Практикум по вычислительным методам: методы поиска корня уравнения вида $f(x) = 0$

Рогачёв Юрий Витальевич, 208 группа

9 марта, 2019

1 Приближенное решение уравнения $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам

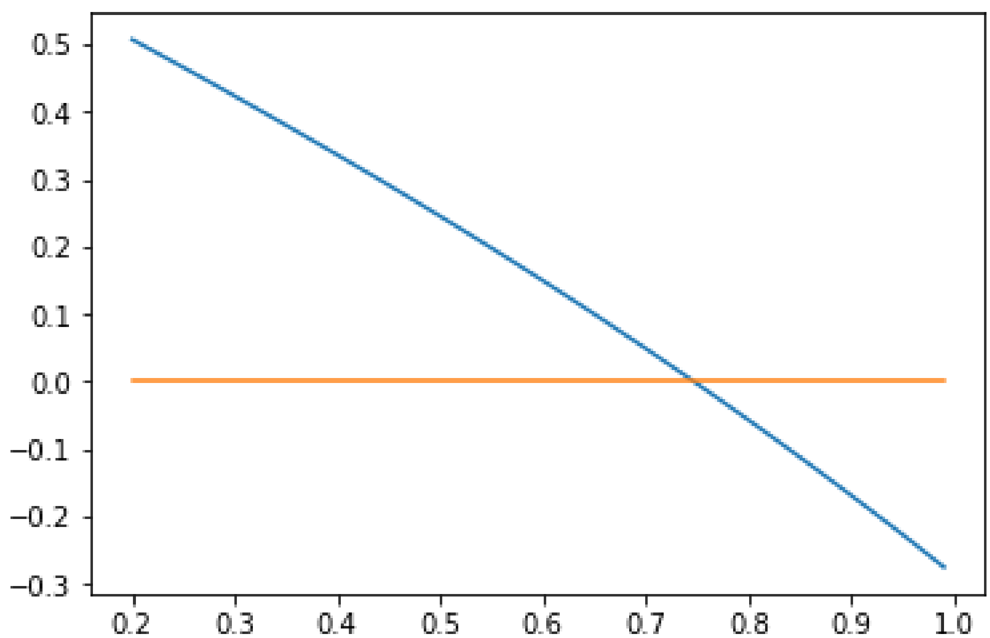
Для работы метода нам нужно знать отрезок [a, b], такой что выполняется теорема Больцано-Коши ($f(a) * f(b) < 0$). В таком случае на этом отрезке $\exists c : f(c) = 0, c \in (a, b)$. Мы будем строить последовательность отрезков $\{[a_n, b_n] : [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a, b]\}$, на концах которой функция принимает значения разных знаков. На каждом шаге итерации мы вычисляем значение $\xi = \frac{a_n + b_n}{2}$ и значение функции $f(\xi)$ в этой точке. После мы проверяем является ли ξ корнем нашего уравнения и если не является то мы добавляем в нашу последовательность отрезков один из отрезков $[a_n, \xi]$ или $[\xi, b_n]$ (выбираем из них тот на концах которого функция имеет разные знаки)

Мне достался вариант 11, с функцией $f(x) = \frac{1+\cos x}{3-\sin x} - x$

```
In [2]: f = lambda x: (1 + np.cos(x)) / (3 - np.sin(x)) - x
```

Строим график, чтобы визуально определить a и b из алгоритма

```
In [3]: x = np.arange(0.2, 1, 0.01)
        plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
        plt.show()
```



Сама функция реализующая алгоритм

```
In [4]: def bisect(f, a, b, eps):
            assert f(a) * f(b) < 0, 'f(a) * f(b) should be < 0'

            an = a
```

```
        bn = b
        k = 0
        while True:
            x0 = (an + bn) / 2
            k += 1
            if f(x0) == 0 or bn - an < 2 * eps:
                return {'root': x0, 'k': k}

            if f(an) * f(x0) < 0:
                an = an
                bn = x0
            else:
                an = x0
                bn = bn
```

