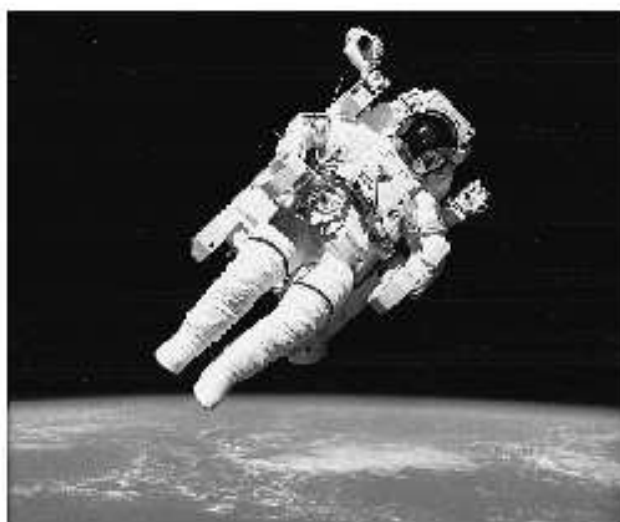


SYSTEMES ASSERVIS

Mohammed M'SAAD
Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen
Equipe Automatique du GREYC (UMR 6072)
msaad@greyc.ensicaen.fr



Avant propos

La rétroaction est au coeur de l'ingénierie des systèmes comme l'indiquent les différentes photos de motivation présentées tout au long de ce document et qui ont été empruntées à partir d'un ouvrage de référence sur les bases élémentaires de l'automatique [5]. Elle permet de réaliser trois propriétés fondamentales pour la conception des systèmes dynamiques, en l'occurrence la stabilisation, la poursuite d'une trajectoire et le rejet des perturbations avec des dynamiques préalablement spécifiées et une bonne insensibilité par rapport aux erreurs de modélisation et bruits de mesure inéluctables.

On se propose, dans le cadre de l'enseignement des systèmes asservis à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen, de partager avec nos élèves l'expérience et le savoir faire des grandes écoles d'automatique à travers une démarche méthodologique efficace et rationnelle. Cette démarche permet d'acquérir le langage et les bases des asservissements à travers la découverte d'un ensemble usuel de solutions aux problèmes de commande qui sont bien au delà du bon sens et l'habileté de l'ingénieur et de mieux appréhender des limites des systèmes asservis aussi bien en stabilité qu'en performances.

Ce document est principalement consacré au cours dont l'ultime motivation est une présentation comprehensive et motivée de la démarche méthodologique adoptée avec une attention particulière sur les quantificateurs de performances des systèmes asservis. Il sera complété par des travaux dirigés et pratiques dont les énoncés sont donnés dans des documents spécifiques. Les travaux dirigés sont conçus pour développer un esprit critique de la régulation industrielle à partir des avancées réalisées en automatique. Quant aux travaux pratiques, ils permettent d'apprécier le potentiel disponible en matière de moyens de simulation, d'analyse et de la conception d'asservissements, en l'occurrence Matlab et Simulink. Un ensemble de problèmes de commande a été conçu pour développer son propre savoir faire en automatique. Ils concernent la synthèse des asservissements de position et de température qui sont communément rencontrés dans la pratique.

Il est important de noter que l'enseignement des systèmes asservis est important pour la formation d'un ingénieur indépendamment des orientations des majeures de la spécialité et qu'il requiert un travail acharné et une présence d'esprit durant toutes ses composantes.

Permettez-moi de vous offrir ces extraits des merveilles et curiosités de Gibran Khalil Gibran pour les artisans des lendemains meilleurs que vous êtes.

*Les enfants de demain sont ceux que la vie a interpellés,
et ils l'ont suivie d'un pas ferme et la tête haute.
Ils sont l'aube d'une nouvelle ère.
Ni la fumée ne voilera leur lumière,
ni le tintement des chaînes n'étouffera leurs voix,
ni les miasmes des eaux stagnantes ne souilleront leur bonté.*

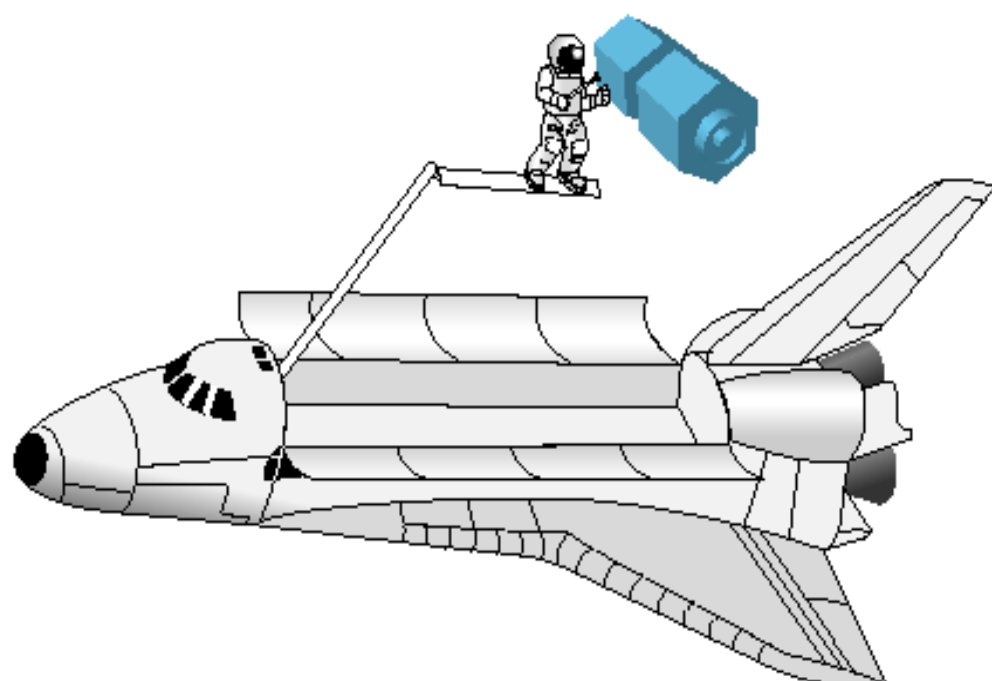


Table des matières

1	Introduction	9
2	Modélisation et stabilité	15
2.1	Préliminaires	16
2.2	Représentations non paramétriques	17
2.3	Représentations paramétriques	19
2.4	Modélisation d'un moteur à courant continu	21
2.4.1	Modélisation du moteur	21
2.4.2	Modélisation réduite du moteur	24
2.5	Stabilité externe	26
2.5.1	Résultats fondamentaux	26
2.5.2	Critères algébriques	31
2.6	Modélisation des perturbations	33
2.7	Conclusion	35
3	Systèmes asservis	37
3.1	Le système	40
3.2	Le régulateur	42
3.3	Le système de commande	45
3.4	Fonctions de transfert usuelles	50
3.5	Stabilité	55
3.5.1	Stabilité nominale	55
3.5.2	Critère de Nyquist	56
3.5.3	Marges de stabilité	58
3.5.4	Théorème du petit gain	60
3.5.5	Robustesse en stabilité	60
3.6	Performances nominales	65
3.6.1	Performances en régulation	66
3.6.2	Performances en poursuite	69
3.6.3	Précision des asservissements avec retour unitaire	70
3.6.4	Sensibilité aux bruits de mesure	72
3.7	Modelage des fonctions de sensibilité.	72
3.7.1	Contrainte de la relation gain-phase.	73
3.7.2	Contrainte algébrique usuelle.	74
3.7.3	Contraintes sur la fonction de sensibilité	74
3.7.4	Contraintes sur la fonction de sensibilité complémentaire	76
3.8	Conclusion	77

4	Commande avec placement des pôles	79
4.1	Commande avec placement des pôles	82
4.2	Commande avec placement des pôles et des zéros	85
4.3	Automatique et santé	89
4.4	Conclusion	95
5	Éléments de régulation industrielle	101
5.1	Commande PID.	102
5.2	Commande avec modèle interne.	110
5.3	Commande predictive de Smith.	116
5.4	Conclusion.	122
6	Conclusion	123

NOTATIONS UTILISEES

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes.
ρ	Opérateur différentiel.
p	Variable complexe associée à la transformée de Laplace.
$\Re(p)$	Partie réelle du nombre complexe p .
$\Im(p)$	Partie imaginaire du nombre complexe p .
$\mathcal{D}_{se} = \{p \in \mathbb{C} / \Re(p) < 0\}$	Domaine de stabilité.
$\mathcal{D}_{sp} \subset \mathcal{D}_s$	Domaine de stabilité et de performances.
$\mathcal{CZ}(\mathcal{F}(p))$	Zéros de la fonction de transfert $\mathcal{F}(p)$.
$\mathcal{CP}(\mathcal{F}(p))$	Pôles de la fonction de transfert $\mathcal{F}(p)$.
$\mathbb{R}[x]$	Ensemble des polynômes en x à coefficients réels.
$\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$	Ensemble des polynômes normalisés.
$\mathbb{R}_{se}[x] \subset \mathbb{R}[x]$	Ensemble des polynômes dont toutes les racines sont situées dans le domaine de stabilité .
$\mathbb{R}_{is}[x] \subset \mathbb{R}[x]$	Ensemble des polynômes dont toutes les racines sont simples et situées sur l'axe imaginaire.
$\mathbb{R}(x)$	Ensemble des fractions rationnelles en x à coefficients réels.
$\mathcal{E}\{x(t)\}$	Espérance mathématique de la séquence $\{x(t)\}$.
$u(t)$	entrée du système.
$y(t)$	sortie du système.
$v_u(t)$	perturbation de charge en entrée.
$v_y(t)$	perturbation de charge en sortie.
$\eta_u(t)$	bruit de mesure en entrée.
$\eta_y(t)$	bruit de mesure en sortie.
$y^*(t)$	sortie de référence.
$e_u(t)$	erreur de poursuite en entrée.
$e_y(t)$	erreur de poursuite en sortie.
$\varepsilon(t)$	erreur de poursuite du système de commande.
$\mathcal{G}(p)$	Fonction de transfert du système par rapport à la commande.
$\mathcal{H}(p)$	Fonction de transfert du système par rapport aux perturbations.
$\mathcal{P}(p)$	Fonction de transfert du générateur des perturbations.
$\mathcal{G}^*(p)$	Fonction de transfert du générateur de la séquence de référence.
$\mathcal{R}(p)$	Fonction de transfert du régulateur.
$\mathcal{R}_r(p)$	Fonction de transfert du régulateur par rapport à la sortie.
$\mathcal{R}_p(p)$	Fonction de transfert du régulateur par rapport à la référence.
$\mathcal{G}_o(p)$	Fonction de transfert en boucle ouverte.
$\mathcal{S}(p)$	Fonction de sensibilité.
$\mathcal{T}(p)$	Fonction de sensibilité complémentaire.
$\mathcal{RS}(p)$	Régulateur * fonction de sensibilité usuelle.
$\mathcal{GS}(p)$	Système * fonction de sensibilité usuelle.

Chapitre 1

Introduction

L'automatique est au coeur des sciences et technologies de l'information et des communications. Des résultats théoriques probants concernant la stabilité, la robustesse et les performances sont disponibles dans la littérature et de nombreuses applications industrielles réussies ont été d'ores et déjà effectuées. La synthèse d'un système asservi se fait en trois étapes comme l'indique la figure 1.1.

- La première étape consiste à élaborer un modèle de commande qui représente au mieux le comportement d'entrée-sortie du système par rapport aux performances requises comme l'indique la figure 1.2. On dispose pour ce faire de la théorie de l'identification des systèmes dont les ouvrages [16] et [17] représentent le plus récent sinon le meilleur état de l'art. Les signaux d'entrée-sortie sont préalablement traités pour réduire les effets des perturbations qui affectent le fonctionnement du système à identifier. Toutes les connaissances disponibles sur le système devraient être prises en compte aussi bien pour la spécification de la structure du modèle d'identification que pour sa validation. Cette dernière est faite à partir des propriétés de la méthode d'identification considérée, des connaissances disponibles et des performances du système de commande.
- La deuxième étape consiste à déterminer les paramètres d'un régulateur en fonction des performances requises. Pour ce faire, on utilise la théorie de la commande que l'on peut agréablement lire dans les ouvrages [1], [6], [9], [10], [13], [14], [19], [21] et [25]. Notons que la spécification des performances à partir du cahier des charges constitue la tâche essentielle du concepteur qui doit formuler d'une manière pragmatique et rationnelle l'ultime motivation d'un problème de commande, soit

*maintenir la séquence de sortie du système
dans un voisinage d'une séquence de référence donnée
indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du système*

en un objectif de commande réalisable. Pour ce faire, une bonne culture de la théorie de la commande associée à une bonne conception assistée par ordinateur sont requises. Simulink et Matlab sont communément utilisés aussi bien dans les bureaux d'études d'ingénierie que dans les centres de recherche et de développement.

- La troisième étape consiste à mettre en oeuvre le régulateur déterminé sur un ordinateur fonctionnant en temps réel. Pour ce faire, il faut désormais s'inscrire au club des fans des systèmes embarqués.

