Практикум по вычислительным методам: методы поиска корня уравнения вида $f(x) = 0$

Рогачёв Юрий Витальевич, 208 группа

9 марта, 2019

1 Приближенное решение уравнения $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам

1.1 Описание метода

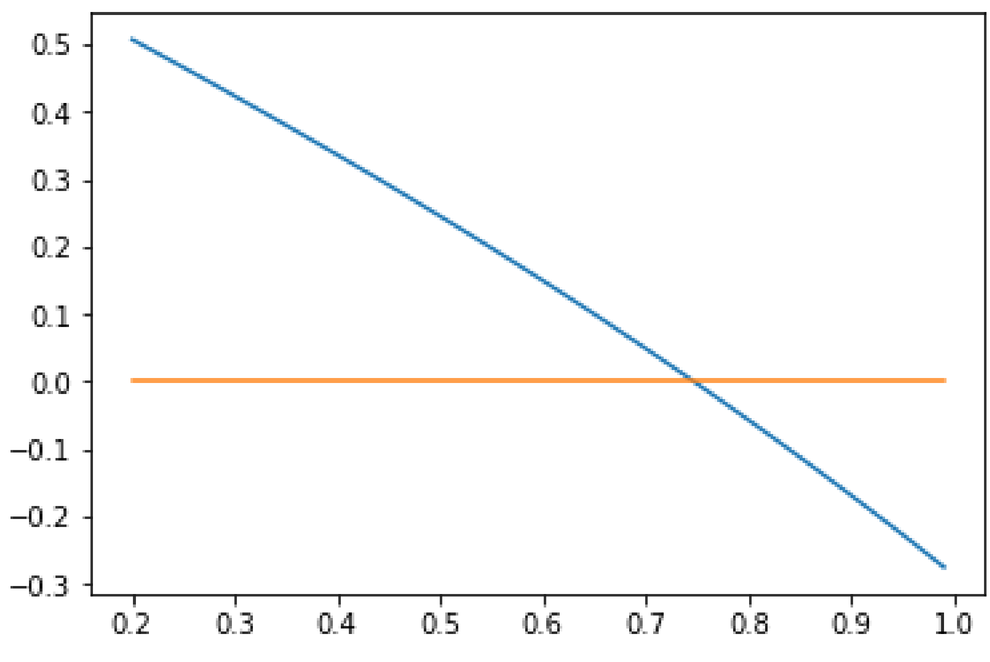
Для работы метода нам нужно знать отрезок [a, b], такой что выполняется теорема Больцано-Коши ($f(a) * f(b) < 0$). В таком случае на этом отрезке $\exists c : f(c) = 0, c \in (a, b)$. Мы будем строить последовательность отрезков $\{[a_n, b_n] : [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a, b]\}$, на концах которой функция принимает значения разных знаков. На каждом шаге итерации мы вычисляем значение $\xi = \frac{a_n + b_n}{2}$ и значение функции $f(\xi)$ в этой точке. После мы проверяем является ли ξ корнем нашего уравнения и если не является то мы добавляем в нашу последовательность отрезков один из отрезков $[a_n, \xi]$ или $[\xi, b_n]$ (выбираем из них тот на концах которого функция имеет разные знаки)

Мне достался вариант 11, с функцией $f(x) = \frac{1+\cos x}{3-\sin x} - x$

```
In [2]: f = lambda x: (1 + np.cos(x)) / (3 - np.sin(x)) - x
```

Строим график, чтобы визуально определить a и b из алгоритма

```
In [3]: x = np.arange(0.2, 1, 0.01)
        plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
        plt.show()
```



Сама функция реализующая алгоритм

```
In [4]: def bisect(f, a, b, eps):
            assert f(a) * f(b) < 0, 'f(a) * f(b) should be < 0'
```

```
    an = a
    bn = b
    k = 0
    while True:
        x0 = (an + bn) / 2
        k += 1
        if f(x0) == 0 or bn - an < 2 * eps:
            return {'root': x0, 'k': k}

        if f(an) * f(x0) < 0:
            an = an
            bn = x0
        else:
            an = x0
            bn = bn
```

Вычисление корня $f(x)$

```
In [9]: my_sol = bisect(f, 0.2, 1.0, 1e-6)
        my_sol
```

```
Out[9]: {'root': 0.7471107482910155, 'k': 20}
```

Вычисление корня $f(x)$ аналогичным методом из библиотеки scipy (для проверки моего решения)

```
In [10]: scipy_sol = opt.root_scalar(f, bracket=[0.1, 1.0], method='bisect').root
         scipy_sol
```

```
Out[10]: 0.7471111956581811
```

Насколько сильно мое решение отличается от решения scipy

```
In [11]: abs(scipy_sol - my_sol['root'])
```

