

FÖRKLARINGAR AV NÅGRA OLIKA MATEMATISKA KONCEPT

OTTO DANIEL MARTINWALL

CONTENTS

1. Macluarin- och Taylorserier	3
2. Eulers formel	10
3. Simulering av himlakroppars rörelse	15
4. Mandelbrottmängden	21
5. Dubbelpendeln	22

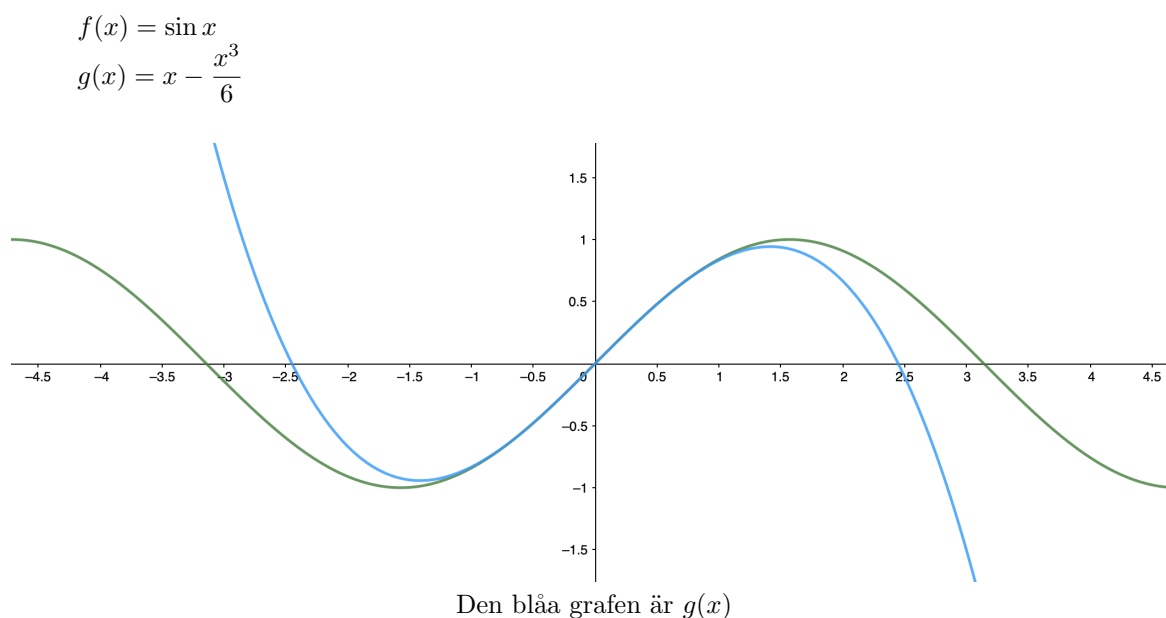
Denna samling av förklaringar innehåller inga rigorösa bevis, men syftet är istället att innehållet ska ge förståelse av de olika valda områdena. Jag har skapat detta för mig själv så detta är egentligen bara väldigt välskrivna anteckningar. Vissa delar är inspirerade av 3Blue1Brown och jag rekommenderar den youtubekanal starkt.

1. MACLUARIN- OCH TAYLORSERIER

Ibland kan det vara användbart att approximera en funktion till formen av en polynom för att de är enklare att arbeta med. Om vi får en ekvation som t.ex. innehåller $\sin x$ så kan den i vissa fall bli svår att lösa eller till och med omöjlig (för vissa differentialekvationer), men om vi kan approximera $\sin x$ till en polynom

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

så blir ofta problemen mycket enklare då polynomer oftast är enklare att räkna med. Vi kan se på graferna av dessa två funktioner att de ger väldigt lika värden runt $x = 0$.



Hur kommer man då fram till detta, och går det att göra bättre approximationer?

I differentialekalkyl så har vi lärt oss att derivator styr formen på grafer av funktioner. Om derivatan är positiv så kan det visuellt ses som att lutningen är uppåtgående och om andraderivatan är negativ så kan det ses genom att lutningen minskar i samband med att x ökar. Om vi har synen av att derivatorna (första, andra, tredje, osv) formar grafen av en funktion så blir fortsättningen lättare.

Vi benämner en polynom i syfte att försöka forma den utefter $h(x) = \cos x$ nära $x = 0$.

$$P(x) = a + bx + cx^2$$

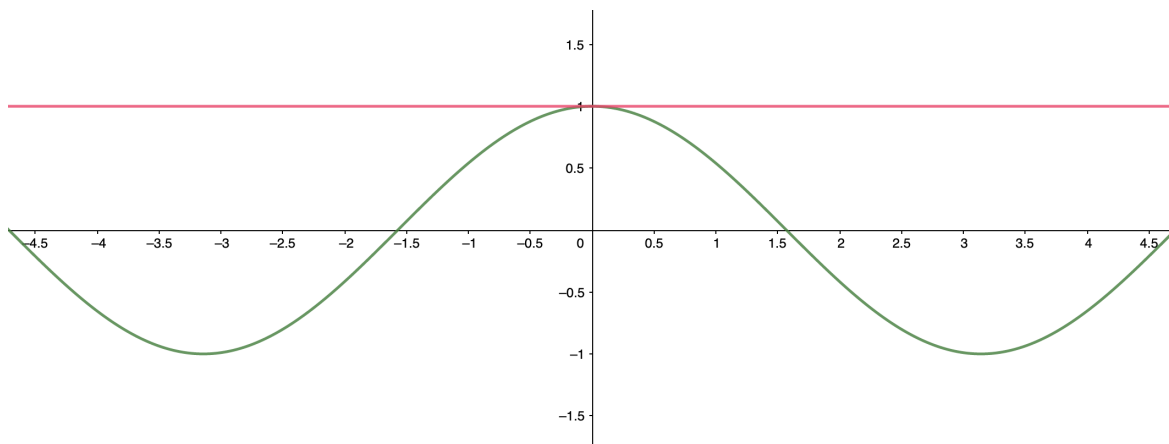
Vi kan styra värdena på a , b och c för att ändra formen på grafen av $P(x)$. Om vi ser till att $P(0) = h(0)$, $P'(0) = h'(0)$, $P''(0) = h''(0)$, o.s.v. så borde graferna formas liknande runt $x = 0$. Vi börjar med att se vad a borde vara.