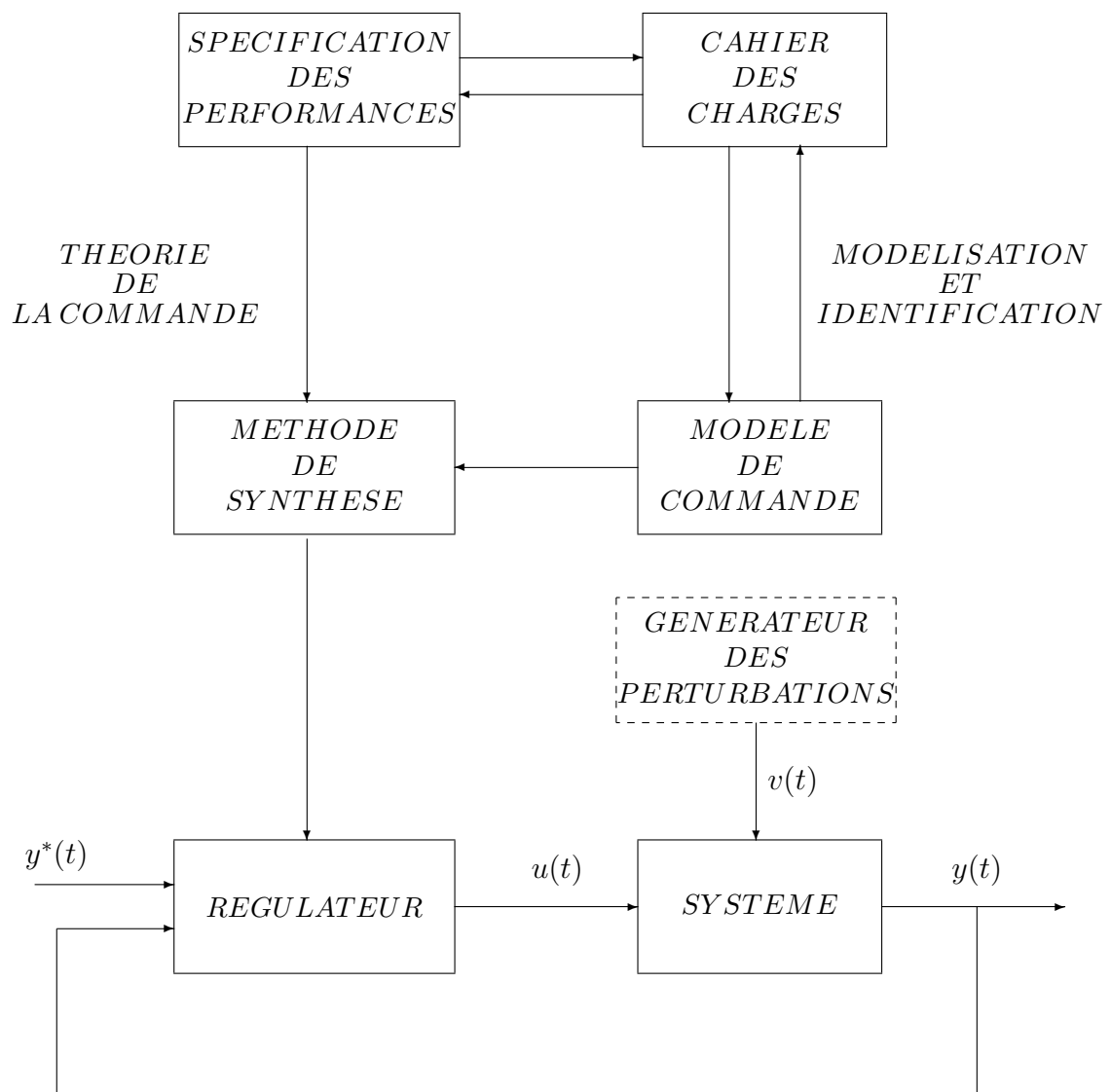


FIG. 1.1 – Le problème d'automatique

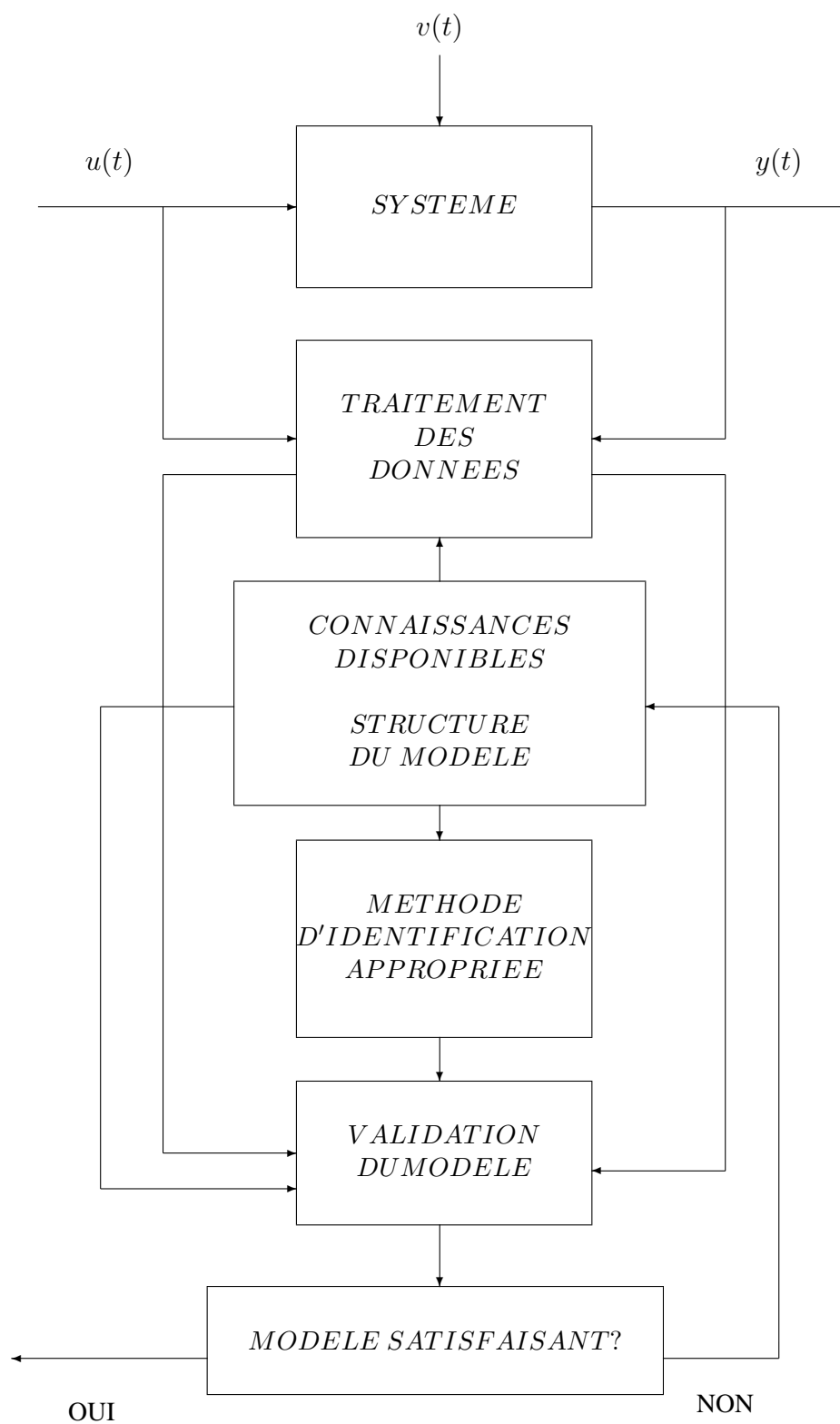


FIG. 1.2 – Identification des systèmes

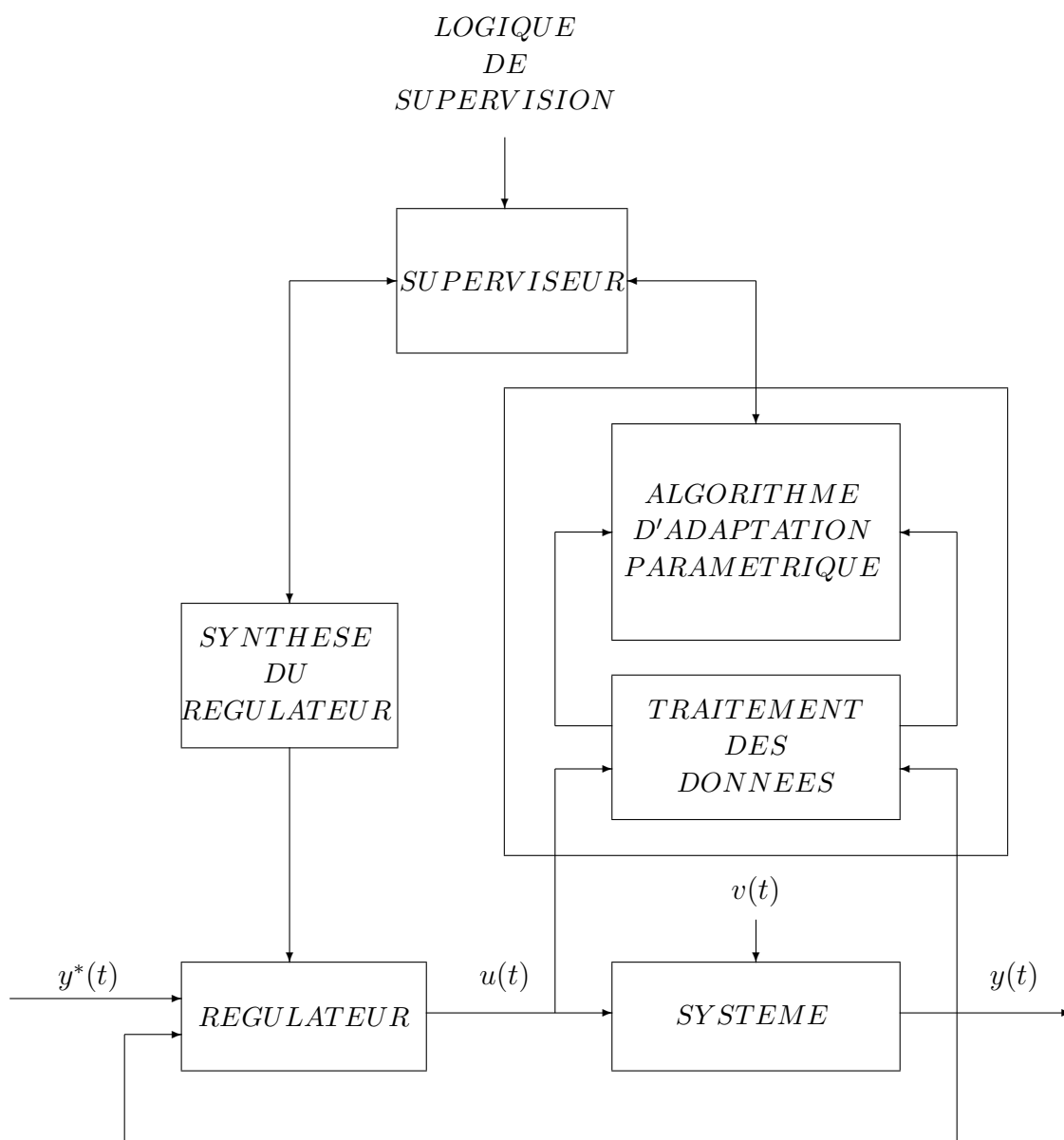


FIG. 1.3 – Commande adaptative supervisée

Toutes ces étapes peuvent être faites en temps réel sous la bénédiction du principe d'équivalence certitude comme le montre la figure 1.3. Un modèle de comportement d'entrée-sortie du système est continûment mis à jour à partir d'un algorithme d'adaptation paramétrique approprié. Ce modèle est utilisé comme s'il était le meilleur modèle de commande que l'on aurait utilisé pour la synthèse du régulateur. Les paramètres du régulateur sont ainsi adaptés de manière à réaliser les performances requises. La supervision permet d'assurer l'intégrité du système de commande adaptative à la lumière des propriétés de stabilité, de convergence et de robustesse des algorithmes de commande adaptative ([12], [16], [18]). Il s'agit d'un schéma de commande adaptative dont les motivations sont multiples. On distingue

- L'ajustement automatique des régulateurs qui permet de réduire raisonnablement le temps d'ajustement lors de la mise en oeuvre tout en assurant les performances désirées.
- La commande adaptative proprement dite qui permet de maintenir les performances quand la dynamique du comportement entrée-sortie du système varie dans le temps. Notons que les variations paramétriques correspondantes doivent être suffisamment petites en moyenne.
- La supervision des systèmes de commande pour assurer leur sûreté de fonctionnement, à savoir la détection des anomalies de fonctionnement en vue de prendre les décisions qui s'imposent. Les premières applications de la commande adaptative ont d'ailleurs été faites dans ce sens.

La motivation de cet enseignement est de faire une bonne introduction aux systèmes asservis linéaires à partir d'une lecture critique des expériences pédagogiques des grandes écoles d'automatique comme l'indique la bibliographie utilisée. On distingue quatre parties.

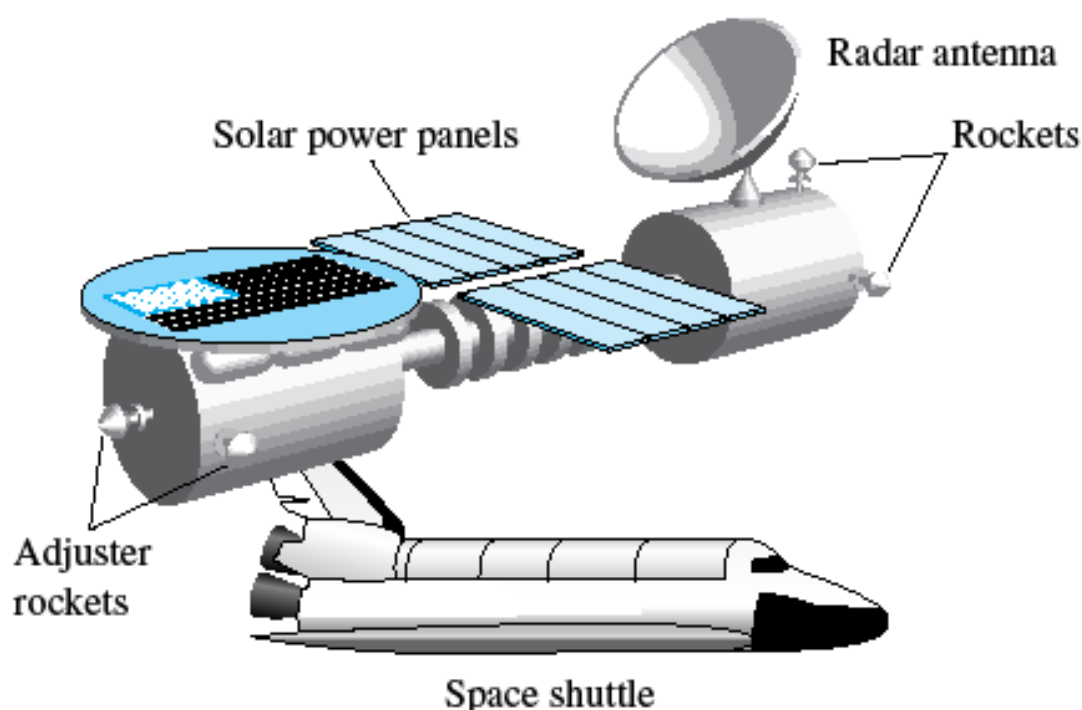
- La première partie concerne les problèmes de modélisation et de stabilité des systèmes linéaires. On présente d'abord les diverses représentations des systèmes linéaires avec une attention particulière aux relations de passage d'une représentation à l'autre. Un problème de modélisation d'un moteur à courant continu est traité pour mieux appréhender le concept de représentation des systèmes. Les concepts de stabilité et de stabilité marginale sont ensuite présentés d'une manière concise avec une attention particulière au concept de stabilité au sens entrée bornée-sortie bornée \mathcal{EBSB} . Un critère algébrique de test de stabilité est brièvement présenté pour des considérations de culture générale. On montre enfin que les perturbations peuvent être représentées comme la réponse d'un système à une impulsion (resp. une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies) dans un contexte déterministe (resp. un contexte stochastique).
- La seconde partie est consacrée à la modélisation et l'analyse d'une classe de systèmes asservis linéaires suffisamment générale pour englober tous ceux qui sont disponibles dans la littérature. Une attention particulière est réservée aux fonctions de transfert usuelles des systèmes asservis et aux propriétés de stabilité, de performances et de robustesse sous-jacentes. Les performances sont définies aussi bien dans le domaine temporel à partir des erreurs de poursuite, que dans le domaine fréquentiel à partir des dynamiques de poursuite et de régulation. Des résultats fondamentaux sont établis pour caractériser les classes des régulateurs réalisant une compensation parfaite des perturbations, les meilleures performances en poursuite, la meilleure précision avec un retour unitaire et l'insensibilité aux bruits de mesure inévitables. On montre que les fonctions de sensibilité usuelles

représentent des quantificateurs de performances nominales et de robustesse en stabilité. Ces quantificateurs doivent être utilisés aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse dans toute conception de système de commande digne des avancées de l'automatique de nos jours. Les limitations intrinsèques des performances d'un système de commande sont mises en évidence pour éviter les faux problèmes.

- La troisième partie est réservée à la synthèse par placement des pôles des systèmes asservis avec une attention particulière aux spécifications des performances requises. Des exemples de synthèse sont traités en guise d'illustration. Une synthèse d'un asservissement du taux du glucose dans le sang d'un patient est effectuée pour montrer que la théorie des systèmes permet de réaliser des innovations importantes dans le domaine du biomédical.
- La quatrième partie présente une conception de la régulation industrielle issue du contexte de l'approche système développée dans les chapitres précédents. Une attention particulière est réservée aux limites intrinsèques en performances, notamment la sensibilité par rapport aux bruits de mesure dans le cas d'une commande PID et l'invariance de la dynamique du système dans le cas d'une commande avec modèle interne. La solution du problème du retard offerte par la commande prédictive de Smith est appréciée à sa juste valeur.

Chapitre 2

Modélisation et stabilité



Les systèmes linéaires sont communément utilisés dans la théorie des systèmes pour la représentation des signaux et des modèles de comportement entrée-sortie des procédés dans leur domaine de fonctionnement. Plus particulièrement, ils permettent d'effectuer la synthèse des systèmes asservis aussi bien dans des problèmes de traitement du signal, e.g. filtrage et prédiction, que dans des problèmes d'automatique, e.g. poursuite d'une trajectoire, pilotage automatique et régulation industrielle. Plusieurs ouvrages ont été réalisés pour l'enseignement des systèmes linéaires dans toutes les écoles d'ingénieurs du monde ([1], [6], [13], [15], [21]).

Un système linéaire peut être vu comme une application linéaire \mathcal{SYS} de l'ensemble de ses entrées \mathcal{U} à l'ensemble de ses sorties \mathcal{Y} comme l'indique la figure 2.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{SYS} : \mathcal{U} = \{u : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow \mathcal{Y} = \{y : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u(t) &\rightarrow y(t) = \mathcal{SYS}[u(t)] \end{aligned}$$

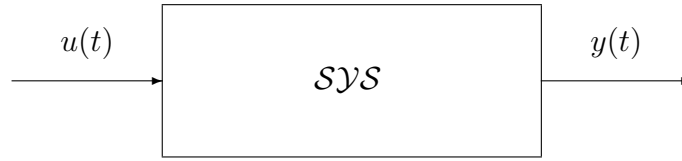


FIG. 2.1 – Représentation d'un système

Une telle application linéaire est conforme au principe de superposition qui stipule que la réponse du système à une combinaison linéaire d'un ensemble d'entrées est égale à la même combinaison linéaire des réponses du système à chacune de ces entrées, soit

$$\mathcal{SYS} \left(\sum_i \alpha_i u_i(t) \right) = \sum_i \alpha_i y_i(t)$$

avec

$$y_i(t) = \mathcal{SYS}(u_i(t))$$

Dans le cas des systèmes linéaires invariants, cette application est décrite par un ensemble de représentations équivalentes du point de vue entrée-sortie. On distingue deux ensembles de représentations qui ont été progressivement introduits dans le contexte de la théorie des systèmes. Le premier ensemble concerne les représentations non paramétriques, en l'occurrence les réponses impulsionnelle et harmonique. Le second ensemble est particulièrement dédié à l'approche polynomiale. Il concerne l'équation différentielle et la fonction de transfert. Comme toutes ces représentations concernent un même système, il existe des relations de passage d'une représentation à une autre. Ces relations permettent de mettre en évidence les subtilités d'une représentation par rapport à une autre.

La stabilité est une condition impérative que doit satisfaire tout système dynamique conçu pour réaliser une tâche donnée, en l'occurrence un système de commande ou un système de traitement de données. Plusieurs études vigoureuses ont été consacrées à la stabilité des systèmes linéaires invariants ([4], [14]). On présentera plus particulièrement le concept de stabilité externe et on montrera qu'il est équivalent au concept de stabilité au sens entrée bornée-sortie bornée \mathcal{EBSB} . Un critère algébrique de test de stabilité est brièvement présenté pour des considérations de culture générale.

2.1 Préliminaires

La représentation des systèmes sera principalement traitée en utilisant l'opérateur différentiel sur l'ensemble des fonctions réelles $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ défini comme suit

$$\begin{aligned} \rho : \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}\} \\ f &\rightarrow \rho f = \frac{d}{dt} f \end{aligned}$$

Il permet de définir un opérateur différentiel polynomial à partir de l'anneau des polynômes à coefficients réels

$$\mathcal{R}[\rho] = \left\{ X(\rho) = \sum_{i=0}^{nx} x_i \rho^{nx-i} \text{ avec } (x_0, \dots, x_{nx}) \in \mathcal{R}^{nx+1} \right\}$$

soit

$$X(\rho) [f(t)] = \left(\sum_{i=0}^{nx} x_i \rho^{nx-i} \right) [f(t)] = \sum_{i=0}^{nx} x_i (\rho^{nx-i} f(t))$$

Les propriétés usuelles suivantes permettent de simplifier le calcul différentiel dans le cas où les conditions initiales sont nulles.

P1. $\forall (A(\rho), B(\rho)) \in \mathcal{R}[\rho] \times \mathcal{R}[\rho]$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, on a

$$(\alpha A(\rho) + \beta B(\rho)) [s(t)] = \alpha A(\rho) [s(t)] + \beta B(\rho) [s(t)]$$

P2. $\forall (A(\rho), B(\rho)) \in \mathcal{R}[\rho] \times \mathcal{R}[\rho]$, on a

$$A(\rho) [B(\rho) [s(t)]] = (A(\rho)B(\rho)) [s(t)] = (B(\rho)A(\rho)) [s(t)] = B(\rho) [A(\rho) [s(t)]]$$

P3. $\forall (F(\rho), G(\rho)) \in \mathcal{R}^*[\rho] \times \mathcal{R}[\rho]$, on a

$$F(\rho) [s(t)] = G(\rho) [e(t)] \iff s(t) = \frac{G(\rho)}{F(\rho)} [e(t)]$$

$$\frac{1}{F(\rho)} [G(\rho) [s(t)]] = G(\rho) \left[\frac{1}{F(\rho)} [s(t)] \right] = \frac{G(\rho)}{F(\rho)} [s(t)]$$

Remarque 2.1 On peut se demander pourquoi un autre opérateur quand on dispose déjà du potentiel opérationnel de la transformée de Laplace pour effectuer aisément le calcul différentiel ? C'est une question légitime si on se limite aux systèmes linéaires invariants que l'on peut représenter par des fonction de transfert. Dans le cas des systèmes linéaires variants dans le temps ou des systèmes non linéaires, le concept de fonction de transfert n'a aucun sens.

2.2 Représentations non paramétriques

Les systèmes linéaires invariants peuvent être caractérisés par leurs réponses à un ensemble de signaux tests, notamment l'impulsion unitaire et la sinusoïde générale unitaire respectivement données par

$$u(t) = \delta(t) \quad \text{et} \quad u(t) = e^{j\omega t} \alpha(t)$$

Ces représentations sont fondamentalement issues du produit de convolution qui est à la base du comportement d'entrée-sortie d'un système linéaire invariant lorsque les conditions initiales sont nulles, soit

$$\mathcal{RES} \left\{ y(t) = (g * u)(t) = \int_0^\infty g(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right.$$

\iff

$$\mathcal{RES} \left\{ y(t) = (u * g)(t) = \int_0^\infty g(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau \right.$$

où $\{g(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ représente la réponse impulsionnelle du système, soit

$$\mathcal{RIMP} \{ \{g(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$$

Cette appellation est justifiée par la propriété suivante

$$\left(u(t) = \delta(t) \right) \implies \left(y(t) = \int_0^\infty g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty g(t) \delta(t - \tau) d\tau = g(t) \right)$$

Par ailleurs, la réponse du système à une sinusoïde générale unitaire est donnée par

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \left(\int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} = \mathcal{G}(j\omega) e^{j\omega t}$$

modulo l'existence de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Et si l'on prend les transformées de Fourier des deux membres de cette expression, on obtient

$$Y(j\omega) = \mathcal{G}(j\omega) U(j\omega) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\omega t + j\varphi(\omega)} U(j\omega)$$

avec

$$\mathcal{M}(j\omega) = |\mathcal{G}(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg}(\mathcal{G}(j\omega))$$

La sortie d'un système linéaire invariant ayant une entrée sinusoïdale est donc une sinusoïde de même pulsation que l'entrée, déphasée de $\varphi(\omega)$ par rapport à l'entrée et dont l'amplitude est modifiée par le gain du système $\mathcal{M}(j\omega)$, à la pulsation ω .

La réponse harmonique d'un système est donnée par la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle, soit

$$\mathcal{RHAR} \{ \mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \mathcal{F}(g(t)) \}$$

Cette représentation est caractérisée par les diagrammes de Bode, Nyquist et Black selon la motivation courante. Le diagramme de Bode permet de donner directement le gain et la phase du système en fonction de la pulsation. Les diagrammes de Nyquist et de Black sont particulièrement utilisés pour la représentation des réponses harmoniques des fonctions de transfert en boucle ouverte d'un système asservi. Ces représentations harmoniques permettent de déduire respectivement la robustesse en stabilité du système asservi et ses performances.

Remarque 2.2 Bien que le tracé de la réponse fréquentielle peut être aisément fait sous Matlab, il faut absolument avoir une idée sur le comportement asymptotique de cette réponse et la symétrie issue de la propriété intrinsèque

$$\mathcal{G}(-j\omega) = (\mathcal{G}(j\omega))^*$$

Pour insister sur l'importance de la symétrie, on rappelle ci-après la démonstration d'une telle propriété.

$$\mathcal{G}(j\omega) = \int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^\infty g(\tau) (e^{j\omega\tau})^* d\tau = (\mathcal{G}(-j\omega))^*$$

Par ailleurs, il est clair que les zéros de $\mathcal{G}(j\omega)$ correspondent aux fréquences asymptotiquement rejetées par le système.

2.3 Représentations paramétriques

Dans le contexte de l'approche polynomiale, le comportement entrée-sortie d'un système linéaire invariant est décrit par l'équation différentielle

$$\rho^{na}y(t) + a_1\rho^{na-1}y(t) + \dots + a_nay(t) = b_o\rho^{nb}u(t) + b_1\rho^{nb-1}u(t) + \dots + b_nbu(t)$$

que l'on peut récrire sous une forme beaucoup plus agréable du point de vue du calcul différentiel, soit

$$A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t)$$

avec

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \rho^{na} + a_1\rho^{na-1} + \dots + a_{na-1}\rho + a_{na} \\ B(\rho) &= b_o\rho^{nb} + b_1\rho^{nb-1} + \dots + b_{nb-1}\rho + b_{nb} \end{aligned}$$

La fraction rationnelle

$$\mathcal{G}(\rho) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} = \frac{b_o\rho^{nb} + b_1\rho^{nb-1} + \dots + b_{nb-1}\rho + b_{nb}}{\rho^{na} + a_1\rho^{na-1} + \dots + a_{na-1}\rho + a_{na}}$$

est un opérateur différentiel linéaire que l'on peut utiliser pour décrire le système

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\rho) : \mathcal{U} = \{u : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow \mathcal{Y} = \{y : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u(t) &\rightarrow y(t) = G(\rho)[u(t)] \end{aligned}$$

La représentation d'un système par une équation différentielle est alors donnée par

$$\mathcal{EDIF} \left\{ y(t) = \mathcal{G}(\rho)[u(t)] \right\} \iff A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t)$$

La fonction de transfert est obtenue en prenant les transformées de Laplace des deux membres de l'équation différentielle tout en supposant que les conditions initiales sont nulles. On aura alors

$$\mathcal{L}\{A(\rho)y(t)\} = \mathcal{L}\{B(\rho)u(t)\}$$

ou d'une manière équivalente

$$\sum_{i=0}^{na} a_i \mathcal{L}\{\rho^i y(t)\} = \sum_{i=0}^{nb} b_i \mathcal{L}\{\rho^i u(t)\} \text{ avec } a_o = 1$$

Et comme les conditions initiales sont supposées être nulles, on obtient l'équation

$$\sum_{i=0}^{na} a_i p^i (\mathcal{L}\{y(t)\}) = \sum_{i=0}^{nb} b_i p^i (\mathcal{L}\{u(t)\})$$

La représentation sous-jacente est alors donnée par

$$\mathcal{FTRA} \{ Y(p) = \mathcal{G}(p)U(p) \}$$

avec

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\sum_{i=0}^{nb} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{na} a_i p^i} = \frac{b_o p^{nb} + b_1 p^{nb-1} + \dots + b_{nb-1} p + b_{nb}}{p^{na} + a_1 p^{na-1} + \dots + a_{na-1} p + a_{na}}$$

La fonction de transfert peut se récrire sous la forme

$$\mathcal{G}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \gamma \frac{\prod_{i=1}^{n_{zeros}} (p - z_i)}{\prod_{i=1}^{n_{poles}} (p - p_i)}$$

qui permet de mettre en évidence les zéros du système, i.e. $\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) = \{z_1, \dots, z_{nb}\}$, les pôles du système, i.e. $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) = \{p_1, \dots, p_{na}\}$, et la configuration pôles-zéros du système, i.e. l'ensemble $\mathcal{CPZ}(\mathcal{SYS}) = \mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \cup \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS})$.