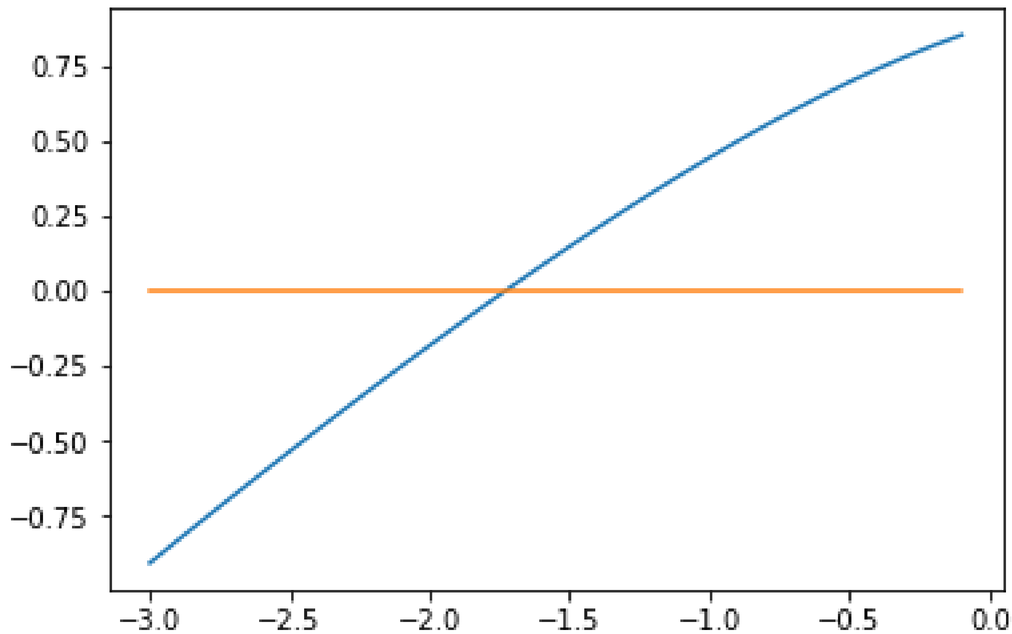
```
Out[11]: 4.473671655347289e-07
```

Для достижения данной точности метод сделал 20 итераций

2 Метод простых итераций решения уравнения $f(x) = 0$

```
In [13]: f = lambda x: x - np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))
         phi = lambda x: np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))
```

```
In [14]: x = np.arange(-3, 0, 0.1)
         plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
         plt.show()
```



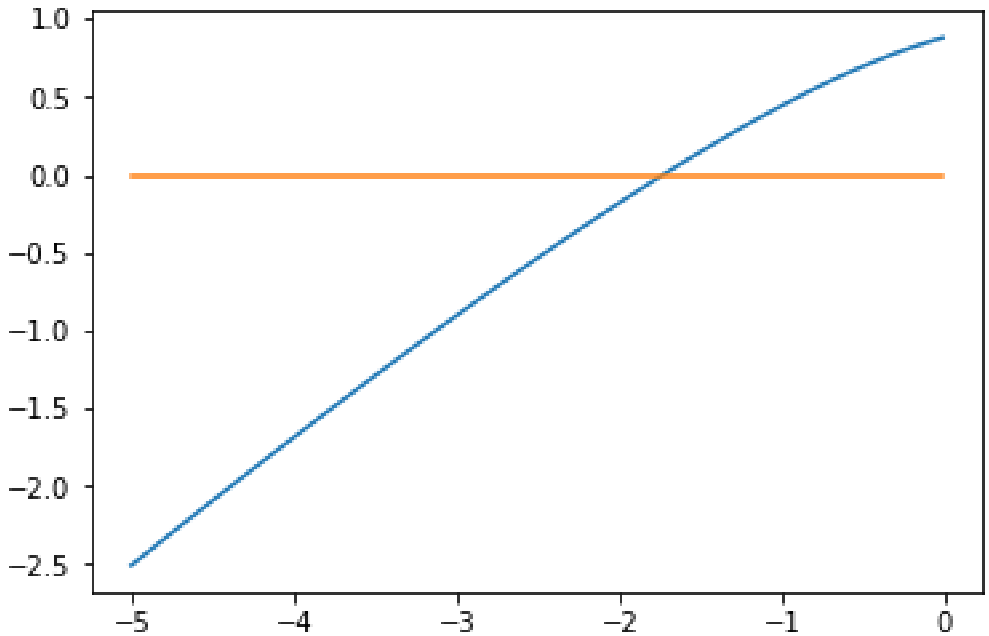

```
In [26]: def fixed_point_iter(f, x0, eps):
             x = x0
             k = 0
             while True:
                 y = f(x)
                 k += 1
                 if abs(y - x) < eps:
                     return {'root': y, 'k': k}
                 else:
                     x = y

In [27]: my_sol = fixed_point_iter(phi, -2, 1e-6)
         my_sol

Out[27]: {'root': -1.7291171386629345, 'k': 13}

In [28]: sc_sol = opt.root_scalar(f, method='brentq', bracket=[-3,0]).root
         sc_sol

Out[28]: -1.729116898214366

In [29]: abs(sc_sol - my_sol['root'])

Out[29]: 2.404485683893398e-07
```