$$P(0) = a$$

$$h(0) = \cos(0) = 1$$

$$P(0) = h(0) \iff a = 1$$

$$P(x) = 1 + \dots$$



Den röda linjen är $y = 1$

Det är nu rätt självklart att $a = 1$, för det betyder att $P(x)$ korsar $h(x)$ vid $x = 0$. Vi fortsätter med nästa konstant, b .

$$P'(x) = b + 2cx \Rightarrow P'(0) = b$$

$$h'(x) = -\sin x \Rightarrow h'(0) = 0$$

$$P'(0) = h'(0) \iff b = 0$$

$$P(x) = 1 + 0x + \dots = 1 + \dots$$

Det ändrade inte så mycket, men vi fortsätter med andraderivatans på samma sätt.

$$P''(x) = 2c \Rightarrow P''(0) = 2c$$

$$h''(x) = -\cos x \Rightarrow h''(0) = -1$$

$$P''(0) = h''(0) \iff 2c = -1 \iff c = -\frac{1}{2}$$

Detta betyder att;

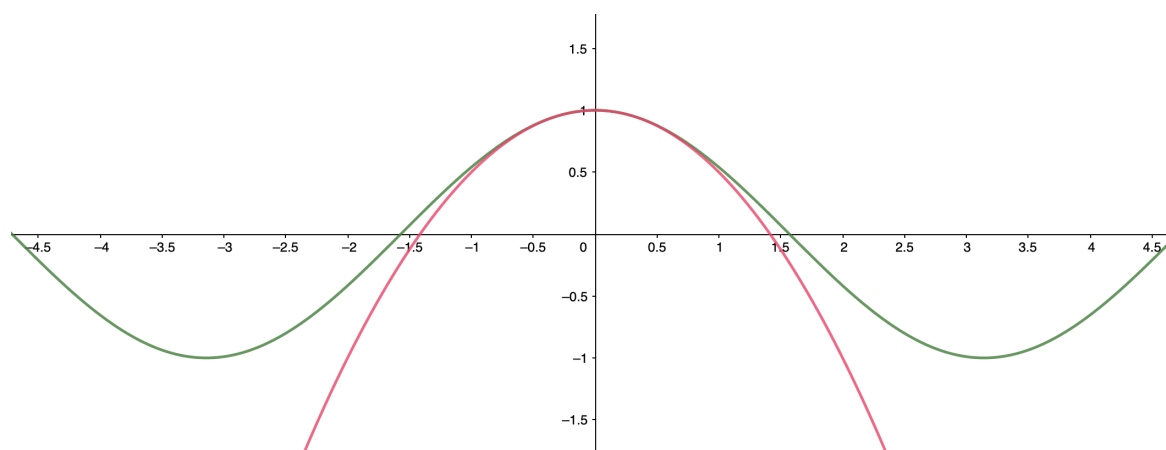
$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

och alltså att;

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$



Den röda grafen är $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$P(x) \approx h(x)$ för val av x nära $x = 0$, vilket var målet.

Nu är såklart frågan; går detta att göra för alla funktioner? Hur gör vi en generell metod? För att lösa det så behöver vi se mönstret i vad vi gjorde.

Om vi definierar en polynom $Q(x)$

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$$

och vi vill skriva konstanten a_n på ett annat vis, då kan vi få fram konstanten a_n genom att ta den n :te derivatan $Q^{(n)}(x)$ som då eliminerar alla termer åt vänster, och om vi då sätter $Q^{(n)}(0)$ så elimineras alla termer åt höger som fortfarande är multiplicerade med något antal x . Detta betyder alltså att

$$Q^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

” $n!$ ” är där för att vid varje derivering så multipliceras termen med exponenten av x och för varje derivering så minskar den exponenten med 1 (enligt deriveringsregeln nedan) så a_n multipliceras då med $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots$ fram tills att $(n-k) = 1$, vilket är samma sak som att säga att a_n multipliceras med $n!$ enligt definitionen av fakultet;

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^n \\ f'(x) &= anx^{n-1} \\ f''(x) &= an(n-1)x^{n-2} \\ f'''(x) &= an(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ f^{(4)}(x) &= an(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ &\dots \end{aligned}$$

Om vi då fortsätter med $Q(x)$;

$$Q^{(n)}(0) = a_n \cdot n! \iff a_n = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!}$$

Vilket betyder att;

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q(x) = \frac{Q^{(0)}(0)}{0!} + \frac{Q^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{Q^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{Q^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{Q^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{Q^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

och ett snyggare sätt att skriva detta på är;

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Nu är vi snart vid Maclaurinserien i sin fullhet. Om vi definierar en oändlig polynom;

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Så kan vi skriva den som;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

vilket är Maclaurinserien av $f(x)$.

Det som är praktiskt med denna serie är att vi kan använda den till att skriva icke-polynomfunktioner till formen av en polynom. För icke-polynomfunktioner som har ett mönster i hur derivatorna ser ut så kan vi faktiskt skapa en oändlig polynom som är lika med den funktionen, med hjälp av maclaurinserien. Vi testar $h(x) = \cos x$ från tidigare, som exempel. Derivatorna av $\cos x$ följer ett tydligt mönster;

$$\begin{aligned}h(x) &= \cos x \\h^{(1)}(x) &= -\sin x \\h^{(2)}(x) &= -\cos x \\h^{(3)}(x) &= \sin x \\h^{(4)}(x) &= \cos x \\&\dots\end{aligned}$$

vilket betyder att;

$$\begin{aligned}h(0) &= 1 \\h^{(1)}(0) &= 0 \\h^{(2)}(0) &= -1 \\h^{(3)}(0) &= 0 \\h^{(4)}(0) &= 1 \\&\dots\end{aligned}$$

och alltså att;