On notera que la relation entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle est donnée par

$$\mathcal{G}(p) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt$$

Remarque 2.3 Dans le cas des conditions initiales nulles, on peut définir un opérateur intégral à partir de l'opérateur différentiel comme suit

$$\rho^{-1} : f(t) \longrightarrow \rho^{-1}(f(t)) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

et récrire l'opérateur $\mathcal{G}(\rho)$ sous la forme

$$G(\rho) = \rho^{-r} \frac{b_o + b_1 \rho^{-1} + \dots + b_{nb-1} \rho^{-(nb-1)} + b_{nb} \rho^{-nb}}{1 + a_1 \rho^{-1} + \dots + a_{na-1} \rho^{-(na-1)} + a_{na} \rho^{-na}}$$

ou d'une manière équivalente modulo une division euclidienne

$$\mathcal{G}(\rho) = \rho^{-r} (g_o + g_1 \rho^{-1} + \dots + g_i \rho^{-i} + \dots)$$

où $r \triangleq na - nb$ désigne le degré relatif du système. L'équation différentielle peut être alors exprimée comme suit

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \rho^{-r-i} u(t)$$

ou

$$\rho^r y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \rho^{-i} u(t)$$

La première expression montre clairement que la sortie du système est une combinaison linéaire des intégrales successives de son entrée à partir de son degré relatif r . Quant à la seconde expression, elle permet d'interpréter le degré relatif comme le plus petit ordre de dérivation de la sortie qui dépend explicitement de l'entrée.

2.4 Modélisation d'un moteur à courant continu

Le moteur à courant continu qui entraîne une charge constituée d'une inertie et d'un frottement visqueux est un exemple relativement populaire en automatique. Le modèle d'un moteur à courant continu commandé par la tension d'induit peut être obtenu à partir de ses équations électrique et mécanique comme suit

$$v(t) = L\rho i(t) + Ri(t) + e(t) \text{ avec } e(t) = \alpha\phi\rho q(t)$$

et

$$J\rho^2 q(t) = \tau_m(t) - \tau_f(t) - \tau_r(t) \text{ avec } \tau_m(t) = \beta\phi i(t) \text{ et } \tau_f(t) = f\rho q(t)$$

où $\{i(t)\}$, $\{v(t)\}$, $\{e(t)\}$ et $\{q(t)\}$ désignent respectivement le courant d'induit, la tension aux bornes de l'induit, la force contre-électromotrice du moteur et la position du moteur, $\{\tau_m(t)\}$, $\{\tau_f(t)\}$ et $\{\tau_r(t)\}$ désignent respectivement le couple produit par le moteur, le couple des frottements visqueux et le couple résistant, L et R sont l'induction et la résistance de l'induit, ϕ est le flux magnétique du stator, J représente l'inertie propre du moteur ramenée à l'arbre du moteur et augmentée par l'inertie des organes de transmission, $\alpha\phi$, $\beta\phi$ et f représentent les coefficients de la force contre-électromotrice, du couple produit par le moteur et des frottements visqueux.

On se propose d'étudier la modélisation de ce système électro-mécanique d'une manière progressive. On commencera d'abord par une modélisation du moteur dans le cas d'une commande par la tension d'induit sans faire une quelconque hypothèse simplificatrice. On en déduira ensuite un modèle réduit dans le cas usuel où la constante de temps électrique est relativement petite par rapport à la constante de temps mécanique.

2.4.1 Modélisation du moteur

Les équations du système électro-mécanique considéré peuvent se récrire comme suit

$$\mathcal{MOTCT} \begin{cases} v(t) = (L\rho + R) i(t) + \alpha\phi \rho q(t) \\ (J\rho + f) \rho q(t) = \beta \phi i(t) - \tau_r(t) \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace et en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient les équations

$$\mathcal{MOTCT} \begin{cases} (Lp + R) I(p) = V(p) - \alpha\phi pQ(p) \\ (Jp + f) pQ(p) = \beta\phi I(p) - T_r(p) \end{cases}$$

Ces équations sont à la base du schéma bloc du moteur à courant continu de la figure 2.2 et que l'on peut représenter comme l'indique la figure 2.3.

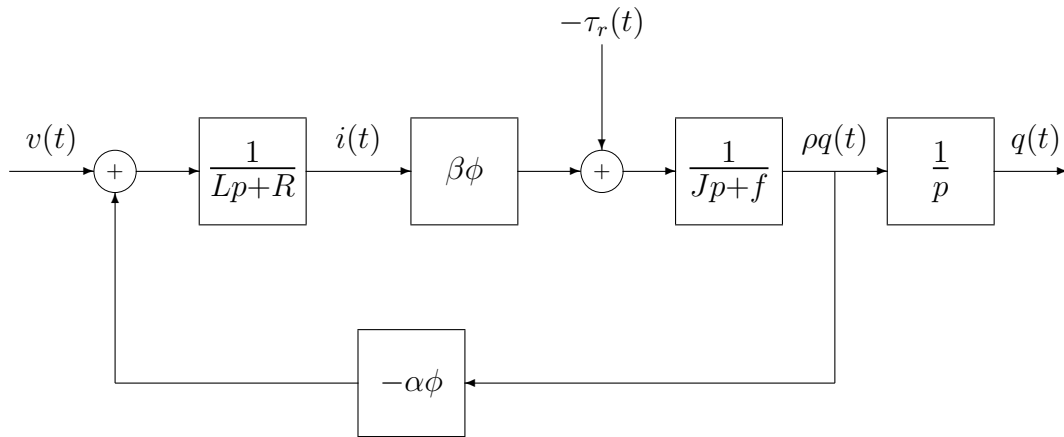


FIG. 2.2 – Schéma de commande en tension

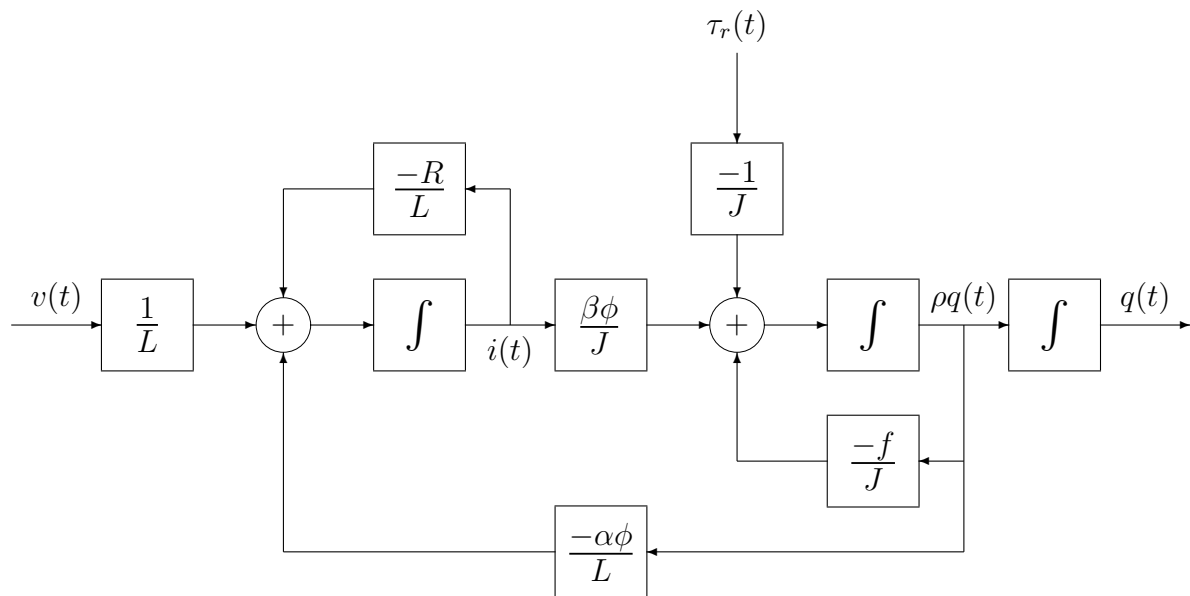


FIG. 2.3 – Diagramme fonctionnel

Cette dernière montre clairement que la position, la vitesse et le courant d'induit sont des variables pertinentes du système électro-mécanique. Les équations électrique et mécanique du moteur peuvent se mettre sous la forme

$$\mathcal{MOTCT} \begin{cases} \rho i(t) = -\frac{\alpha\phi}{L} \rho q(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} v(t) \\ \rho^2 q(t) = -\frac{f}{J} \rho q(t) + \frac{\beta\phi}{J} i(t) - \frac{1}{J} \tau_r(t) \end{cases}$$

que l'on peut récrire comme suit

$$\mathcal{REMOTCT} \left\{ \begin{array}{l} \rho \begin{bmatrix} q(t) \\ \rho q(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{\beta\phi}{J} \\ 0 & -\frac{\alpha\phi}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \rho q(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \tau_r(t) \\ \\ q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \rho q(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La relation entre la sortie du système électro-mécanique, i.e. la position angulaire du moteur, et ses entrées, i.e. la tension d'induit et le couple résistant, peut être obtenue en éliminant le courant d'induit entre les équations électrique et mécanique. Pour ce faire, on opère d'abord par $(L\rho + R)$ sur l'équation mécanique pour y faire apparaître le terme $(L\rho + R) i(t)$, soit

$$(J\rho + f)(L\rho + R)\rho q(t) = \beta\phi(L\rho + R)i(t) - (L\rho + R)\tau_r(t)$$

On peut alors éliminer le courant d'induit en utilise l'équation électrique, soit

$$(J\rho + f)(L\rho + R)\rho q(t) = \beta\phi(v(t) - \alpha\phi\rho q(t)) - (L\rho + R)\tau_r(t)$$

En regroupant les termes associés à la vitesse angulaire du moteur, on obtient

$$((J\rho + f)(L\rho + R) + \alpha\beta\phi^2)\rho q(t) = \beta\phi v(t) - (L\rho + R)\tau_r(t)$$

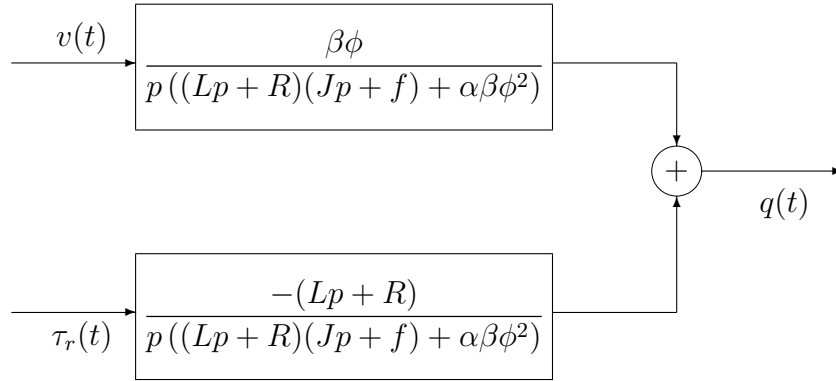


FIG. 2.4 – Relation entrée-sortie

En prenant les transformées de Laplace des deux membres de cette équation et en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient le modèle

$$Q(p) = \mathcal{G}(p) \begin{bmatrix} V(p) \\ T_r(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1(p) & \mathcal{G}_2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(p) \\ T_r(p) \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathcal{G}_1(p) = \frac{\beta\phi}{p((Lp + R)(Jp + f) + \alpha\beta\phi^2)}$$

et

$$\mathcal{G}_2(p) = \frac{-(Lp + R)}{p((Lp + R)(Jp + f) + \alpha\beta\phi^2)}$$

Ce modèle peut être représenté comme l'indique la figure 2.4. On notera que l'on aurait pu déterminer la matrice de transfert $\mathcal{G}(p)$ directement du modèle $\mathcal{REMOTCT}$.

2.4.2 Modélisation réduite du moteur

L'équation électrique du moteur peut se récrire sous la forme

$$i(t) = \frac{L}{R} \rho i(t) - \frac{\alpha\phi}{R} \rho q(t) + \frac{1}{R} v(t)$$

Il apparaît clairement que si la constante de temps électrique est négligeable par rapport à la constante de temps mécanique, alors le modèle du moteur peut être réduit comme suit

$$\mathcal{MOTCTR} \begin{cases} i(t) = -\frac{\alpha\phi}{R} \rho q(t) + \frac{1}{R} v(t) \\ (J\rho + f) \rho q(t) = \beta\phi i(t) - \tau_r(t) \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\mathcal{MOTCTR} \begin{cases} I(p) = -\frac{\alpha\phi}{R} pQ(p) + \frac{1}{R} V(p) \\ (Jp + f) pQ(p) = \beta\phi I(p) - T_r(p) \end{cases}$$

puisque les conditions initiales sont nulles. Le moteur peut être alors représenté comme l'indique la figure 2.5.

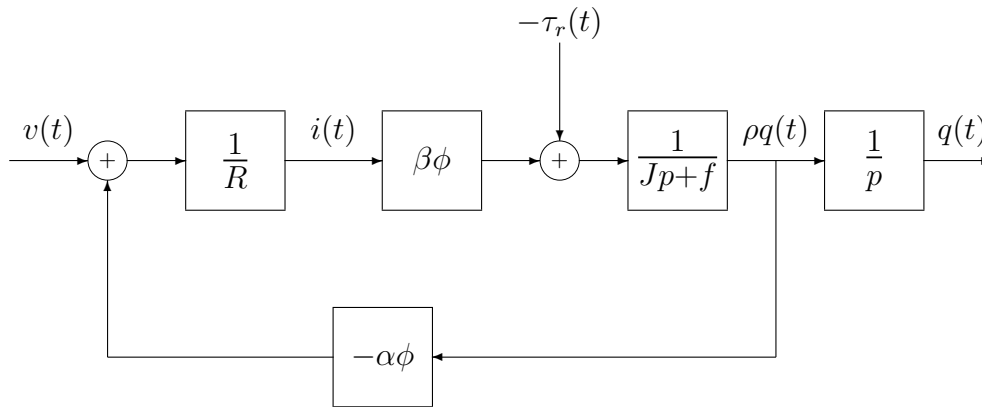


FIG. 2.5 – Schéma de commande en tension

Cette figure illustre clairement la réduction du modèle moteur : la position et la vitesse du moteur peuvent être toujours considérées comme des variables pertinentes alors que le courant d'induit peut être éliminé entre les équations du modèle réduit \mathcal{MOTCTR} . L'équation mécanique du moteur peut alors se mettre sous la forme

$$\mathcal{EQMECR} \begin{cases} \rho^2 q(t) = -\frac{f_e}{J} \rho q(t) + \frac{\beta\phi}{JR} v(t) - \frac{1}{J} \tau_r(t) \end{cases}$$

où f_e peut être interprété comme un coefficient de frottement généralisé donné par

$$f_e = f + \frac{\alpha\beta\phi^2}{R}$$

Ce modèle d'ordre réduit peut être représenté comme l'indique la figure 2.6 qui conduit directement à la représentation suivante du système électro-mécanique

$$\mathcal{RER}MOT \begin{cases} \rho \begin{bmatrix} q(t) \\ \rho q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f_e}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \rho q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta\phi}{JR} \end{bmatrix} v(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau_r(t) \\ q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \rho q(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

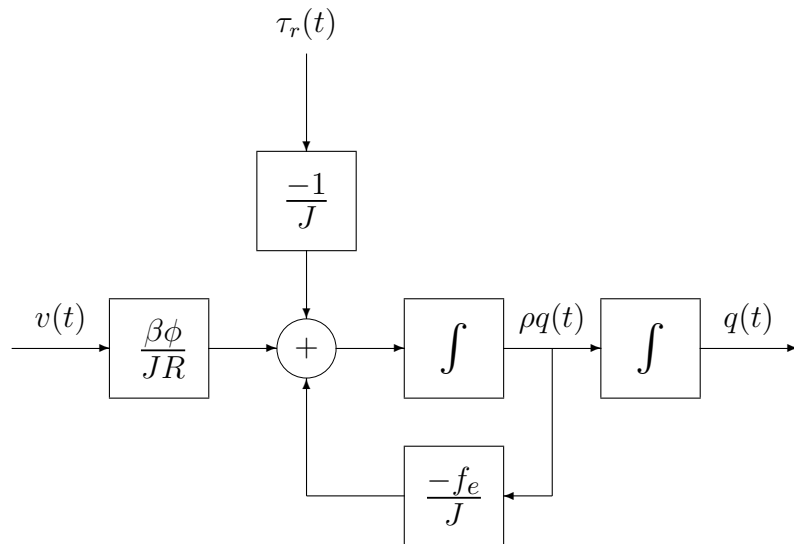


FIG. 2.6 – Diagramme fonctionnel simplifié

Par ailleurs, en appliquant la transformée de Laplace à l'équation mécanique simplifiée \mathcal{EQMECR} , on obtient

$$Q(p) = \mathcal{G}_r(p) \begin{bmatrix} V(p) \\ T_r(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{r1}(p) & \mathcal{G}_{r2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(p) \\ T_r(p) \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathcal{G}_{r1}(p) = \frac{\beta\phi}{p(JRp + fR + \alpha\beta\phi^2)}$$

et

$$\mathcal{G}_{r2}(p) = \frac{-R}{p(JRp + fR + \alpha\beta\phi^2)}$$

Ce modèle peut être représenté comme l'indique la figure 2.7. On notera que la matrice de transfert $\mathcal{G}_r(p)$ peut être déduire directement de la représentation d'état réduite du moteur $\mathcal{RER.MOT}$.

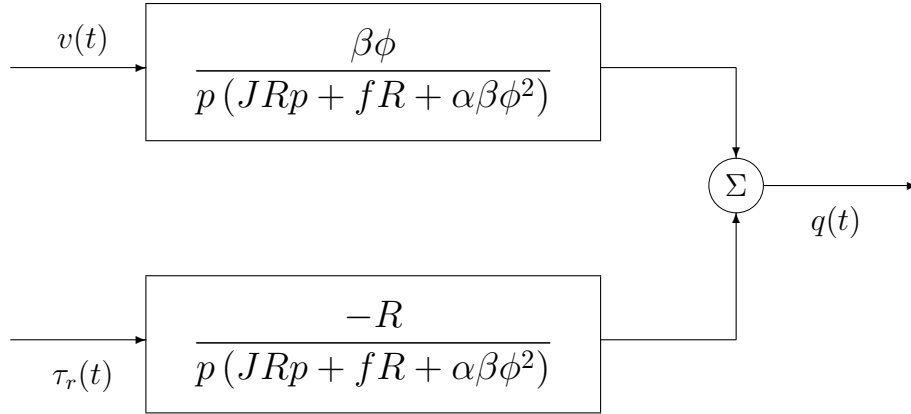


FIG. 2.7 – Relation entrée-sortie simplifiée

2.5 Stabilité externe

La stabilité externe d'un système linéaire invariant peut être fondamentalement définie à partir de sa réponse impulsionnelle comme l'indique la définition suivante

Définition 2.1 *Considérons un système linéaire invariant décrit par sa réponse impulsionnelle. On dira que*

AS. le système est stable si sa réponse impulsionnelle est asymptotiquement nulle, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

MS. le système est marginalement stable s'il n'est pas stable et sa réponse impulsionnelle est bornée, i.e.

$\{g(t)\}$ est bornée et si elle converge, alors sa limite n'est pas nulle

IN. le système est instable si sa réponse impulsionnelle n'est pas bornée, i.e.

$\{g(t)\}$ n'est pas bornée

2.5.1 Résultats fondamentaux

Ce concept de stabilité est complètement caractérisé par la position des pôles du système comme l'indiquent les résultats fondamentaux suivants.

