

$$y + 2x = 8 \Rightarrow y = 8 - 2x \quad (63)$$

$$(64)$$

Steg 2, vi ersätter variabeln i den andra ekvationen med detta uttryck, så att det bara finns en variabel i ekvationen, och löser den.

$$2y - x = 1 \quad (65)$$

$$2(8 - 2x) - x = 1 \quad (66)$$

$$16 - 4x - x = 1 \quad (67)$$

$$16 - 5x = 1 \quad (68)$$

$$5x + 1 = 16 \quad (69)$$

$$5x = 15 \quad (70)$$

$$x = 3 \quad (71)$$

Steg 3, vi sätter in lösningen till den andra ekvationen i den ursprungliga ekvationen, och därefter löser den med.

$$y + 2x = 8 \quad (72)$$

$$y + 2(3) = 8 \quad (73)$$

$$y + 6 = 8 \quad (74)$$

$$y = 2 \quad (75)$$

Därmed är lösningen på ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

2.4.2 Additionsmetoden

Additionsmetoden fungerar lite annorlunda, men denna är min personliga preferens i de flesta fallen. Istället för att lösa ut en variabel och sätta in den i en annan ekvation så multiplicerar vi hela ekvationer med konstanter och adderar in dem i andra för att eliminera variabler. Så här går det till, med samma exempel som i 2.4.1:

$$\begin{cases} y + 2x = 8 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad (76)$$

Målet är att eliminera en variabel i varje ekvation så att vi får ekvationer med ensamma variabler i, vilket då är enkelt att lösa. Vi börjar med att multiplicera rad 1 med konstanten (-2) .

$$\begin{cases} -2y - 4x = -16 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad (77)$$

Därefter kan vi addera rad 1 till rad 2

$$\begin{cases} -2y - 4x = -16 \\ -5x = -15 \end{cases} \quad (78)$$

och förenkla rad 2 genom att dividera båda sidor med (-5) .

$$\begin{cases} -2y - 4x = -16 \\ x = 3 \end{cases} \quad (79)$$

Därefter kan vi addera in rad 2, multiplicerat med konstanten 4, i rad 1 för att eliminera x -variabeln där.

$$\begin{cases} -2y = -4 \\ x = 3 \end{cases} \quad (80)$$

Sedan kan vi förenkla rad 1 genom att dividera med (-2) på båda sidor

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \quad (81)$$

Därmed har vi samma svar som i 2.4.1, men genom en annan metod.

3 Ickelinjära modeller

3.1 Konjugat och kvadreringsreglerna

Detta är bara att memorera.

Sats 2. Konjugatregeln

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (82)$$

Motivering:

$$(a + b)(a - b) = \quad (83)$$

$$a^2 - ab + ab + b^2 = \quad (84)$$

$$a^2 + b^2 \quad (85)$$

Sats 3. Kvadreringsreglerna

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (86)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (87)$$

Motivering för första:

$$(a + b)^2 = \quad (88)$$

$$(a + b)(a + b) = \quad (89)$$

$$a^2 + ab + ba + b^2 = \quad (90)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad (91)$$

Motivering för andra:

$$(a - b)^2 = \quad (92)$$

$$(a - b)(a - b) = \quad (93)$$

$$a^2 - ab - ba + (-b)^2 = \quad (94)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \quad (95)$$

3.2 Polynom

Definition 1. *En polynom är en funktion som kan skrivas i formen*

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (96)$$

där n är ett positivt heltal från 0 och uppåt och $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ är konstanter.

Utifrån detta så kan vi se att linjära funktioner är polynomer där konstanten med index 1 inte är lika med noll, men att alla konstanter med högre index är lika med noll. Något som Matematik 2B kör hårt på är dock just andragsgradsfunktioner, vilket är polynomer där konstanten med index 2 inte är lika med noll men alla konstanter med högre index är lika med noll.

En andragsgradsfunktion kan därmed skrivas i formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (97)$$

som det görs i de allra flesta matteböcker.

4 Statistik