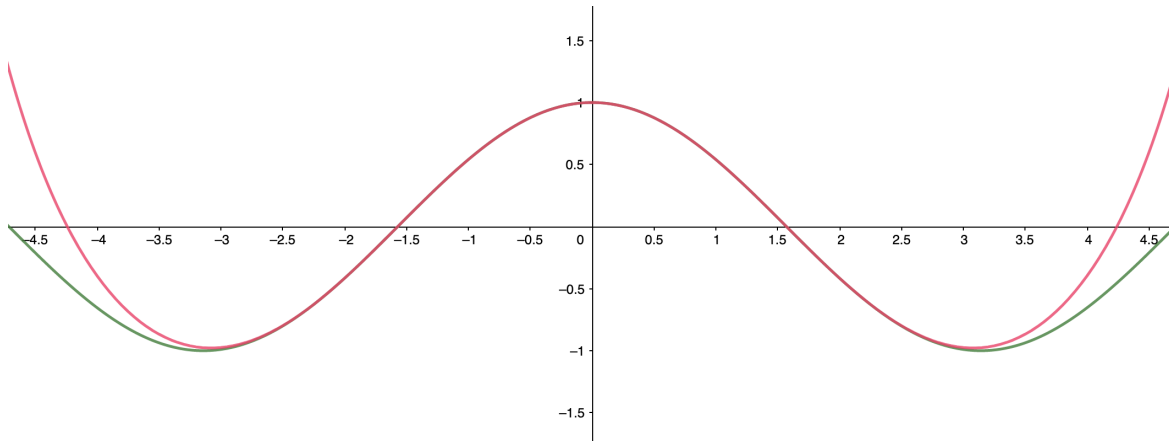
$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k \\&\Downarrow \\h(x) &= \frac{h^{(0)}(0)}{0!} + \frac{h^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{h^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{h^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{h^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots \\&\Downarrow \\h(x) &= \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!} x + \frac{-1}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots \\&\Downarrow \\h(x) &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots \\&\Updownarrow\end{aligned}$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k$$

\Downarrow

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Om vi nu testar att ta de första fem termerna utefter denna serie och ser hur den approximerar $\cos x$ så kan vi se att det definitivt fungerar;



Den röda grafen är $y = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$

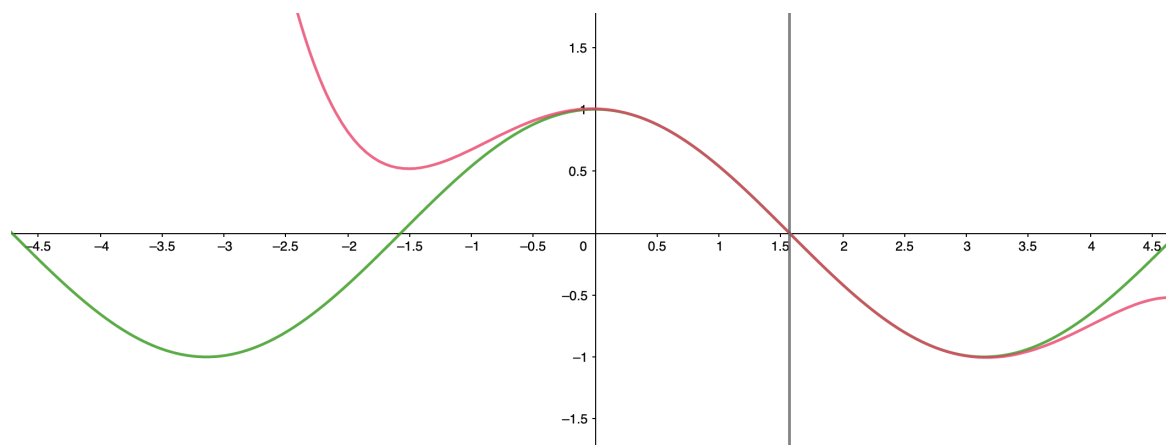
Detta kapitel nämner också en så kallad "Taylorserie", så vad är det då? Det är en mer generell Maclaurinserie som kan jämföra derivatorna runt $x = a$ istället för $x = 0$, vilket är användbart ifall man behöver approximera en funktion runt ett annat värde än just $x = 0$. Vi kan bygga oss fram till definitionen på ett liknande sätt:

Vi definierar en oändlig polynom;

$$f(x) = a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \dots$$

Anledningen varför vi har faktorer av $(x-a)$ är att vi vill kunna eliminera alla termer åt höger om någon konstant efter en viss mängd deriveringar, genom att evaluera den derivatan av polynomen vid $x = a$, och inte vid $x = 0$, som vi gjorde för Maclaurinserien. Detta gör att vi kan bygga serien med information vid $x = a$ istället för vid $x = 0$, vilket kommer att leda till att när vi väljer ett ändligt antal termer från den oändliga serien för att skapa en approximation av en icke-polynom så kommer den att approximera bäst runt $x = a$ istället för $x = 0$.

Med den förståelsen så kan vi fortsätta med polynomen $f(x)$. Med samma argument som tidigare så ska detta stämma;



taylorapproximering av $\cos x$ med fyra termer, evaluerad vid $x = \frac{\pi}{2}$

$$f^{(n)}(a) = a_n \cdot n! \iff a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Vilket betyder att;

$$f(x) = a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \dots$$

\Updownarrow

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

\Updownarrow

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Vilket är Taylorserien i sin fullhet. I detta kapitel så har jag valt att visualisera detta med hjälp av trigonometriska funktioner men detta kan självklart användas till att approximera exponentiella funktioner, logaritmiska funktioner och till och med komplexa funktioner (checka e^{ix} om du är nyfiken!). En viktig sak att nämna är att en taylorserie inte finns för alla funktioner. En funktion måste vara analytisk för att ha en ekvivalent taylorserie. Ett exempel som inte har någon taylorserie är $s(x) = |x|$, för $s(x)$ är inte deriverbar vid $x = 0$.

2. EULERS FORMEL

I detta kapitel så kommer jag anta förståelse av grunderna inom komplexa tal, och då menar jag hantering av addition och multiplikation och vad det resulterar i visuellt sett.

Många har nog sett denna formel någon gång, Eulers formel;

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Det är ganska lätt att visa att det stämmer, rent algebraiskt, med hjälp av macluarinserierna av e^x , $\cos x$ och $\sin x$ (som vi har gått igenom i ett av de andra kapitlena);

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

och;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

och;

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$i \sin x = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - i\frac{x^7}{7!} + i\frac{x^9}{9!} + \dots$$

och om vi nu delar upp e^{ix} i två delar och jämför med $\cos x + i \sin x$ så kan vi se att formeln stämmer;

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Formeln är alltså tydligt korrekt, men detta ger (för mig iallafall) ingen insikt i varför det borde stämma, mer än att siffrorna bara hänger ihop. Jag ska nu försöka ge en alternativ förklaring som inte är ett bevis, men som ger en mer visuell förståelse av formeln.