Résultat 2.1 *Un système est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle négative, i.e. $A(p) = 0 \implies \Re(p) < 0$.*

Résultat 2.2 *Un système est marginalement stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle non positive, i.e. $A(p) = 0 \implies \Re(p) \leq 0$, qu'il admet au moins un pôle sur l'axe imaginaire et que ses pôles situés sur l'axe imaginaire sont simples.*

Démonstration. Notons que la fonction de transfert d'un système est fraction rationnelle propre que l'on peut toujours décomposer en éléments simples comme suit

$$\mathcal{G}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B(p)}{\prod_{i=1}^{\ell} (p - p_i)^{m_i}} = \gamma_o + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\gamma_{ij}}{(p - p_i)^j}$$

avec

$$\gamma_o = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{G}(p) \text{ et } \gamma_{ij} = \lim_{p \rightarrow p_i} \left\{ \frac{1}{(m_i - j)!} \left(\frac{d}{dp} \right)^{(m_i - j)} \left[(p - p_i)^{m_i} \mathcal{G}(p) \right] \right\}$$

où m_i désigne l'ordre de multiplicité du pôle $p = p_i$ et les $\{\gamma_{ij}\}$ sont des nombres complexes. On aura donc

$$g(t) = \gamma_o \delta(t) + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t} \alpha(t)$$

Il apparaît clairement que la réponse impulsionnelle est asymptotiquement nulle si et seulement si tous les pôles du système sont situés à l'intérieur du domaine de stabilité externe, i.e.

$$\mathcal{D}_{se} = \{p \in \mathbb{C} / \Re(p) < 0\}$$

Par ailleurs, la réponse impulsionnelle est bien bornée si et seulement si tous les pôles sont situés dans le domaine de stabilité et que ceux qui sont particulièrement situés sur sa frontière, i.e. l'axe imaginaire, sont simples

La stabilité externe d'un système est étroitement liée à son aptitude à produire des sorties bornées à partir d'entrées bornées comme l'indique la définition suivante

Définition 2.2 *Un système est stable au sens \mathcal{EBSB} si pour toute entrée bornée, la sortie reste bornée.*

Le résultat fondamental suivant permet de mettre en exergue la vraisemblance entre la stabilité externe et la stabilité \mathcal{EBSB} .

Résultat 2.3 *Un système linéaire et invariant est stable au sens \mathcal{EBSB} si et seulement si sa réponse impulsionnelle vérifie*

$$\exists K_g \in [0, \infty) / \int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq K_g$$

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est suffisante en exploitant la relation d'entrée-sortie du système

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

et plus particulièrement la propriété

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |g(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau$$

Cette propriété permet de conclure que si l'entrée est bornée, soit

$$\exists K_u \in [0, \infty) / |u(t)| \leq K_u \text{ pour tout } t \in \mathcal{R}^+$$

alors on aura

$$|y(t)| \leq K_u \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau \text{ pour } 0 \leq K_u < \infty$$

Il est clair que

$$\exists K_g \in [0, \infty) / \int_0^\infty |g(t)| dt \leq K_g \implies |y(t)| \leq K_y = K_u K_g \in [0, \infty)$$

Pour montrer que la condition est nécessaire, il suffit de montrer que si la réponse impulsionnelle n'est pas bornée, alors le système n'est pas stable au sens \mathcal{EBSB} . Pour ce faire, on procédera d'une manière constructive en considérant une entrée définie par

$$u(\tau) = \text{signe}(g(t-\tau)) \text{ pour } \tau \in [0, t]$$

La sortie qui en résulte à l'instant t est donnée par

$$y(t) = \int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^\infty g(t-\tau) \text{signe}(g(t-\tau)) d\tau = \int_0^\infty |g(t-\tau)| d\tau$$

Il est clair qu'une entrée bornée ne conduit pas à une sortie bornée lorsque la réponse impulsionnelle vérifie la propriété

$$\forall K^* \in \mathcal{R}^+, \exists t \in \mathcal{R}^+ / \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau > K^*$$

Les remarques suivantes permettent de mieux appréhender le concept de stabilité et la nécessité de réduire le domaine de stabilité par rapport aux performances.

Remarque 2.4 Comme la réponse impulsionnelle des systèmes linéaires invariants dans le temps est uniformément continue, la stabilité \mathcal{EBSB} est équivalente à la stabilité externe.

Remarque 2.5 La stabilité est certes une condition nécessaire mais elle est loin d'être suffisante. Le comportement des systèmes de commande doit être relativement rapide et bien amorti, i.e. pas de pôles réels trop proches de l'origine et pas de modes oscillatoires. Pour assurer ces performances, on est amené à réduire le domaine de stabilité comme l'indique la figure 2.8. On aura alors un domaine de stabilité et de performances défini par

$$\mathcal{D}_{sp} = \left\{ p \in \mathcal{C} / -\alpha_r \leq \Re(p) \leq -\alpha_l \text{ et } \frac{|\Re(p)|}{\|p\|} \leq \xi_l \right\}$$

Les scalaires α_l et ξ_l permettent d'avoir une dynamique relativement rapide et bien amortie alors que le scalaire α_r permet d'éviter des pôles trop rapides pour assurer une bande passante raisonnable et donc une bonne robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et bruits

de mesure inéluctables. Les contributions des modes réels décroîtront plus rapidement que le terme $e^{-\alpha_l t}$, alors que celles des modes oscillatoires sont de la forme $e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$ et auront un amortissement $\xi \geq \xi_l$.

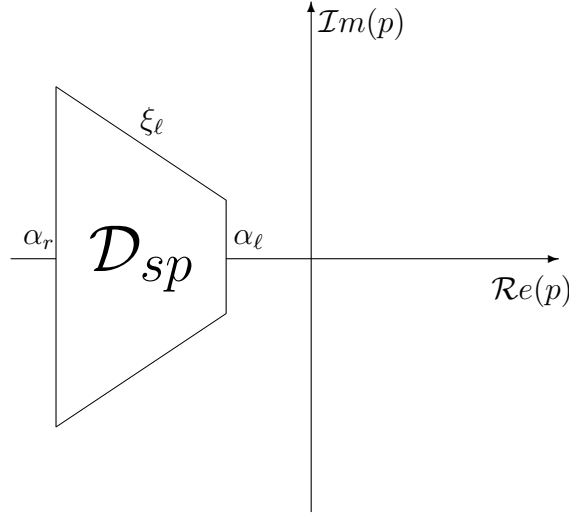


FIG. 2.8 – Domaine de stabilité et de performances

Remarque 2.6 Les exemples suivants permettent de mieux apprécier le concept de stabilité marginale, e.g. un système qui admet un pôle multiple sur l'axe imaginaire est bien instable.

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \implies g(t) = \sin(\omega t) \alpha(t)$$

$$\mathcal{G}(p) = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \implies g(t) = t \sin(\omega t) \alpha(t)$$

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{p^n} \implies g(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{(i-1)!} t^{i-1} \alpha(t)$$

Par ailleurs, on peut en déduire aisément les trois résultats remarquables suivants sur la caractérisation de la réponse d'un système stable à des classes spécifiques d'entrée. Ces résultats seront particulièrement utilisés pour l'analyse des performances des systèmes asservis.

Résultat 2.4 La réponse d'un système stable à une entrée asymptotiquement nulle est asymptotiquement nulle.

Résultat 2.5 La réponse d'un système stable à une séquence de variables aléatoire de moyenne nulle et de variances finies est une séquence de variable aléatoire de moyenne nulle et de variances finies. Plus précisément, considérons le système

$$s(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} e(t)$$

Alors on aura

$$\left(\mathcal{E} \{e(t)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E} \{e^2(t)\} = \sigma^2 \right) \implies \left(\mathcal{E} \{s(t)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E} \{s^2(t)\} = \gamma \sigma^2 \right)$$

Résultat 2.6 La réponse d'un système stable à une entrée bornée que l'on peut considérer comme la réponse impulsionnelle d'un système marginalement stable est asymptotiquement nulle si et seulement si les pôles du générateur de cette entrée sont des zéros du système. Plus précisément, considérons le système

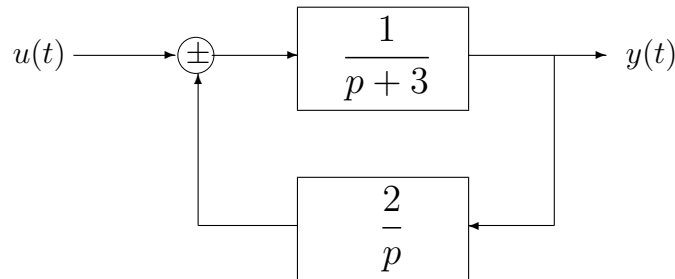
$$s(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} e(t) \text{ avec } e(t) = \frac{C(\rho)}{D(\rho)} \delta(t)$$

Alors on aura

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0 \iff D(\rho) \text{ divise } B(\rho)$$

On notera que le dernier résultat permet de mieux appréhender le concept des zéros d'un système.

Exercice 2.1 Considérons le système donné par la figure suivante



On demande de donner les diverses représentations du système et de préciser la classe des entrées qui sont asymptotiquement rejetées par le système.

Exercice 2.2 Considérons un système décrit par sa fonction de transfert

$$\text{SYS} \{ Y(p) = \mathcal{G}(p)U(p) \}$$

avec

$$\mathcal{G}(p) = \frac{p^2 + \beta^2}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}$$

où $\beta \in \mathcal{R}^+$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. On demande de traiter les aspects suivants du système

- Donner la configuration pôles-zéros du système et étudier sa stabilité en fonction des scalaires α_1 et α_2 comme l'indique le tableau suivant. On utilisera les acronymes SST,

	$\alpha_2 > 0$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 < 0$
$\alpha_1 > 0$			
$\alpha_1 = 0$			
$\alpha_1 < 0$			

SMS et SINS pour désigner respectivement que le système est stable, marginalement stable et instable.

- Préciser le cas où le système admet une réponse harmonique et en déduire son gain statique.
- Donner l'équation différentielle du système.
- Supposons que $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$, préciser la classe des entrées qui sont asymptotiquement rejetées par le système en fonction du scalaire β .

2.5.2 Critères algébriques

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires invariants peut être effectuée à partir de leur configuration des pôles. Ceci requiert une bonne connaissance du système et des solveurs efficaces des racines d'un polynôme. L'algèbre offre des méthodes qui permettent de déterminer le signe des parties réelles des racines d'un polynôme à coefficients réels. Ces méthodes ont été appliquées pour établir des critères algébriques qui permettent de tester la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps sans résoudre l'équation caractéristique sous-jacente. Ceci est relativement important pour les sciences de l'ingénieur parce que les solveurs des racines d'un polynôme, comme les logiciels de calcul formel associés, ne sont pas suffisamment puissants pour ce faire. On se contentera de présenter le critère de Routh-Hurwitz qui est communément utilisé en automatique qui consiste à réaliser les deux étapes suivantes.

- Etape 1. Dresser le tableau de Routh à partir du polynôme

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

Les deux premières lignes sont obtenues à partir des coefficients de $A(p)$ comme suit.

$$a_1^j = a_{2j} \text{ et } a_2^j = a_{2j+1} \text{ avec } a_k = 0 \text{ pour } k > n$$

Les autres lignes sont obtenues par récurrence selon la formule

$$a_{i+2}^j = a_i^{j+1} - \frac{a_i^0}{a_{i+1}^0} a_{i+1}^{j+1} \text{ pour } i \in [0, n-1]$$

jusqu'à obtenir une ligne complète de zéros.

a_1^0	a_1^1	a_1^2	\dots	\dots	0
a_2^0	a_2^1	a_2^2	\dots	\dots	0
a_3^0	a_3^1	a_3^2	\dots	\dots	0
a_4^0	a_4^1	a_4^2	\dots	\dots	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	0
0	0	0	0	0	0

TAB. 2.1 – Tableau de Routh du polynôme $A(p)$

- Etape 2. Conclure sur le signe des parties réelles des racines du polynôme $A(p)$ à partir du résultat suivant

Résultat 2.7 *Le polynôme $A(p)$ a toutes ses racines à partie réelle strictement négative si et seulement si tous les coefficients α_i^o pour $i \in [1, n + 1]$ de la première colonne du tableau de Routh sont non nuls et de même signe. Par ailleurs, si tous les coefficients α_i^o pour $i \in [1, n]$ sont non nuls, le nombre de changements de signe des coefficients α_i^o pour $i \in [2, n + 1]$ dans la première colonne du tableau de Routh correspond au nombre de racines de $A(p)$ ayant une partie réelle positive.*

Remarque 2.7 *L'application du critère de Routh-Hurwitz n'est pas toujours faisable. En effet, on peut rencontrer des situations singulières, e.g. le premier élément d'une ligne du tableau de Routh est nul ou tous les éléments d'une ligne du tableau de Routh sont nuls. La dernière situation est symptomatique des pôles symétriques par rapport à l'origine. Des méthodes sont disponibles pour traiter ces cas singuliers, le lecteur intéressé pourra les trouver dans la plupart des livres dédiés aux bases de l'automatique ([6]).*

Le résultat suivant donne une condition nécessaire pour qu'un polynôme ait ses racines dans le domaine de stabilité. Cette condition est connue sous le nom de test de Hurwitz que l'on peut particulièrement utiliser pour conclure à l'instabilité d'un système linéaire invariant dans le temps.

Résultat 2.8 *Si un polynôme $A(p)$ a toutes ses racines à partie réelle strictement négative, alors tous ses coefficients α_i sont non nuls et de même signe.*

A titre illustratif, on peut utiliser le critère de Routh-Hurwitz pour montrer les faits suivants

- Un système de second ordre est stable si et seulement si les coefficients de son polynôme caractéristique $P_c(p) = \alpha_o p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2$ sont de même signe comme le montre le tableau de Routh 2.2 correspondant.

α_o	α_2	0
α_1	0	0
α_2	0	0
0	0	0

TAB. 2.2 – Tableau de Routh du polynôme $P_c(p)$

- Le polynôme $A(p) = p^3 + p^2 + 2p + 24$ a deux racines à parties réelles positive et une racine à partie réelle négative comme l'indique le tableau de Routh 2.3 qui lui est associé.

1	2	0
1	24	0
-22	0	0
24	0	0
0	0	0

TAB. 2.3 – Tableau de Routh du polynôme $A(p)$

- Considérons le système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{p^3 + 16p^2 + 68p + (80 + K)}$$

où K est un scalaire positif. La table 2.4 donne le tableau de Routh correspondant au polynôme caractéristique $P_c(p)$. Le système est alors stable si et seulement si le gain K vérifie les conditions suivantes

$$\left(\frac{1008 - K}{16} > 0 \text{ et } 80 + K > 0 \right) \implies 0 < K < 1008$$

puisque le gain K doit être positif.

1	68	0
16	$80 + K$	0
$\frac{1008 - K}{16}$	0	0
$80 + K$	0	0
0	0	0

TAB. 2.4 – Tableau de Routh du polynôme $P_c(p)$

Les critères algébriques ne sont généralement pas utilisés dans les applications d'automatique. Les considérations suivantes justifient cette prudence.

- Ils ne permettent de répondre à la question de stabilité d'un système que d'une manière dichotomique, i.e. par oui ou non, sans fournir une méthode de stabilisation du système.
- Ils ne requièrent ni fournissent aucune information sur les incertitudes du modèle qui préservent la stabilité du système et ne sont donc pas adaptés à une étude expérimentale.
- Le volume de calcul augmente fortement avec l'ordre du système à analyser.

2.6 Modélisation des perturbations

Le problème de modélisation des perturbations a reçu une attention particulière puisqu'il est impossible de concevoir des systèmes de commande réalisant une compensation des perturbations ou des filtres réalisant une estimation optimale du signal utile sans aucune connaissance sur la nature des perturbations ou des bruits de mesure ([2], [11], [20]). On distingue deux classes de perturbations selon leur réalisation, e.g. une réalisation déterministe où une réalisation aléatoire.

- La transformée de Laplace d'une perturbation déterministe $\{v(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ peut se récrire sous la forme

$$V(p) = \mathcal{P}(p) = \mathcal{P}(p) \Delta(p)$$

avec

$$\Delta(p) = \mathcal{L}(\delta(t))$$

Une perturbation déterministe peut être alors interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un système dynamique dont la fonction de transfert est égale à la transformée de Laplace de cette perturbation comme l'indique la figure 2.9.

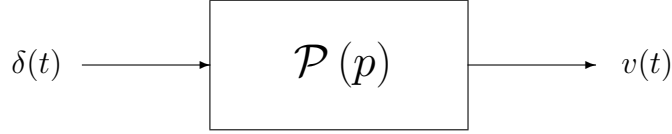


FIG. 2.9 – Générateur d'une perturbation déterministe

Les autres représentations peuvent être déduites de la fonction de transfert, e.g. la réponse impulsionnelle et l'équation différentielle respectivement définies par

$$\mathcal{RIMP} \left\{ \left\{ h(t) \right\}_{t \in \mathcal{R}^+} \text{ avec } \mathcal{L} \left(\left\{ h(t) \right\}_{t \in \mathcal{R}^+} \right) = \mathcal{P}(p) \right.$$

$$\mathcal{EQDP} \left\{ v(t) = \mathcal{P}(\rho) \delta(t) \right.$$

En guise d'illustration, on peut respectivement représenter les perturbations du type échelon et une perturbation harmonique de pulsation ω comme suit

$$\rho v(t) = v \delta(t)$$

et

$$(\rho^2 + \omega^2) v(t) = \omega v \delta(t)$$

- Une perturbation aléatoire $\{v(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ est généralement décrite par un processus stochastique stationnaire comme suit

$$v(t) = \mathcal{P}(\rho) \gamma(t)$$

avec

$$\mathcal{P}(j\omega) = \mathcal{S}(\{v(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+})$$

où $\mathcal{P}(p)$ est une fonction de transfert propre dont le module sur le cercle unité est égal au spectre de la séquence $\{v(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ et $\{\gamma(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies. Une perturbation aléatoire peut être alors interprétée comme la réponse à un bruit blanc d'un système dynamique dont la réponse harmonique peut être déterminée à partir du spectre de cette perturbation comme l'indique la figure 2.10

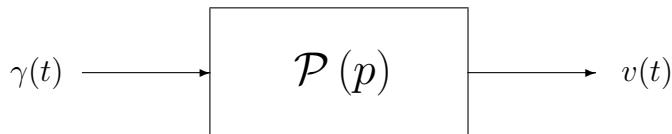


FIG. 2.10 – Générateur d'une perturbation aléatoire

Les différentes représentations d'un tel système peuvent être déduites naturellement à partir de l'opérateur $\mathcal{P}(\rho)$ que l'on peut obtenir à partir d'une expérience d'identification adéquate.

2.7 Conclusion

Un système linéaire est une application de l'ensemble de ses entrées vers l'ensemble de ses sorties qui vérifie le principe de superposition. Cette application linéaire peut être représentée de plusieurs manières selon l'ultime motivation de la modélisation. On distingue

- Les réponses impulsionnelle et harmonique, soit

$$\mathcal{RIMP} \{ \{g(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+} \quad \text{et} \quad \mathcal{RHAR} \{ \mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{M}(j\omega)e^{j\varphi(\omega)} \}$$

qui sont reliées comme suit

$$\mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_0^\infty g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- L'équation différentielle et la fonction de transfert, soit

$$\mathcal{EDIF} \{ A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{FTRA} \{ Y(p) = \mathcal{G}(p)U(p) \}$$

avec

$$\mathcal{G}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0p^{nb} + b_1p^{nb-1} + \dots + b_{nb-1}p + b_{nb}}{p^{na} + a_1p^{na-1} + \dots + a_{na-1}p + a_{na}}$$

Ces représentations peuvent être obtenues à partir des représentations non paramétriques via la relation

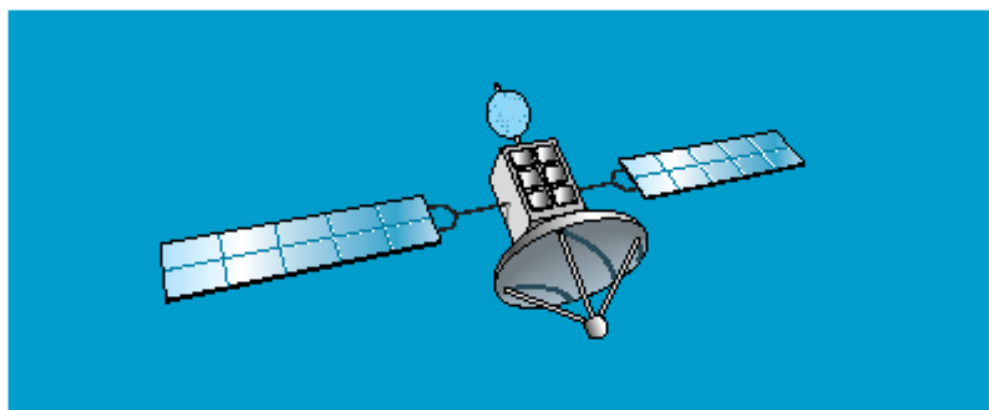
$$\mathcal{G}(p) = \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty g(\tau)e^{-p\tau}d\tau$$

Ces diverses représentations des systèmes linéaires invariants ont été présentées d'une manière compréhensive. Les relations de passage d'une représentation à l'autre ont été mises en évidence. Un exercice de modélisation a été étudié pour mieux illustrer la représentation des systèmes. Le système considéré est un moteur à courant continu : un actionneur prépondérant parmi les composants d'asservissement.