Вычисление корня $f(x)$

```
In [5]: my_sol = bisect(f, 0.2, 1.0, 1e-6)
        my_sol
```

```
Out[5]: {'root': 0.7471107482910155, 'k': 20}
```

Вычисление корня $f(x)$ аналогичным методом из библиотеки scipy (для проверки моего решения)

```
In [6]: scipy_sol = opt.root_scalar(f, bracket=[0.1, 1.0], method='bisect').root
        scipy_sol
```

```
Out[6]: 0.7471111956581811
```

Насколько сильно мое решение отличается от решения scipy

```
In [7]: abs(scipy_sol - my_sol['root'])
```

```
Out[7]: 4.473671655347289e-07
```

Для достижения данной точности метод сделал 20 итераций

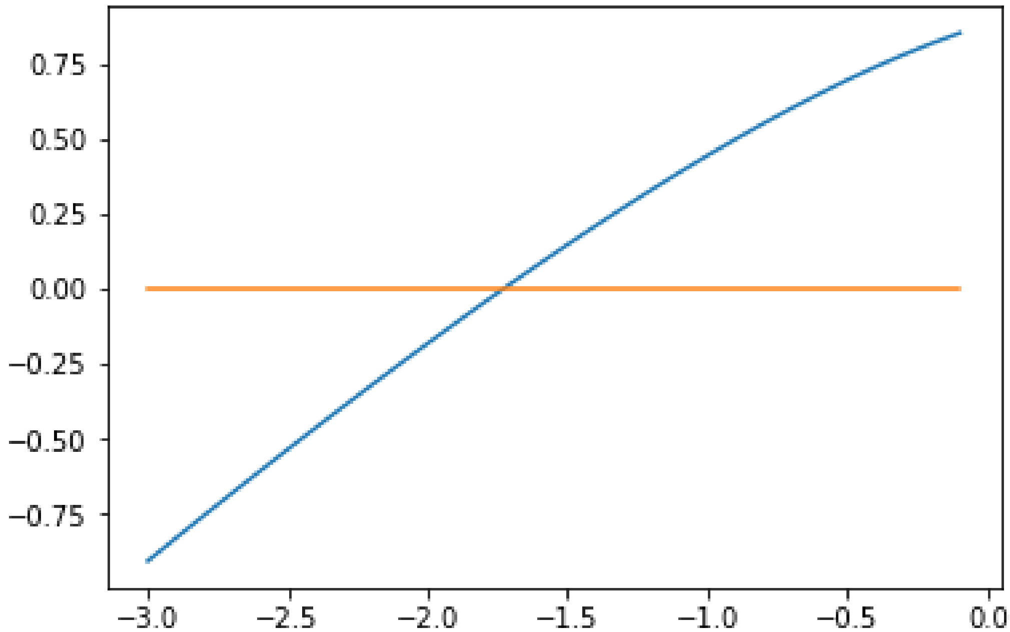
2 Метод простых итераций решения уравнения $f(x) = 0$

В этом методе мы приводим оригинальное уравнение $f(x) = 0$ к эквивалентному уравению $x = \varphi(x)$. В таком случае последовательность итераций $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ сходиться к корню

В моем варианте функция $f(x) = x - \ln(x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1})$. Тогда соответсвующая ей функция $\varphi(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1})$

```
In [8]: f = lambda x: x - np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))
        phi = lambda x: np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))
```

```
In [9]: x = np.arange(-3, 0, 0.1)
        plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
        plt.show()
```




```
In [10]: def fixed_point_iter(f, x0, eps):
             x = x0
             k = 0
             while True:
                 y = f(x)
                 k += 1
                 if abs(y - x) < eps:
                     return {'root': y, 'k': k}
                 else:
                     x = y

In [11]: my_sol = fixed_point_iter(phi, -2, 1e-6)
         my_sol

Out[11]: {'root': -1.7291171386629345, 'k': 13}

In [12]: sc_sol = opt.root_scalar(f, method='brentq', bracket=[-3,0]).root
         sc_sol

Out[12]: -1.729116898214366

In [13]: abs(sc_sol - my_sol['root'])

Out[13]: 2.404485683893398e-07
```