Vi börjar med en av de första frågorna som kan uppträda när man tittar på eulers formel, vad betyder det ens att ha en imaginär exponent? Ett sätt att se på det är att se vad som händer när vi deriverar ett uttryck med en imaginär exponent;

$$f(x) = 2^{ix}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = i \cdot \log(2) \cdot 2^{ix}$$

Om vi nu sätter in $x = 0$;

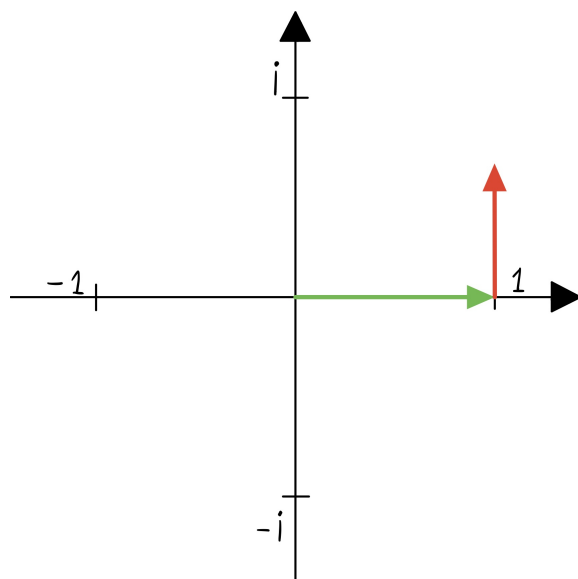
$$f(0) = 2^{0i} = 1$$

$$f'(0) = i \cdot \log(2) \cdot 2^{0i} = i \cdot \log(2) \cdot f(0)$$

så kan vi visualisera det såhär i det komplexa talplanet om vi tänker på funktionen och dess derivata som pilar;

den gröna pilens ände: $f(0)$

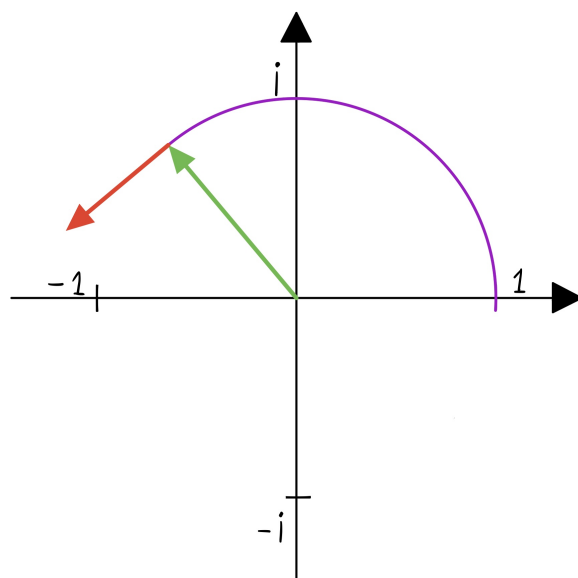
den röda pilen: $f'(0) = i \cdot \log(2) \cdot f(0) \approx i \cdot 0.69 \cdot f(0)$

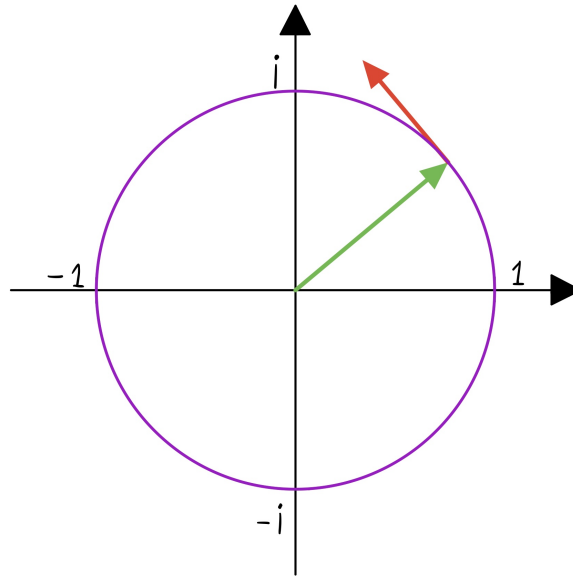


För att den röda pilen är $\approx i \cdot 0.69 \cdot f(0)$ så är det rimligt att den ser ut som den gröna pilen fast med en 90 graders rotering åt vänster och med förkortad längd. Detta faktum gäller för alla x och inte bara för $x = 0$. Vad det betyder är att förändringshastigheten av $f(x)$ alltid är vinkelrät mot (och i detta fallet också nedskalad i storlek) $f(x)$. Den viktiga slutsatsen utifrån detta är att om vi låter x gå från 0 till något annat värde så kommer inte den gröna pilen att bli längre eller kortare, då förändringshastigheten är vinkelrät. Det som istället sker är att ändan av den gröna pilen ritar ut en cirkel när x ökar just för att förändringshastigheten alltid är vinkelrät mot positionen;

den gröna pilens ände: $f(x)$

den röda pilen: $f'(x) \approx i \cdot 0.69 \cdot f(x)$





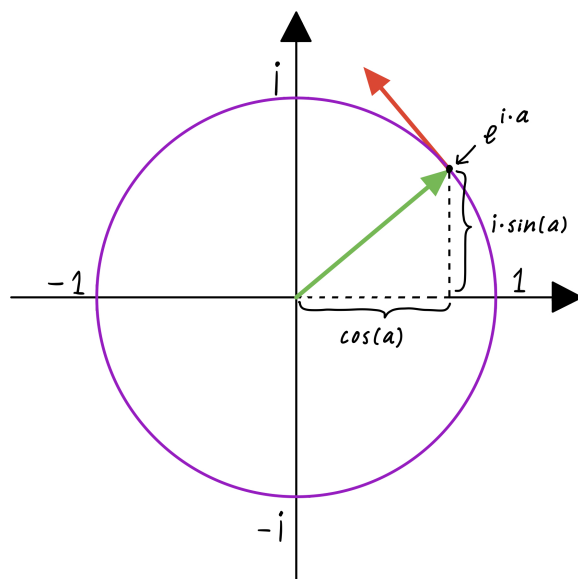
Nu kanske du börjar se att det finns något slags samband mellan imaginära exponenter och trigonometriska uttryck, om du har sett enhetscirkeln innan. Om vi nu övergår till att använda $f(x) = e^{ix}$ istället för $f(x) = 2^{ix}$ så får vi lite nya användbara egenskaper;