Les résultats fondamentaux de stabilité externe ont été présentés d'une manière rigoureuse et concise avec une attention particulière au critère algébrique de test de stabilité développé par Routh-Hurwitz. Des résultats remarquables ont été naturellement déduits de cette étude de stabilité ; ils concernent la caractérisation de la réponse d'un système stable à des entrées spécifiques au domaine des systèmes asservis.

Le problème de modélisation des perturbation a été brièvement traité à partir des résultats disponibles. On peut retenir que les perturbations qui affectent le fonctionnement d'un systèmes peuvent être modélisées comme la sortie d'un système (marginale) stable dont l'entrée est une impulsion d'amplitude inconnue (resp. une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies) selon que l'on considère un contexte déterministe (resp. stochastique), soit

$$\mathcal{MPERT} \{ D(\rho)v(t) = C(\rho)\gamma(t) \}$$



Chapitre 3

Systèmes asservis

La figure 3.1 montre un diagramme fonctionnel usuel d'un système asservi qui résulte d'une interconnection du type rétroaction de deux systèmes dynamiques qui ne sont autres que le système et le régulateur. Rappelons que l'ultime motivation d'un problème de commande est de *maintenir la séquence de sortie du système dans un voisinage d'une séquence de référence donnée indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du système*

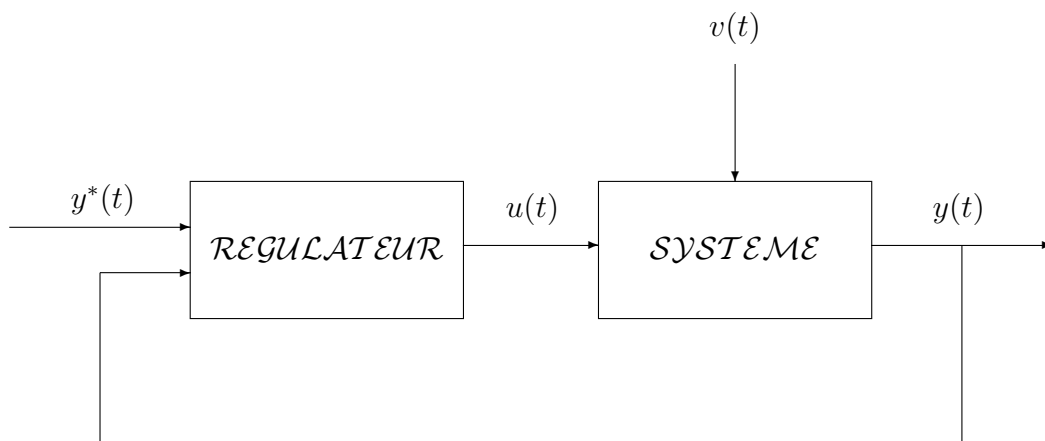


FIG. 3.1 – Diagramme fonctionnel d'un système asservi

La synthèse d'un régulateur est généralement effectuée à partir d'un modèle de commande qui reproduit au mieux le comportement d'entrée-sortie du système pour réaliser les performances requises, en l'occurrence un ensemble de spécifications qui constituent le cahier des charges du système asservi. On distingue les aspects fondamentaux suivants

- La stabilisation : le système asservi est stable indépendamment du fait que le système soit stable ou instable.
- Les performances : le système asservi doit avoir des dynamiques de poursuite et de régulation préalablement spécifiées avec une erreur statique identiquement nulle dans la plupart des cas.
- La robustesse : le système asservi doit être insensible aux erreurs de modélisation et aux bruits de mesure inéluctables.
- Une structure relativement simple du régulateur pour des considérations d'aisance de mise en oeuvre et d'interprétation de ses actions principales.

On présente dans ce chapitre les bases de la commande linéaire des systèmes continus à partir d'une structure générale des systèmes asservis. Les modèles de commande considérés sont ceux qui sont communément utilisés pour représenter au mieux le comportement d'entrée-sortie des systèmes. Les régulateurs considérés ont une structure suffisamment flexible pour pouvoir y incorporer toutes les lois de commande linéaires disponibles dans la littérature. Une analyse compréhensive de la stabilité et des performances nominales et de la robustesse en stabilité des systèmes de commande resultants est faite. Cette analyse permet de définir les fonctions de transfert et les erreurs de poursuite usuelles d'un système asservi et d'appréhender les propriétés structurelles invariantes par rétroaction. On peut ainsi présenter naturellement les performances en poursuite et en régulation d'un système asservi à partir de ses erreurs de poursuite. Une attention particulière est réservée aux quantificateurs de performances des systèmes asservis, en l'occurrence les erreurs de poursuite d'entrée-sortie sous-jacentes et les dynamiques de poursuite et de régulation. Elle révèle un résultat fondamental pour l'ingénierie des systèmes asservis : les dynamiques de poursuite et les fonctions de sensibilité usuelles d'un système asservi sont des quantificateurs de performances nominales et de robustesse en stabilité.

La robustesse en stabilité est particulièrement étudiée en utilisant le critère de Nyquist qui n'est autre qu'une application ingénieuse du principe de l'argument que nous rappelons ci-dessous pour pouvoir faire une présentation compréhensive des choses.

Résultat 3.1 Soient \mathcal{C} un contour simple fermé parcouru dans le sens trigonométrique et F une application complexe analytique à l'intérieur et sur le contour \mathcal{C} , sauf éventuellement en un nombre fini de pôles de $F(p)$ à l'intérieur de \mathcal{C} , et qui ne s'annule pas sur le contour \mathcal{C} . Alors la relation suivante est satisfaite.

$$N_{t/o}^{F(\mathcal{C})} = N_z^i - N_p^i$$

où $N_{t/o}^{F(\mathcal{C})}$ désigne le nombre de tours, comptés dans le sens trigonométrique, autour de l'origine de l'image par la fonction F du contour \mathcal{C} , soit la courbe $F(\mathcal{C})$, N_z^i et N_p^i sont respectivement les nombres de zéros et de pôles de $F(p)$ à l'intérieur du contour \mathcal{C} , en comptant leurs multiplicités.

La démonstration de ce résultat est alors triviale si $F(p)$ est une fonction de transfert et c'est bien le cas dans le contexte d'une analyse de stabilité des systèmes dynamiques. En effet, $F(p)$ peut se mettre sous la forme

$$F(p) = \gamma \frac{\prod_{i=1}^{nb} (p - z_i)}{\prod_{i=1}^{na} (p - p_i)}$$

On aura alors

$$\arg F(p) = \sum_{i=1}^{nb} \arg (p - z_i) - \sum_{i=1}^{na} \arg (p - p_i)$$

Conformément au principe de l'argument, quand un zéro z_i (respectivement un pôle p_i) est à l'intérieur du contour \mathcal{C} , l'argument de $p - z_i$ (respectivement de $p - p_i$) augmente de 2π lorsque

p parcourt \mathcal{C} dans le sens trigonométrique. Par contre, si le zéro z_i (respectivement le pôle p_i) est à l'extérieur du contour \mathcal{C} , alors l'argument de $p - z_i$ (respectivement de $p - p_i$) est inchangé lorsque p parcourt \mathcal{C} . La variation de l'argument de $F(p)$ lorsque p parcourt le contour \mathcal{C} est donc donnée par

$$\Delta_{\mathcal{C}} \arg (F(p)) = 2\pi (N_z^i - N_p^i)$$

Le nombre de tours, comptés dans le sens trigonométrique, autour de l'origine de la courbe $F(\mathcal{C})$ est donc bien égal à $N_z^i - N_p^i$.

Remarque 3.1 *Le nombre de tours effectué par un contour fermé autour de l'origine peut être évalué à partir du nombre d'intersections, en tenant compte du sens de parcours, de ce contour avec une demi-droite issue de l'origine et de direction arbitraire. Une telle évaluation suppose que le nombre de tours est infini lorsque le contour passe par l'origine.*



3.1 Le système

Le système désigne l'ensemble actionneur, procédé proprement dit et capteur comme l'indique la figure 3.2. Le comportement d'entrée-sortie du système et son environnement est généralement approximé par des équations différentielles de la forme

$$\mathcal{MODC} \begin{cases} A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) + E(\rho)v(t) \\ D(\rho)v(t) = E(\rho)\gamma(t) \end{cases}$$

où $\{u(t)\}$ et $\{y(t)\}$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $\{v(t)\}$ représente l'ensemble des perturbations qui affectent le fonctionnement du système et $\{\gamma(t)\}$ est une impulsion d'amplitude inconnue (*contexte déterministe*) ou une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies (*contexte stochastique*).

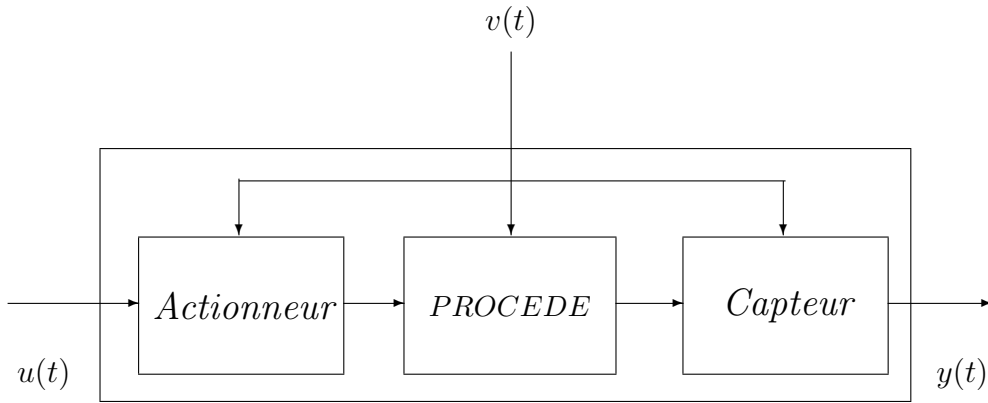


FIG. 3.2 – Le système

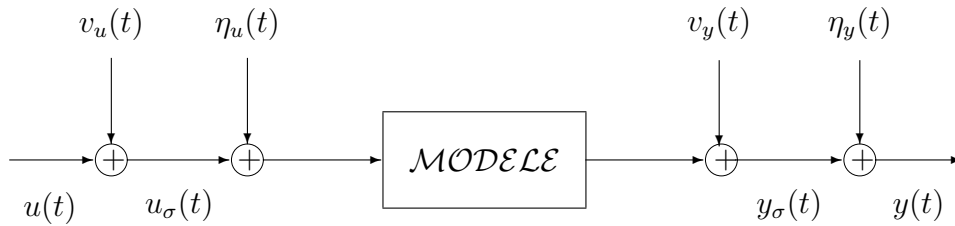


FIG. 3.3 – Modèle de commande standard

Remarque 3.2 La figure 3.3 montre une représentation standard du système à partir d'une modélisation usuelle de l'actionneur et du capteur. Les séquences $\{v_u(t)\}$ et $\{v_y(t)\}$ désignent respectivement les perturbations de charge en entrée et en sortie, alors que les séquences $\{\eta_u(t)\}$ et $\{\eta_y(t)\}$ représentent respectivement les bruits de mesure en entrée et en sortie que l'on peut interpréter comme les erreurs de modélisation inéluctables de l'actionneur et du capteur. Quant aux séquences $\{u_\sigma(t)\}$ et $\{y_\sigma(t)\}$, elles désignent respectivement l'entrée et la sortie non mesurées du système et représentent ainsi les variables pertinentes du système que l'on peut représenter comme suit.

$$\mathcal{MODCS} \begin{cases} A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) + B(\rho)v_u(t) + A(\rho)v_y(t) + B(\rho)\eta_u(t) + A(\rho)\eta_y(t) \end{cases}$$

Cette représentation montre que la structure du modèle des perturbations adoptée est suffisamment flexible pour englober toutes les situations communément rencontrées dans la pratique. Les conditions initiales non nulles peuvent être modélisées par des perturbations du type impulsion, i.e. $v(t) = v\delta(t)$ avec un polynôme $E(\rho)$ dont les coefficients sont déterminés à partir des conditions initiales sur le comportement d'entrée-sortie qui n'est pas toujours disponible. Le cas $E(\rho) = B(\rho)$ (resp. $E(\rho) = A(\rho)$) permet de représenter les perturbations en entrée (resp. en sortie). Quant au cas des bruits de mesure en sortie (resp. en entrée), il peut être considéré comme des perturbations en sortie modulo une précision de la sortie du système par rapport à la sortie mesurée, soit $y(t) = y_\sigma(t) + \eta_y(t)$ (resp. des perturbations en entrée modulo une précision de l'entrée du système par rapport à l'entrée mesurée, soit $u_{\text{mes}}(t) = u_\sigma(t) + \eta_u(t)$.

Par ailleurs, le contexte déterministe peut être naturellement étendu au cas où $\{\gamma(t)\}$ est une séquence d'impulsions suffisamment espacées pour que sa moyenne puisse être nulle et dont les amplitudes et les instants d'occurrence sont inconnus.

Les équations $\mathcal{M}ODC$ représentent un modèle de commande du système que l'on peut récrire sous la forme

$$\mathcal{M}ODC \quad \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}(\rho) u(t) + \mathcal{H}(\rho) v(t) \\ v(t) = \mathcal{P}(\rho) \gamma(t) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{G}(\rho) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)}, \quad \mathcal{H}(\rho) = \frac{E(\rho)}{A(\rho)} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\rho) = \frac{C(\rho)}{D(\rho)}$$

Cette représentation est à la base de la figure 3.4. La fonction de transfert $\mathcal{G}(p)$ représente la dynamique dominante du système alors que les fonctions de transfert $\mathcal{H}(p)$ et $\mathcal{P}(p)$ sont des descriptions des effets des perturbations externes.

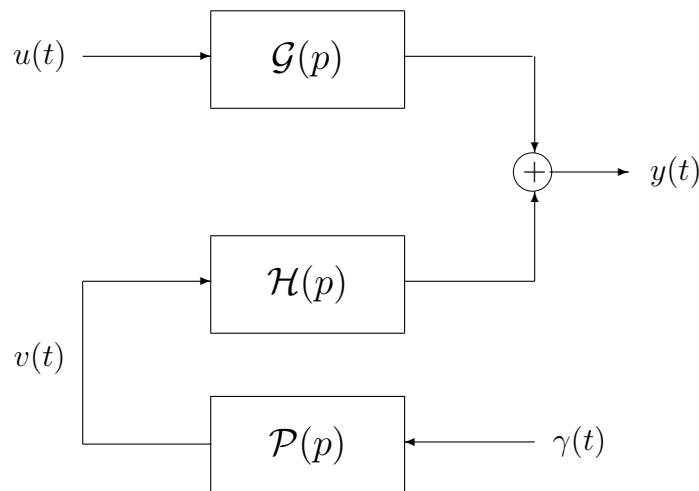


FIG. 3.4 – Modèle de commande

On notera que le générateur des perturbations $\mathcal{P}(\rho)$ est marginalement stable, i.e. $D(\rho) \in \mathbb{R}_{is}[p]$. Le polynôme $D(\rho)$ représente la nature des perturbations de charge qui affectent le fonctionnement du système. On distingue plus particulièrement les perturbations du type échelon et celles du type sinusoïdal respectivement caractérisées par

$$v(t) = v\alpha(t) \quad \text{soit} \quad D(\rho)v(t) = v\delta(t) \quad \text{avec} \quad D(\rho) = \rho$$

ou

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \quad \text{soit} \quad D(\rho)v(t) = \omega v\delta(t) \quad \text{avec} \quad D(\rho) = \rho^2 + \omega^2$$

où $\delta(t)$ et $\alpha(t)$ désignent respectivement une impulsion et un échelon unitaire d'amplitude v .

3.2 Le régulateur

Le régulateur est un système dynamique qui a deux entrées et une sortie comme l'indique la figure 3.5. Il est généralement décrit par une équation différentielle donnée par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(\rho)u(t) = -R_n(\rho)y(t) + R_p(\rho)y^*(t) \\ A^*(\rho)y^*(t) = B^*(\rho)u^*(t) \end{cases}$$

où $\{y^*(t)\}$ désigne la séquence de référence engendrée à partir de la séquence des points de consigne $\{u^*(t)\}$ via un générateur qui permet de spécifier partiellement la dynamique de poursuite.



FIG. 3.5 – Le régulateur

Pour mieux apprécier la nature du régulateur considéré, on notera que son équation peut se récrire sous la forme

$$\mathcal{REG} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}_r(\rho) y(t) + \mathcal{R}_p(\rho) y^*(t) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(\rho) u^*(t) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{R}_r(\rho) = \frac{R_n(\rho)}{R_d(\rho)}, \quad \mathcal{R}_p(\rho) = \frac{R_p(\rho)}{R_d(\rho)} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}^*(\rho) = \frac{B^*(\rho)}{A^*(\rho)}$$

Ce régulateur admet deux degrés de liberté comme le montre la figure 3.6. Le premier degré de liberté, i.e. $\mathcal{R}_r(\rho)$, est consacré aux performances en régulation alors que le second degré de liberté, i.e. $\mathcal{R}_p(\rho)$, permet de modéliser les performances en poursuite par rapport à celles de la régulation en utilisant le générateur de la séquence de référence, i.e. $\mathcal{G}^*(\rho)$, si besoin est. Ce dernier est aussi utilisée pour mieux gérer les contraintes inéluctables des actionneurs.

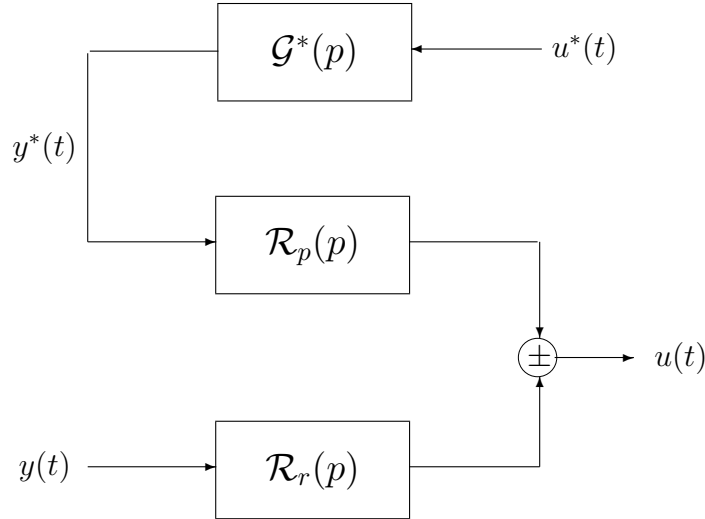


FIG. 3.6 – Régulateur à deux degrés de liberté

On notera que les régulateurs à un degré de liberté sont caractérisés par une seule fonction de transfert, soit

$$\mathcal{R}(\rho) \triangleq \mathcal{R}_r(\rho) = \mathcal{R}_p(\rho) \iff R_p(\rho) = R_n(\rho)$$

Ils sont donc décrit par l'équation différentielle

$$\mathcal{REGRM} \{ u(t) = \mathcal{R}(\rho) (y^*(t) - y(t)) \}$$

C'est ce type de régulateurs qui est généralement utilisé dans la plupart des asservissements et qui justifie la notation $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{R}_r(\rho)$.

Remarque 3.3 La figure 3.7 montre un diagramme fonctionnel pour la mise en oeuvre d'un régulateur à deux degrés de liberté. L'introduction du polynôme $P_o(p)$ est principalement motivée par des considérations de réalisation des différents composants du régulateur, il doit être spécifié de manière à ne pas altérer les performances du système asservi.