Для достижения данной точности метод сделал 13 итераций

3 Метод Ньютона

In [31]:
```
f = lambda x: x - np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))
f_prime = lambda x: 1 / np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1)
```

In [32]:
```
x = np.arange(-5, 0, 0.01)
plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
plt.show()
```



In [36]:
```
def newton(f, fprime, x0, eps):
    xs = x0
    k = 0
    while True:
        y = f_prime(xs)
        xn = xs - f(xs) / y
        k += 1
        if abs(xn - xs) < eps:
            return {'root': xn, 'k': k}

        xs = xn
```

In [37]:
```
my_sol = newton(f, f_prime, -3, 1e-6)
my_sol
```

Out[37]: {'root': -1.7291164317332868, 'k': 131}

In [38]:
```
sc_sol = opt.root_scalar(f, method='brentq', bracket=[-3,0]).root
sc_sol
```

Out[38]:
```
-1.729116898214366
```

In [39]:
```
abs(sc_sol - my_sol['root'])
```

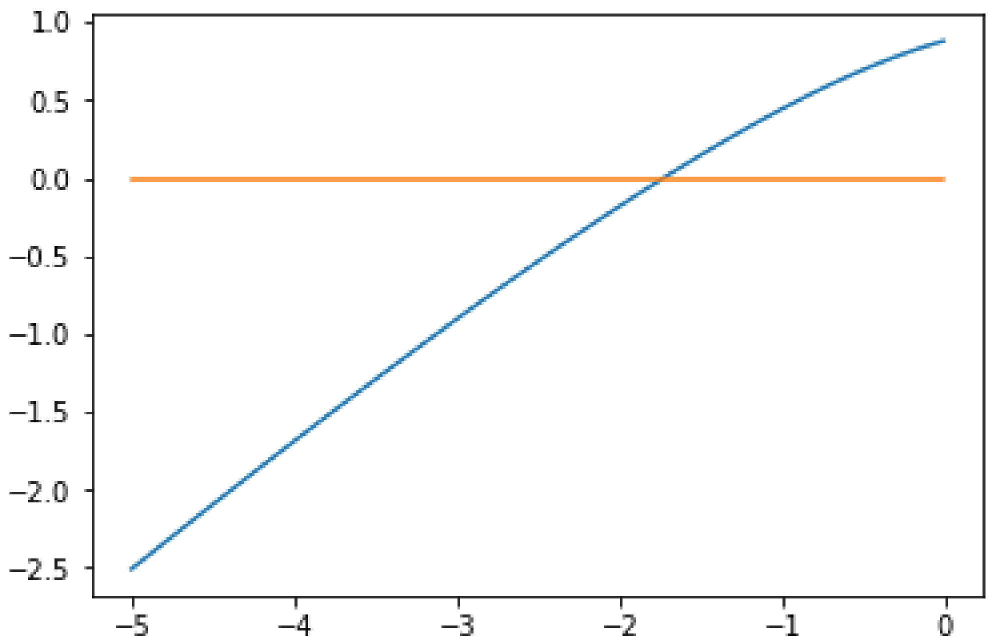
Out[39]:
```
4.6648107931979155e-07
```

Для достижения данной точности метод сделал 131 итерацию

4 Метод хорд и касательных

In [41]:
```
f = lambda x: x - np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))
```

In [42]:
```
x = np.arange(-5, 0, 0.01)
plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
plt.show()
```



In [43]:
```
def secant(f, x, eps):
    k = 0
    x, x_prev = x, 2 * x
    while abs(x - x_prev) > eps:
        x, x_prev = x - f(x) / (f(x) - f(x_prev)) * (x - x_prev), x
        k += 1


    return {'root': x, 'k': k}
```

In [48]:
```
my_sol = secant(f, -2, 1e-6)
my_sol
```

Out[48]: {'root': -1.7291168982143734, 'k': 5}

In [49]:
```
sc_sol = opt.root_scalar(f, method='brentq', bracket=[-2,-1]).root
sc_sol
```

Out[49]: -1.729116898214374

In [50]:
```
abs(sc_sol - my_sol['root'])
```

Out[50]: 6.661338147750939e-16

In [51]:
```
my_sol['k']
```

Out[51]: 5

Для достижения данной точности метод сделал 5 итераций

5 Сравнение и результаты

Быстрее всех методов сходится метод хорд (за 5 итераций, когда остальным нужно > 20)