$$f(x) = e^{xi}$$

$$f'(x) = i \cdot e^{xi} = i \cdot f(x)$$

Detta betyder att förändringshastigheten har exakt samma magnitud som funktionen $f(x)$, och förändringshastigheten är såklart också vinkelrät vilket medför att banan fortfarande skapar en cirkel. Det intressanta med att $f'(x) = i \cdot f(x)$ är då att om vi förändrar x så kommer vinkeln mellan den positiva parten av den reella tallinjen och den gröna pilen att ändras med exakt samma värde, i radianer. Detta känns mer rimligt om vi betraktar hur $f(x)$ rör sig längs randen på denna cirkel som att den rör sig en viss sträcka. Det gör att förändringshastigheten (hastigheten) är hur mycket sträcka den tar sig över någon mängd tid, och då vi vet att förändringshastigheten (hastigheten) är 1 så kommer $f(b)$ röra sig b längdenheter längs randen på cirkeln för att radien är 1, vilket alltså är detsamma som att säga att vinkeln ändras med b radianer. Det betyder att $f(\pi) = e^{i\pi} = -1$ för visuellt kan det ses som att vi vandrar π längdenheter längs randen och hamnar på -1 , då π längdenheter är halva cirkelns omkrets.

Varför är då $e^{ix} = \cos x + i \sin x$? Om vi tittar på både den reella och den imaginära parten av e^{ix} så ser vi att de följer $\cos x$ och $i \sin x$;



Därmed är det rimligt att $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, vilket var målet att försöka visa.

3. SIMULERING AV HIMLAKROPPARS RÖRELSE

Målet med detta kapitel är att beskriva matematiken bakom ett en generalisering av ett dynamiskt system som beskriver hur något antal himlakroppar rör sig relativt till ett koordinatsystem, när de påverkar varann med gravitation enligt newtons gravitationslag. För att sedan simulera ett valt dynamiskt system så behöver vi sedan veta alla himlakroppars koordinater i det valda koordinatsystemet och deras hastigheter och i vilken riktning de pekar, samt allas massor för det är vad som avgör med vilken kraft de drar på varann.

Vi börjar med att definiera en positionsvektorfunktion som beskriver positionen över tid för någon planet i ;

$$\vec{s}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

x_i , y_i och z_i är alla funktioner av tid men jag skriver inte ut dem som $x_i(t)$ för det kommer att se kladdigt ut senare när uttrycken blir större.

$$\dot{\vec{s}}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$\ddot{\vec{s}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix}$$

Om vi deriverar \vec{s}_i så får vi fram hastighetsvektorfunktionen för planet i , och om vi deriverar igen så får vi accelerationsvektorfunktionen för planet i . För att göra det stilrenare så kan vi skriva derivatan av \vec{s}_i som $\dot{\vec{s}}_i$ med en prick ovanför, så andraderivatan har då två prickar ovanför. Samma notation gäller även för x_i , y_i och z_i . När vi väl skapar ett system så måste vi välja positionen för alla planeter och deras massor, men det som sedan styr hur systemet utvecklar sig är ju såklart gravitationen. Gravitationen är vad som styr accelerationen för planeten i vilket i sin tur förändrar hastigheten som i sin tur förändrar positionen, över tid. Om vi förstår gravitationen så följer resten.

Många är nog familjär med newtons gravitationslag, som ofta bara uttrycks i en dimension. Vi vill såklart ha den i tre.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F är då kraften som verkar på båda planeterna i riktning mot varann, m_1 och m_2 är planeternas massor, r är avståndet mellan planeternas mittpunkter och G är gravitationskonstanten som beskriver hur stark gravitationen är. Det intressanta med vektorer är att vi kan dela upp dem i summor av skalärfunktioner multiplicerat med basvektorer i koordinatsystemet, så som vi gjorde med positionsvektorfunktionen.

$$F_{ijx} = G \frac{m_i m_j}{r^2} \cdot \frac{r_x}{r} = m_i \ddot{x}_{ij}$$

\Downarrow

$$\ddot{x}_{ij} = G \frac{m_j}{r^2} \cdot \frac{r_x}{r}$$

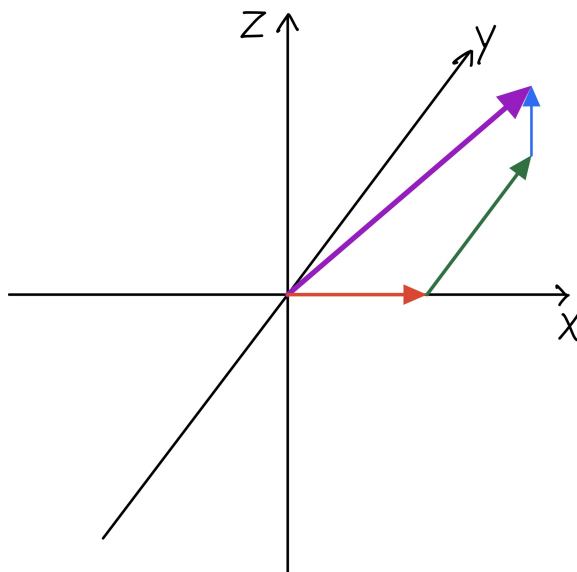
Med \ddot{x}_{ij} så menar jag accelerationen för planet i p.g.a planet j i x -led. Om det hade stått \ddot{x}_{ji} så hade det varit accelerationen för planet j p.g.a planet i i x -led. Anledningen varför jag multiplicerar uttrycket med $\frac{r_x}{r}$ är för att om avståndet mellan planeterna är r men vi vill ha accelerationen i x -led så måste vi ta hänsyn till att accelerationen i x -led bara är en andel av den totala accelerationen, och därmed multiplicerar vi med hur stort avståndet är i x -led dividerat med det totala avståndet. En visualisering för vad jag menar:

r : lila pil

r_x : röd pil

r_y : grön pil

r_z : blå pil



planet i vid origo och planet j vid ändan av den lila pilen

storleken på r är alltså alltid positivt, men t.ex r_x kan vara negativ ifall planet j har en x -koordinat som är mindre än för planet i och man mäter r_x ifrån perspektivet av planet i ;