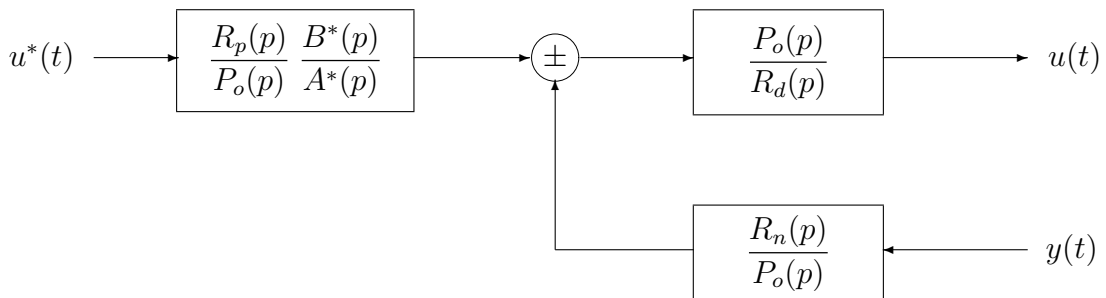


FIG. 3.7 – Mise en oeuvre d'un régulateur à deux degrés de liberté

En effet, si l'on opère sur les deux membres de l'équation du régulateur \mathcal{REG} par un opérateur stable $\frac{1}{P_o(\rho)}$, on obtient

$$\frac{R_d(\rho)}{P_o(\rho)} u(t) + \frac{R_n(\rho)}{P_o(\rho)} y(t) = \frac{R_p(\rho)}{P_o(\rho)} y^*(t)$$

ou d'une manière équivalente modulo des conditions initiales nulles

$$u(t) = \frac{P_o(\rho)}{R_d(\rho)} \left(\frac{R_p(\rho)}{P_o(\rho)} \frac{B^*(p)}{A^*(p)} u^*(t) - \frac{R_n(\rho)}{P_o(\rho)} y(t) \right)$$

Il apparaît clairement que toutes les composantes sont réalisables pourvu que les fonctions de transfert

$$\frac{R_n(p)}{R_d(p)}, \quad \frac{R_n(p)}{P_o(p)}, \quad \frac{P_o(p)}{R_d(p)} \quad \text{et} \quad \frac{R_p(p)}{P_o(p)} \frac{B^*(p)}{A^*(p)}$$

soient propres. Pour ce faire, il suffit d'effectuer une synthèse qui conduit à un régulateur propre et spécifier proprement les degrés des polynômes $P_o(p)$, $B^*(p)$ et $A^*(p)$, soit

$$\mathcal{CRREG} \left\{ (nr_d \geq nr_n) \quad \text{et} \quad (np_o = nr_d) \quad \text{et} \quad (na^* - nb^* \geq nr_p - nr_d) \right.$$

On donne ci-dessous les six actions élémentaires qui constituent une base de composition d'un régulateur.

- Une action proportionnelle

$$\mathcal{R}(p) = \gamma$$

- Une action intégrale

$$\mathcal{R}(p) = \frac{\gamma}{\tau p}$$

- Une action dérivée

$$\mathcal{R}(p) = \frac{\gamma \tau p}{1 + \alpha p}$$

- Une action de filtrage

$$\mathcal{R}(p) = \frac{\gamma}{1 + \alpha p}$$

- Une action d'avance de phase

$$\mathcal{R}(p) = \frac{1 + \alpha \tau p}{1 + \tau p} \quad \text{avec } \alpha > 1$$

- Une action de retard de phase

$$\mathcal{R}(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + \alpha \tau p} \quad \text{avec } \alpha > 1$$

On notera que l'action dérivée est filtrée pour des considérations de réalisation et que les appellations avance de phase et retard de phase sont justifiées par les diagrammes de phase des régulateurs correspondants.

3.3 Le système de commande

La figure 3.8 montre une représentation du système de commande qui met en évidence ses deux entrées, en l'occurrence la séquences de référence et celle des perturbations, et ses deux sorties, notamment les sorties du système et du régulateur. On distingue le système de commande réel du système de commande nominal qui lui est associé. Le premier est constitué par le système en rétroaction avec le régulateur comme l'indique la figure 3.1. Le système de commande nominal sous-jacent est obtenu à partir du système de commande réel en supposant que le comportement d'entrée-sortie du système est parfaitement décrit par le modèle de commande comme l'indique la figure 3.10. Le comportement d'entrée-sortie du système de commande est complètement caractérisé par ceux du système d'une part et du régulateur d'autre part. Comme les modèles de commande ne sont qu'une approximation, aussi bonne qu'elle puisse être du comportement entrée-sortie du système et de l'influence de son environnement, les performances du système de commande et de sa version nominale sont généralement différentes. Cette différence dépend essentiellement de l'erreur entre la dynamique du système et celle de son modèle de commande. Une bonne modélisation du système est donc impérative pour réaliser les performances requises. En effet, ces performances sont par conception réalisées par le système de commande nominal.

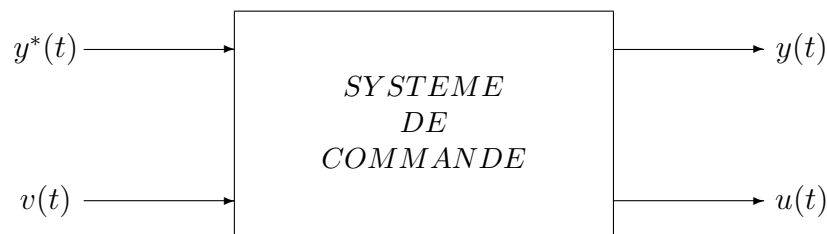


FIG. 3.8 – Système de commande

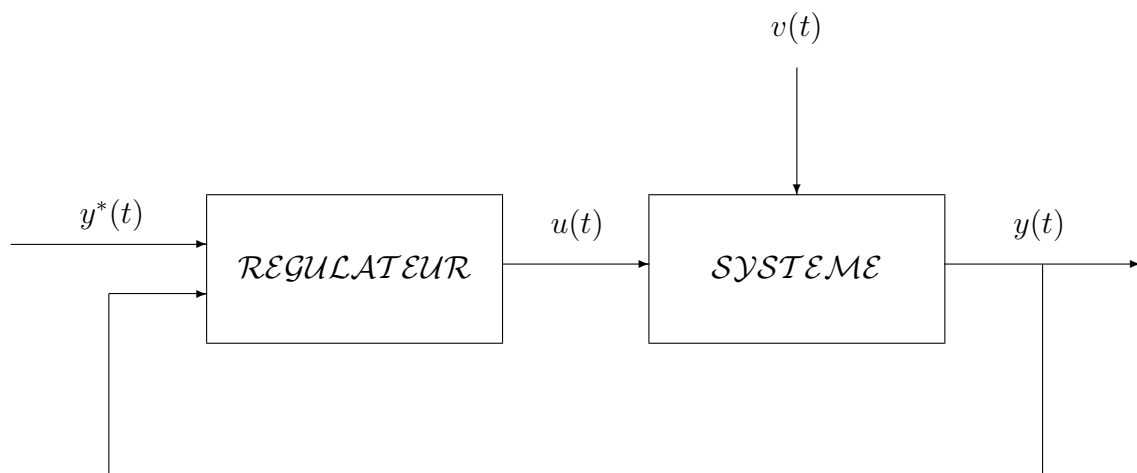


FIG. 3.9 – Système de commande

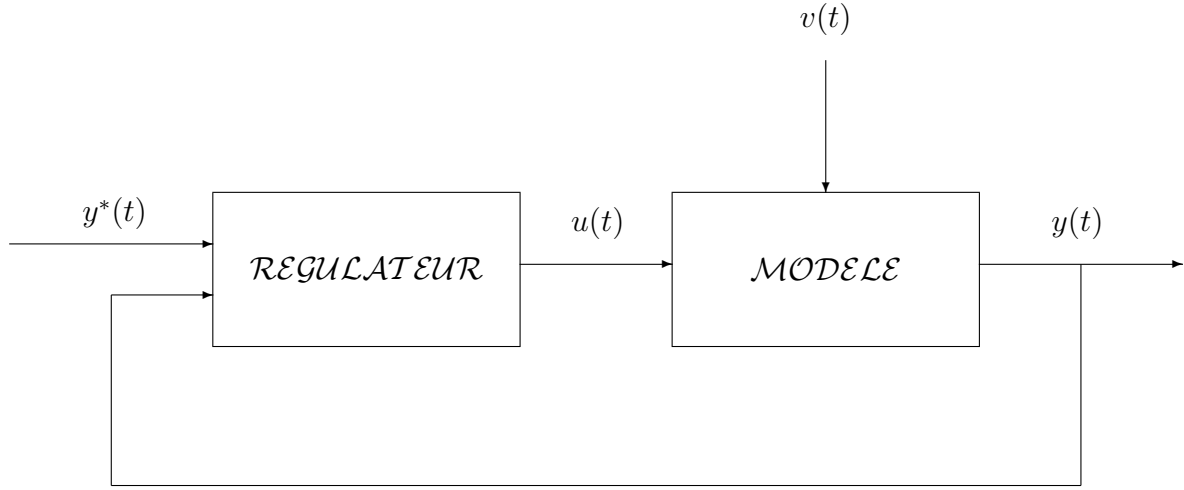


FIG. 3.10 – Système de commande nominal

Le comportement entrée-sortie du système de commande nominale est obtenu en éliminant respectivement l'entrée et la sortie entre les équations du modèle de commande et du régulateur. Pour éliminer la commande, on opère d'abord par $R_d(\rho)$ sur les deux membres de l'équation du modèle de commande pour faire apparaître le produit de convolution $R_d(\rho)u(t)$ que l'on élimine ensuite en utilisant directement l'équation du régulateur. En effet, l'opération par $R_d(\rho)$ sur les deux membres de \mathcal{MODC} donne

$$R_d(\rho) (A(\rho)y(t)) = R_d(\rho) (B(\rho)u(t)) + R_d(\rho) (E(\rho)v(t))$$

soit

$$(A(\rho)R_d(\rho)) y(t) = B(\rho) (R_d(\rho)u(t)) + (E(\rho)R_d(\rho)) v(t)$$

Et compte tenu l'équation du régulateur \mathcal{REG} , on peut effectuer la substitution requise du terme $R_d(\rho)u(t)$ dans l'équation du système afin de réaliser l'élimination de la commande dans l'équation de sortie du système de commande. Ainsi, on obtient

$$A(\rho)R_d(\rho)y(t) = B(\rho) (-R_n(\rho)y(t) + R_p(\rho)y^*(t)) + (E(\rho)R_d(\rho)) v(t)$$

ou d'une manière équivalente

$$\mathcal{PERFNS} \{ (A(\rho)R_d(\rho) + B(\rho)R_n(\rho)) y(t) = B(\rho)R_p(\rho)y^*(t) + E(\rho)R_d(\rho)v(t) \}$$

Quant à l'élimination de la sortie entre les équations du système et du régulateur, elle peut être réalisée en opérant par $R_n(\rho)$ sur les deux membres de l'équation du modèle de commande \mathcal{MODC} pour faire apparaître le produit de convolution $R_n(\rho)y(t)$ que l'on élimine directement en utilisant l'équation du régulateur \mathcal{REG} . On aura alors

$$R_n(\rho) (A(\rho)y(t)) = R_n(\rho) (B(\rho)u(t)) + R_n(\rho) (E(\rho)v(t))$$

soit

$$A(\rho) (R_n(\rho)y(t)) = B(\rho)R_n(\rho)u(t) + E(\rho)R_n(\rho)v(t)$$

Et compte tenu du régulateur \mathcal{REG} , on obtient

$$A(\rho) (R_p(\rho)y^*(t) - R_d(\rho)u(t)) = B(\rho)R_n(\rho)u(t) + E(\rho)R_n(\rho)v(t)$$

ou d'une manière équivalente

$$\mathcal{PERFNE} \left\{ (A(\rho)R_d(\rho) + B(\rho)R_n(\rho)) u(t) = A(\rho)R_p(\rho)y^*(t) - R_n(\rho)R_n(\rho)v(t) \right.$$

Le comportement d'entrée-sortie du système de commande est alors décrit par les équations \mathcal{PERFNE} et \mathcal{PERFNE} , soit

$$\mathcal{SYSCOM} \left\{ \begin{array}{l} P_c(\rho) y(t) = B(\rho)R_p(\rho) y^*(t) + R_d(\rho)E(\rho) v(t) \\ P_c(\rho) u(t) = A(\rho)R_p(\rho) y^*(t) - R_n(\rho)E(\rho) v(t) \end{array} \right.$$

avec

$$P_c(\rho) = A(\rho)R_d(\rho) + B(\rho)R_n(\rho)$$

que l'on peut récrire comme suit

$$\mathcal{SYSCOM} \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{B(\rho)R_p(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) + \frac{R_d(\rho)E(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \\ u(t) = \frac{A(\rho)R_p(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) - \frac{R_n(\rho)E(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \end{array} \right.$$

Ces équations peuvent être représentées comme l'indiquent les figures 3.11 et 3.12 qui permettent de mieux apprécier les performances d'un système asservi aussi bien en poursuite qu'en régulation. On notera plus particulièrement que la fonction de transfert du système asservi est donnée par

$$\mathcal{G}_{sas}(p) = \begin{bmatrix} \frac{B(p)R_p(p)}{P_c(p)} & \frac{R_d(p)E(p)}{P_c(p)} \\ \frac{A(p)R_p(p)}{P_c(p)} & -\frac{R_n(p)E(p)}{P_c(p)} \end{bmatrix}$$

Les pôles du système de commande sont des racines du polynôme $P_c(p)$. C'est pourquoi, on l'appelle le polynôme caractéristique du système de commande.

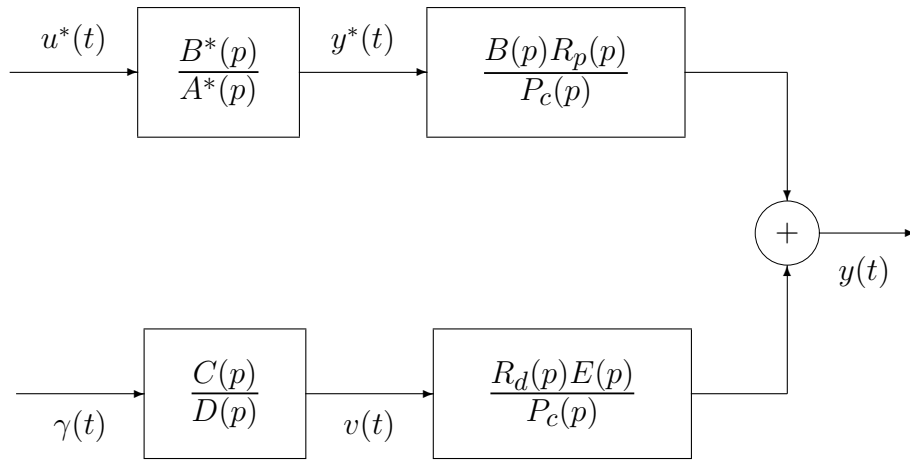


FIG. 3.11 – Performances nominales en sortie

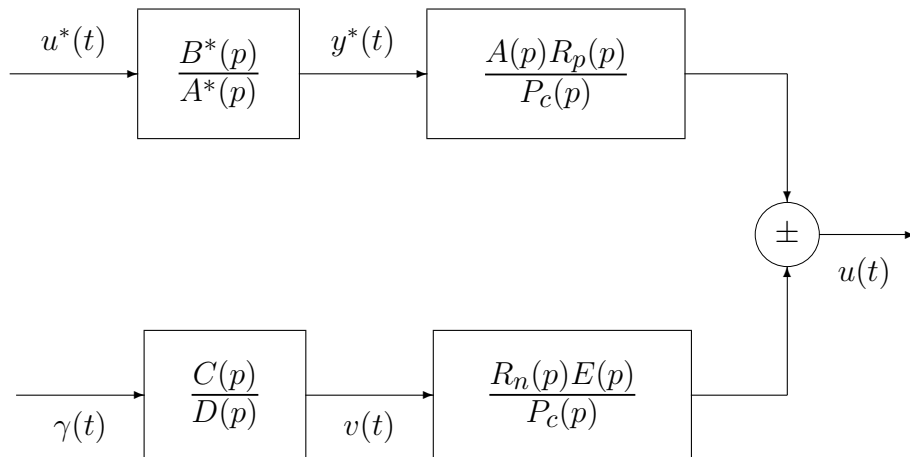


FIG. 3.12 – Performances nominales en entrée

Remarque 3.4 Les performances nominales peuvent être déterminées à partir du système de commande standard de la figure 3.13 en éliminant respectivement l'entrée et la sortie du système entre les équations du modèle de commande standard \mathcal{MODC} et du régulateur \mathcal{REG} .

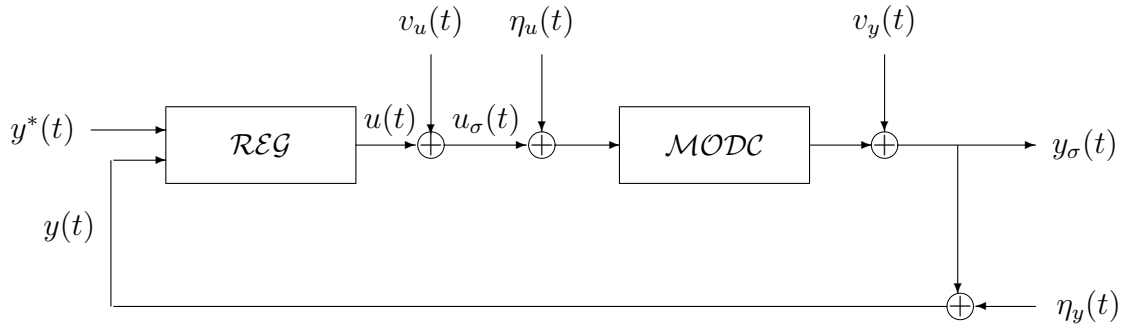


FIG. 3.13 – Système de commande standard

On aura alors

$$SCOMS \left\{ \begin{array}{l} y_{\sigma}(t) = \frac{B(\rho)R_p(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) \\ \quad + \frac{B(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} (v_u(t) + \eta_u(t)) \\ \quad + \frac{A(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} v_y(t) - \frac{B(\rho)R_n(\rho)}{P_c(\rho)} \eta_y(t) \\ \\ u_{\sigma}(t) = \frac{A(\rho)R_p(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) \\ \quad - \frac{A(\rho)R_n(\rho)}{P_c(\rho)} (v_y(t) + \eta_y(t)) \\ \quad + \frac{A(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} v_u(t) - \frac{B(\rho)R_n(\rho)}{P_c(\rho)} \eta_u(t) \end{array} \right.$$

Le système de commande standard peut être alors représenté comme l'indique la figure 3.14 où l'on distingue clairement ses entrées, i.e. la séquence de référence, les perturbations de charges et les bruits de mesure, et ses sorties, en l'occurrence l'entrée et la sortie du système et non les mesures correspondantes.

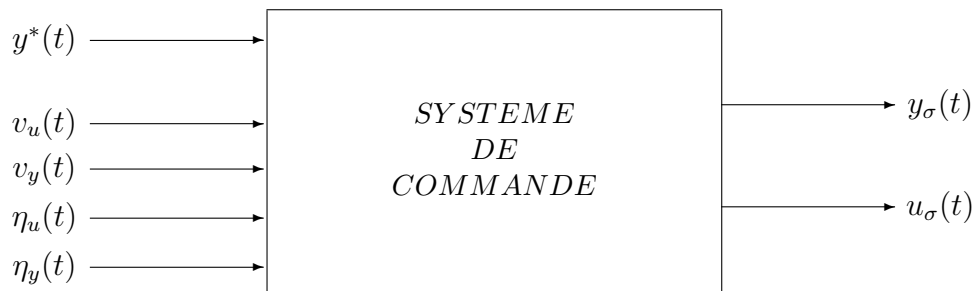


FIG. 3.14 – Système de commande standard

3.4 Fonctions de transfert usuelles

Les fonctions de transfert usuelles d'un système de commande peuvent être définies d'une manière naturelle à partir de ses équations de comportement d'entrée-sortie. Elles permettent de préciser les performances réalisables par les systèmes asservis.

- Les fonctions de transfert en boucle ouverte en entrée et en sortie sont respectivement données par

$$\mathcal{G}_{oe}(p) = \mathcal{R}(p) \mathcal{G}(p) \text{ et } \mathcal{G}_{os}(p) = \mathcal{G}(p) \mathcal{R}(p)$$

Ce sont les fonctions de transfert obtenues en ouvrant respectivement la boucle du système de commande en entrée et en sortie. On notera que ces fonctions de transfert sont identiques dans le cas des systèmes monovariables considérés, soit

$$\mathcal{G}_o(p) = \mathcal{R}(p) \mathcal{G}(p) = \mathcal{G}(p) \mathcal{R}(p)$$

- Les différences de retour en entrée et en sortie sont respectivement données par

$$\mathcal{D}_{re}(p) = 1 + \mathcal{G}_{oe}(p) \text{ et } \mathcal{D}_{rs}(p) = 1 + \mathcal{G}_{os}(p)$$

Ce sont les fonctions de transfert reliant la différence entre l'entrée et la sortie et l'entrée de la boucle ouverte considérée. On notera que ces fonctions de transfert sont identiques dans le cas des systèmes monovariables considérés, soit

$$\mathcal{D}_r(p) = 1 + \mathcal{G}_o(p)$$

- La dynamique de poursuite est donnée par la fonction de transfert

$$\mathcal{DP}(p) = \frac{B(p)R_p(p)}{P_c(p)}$$

modulo la fonction de transfert du générateur de la séquence de référence $\mathcal{G}^*(p)$ si l'on considère comme entrée du système de commande la séquence de points de consigne $\{u^*(t)\}$. On notera que les zéros du système sont invariants par rétroaction puisque les zéros du système par rapport à la commande sont des zéros de la dynamique de poursuite.

