Практикум по вычислительным методам: методы решения систем уравнений

Рогачёв Юрий Витальевич, 208 группа

26 апреля, 2019

1 Решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом прогнки

Задано уравнение и краевые условие

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = c$ $d_1 y(b) + d_2 y'(b) = d$

Для него мы находим:

$\beta_0 = c_1 h - c_2$, $\gamma_0 = c_2$, $\varphi_0 = hc$

$\varphi_i = f_i * h^2$, $\alpha_i = 1 - \frac{1}{2} p_i h_i$, $\beta_i = d_i h^2 - 2$, $\gamma_i = 1 + \frac{1}{2} p_i h$, $i = 1, ..., n-1$

$\alpha_n = -d_2$, $\beta_n = hq_1 + d_2$, $\varphi_n = hd$

Решение ищем в виде

$y_i = u_i + v_i y_{i+1}$

Где

$v_i = -\frac{\gamma_i}{\beta_i + \alpha_i v_{i-1}}$, $u_i = \frac{\varphi_i - \alpha_i u_{i-1}}{\beta_i + \alpha_i v_i}$

In [2]:
```
def p(x):
    return -(x - 1) * (x - 2)
```

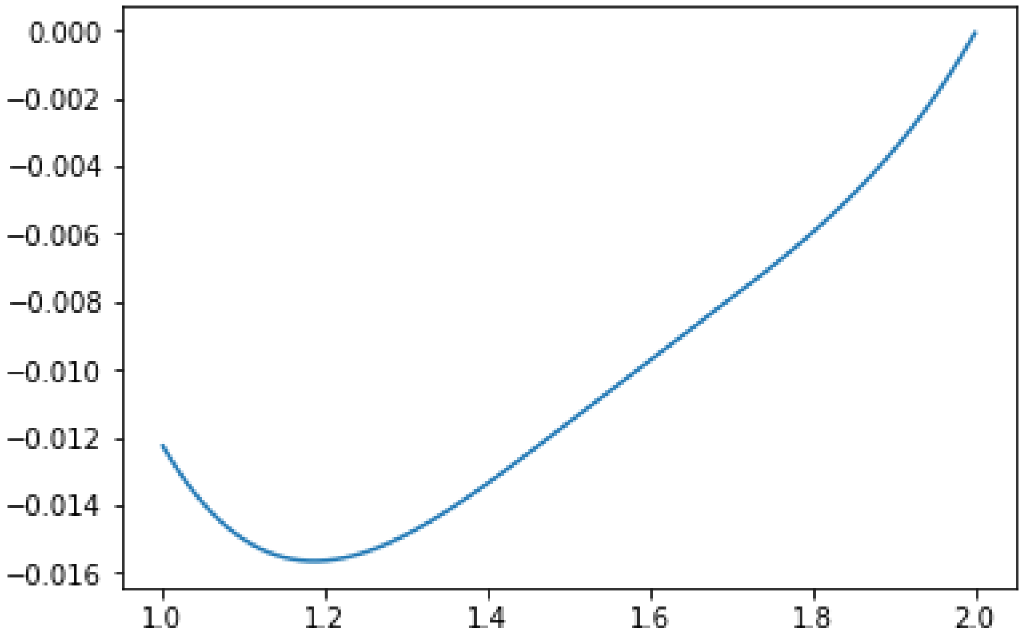
In [3]:
```
def q(x):
    return np.cos(x)
```

In [4]:
```
def f(x):
    return np.cos(x) ** 2
```

In [5]:
```
def prog(p, q, f, a, b, c1, c2, c, d1, d2, d, n):
    h = (b - a) / n
    u = np.zeros(n + 1)
    v = np.zeros(n + 1)
    x = np.zeros(n + 1)
    y = np.zeros(n + 1)
    alp = np.zeros(n + 1)
    bet = np.zeros(n + 1)
    gam = np.zeros(n + 1)
    phi = np.zeros(n + 1)

    x[0] = a
    i = 1
    u[0] = c * h / (c1 * h - c2)
    v[0] = -c2 / (c1 * h - c2)

    while True:
        x[i] = x[i - 1] + h
        alp[i] = 1 - p(x[i]) * h / 2
        bet[i] = h ** 2 * q(x[i]) - 2
        gam[i] = 1 + p(x[i]) * h / 2
        phi[i] = (h ** 2) * f(x[i])
        v[i] = -gam[i] / (bet[i] + alp[i] * v[i-1])
        u[i] = (phi[i] - alp[i] * u[i-1]) / (bet[i] + alp[i]*v[i])
```

```
            if i == n-1:
                break
            i += 1
        x[n] = b
        alp[n] = -d2
        bet[n] = h * d1 + d2
        phi[n] = h * d
        v[n] = 0
        u[n] = (phi[n] - alp[n] * u[n-1]) / bet[n]
        y[n] = u[n]
        i = n - 1
        while True:
            y[i] = u[i] + y[i+1]*v[i]
            if i == 0:
                break
            i -= 1
        return {'x': x, 'y': y}
```

```
In [6]: a = 1
        b = 2
        c1 = -1
        c2 = 0.3
        c = 0
        d1 = 0.17
        d2 = 0.19
        d = 0
        n = 500


        ans = prog(p, q, f, a, b, c1, c2, c, d1, d2, d, n)
        plt.plot(ans['x'], ans['y'])
        plt.show()
```