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

$$r_x = x_j - x_i$$

$$\ddot{x}_{ij} = G \frac{m_j}{r^2} \cdot \frac{r_x}{r}$$

\Downarrow

$$\ddot{x}_{ij} = G \frac{m_j}{(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2})^2} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}$$

\Updownarrow

$$\ddot{x}_{ij} = \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}}$$

Samma argument kan vi använda för y och z också, så vi kan skriva hela accelerationen som för planet i p.g.a j som;

$$\ddot{\vec{s}}_{ij} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{ij} \\ \ddot{y}_{ij} \\ \ddot{z}_{ij} \end{bmatrix}$$

\Updownarrow

$$\ddot{\vec{s}}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \frac{Gm_j(y_j - y_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \frac{Gm_j(z_j - z_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

Vad händer om vi har fler än två planeter i systemet? Alla planeter drar på varann med någon kraft, så accelerationen för planet i beror då på alla resterande planeter i systemet. Ifall vi har ett system med n planeter, och planet i är en av dem, $i \in (1, n)$, så kan vi summera ihop den påverkan som alla resterande planeter i systemet har på planet i såhär;

$$\ddot{s}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(y_j - y_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(z_j - z_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \end{bmatrix} & , i = 1 \\ \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(y_j - y_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(y_j - y_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(z_j - z_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(z_j - z_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \end{bmatrix} & , i \in [2, (n-1)] \\ \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(y_j - y_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(z_j - z_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \end{bmatrix} & , i = n \end{cases}$$

Det blev ett väldigt stort uttryck men vi kan bryta ner det och förstå vad som står här. Som det står i uttrycket så gäller den övre parten om $i = 1$. Om vi tittar på accelerationen i x -led, alltså detta uttryck högst up:

$$\sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}}$$

Då så ser vi att summeringen först adderar accelerationen för planet i som konsekvens av planet $i + 1$, vilket alltså är planet 2 i detta fall. Efter det så adderar den också accelerationen för planet i som konsekvens av planet $i + 2$, vilket är planet 3. Sådär fortsätter det upp till planet n som är den sista planeten i systemet. Summeringen lägger alltså ihop den totala accelerationen som planet i får i x -led som konsekvens av alla andra planeter i systemet. Under den summeringen så finns samma uttryck men utbytt med y och sedan z för att göra samma sak i y -led och z -led.

Nästa möjliga fall är då $i \in [2, n-1]$, vilket betyder att planet i kan vara planet 2 eller uppåt förutom att vara planet n . I detta fall så måste vi först addera ihop den totala accelerationen som konsekvens av planeterna med lägre nummer än planet i , vilket ser ut såhär för x -ledet:

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{3/2}}$$

Summeringen börjar med att addera accelerationen för planet i som konsekvens av planet 1, och sedan samma sak med planet 2, o.s.v. fram tills planet $i-1$. Vi kan ju inte addera accelerationen för planet i som konsekvens av planet i för det skulle resultera i att vi måste dividera med 0 då avståndet mellan samma planet är 0, så vi får istället skapa en till summa som ser likadan ut förutom att den börjar vid planet $i+1$ och slutar vid planet n . Detta kan ses i uttrycket för accelerationen i x -led när kravet $i \in [2, n-1]$ är uppfyllt:

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{3/2}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{3/2}}$$

Samma argument används för accelerationen i y -led och z -led.

När $i = n$ så görs en likadan summering förutom att vi startar med att addera accelerationen som konsekvens av planet 1 och sedan alla resterande planeter upp till planet $i-1$ för planet i är ju som sagt planet n . Såhär ser det ut i x -led:

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{3/2}} \text{ spc}$$

Samma argument används såklart också för accelerationen i y -led och z -led.

Allt detta sammanlagt brukar vanligtvis skrivas på ett annat vis där man skriver ut vektorer istället för alla dess komponenter, och det är lite mer kompakt:

$$\ddot{\vec{s}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

Jag föredrar dock när det är helt utskrivet som på sida 18 för jag tycker det är tydligare. Hur använder vi då detta för att skapa ett dynamiskt system? Vi börjar med att definiera en vektorfunktion av tid som innehåller positionen och hastigheten för alla planeter i systemet och sedan deriverar vi den:

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \vec{s}_1 \\ \dot{\vec{s}}_1 \\ \vec{s}_2 \\ \dot{\vec{s}}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \\ \dot{\vec{s}}_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\vec{u}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\vec{s}}_1 \\ \ddot{\vec{s}}_1 \\ \dot{\vec{s}}_2 \\ \ddot{\vec{s}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\vec{s}}_n \\ \ddot{\vec{s}}_n \end{bmatrix}$$

Om vi nu ska använda detta för att se hur systemet utvecklar sig så måste vi först välja något antal planeter, n , sedan måste vi ge dem någon startposition i vårt koordinatsystem och sedan måste de också få någon starthastighet i någon riktning. Detta görs genom att välja startvärdena vid $t = 0$ för alla positionsvektorfunktioner och hastighetsvektorfunktioner för alla planeter, som finns i vektorfunktionen $\vec{u}(t)$. När vi har gett planeterna varsin position och hastighet med riktning vid $t = 0$ så kan vi intressera oss av hur hastigheterna och därmed positionerna kommer att förändras över tid, vilket vi kan få reda på genom accelerationen som är en konsekvens av gravitationskrafterna mellan alla planeter. För det behöver vi också ange massan hos varje planet i systemet. Vi har redan beskrivit accelerationen för någon planet i i ett system med n planeter, så vi kan nu ge värden på alla komponenter i $\vec{u}(t)$ och $\dot{\vec{u}}(t)$ vid $t = 0$. För att hoppa fram i värden på t förbi $t = 0$ till tiden $t = t_a$ så kan vi använda eulers stegmetod:

$$\dot{\vec{u}}(t) = f(t, \vec{u}(t))$$

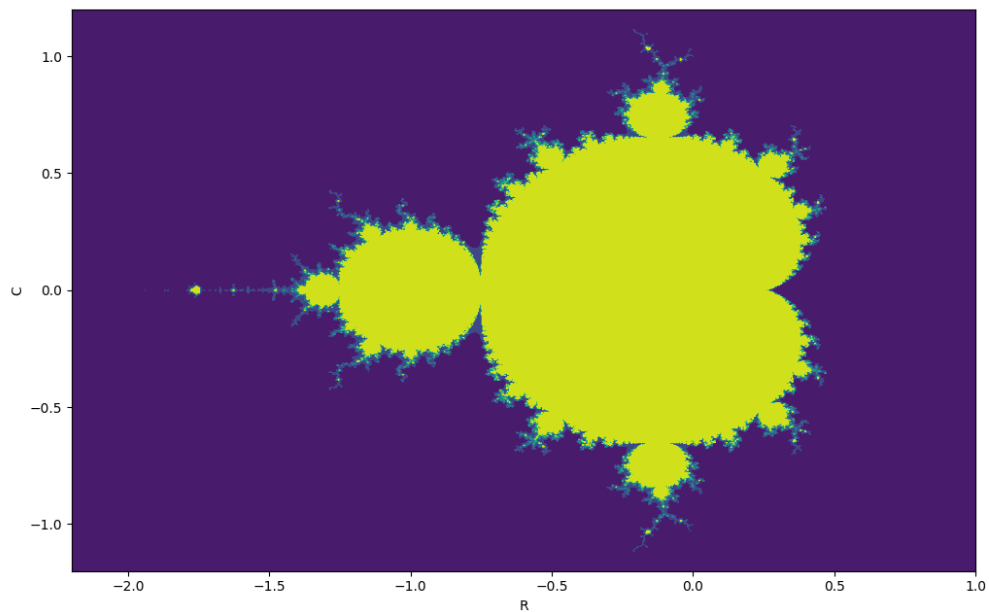
$$\vec{u}_0 = \vec{u}(t_0)$$

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + hf(t_k, \vec{u}_k)$$

$$\vec{u}_k \approx \vec{u}(t_k)$$

Vi kan därmed veta systemets information (alla planets position och hastighet med riktning) fram i tiden med hjälp av att ta små diskreta tidssteg och se hur systemet utvecklar sig. Om en planet rör sig med en hastighet åt något håll så kan vi veta hur positionen förflyttar sig om vi multiplicerar med ett litet tidssteg, och sedan vet vi hur hastigheten förändras över samma tid genom att multiplicera accelerationen med ett litet tidssteg. På det sättet hoppar vi alltså fram, enligt eulers stegmetod. Det finns många andra mer avancerade stegmetoder för numeriska lösningar till differentialekvationer, men eulers stegmetod är den enklaste och den fungerar ifall precisionen inte är så viktig.

4. MANDELBROTTMÄNGDEN



(renderad med python och matplotlib)

Detta är en avbild av ett mönster som snabbt hittas om man googlar på "Mandelbrot Set". Vad är då det?

Mandelbrottmängden, så som det heter på svenska, är den mängden punkter c i det komplexa talplanet där denna rekursiva talföljd konvergerar när n går emot oändligheten.

$$z_0 = 0$$

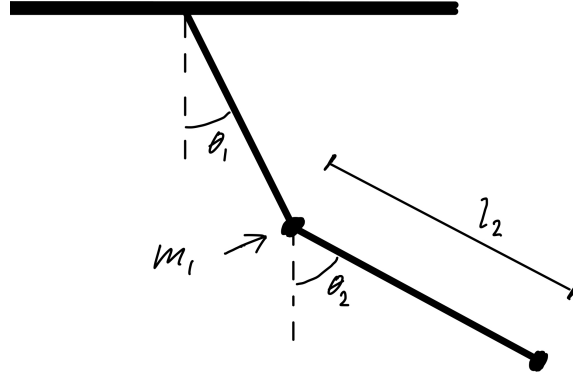
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

De punkter som syns som gula i bilden är inom denna mängd, och där det övergår mot lila så visar färggradienten ungefär hur snabbt talföljden divergerar.

ÄR INTE FÄRDIG HÄR

5. DUBBELPENDELN

I detta kapitel så är målet att beskriva rörelsen för en dubbelpendel genom att komma fram med ekvationerna för vinkelaccelerationen för vardera pendel, då det gör det möjligt att sedan använda en numerisk metod för att simulera dubbelpendeln. Vi börjar med att definiera vad vi menar med dubbelpendeln:



Pendel 1 har sitt fäste i origo i ett koordinatsystem av \mathbb{R}^2 . y -axeln är positiv över origo och är vertikal i denna bild, och x -axeln är positiv till höger om origo och är horisontell i denna bild. Pendel 1 har alltså en vinkel θ_1 som är 0 radianer när pendel 1 ligger rakt ner längs gravitationsfältet. Pendel 1 har också en längd L_1 och en partikel längst ut med massan m_1 . Samma gäller då för pendel 2. Utifrån detta så kan vi lätt beskriva positionen, hastigheten och accelerationen för de två partiklarna:

- (1) $x_1 = L_1 \sin \theta_1$
- (2) $\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1$
- (3) $\ddot{x}_1 = \ddot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin \theta_1$
- (4) $y_1 = -L_1 \cos \theta_1$
- (5) $\dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1$
- (6) $\ddot{y}_1 = \ddot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos \theta_1$
- (7) $x_2 = x_1 + L_2 \sin \theta_2$
- (8) $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \cos \theta_2$
- (9) $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{\theta}_2 L_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin \theta_2$
- (10) $y_2 = y_1 - L_2 \cos \theta_2$
- (11) $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2$
- (12) $\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + \ddot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos \theta_2$

Enbart detta hjälper dock inte så värst mycket. Vi behöver veta vinkelaccelerationerna, vinkelhastigheterna och vinklarna för att kunna veta vad de motsvarar i x och y . För att kunna ta reda på dem så tänker jag använda mig av Lagrangemekanik.

Lagrangemekanik.

Till skillnad från newtonsk mekanik så behöver vi inte analysera några krafter, men istället så använder vi oss av restriktionerna för skalären energi i systemet genom konceptet som kallas *The Principle of Least Action*. *The Principle of Least Action* säger att den så kallade *Action* är definierad som:

$$(13) \quad S = \int_{t_2}^{t_1} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt$$

där q^i och \dot{q}^i är generaliserade koordinater och hastigheter med riktning, och L är *lagrangen* av systemet som definieras som:

$$(14) \quad L = T - U$$

där T är den totala rörelseenergin i systemet och U är den totala potentiella energin i systemet. Om den så kallade *Action* är vid sin extrempunkt, som då visar den väg som systemet faktiskt tar, så stämmer denna ekvation som kallas *Euler-Lagrange equation*:

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

Uträkning.