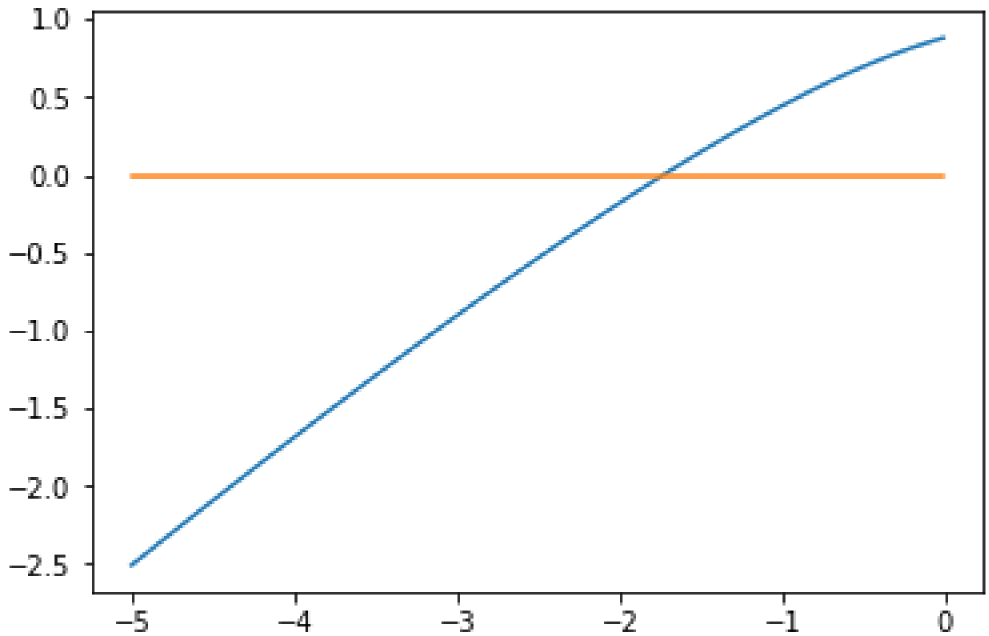
Для достижения данной точности метод сделал 13 итераций

3 Метод Ньютона

Метод Ньютона можно получить, если в процессе решения уравнения методом простых итераций искать функцию φ в виде: $\varphi(x) = x + \alpha(x) * f(x)$. Для наилучшей сходимости метода долно выполняться условие $\varphi'(x) = 0$. Из этого условия можно получить, что $\alpha(x) = -\frac{1}{f'(x)}$. Тогда $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

```
In [14]: f = lambda x: x - np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))
         f_prime = lambda x: 1 / np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1)
```

```
In [15]: x = np.arange(-5, 0, 0.01)
         plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
         plt.show()
```




```
In [16]: def newton(f, fprime, x0, eps):
             xs = x0
             k = 0
             while True:
                 y = f_prime(xs)
                 xn = xs - f(xs) / y
                 k += 1
                 if abs(xn - xs) < eps:
                     return {'root': xn, 'k': k}

                 xs = xn
```

```
In [17]: my_sol = newton(f, f_prime, -3, 1e-6)
         my_sol

Out[17]: {'root': -1.7291164317332868, 'k': 131}

In [18]: sc_sol = opt.root_scalar(f, method='brentq', bracket=[-3,0]).root
         sc_sol

Out[18]: -1.729116898214366

In [19]: abs(sc_sol - my_sol['root'])

Out[19]: 4.6648107931979155e-07
```