- La dynamique de régulation est donnée par la fonction de transfert

$$\mathcal{DR}(p) = \frac{E(p)R_d(p)}{P_c(p)}$$

On notera que les zéros du système sont invariants par rétroaction puisque les zéros du système par rapport aux perturbations sont des zéros de la dynamique de régulation. Dans le cas d'une représentation standard, les dynamiques de régulation sont représentées par les quatre fonctions de transfert données par

$$\mathcal{FSU} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(p) = \frac{A(p)R_d(p)}{P_c(p)} \\ \mathcal{T}(p) = \frac{B(p)R_n(p)}{P_c(p)} \\ \mathcal{GS}(p) = \frac{B(p)R_d(p)}{P_c(p)} \\ \mathcal{RS}(p) = \frac{A(p)R_n(p)}{P_c(p)} \end{array} \right.$$

Ces fonctions de transfert constituent les fonctions de sensibilité usuelles du système de commande et ne sont pas complètement indépendantes comme l'indiquent les relations algébriques suivantes

$$\mathcal{RFSUSC} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(p) + \mathcal{T}(p) = 1 \text{ pour tout } p \in \mathcal{C} \\ \mathcal{GS}(p) = \mathcal{G}(p)\mathcal{S}(p) \\ \mathcal{RS}(p) = \mathcal{R}(p)\mathcal{S}(p) \end{array} \right.$$

$\mathcal{S}(p)$ et $\mathcal{T}(p)$ sont respectivement les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire que l'on peut exprimer en fonction de la fonction de transfert en boucle ouverte comme suit

$$\mathcal{S}(p) = \frac{1}{1 + \mathcal{G}_o(p)} \text{ et } \mathcal{T}(p) = \frac{\mathcal{G}_o(p)}{1 + \mathcal{G}_o(p)}$$

Les performances du système de commande standard peuvent être donc complètement définies par six fonctions de transfert comme l'indiquent les figures 3.15 et 3.16. La fonction de sensibilité $\mathcal{S}(p)$ n'est autre que la fonction de transfert qui relie les perturbations de charge en sortie (resp. en entrée) à la sortie non mesurée du système (resp. à l'entrée non mesurée du système). La fonction de sensibilité complémentaire, c'est l'opposé de la fonction de transfert qui relie les bruits de mesure en sortie (resp. en entrée) à la sortie non mesurée du système (resp. à l'entrée non mesurée du système). Le qualificatif complémentaire est motivée par la relation intrinsèque $\mathcal{S}(p) + \mathcal{T}(p) = 1$ pour tout $p \in \mathcal{C}$. La fonction de sensibilité $\mathcal{GS}(p)$ n'est autre que la fonction de transfert qui relie les perturbations de charge et les bruits de mesure en entrée à la sortie du système, alors que la fonction de sensibilité $\mathcal{RS}(p)$ est l'opposée de la fonction de transfert qui relie les perturbations de charge et les bruits de mesure en sortie à l'entrée du système.

- La fonction de transfert en entrée par rapport à la séquence de référence donnée par

$$\mathcal{PE}(p) = \frac{A(p)R_p(p)}{P_c(p)}$$

Cette fonction de transfert permet de déterminer les valeurs maximale et minimale de la commande du système dans le cas idéal où les perturbations de charge et les bruits

de mesure sont identiquement nulles. Cette information est impérative pour vérifier la conformité du système de commande nominal aux contraintes inéluctables des actionneurs.

- La fonction de transfert en entrée par rapport aux perturbations est donnée par

$$\mathcal{RE}(p) = -\frac{E(p)R_n(p)}{P_c(p)}$$

On retrouve l'opposée de la fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(p)$ (resp. la fonction de sensibilité $\mathcal{RS}(p)$) dans le cas des perturbations en entrée (resp. en sortie).

Remarque 3.5 *La conception d'un système de commande est généralement réalisée avec une bonne conception assistée par ordinateur basée sur des synthèses rationnelles et efficaces [16]. L'ultime motivation est de réaliser un modelage admissible des dynamiques de poursuite et de régulation à partir des réponses harmoniques de la dynamique de poursuite et des fonctions de sensibilité usuelles. La dynamique de poursuite peut être spécifiée à partir d'un filtre passe bas de gain statique unitaire. Quant aux diverses dynamiques de régulation, elles peuvent être spécifiées à partir d'un modelage adéquat des fonctions de sensibilité usuelles. Les propriétés suivantes permettent de mieux apprécier le filtrage des perturbations requis.*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{S}(p) = 1$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{T}(p) = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{GS}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{G}(p) \text{ et } \mathcal{GS}(p) \approx \frac{1}{\mathcal{R}(p)} \text{ si } \mathcal{G}_o(p) \gg 1$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{RS}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{R}(p) \text{ et } \mathcal{RS}(p) \approx \frac{1}{\mathcal{G}_o(p)} \text{ si } \mathcal{G}_o(p) \gg 1$$

En effet, elles montrent clairement que les dynamiques de régulation peuvent être spécifiées à partir d'un ensemble de quatre filtres, i.e. un filtre passe haut pour la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(p)$, un filtre passe bas pour la fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(p)$ et deux filtres passe bande pour les fonctions de sensibilité $\mathcal{GS}(p)$ et $\mathcal{RS}(p)$ en fonction de la nature des perturbations qui affectent le fonctionnement du système. On notera que la bande passante de la dynamique de régulation doit être relativement grande par rapport à celle de la dynamique de poursuite. Cette propriété peut être satisfaite en spécifiant judicieusement le générateur de la séquence de référence $\mathcal{G}^(p)$ et le polynôme $R_p(p)$*

On montre qu'on ne peut réaliser un modelage arbitraire des fonctions de sensibilité à cause des contraintes dues à la structure du système et aux diverses contraintes intégrales et algébriques sur les fonctions de sensibilité ([9], [8], [22]). Un compromis doit être alors recherché pour réaliser ces performances sur des bandes de fréquences différentes à travers une pondération fréquentielle adéquate.

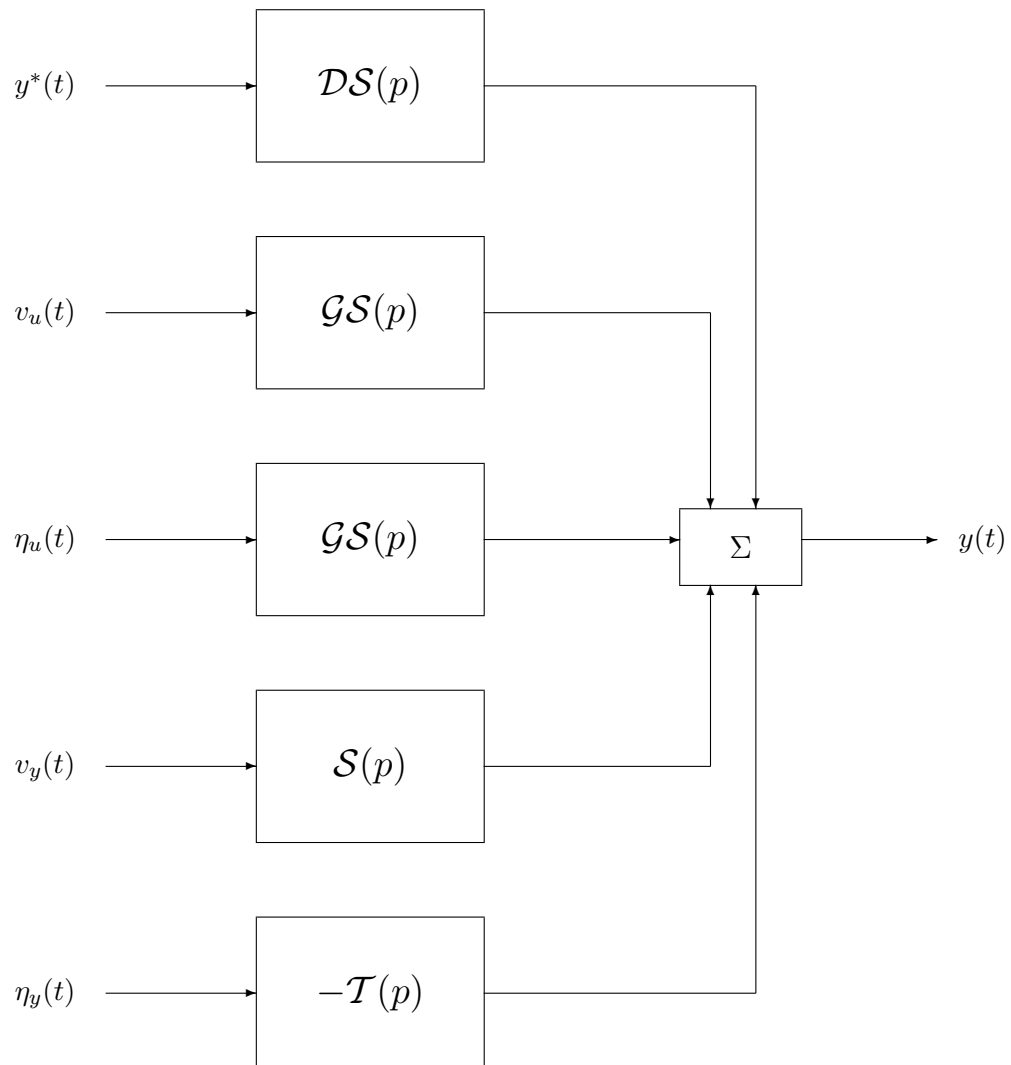


FIG. 3.15 – Performances nominales en sortie

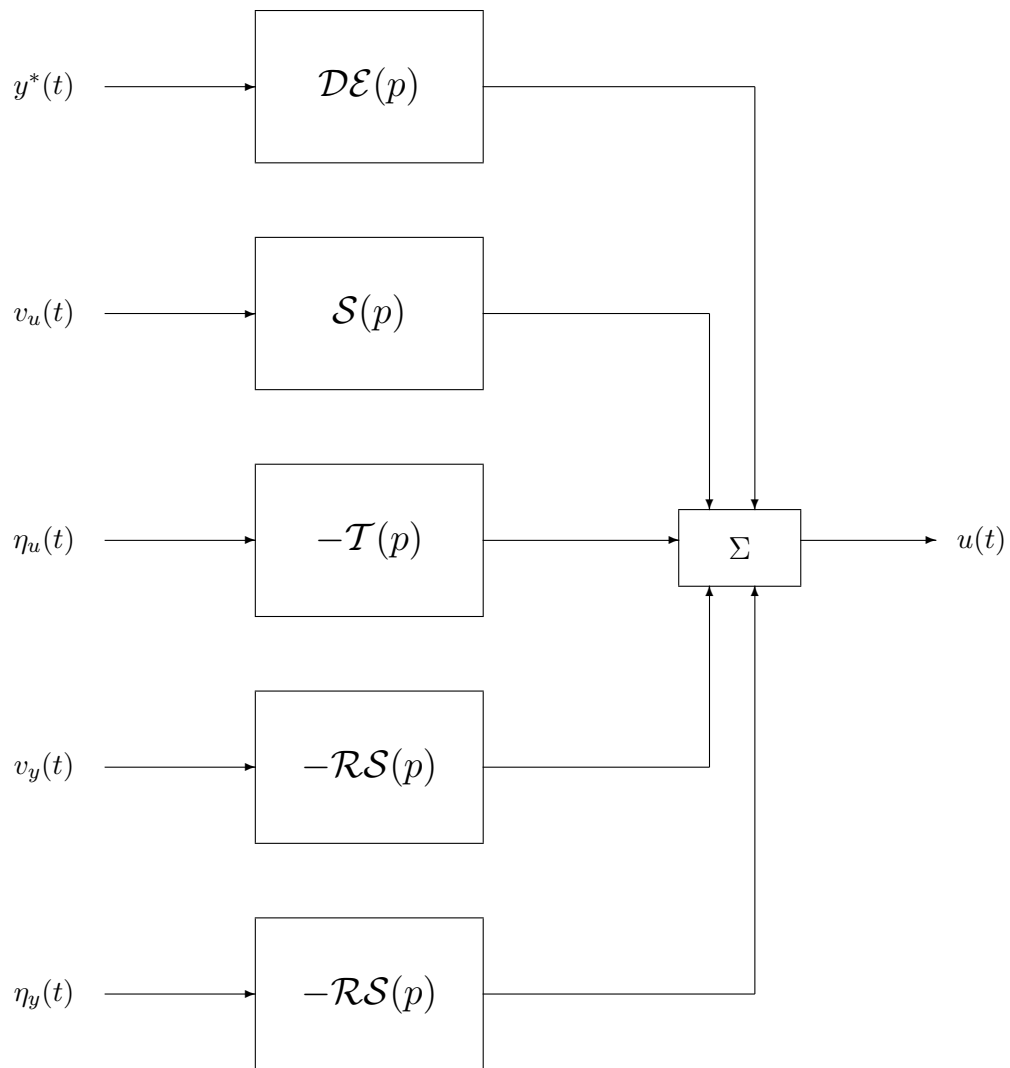


FIG. 3.16 – Performances nominales en entrée

3.5 Stabilité

La stabilité du système de commande nominal est impérative pour celle du système de commande réel. On précisera dans ce qui suit la condition de stabilité nominal avec une attention particulière au critère de Nyquist dont l'intérêt pour l'analyse et la synthèses des systèmes asservis est désormais incontestable. L'aptitude des systèmes de commande à préserver leur stabilité en présence des erreurs de modélisation est illustrée à travers le théorème du petit gain.

3.5.1 Stabilité nominale

Le résultat fondamental suivant donne la condition de stabilité du système de commande qui permettra de préciser aussi bien la classe des systèmes stabilisables que celle que des régulateurs stabilisants.

Résultat 3.2 *Le système de commande composé du système MODC en rétroaction avec le régulateur REG est stable si et seulement si ses pôles sont tous dans le domaine de stabilité \mathcal{D}_{se} , soit*

$$P_c(p) = A(p)R_d(p) + B(p)R_n(p) = 0 \implies \Re(p) < 0$$

Une condition nécessaire pour la stabilité nominale du système de commande est donnée par la propriété

$$\text{pgcd}(A(p)R_d(p), B(p)R_n(p)) = 0 \implies \Re(p) < 0$$

Cette condition stipule que les pôles et les zéros communs de la fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(p)$ doivent être dans le domaine de stabilité \mathcal{D}_{se} . On distingue quatre conditions nécessaires pour satisfaire une telle propriété, en l'occurrence

$$\mathcal{C}1. \text{pgcd}(A(p), B(p)) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{se}$$

$$\mathcal{C}2. \text{pgcd}(R_d(p), R_n(p)) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{se}$$

$$\mathcal{C}3. \text{pgcd}(R_d(p), B(p)) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{se}$$

$$\mathcal{C}4. \text{pgcd}(R_n(p), A(p)) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{se}$$

La condition $\mathcal{C}1$ (resp. $\mathcal{C}2$) stipule que les pôles et les zéros communs du système (resp. du régulateur) doivent être situés dans le domaine de stabilité \mathcal{D}_{se} . Quant à la condition $\mathcal{C}3$ (resp. $\mathcal{C}4$), elle interdit toute compensation, par le régulateur, des zéros (resp. des pôles) du système qui ne sont pas situés dans le domaine de stabilité \mathcal{D}_{se} . La condition $\mathcal{C}1$ définit la classe des systèmes stabilisables alors que les conditions $\mathcal{C}2$, $\mathcal{C}3$ et $\mathcal{C}4$ définissent la classe des régulateurs stabilisants.

Remarque 3.6 *Dans la pratique où les pôles du systèmes de commande doivent être situés dans le domaine de stabilité et de performances \mathcal{D}_{sp} et non le domaine de stabilité \mathcal{D}_{se} , les conditions $\mathcal{C}1$ à $\mathcal{C}4$ doivent se récrire en remplaçant \mathcal{D}_{se} par \mathcal{D}_{sp} .*

3.5.2 Critère de Nyquist

Le système à contre-réaction de la figure 3.17 est semblable au système de commande du point de vue de l'analyse de la stabilité puisque la séquence de référence et les perturbations qui n'ont aucune influence sur la propriété de stabilité.

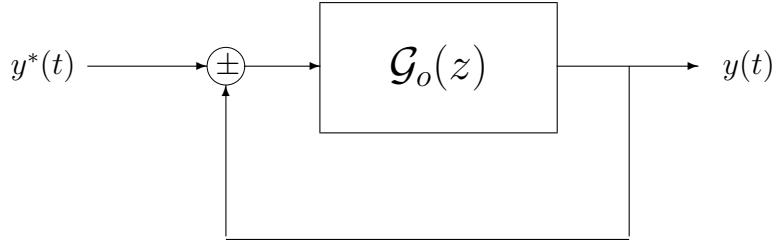


FIG. 3.17 – Système à contre-réaction

On notera que le système à rétroaction est stable si et seulement si les zéros de la différence de retour sont situés dans le domaine de stabilité, i.e.

$$\mathcal{D}_r(p) = 1 + \mathcal{G}_o(p) = 0 \implies \Re(p) < 0$$

Le critère de Nyquist résulte d'une ingénieuse application du principe de l'argument (Résultat 3.1). Il est basé sur une judicieuse observation : l'étude de la stabilité du système bouclé peut être effectuée à partir du théorème de Cauchy en considérant la fonction complexe

$$\mathcal{D}_r : p \in \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}_r(p) \in \mathcal{C}$$

et un contour judicieusement choisi : le contour de Nyquist \mathcal{C}_n . Ce dernier est parcouru dans le sens rétrograde et est formé par le demi-cercle de centre l'origine et de rayon infini judicieusement modifié pour éviter les pôles de la fonction de transfert $\mathcal{D}_r(p)$ qui se trouvent sur l'axe imaginaire par des demi-cercles de rayons infiniment petits centrés en ces pôles. Il est clair que lorsque $\mathcal{D}_r(p)$ ne comprend aucun pôle sur l'axe imaginaire, les demi-cercles en question sont supprimés du contour de Nyquist \mathcal{C}_n qui devient alors formé de l'axe imaginaire avec le demi-cercle de centre l'origine et de rayon infini.

Le résultat suivant représente l'essence du critère de Nyquist qui est plutôt géométrique. Il permet d'analyser la stabilité au sens \mathcal{EBSB} du système bouclé de la figure 3.17 à partir du lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(p)$ et du nombre de ses pôles à l'extérieur du domaine de stabilité \mathcal{D}_s .

Résultat 3.3 *Le système bouclé de la figure 3.17 est stable si et seulement si l'image du contour de Nyquist \mathcal{C}_n par l'application $\mathcal{G}_o : p \longrightarrow \mathcal{G}_o(p)$ entoure le point critique $(-1, 0j)$ dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles, en comptant leurs multiplicités, de $\mathcal{G}_o(p)$ à l'intérieur du contour de Nyquist \mathcal{C}_n .*

La démonstration du critère de Nyquist est principalement basée sur le fait que la fonction de transfert $\mathcal{D}_r(p)$ n'a ni pôles ni zéros sur le contour de Nyquist \mathcal{C}_n et que les pôles des fonctions

de transfert $\mathcal{G}_o(p)$ et $\mathcal{D}_r(p)$ sont identiques. En effet, $\mathcal{D}_r(p)$ n'admet aucun pôle sur le contour de Nyquist \mathcal{C}_n par construction et ne doit pas s'y annuler dans la mesure où le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(p)$ ne doit pas passer par le point critique $(-1, 0j)$. Les applications complexes $\mathcal{G}_o : p \longrightarrow \mathcal{G}_o(p)$ et $\mathcal{D}_r : p \longrightarrow \mathcal{D}_r(p)$ sont alors analytiques sur le contour de Nyquist \mathcal{C}_n et à l'intérieur de ce contour sauf éventuellement en un nombre fini de pôles. Le théorème de Cauchy (Résultat 3.1) permet alors de conclure que le nombre de tours autour de l'origine de la courbe $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_n)$ dans le sens trigonométrique est donné par

$$N_{t/o}^{\mathcal{D}(\mathcal{C}_n)} = N_p^i - N_z^i$$

où N_z^i et N_p^i désignent respectivement le nombre de zéros et de pôles, en comptant leurs multiplicités, de $\mathcal{D}_r(p)$ à l'intérieur du contour de Nyquist \mathcal{C}_n . Les zéros de $\mathcal{D}_r(p)$ sont tous à l'extérieur du contour de Nyquist \mathcal{C}_n si et seulement si la courbe $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_n)$ entoure l'origine dans le sens trigonométrique N_p^i fois puisque $N_z^i = 0$. Le critère de Nyquist se déduit alors du fait que le nombre de tours de la courbe $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_n)$ autour de l'origine est égal au nombre de tours du lieu de Nyquist $\mathcal{G}_o(\mathcal{C}_n)$ autour du point critique $(-1, j0)$.

Les remarques suivantes précisent la généralité du critère du Nyquist tout en mettant en évidence sa simplicité.