Det första vi alltså behöver göra är att ta fram *lagrangen* i systemet, som vi kan få fram om vi vet rörelseenergin och den potentiella energin i systemet enligt ekvation (14).

(16)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 =$$

(17)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) =$$

(18)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\left(\sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j L_j \cos \theta_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j L_j \sin \theta_j \right)^2 \right) =$$

(19)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\left(\sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j^2 L_j^2 \cos^2 \theta_j + 2 \sum_{j \neq k}^i \dot{\theta}_j L_j \cos \theta_j \dot{\theta}_k L_k \cos \theta_k \right) + \left(\sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j^2 L_j^2 \sin^2 \theta_j + 2 \sum_{j \neq k}^i \dot{\theta}_j L_j \sin \theta_j \dot{\theta}_k L_k \sin \theta_k \right) \right) =$$

(20)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\left(\sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j^2 L_j^2 + 2 \sum_{j \neq k}^i \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k L_j L_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right) \right) =$$

(21)

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{2} m_i \dot{\theta}_j^2 L_j^2 + \sum_{j \neq k}^i m_i \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k L_j L_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right)$$

Nu har vi ett generellt uttryck för rörelseenergin i pendeln, och tro mig, det är kortare att skriva det som summor. Nu ska vi göra samma sak med den potentiella energin:

$$(22) \quad U = \sum_{i=1}^n m_i g y_i =$$

$$(23) \quad = \sum_{i=1}^n m_i g \left(\sum_{j=1}^i -L_j \cos \theta_j \right) =$$

$$(24) \quad = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i m_i g L_j \cos \theta_j =$$

Lagrangen L är alltså:

$$(25) \quad L = T - U$$

$$(26) \quad = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{2} m_i \dot{\theta}_j^2 L_j^2 + \sum_{j \neq k}^i m_i \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k L_j L_k \cos(\theta_j - \theta_k) \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i m_i g L_j \cos \theta_j =$$

$$(27) \quad = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{2} m_i \dot{\theta}_j^2 L_j^2 + \sum_{j \neq k}^i m_i \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k L_j L_k \cos(\theta_j - \theta_k) + \sum_{j=1}^i m_i g L_i \cos \theta_i \right)$$

Nu kan man ju undra varför jag inte gjorde en n-pendel utifrån detta. Det har att göra med att jag inte har någon aning hur jag sedan ska kunna derivera detta på några sätt som vi kommer att behöva göra. Jag har kunnat hitta lösningen på dem men jag förstår inte hur man kom fram med det, så jag skriver bara det jag förstår här. Om du vill kika på n-pendeln så fortsätt här istället (den har dock valt 1 kg och 1 meter för alla pendlar, pga förenklade beräkningar): <https://travisdoesmath.github.io/pendulum-explainer/>

Om vi väljer att $n = 2$ för den generella lagrangen för n-pendeln så kan vi få fram lagrangen för dubbelpendeln:

(28)

$$L = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{2} m_i \dot{\theta}_j^2 L_j^2 + \sum_{j \neq k}^i m_i \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k L_j L_k \cos(\theta_j - \theta_k) + \sum_{j=1}^i m_i g L_j \cos \theta_j \right) =$$

(29)

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + m_1 g L_1 \cos \theta_1 \right) + \left(\frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 L_2^2 + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g L_1 \cos \theta_1 + m_2 g L_2 \cos \theta_2 \right)$$

(30)

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 L_2^2 + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g L_1 \cos \theta_1 + m_2 g L_2 \cos \theta_2$$

Om integralen av denna lagrange mellan två tidpunkter, som kallas action och ses i ekvation (13), värderas vid sin extrempunkt så stämmer ekvationen (15). Detta betyder att vi behöver derivera lagrangen över vinklarna, vinkelhastigheterna och tidsderivatan av vinkelhastighetsderivatorna av lagrangen:

(31)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -L_1 g (m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

(32)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1 L_1^2 + m_2 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

(33)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 L_1^2 + m_2 \ddot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Nu har vi de nödvändiga derivatorna för θ_1 , så vi använder dem för att senare kunna bryta ut vinkelaccelerationen:

(34)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

(35)

$$(m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 L_1^2 + m_2\ddot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + L_1 g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

(36)

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g \sin \theta_1}{(m_1 + m_2)L_1}$$

Nu gör vi exakt samma sak för θ_2 , hela alltet.

(37)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_2 g \sin \theta_2$$

(38)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2\dot{\theta}_2 L_2^2 + m_2\dot{\theta}_1 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

(39)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2\ddot{\theta}_2 L_2^2 + m_2\ddot{\theta}_1 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_1 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Nu har vi de nödvändiga derivatorna för θ_2 , så vi använder dem för att senare kunna bryta ut vinkelaccelerationen: zw

(40)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

(41)

$$\ddot{\theta}_2 L_2 + \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2$$

(42)

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-m_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g \sin \theta_1}{(m_1 + m_2)L_1}$$

Vi har nu båda dessa ekvationer som innehåller varann, så vi kan använda båda i kombination för att totalt lösa ut vardera vinkelacceleration:

(43)

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g \sin \theta_1}{(m_1 + m_2)L_1}$$

(44)

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-m_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g \sin \theta_1}{(m_1 + m_2)L_1}$$

Först sätter vi in $\ddot{\theta}_2$ i högerledet av $\ddot{\theta}_1$ som genom en lång förenkling ger den första ekvationen här under, och den andra är via samma sak fast tvärt om:

(45)

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2 \dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + g m_2 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \sin \theta_1}{L_1(m_1 + m_2) - m_2 L_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

(46)

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_2 \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + m_2) + \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + m_2) - g \sin \theta_2(m_1 + m_2)}{L_2(m_1 + m_2) - m_2 L_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

Ekvationerna är väldigt långa, men dessa kan vi sedan använda till att skapa ett dynamiskt system för en dubbelpendel. Om du vill se pendeln i rörelse så kan du köra koden som finns här: <https://github.com/OHUGITHO/DoublePendulum>