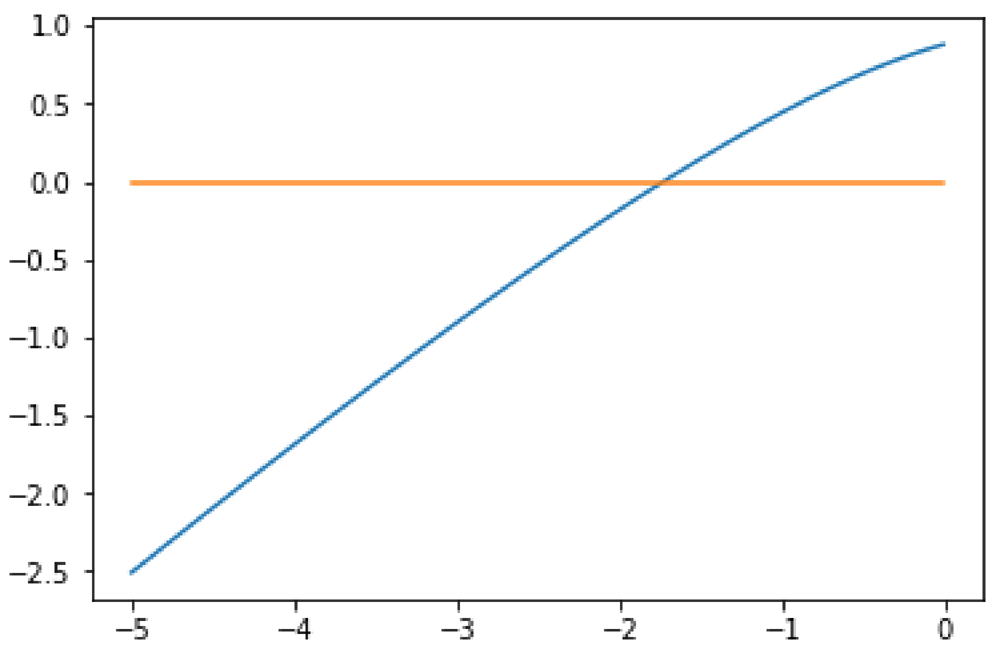
Для достижения данной точности метод сделал 131 итерацию

4 Метод хорд и касательных

Метод хорд можно получить из метода простых итераций, если взять $\alpha(x) = -\frac{x_i - x_0}{f(x_i) - f(x_0)}$. Тогда мы получаем формулу $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)*(x_i - x_0)}{f(x_i) - f(x_0)}$

```
In [20]: f = lambda x: x - np.log(x - 1 + np.sqrt((x - 1) ** 2 + 1))

In [21]: x = np.arange(-5, 0, 0.01)
         plt.plot(x, f(x), x, np.zeros(len(x)))
         plt.show()
```



```
In [22]: def secant(f, x, eps):
             k = 0
             x, x_prev = x, 2 * x
             while abs(x - x_prev) > eps:
                 x, x_prev = x - f(x) / (f(x) - f(x_prev)) * (x - x_prev), x
                 k += 1


             return {'root': x, 'k': k}
```

```
In [23]: my_sol = secant(f, -2, 1e-6)
         my_sol
```

```
Out[23]: {'root': -1.7291168982143734, 'k': 5}
```

```
In [24]: sc_sol = opt.root_scalar(f, method='brentq', bracket=[-2,-1]).root
         sc_sol
```

```
Out[24]: -1.729116898214374
```

```
In [25]: abs(sc_sol - my_sol['root'])
```

```
Out[25]: 6.661338147750939e-16
```

```
In [26]: my_sol['k']
```

```
Out[26]: 5
```

Для достижения данной точности метод сделал 5 итераций

5 Сравнение и результаты

Быстрее всех методов сходится метод хорд (за 5 итераций, когда остальным нужно > 20)