2 Решение нелинейной системы методом простых итераций

Ну это методо простых итераций, работает так же как и все другие методы простых итераций

```
In [7]: def F(x):
            return np.array([np.sin(x[1] + 1) - 1.2, 1 - np.cos(x[0]) / 2])
```

```
In [8]: def simple_iter(F, x0, eps=1e-6):
            k = 0
            while True:
                x = F(x0)
                if (np.linalg.norm(x - x0) < eps):
                    return x0, k
                x0 = x
                k += 1
```

```
In [9]: x0 = np.array([0, 0])
        ans = simple_iter(F, x0)
        ans[1]
```

```
Out[9]: 6
```

```
In [10]: x = ans[0]
         [np.sin(x[1] + 1) - x[0] - 1.2, 2 * x[1] + np.cos(x[0]) - 2]
```

```
Out[10]: [6.434182142633915e-08, 1.305532745909943e-06]
```

3 Решение систем линейных уравнений методом квадратных корней

Во время прямого хода находят элементы g:

$g_{11} = \sqrt{a_{11}}$ $g_{12} = \frac{a_{11}}{g_{11}}$ $g_{13} = \frac{a_{13}}{g_{11}}$

$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{12}^2}$ $g_{23} = \frac{a_{23} - g_{12} g_{13}}{g_{23}}$

$g_{23} = \sqrt{a_{33} - g_{13}^2 - g_{23}^2}$

Затем находим y:

$y_1 = \frac{b_1}{g_{11}}$ $y_2 = \frac{b_2 - g_{12} y_1}{g_{22}}$ $y_3 = \frac{b_3 - g_{13} y_1 - g_{23} y_2}{g_{33}}$

В конце находим x:

$x_3 = \frac{y_3}{g_{33}}$ $x_2 = \frac{y_2 - g_{23} x_3}{g_{22}}$ $x_1 = \frac{y_1 - g_{12} x_2 - g_{13} x_3}{g_{11}}$

In [35]:
```
A = np.array([[2.47, 0.65, -1.88], [1.34, 1.17, 2.54], [0.86, -1.73, -1.08]])
b = np.array([1.24, 2.35, 3.15])
G = np.array([[0.0, 0.0, 0.0],[0.0, 0.0, 0.0],[0.0, 0.0, 0.0]])
S = np.array([0, 0, 0])
Ss = np.array([0, 0, 0])
x = np.array([0, 0, 0])
y = np.array([0, 0, 0])
```

In [36]:
```
G[0][0] = math.sqrt(abs(A[0][0]))
G[0][1] = A[0][1] / G[0][0]
G[0][2] = A[0][2] / G[0][0]
G[1][1] = math.sqrt(abs(A[1][1] - G[0][1] ** 2))
G[1][2] = (A[1][2] - G[0][1] * G[0][2]) / G[1][1]
G[2][2] = math.sqrt(abs(A[2][2] - G[0][2] ** 2 - G[1][2] ** 2))
y[0] = b[0] / G[0][0]
y[1] = (b[1] - G[0][1] * y[0]) / G[1][1]
y[2] = (b[2] - G[0][2] * y[0] - G[1][2] * y[1]) / G[2][2]
x[2] = y[2] / G[2][2]
x[1] = (y[1] - G[1][2] * x[2]) / G[1][1]
x[0] = (y[0] - G[0][1] * x[1] - G[0][2] * x[2]) / G[0][0]
ans = x
```

In [32]:
```
ans
```

Out[32]:
```
array([2.55172414e+00, 1.64864865e+00, 1.80713722e-16])
```

4 Решение системы линейных уравнений методом главных элементов

На каждом этапе исключения неизвестного выбирают главный элемент. Наибольший по модулю коэффициент при неизвестных, затем находят значения m_i, равные частному от деления элементов столбца, содержащих главный элемент, на главный элемент, взятый с противоположным знаком. Для получения элементов следующего этапа прибавляют главную строку (строку, содержащую главный элемент) к остальным строкам, умножая её на соответствующее значение m

In [23]:
```
A1 = [[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]]
A = [[0.62, -0.44, -0.86], [0.83, 0.42, -0.56], [0.58, -0.37, -0.62]]
```

```
x = [0, 0, 0]
b = [0.68, 1.24, 0.87]
b1 = [0.68, 1.24, 0.87]
```

In [28]:
```
for i in range(3):
    z = max(A[i][0], A[i][1], A[i][2])
    A[i][0] = A[i][0] / z
    A[i][1] = A[i][1] / z
    A[i][2] = A[i][2] / z
    b[i] = b[i] /z
i = 0
for k in range(3):
    for i in range(k + 1):
        j = k
        for j in range(3):
            A1[i][j] = A[i][j] - A[k][j] * A[i][k] / A[k][k]
            b1[i] = b[i] - b[k] * A[i][k] / A[k][k]
    i = k + 1
    for i in range(2):
        j = k
        for j in range(2):
            A[i][j] = A1[i][j]
            b[i] = b1[i]
for i in reversed(range(3)):
    S = 0
    for j in reversed(range(3)):
        S = S + x[j] * A[i][j]
    x[i] = (b[i] - S) / A[i][i]
ans = x
```

In [30]:
```
ans
```

Out[30]:
```
array([2.55172414e+00, 1.64864865e+00, 1.80713722e-16])
```