Remarque 3.7 *Comme la fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(p)$ est propre et à coefficient réels, le lieu de Nyquist $\mathcal{G}_o(\mathcal{C}_n)$ peut être facilement obtenu à partir du diagramme de Nyquist de $\mathcal{G}_o(p)$. On peut ainsi analyser la stabilité d'un système bouclé à partir de l'information contenue dans sa fonction de transfert harmonique en boucle ouverte. Cet aspect a été illustré lors des séances de travaux dirigés dédiées.*

Remarque 3.8 *Le théorème de Nyquist ne peut être appliqué lorsque $\mathcal{D}_r(p)$ s'annule sur le contour de Nyquist \mathcal{C}_n . Cette situation signifie que l'équation $\mathcal{G}_o(p) = -1$ possède une ou plusieurs solutions sur le contour de Nyquist \mathcal{C}_n et par conséquent la courbe $\mathcal{G}_o(\mathcal{C}_n)$ doit passer par le point critique $(-1, j0)$. Le système bouclé n'est donc pas stable au sens EBSB car il admet des pôles sur l'axe imaginaire.*

Si la transformation $\mathcal{G}_o : p \longrightarrow \mathcal{G}_o(p)$ est conforme sur le contour de Nyquist \mathcal{C}_n , soit \mathcal{G}_o est analytique sur \mathcal{C}_n et $\frac{d}{dp}(\mathcal{G}_o(p)) \neq 0 \forall p \in \mathcal{C}_n$, elle préserve les angles et les orientations. Une telle propriété conduit à la règle du revers qui n'est autre qu'une version simplifiée du critère de Nyquist.

Résultat 3.4 *Supposons que la transformation \mathcal{G}_o est conforme sur le contour de Nyquist \mathcal{C}_n , alors le système bouclé de la figure 3.17 est stable si et seulement si lorsqu'on parcourt le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte sous-jacente, dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique $(-1, j0)$ à gauche.*

Remarque 3.9 *La propriété de conformité requise par le critère du revers n'est manifestement pas vérifiée dans le cas général, e.g. lorsque les fonctions de transfert en boucle ouverte ne correspondent pas à des systèmes à déphasage minimal. Notons toutefois que le critère du revers est applicable dans la plupart des cas où la fonction de transfert en boucle ouverte est stable. Ces derniers sont beaucoup plus une règle qu'une exception dans le contexte de régulation industrielle.*

3.5.3 Marges de stabilité

Les modèles de commande que l'on utilise pour l'analyse comme pour la synthèse des systèmes de commande ne sont qu'une approximation, relativement bonne, de leur comportement d'entrée-sortie. L'importance du critère de Nyquist réside dans le fait qu'il fournit des marges de stabilité intrinsèques du système bouclé. Il s'agit d'un ensemble de distances du point critique $(-1, 0j)$ au diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte comme l'indique la figure 3.18. On distingue

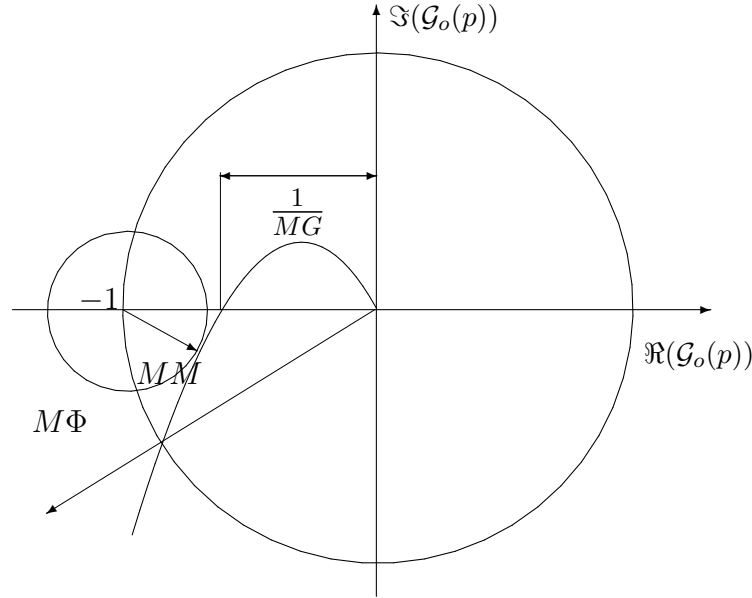


FIG. 3.18 – Marges de stabilité

- **La marge de gain MG** est le facteur par lequel peut être multiplié le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte pour atteindre la limite de la stabilité. Elle est alors égale à l'inverse du gain critique de la fonction de transfert harmonique en boucle ouverte du système bouclé à la pulsation critique ω_c correspondant à un déphasage de $-\pi$, soit

$$MG = \frac{1}{|\mathcal{G}_o(j\omega_c)|} \text{ avec } \text{Arg}(\mathcal{G}_o(j\omega_c)) = -\pi$$

La marge de gain est généralement exprimée en dB et doit être telle que $MG \in [4dB, 6dB]$ conformément aux règles d'une bonne pratique de la régulation industrielle.

Lorsque le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte croise l'axe réel à plusieurs pulsations ω_{ci} pour $i \in [1, n]$ correspondant à un déphasage de $(2i + 1)\pi$ pour $i \in [1, n]$ et à des gains critiques $|\mathcal{G}_o(j\omega_{ci})|$, la marge de gain est définie par l'intervalle $[MG_{min}, MG_{max}]$ où les marges de gain maximale et minimales sont respectivement données par

$$MG_{max} = \min_{i \in [1, n]} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{G}_o(j\omega_{ci})|} \text{ avec } |\mathcal{G}_o(j\omega_{ci})| < 1 \right\}$$

et

$$MG_{min} = \max_{i \in [1, n]} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{G}_o(j\omega_{ci})|} \text{ avec } |\mathcal{G}_o(j\omega_{ci})| > 1 \right\}$$

- **La marge de phase $M\Phi$** est la perte de phase mesurée sur le cercle unité qui amène à la limite de la stabilité. C'est donc la phase qu'il faut ajouter au déphasage de la fonction de transfert harmonique en boucle ouverte du système bouclé pour obtenir un déphasage total de π à la pulsation de croisement ω_x pour laquelle le gain du système en boucle ouverte est unitaire, soit

$$M\Phi = \text{Arg}(\mathcal{G}_o(j\omega_x)) - \pi \text{ avec } |\mathcal{G}_o(j\omega_x)| = 1$$

La marge de phase est souvent mesurée en degrés et doit être telle que $M\Phi \in [30^\circ, 60^\circ]$ conformément aux règles d'une bonne pratique de la régulation industrielle.

Lorsque le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte croise le cercle unité à plusieurs pulsations de croisement ω_{xi} pour $i \in [1, n]$ correspondant à des marges de phase $M\Phi_i$ pour $i \in [1, n]$, la marge de phase du système bouclé est donnée par

$$M\Phi = \min_{i \in [1, n]} \{M\Phi_i\}$$

- **La marge de retard MR** qui est le retard que l'on peut ajouter au modèle de commande pour atteindre la limite de la stabilité. C'est le rapport de la marge de phase à la pulsation de croisement ω_x pour laquelle elle a été calculée, soit

$$MR = \frac{M\Phi}{\omega_x}$$

Lorsque le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte croise le cercle unité à plusieurs pulsations de croisement ω_{xi} pour $i \in [1, n]$ caractérisées par des marges de retard MR_i pour $i \in [1, n]$, la marge de retard du système bouclé est donnée par

$$MR = \min_{i \in [1, n]} MR_i$$

- **La marge de module MM** qui est le rayon du cercle centré en le point critique $(-1, j0)$ et tangent au diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte du système bouclé, soit

$$MM = \min_{\omega \in \mathcal{R}^+} |1 + \mathcal{G}_o(j\omega)|$$

Notons qu'une bonne marge de gain, respectivement une bonne marge de phase, ne suffit pas à assurer une distance raisonnable entre le point critique $(-1, j0)$ et le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte. La marge du module est une mesure globale d'une telle distance et peut être interprétée comme une marge de gain et de phase dans la mesure où l'on peut montrer aisément que

$$MG \geq \frac{1}{1 - MM} \quad \text{et} \quad M\Phi \geq 2 \arcsin \frac{MM}{2}$$

La bonne pratique de la régulation industrielle suggère une marge du module dans l'intervalle $[-6dB, -2dB]$.

3.5.4 Théorème du petit gain

Le critère de \mathcal{N} quist est à la base du résultat fondamental suivant qui a été communément utilisé dans les études de robustesse des systèmes linéaires asservis sous l'appellation du théorème du petit gain ([14], [25]).

Résultat 3.5 *Le système avec rétroaction de la figure 3.19 est stable pour toute fonction de transfert $\Delta(p)$ propre, stable et telle que*

$$|\Delta(j\omega)| \leq \gamma \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

si et seulement la fonction de transfert $\Sigma(p)$ est propre, stable et telle que

$$|\Sigma(j\omega)| < \frac{1}{\gamma} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

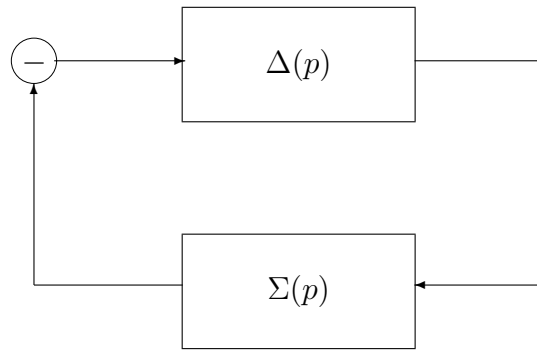


FIG. 3.19 – Système avec rétroaction usuel

3.5.5 Robustesse en stabilité

Le concept de robustesse en stabilité peut être étudié en supposant que le comportement d'entrée-sortie du système est décrit par un modèle de commande nominal $\mathcal{G}(p)$ et ses incertitudes $\Delta(p)$. Ces erreurs de modélisation sont dites non-structurées par opposition aux erreurs de modélisation structurées qui portent sur les paramètres du modèle de commande ([10], [25]). Notons que la séquence de référence comme les perturbations de charge et les bruits de mesure n'ont pas été pris en considération dans la mesure où ils n'ont aucune influence sur les conditions de stabilité et de sa robustesse.

La représentation des incertitudes du modèle de commande peut revêtir plusieurs formes comme l'indiquent les figures 3.20 à 3.25 qui représentent les systèmes de commande correspondants. On distingue les formes additives directe et inverse, les formes multiplicatives directes et inverses à l'entrée et à la sortie du système à commander. Le choix d'une forme ou d'une autre dépend de la connaissance du système et des propriétés du système de commande que l'on souhaite mettre en évidence. Les formes additives sont généralement utilisées pour représenter les erreurs de modélisation sur toute la bande de fréquences. Les formes multiplicatives directes sont généralement utilisées pour représenter les erreurs de modélisation sur les actionneurs

et les capteurs, alors que les formes multiplicatives inverses sont généralement utilisées pour représenter les variations des paramètres du modèle de commande.

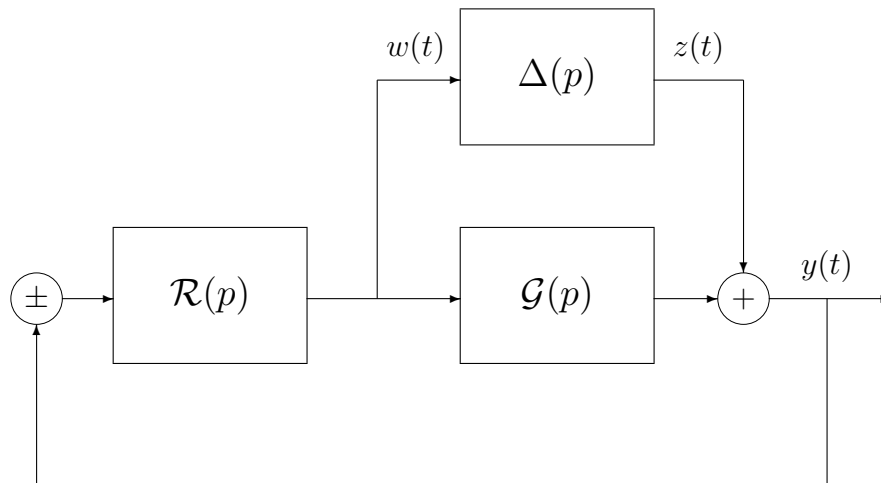


FIG. 3.20 – Système de commande : forme additive directe

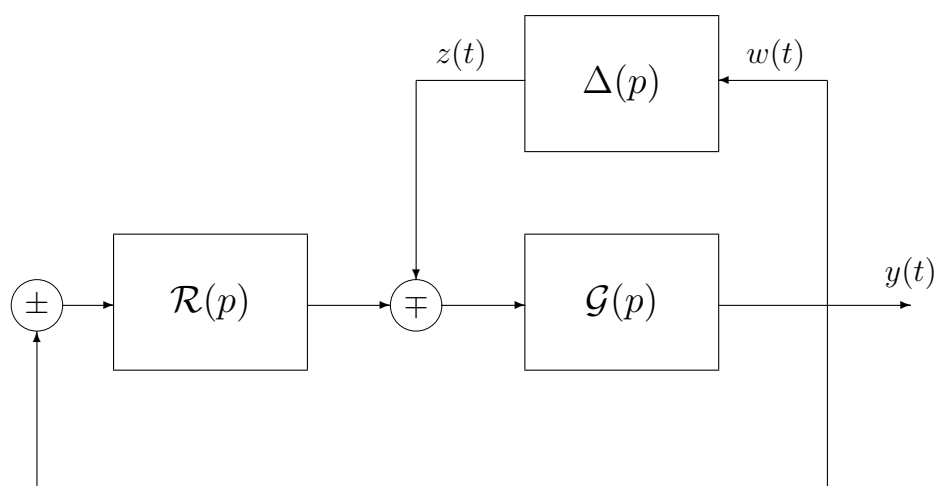


FIG. 3.21 – Système de commande : forme additive inverse

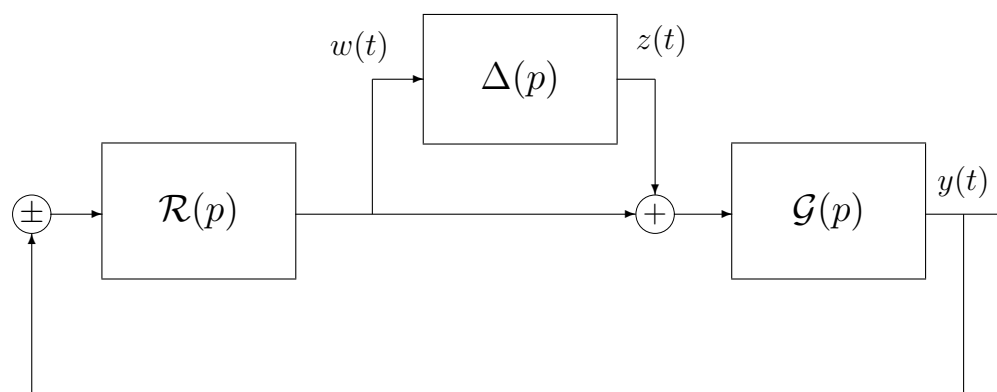


FIG. 3.22 – Système de commande : forme multiplicative directe en entrée

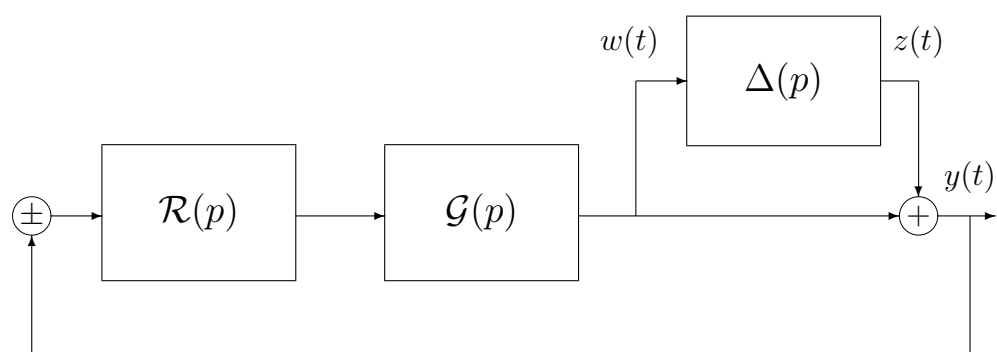


FIG. 3.23 – Système de commande : forme multiplicative directe en sortie

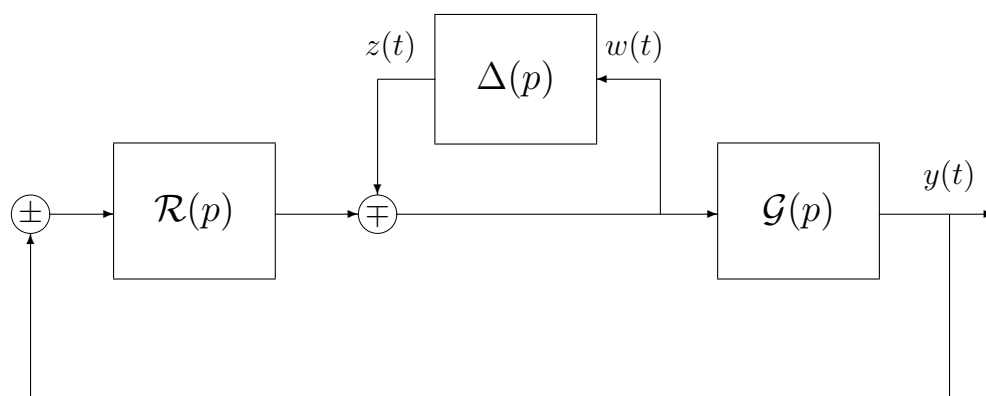


FIG. 3.24 – Système de commande : forme multiplicative inverse en entrée

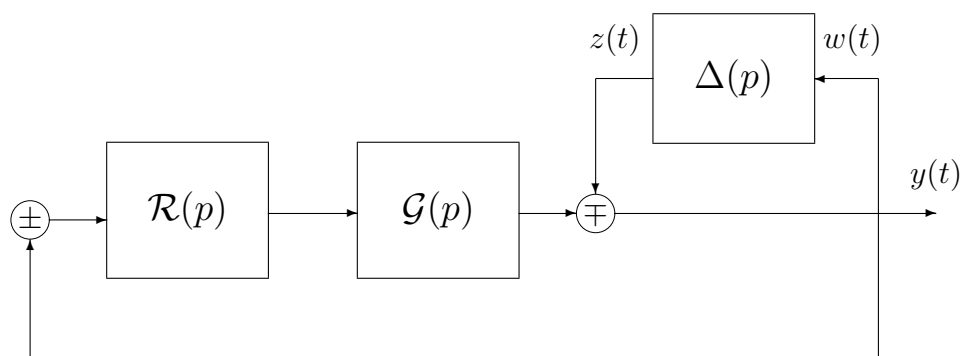


FIG. 3.25 – Système de commande : forme multiplicative inverse en sortie

On peut montrer aisément que tous les systèmes de commande considérés peuvent se mettre sous la forme standard de la figure 3.19 où $\Sigma(p)$ désigne la fonction de transfert qui relie la sortie du bloc d'incertitude $\{z(t)\}$ à son entrée $\{w(t)\}$. Les fonctions de transfert $\Sigma(p)$ peuvent être déterminées après quelques simples manipulations algébriques comme suit

- Pour la forme additive directe (figure 3.20), le système est décrit par

$$\mathcal{G}_\sigma(p) = \mathcal{G}(p) + \Delta(p)$$

On aura donc

$$W(p) = -\mathcal{R}(p) (\mathcal{G}(p)W(p) + Z(p)) = -\frac{1}{1 + \mathcal{R}(p)\mathcal{G}(p)} \mathcal{R}(p)Z(p) = -\mathcal{RS}(p) Z(p)$$

- Pour la forme additive inverse (figure 3.21), le système est décrit par

$$\frac{1}{\mathcal{G}_\sigma(p)} = \frac{1}{\mathcal{G}(p)} + \Delta(p) \quad \text{ou} \quad \mathcal{G}_\sigma(p) = \frac{1}{1 + \mathcal{G}(p)\Delta(p)} \mathcal{G}(p)$$

et on aura

$$W(p) = \mathcal{G}(p) (-\mathcal{R}(p)W(p) - Z(p)) = -\frac{1}{1 + \mathcal{G}(p)\mathcal{R}(p)} \mathcal{G}(p)Z(p) = -\mathcal{GS}(p) Z(p)$$

- Pour les formes multiplicatives directes à l'entrée et la sortie (figures 3.22 et 3.23), le système est décrit par

$$\mathcal{G}_\sigma(p) = \mathcal{G}(p) (1 + \Delta(p)) \quad \text{ou} \quad \mathcal{G}_\sigma(p) = (1 + \Delta(p)) \mathcal{G}(p)$$

On aura donc

$$W(p) = -\mathcal{R}(p)\mathcal{G}(p) (W(p) + Z(p)) = -\frac{1}{1 + \mathcal{R}(p)\mathcal{G}(p)} \mathcal{R}(p)\mathcal{G}(p) Z(p) = -\mathcal{T}(p) Z(p)$$

- Pour les formes multiplicatives inverses à l'entrée et à la sortie (figures 3.24 et 3.25), le système est décrit par

$$\mathcal{G}_\sigma(p) = \mathcal{G}(p) \frac{1}{1 + \Delta(p)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{G}_\sigma(p) = \frac{1}{1 + \Delta(p)} \mathcal{G}(p)$$

On aura donc

$$W(p) = -Z(p) - \mathcal{R}(p)\mathcal{G}(p)W(p) = -\frac{1}{1 + \mathcal{R}(p)\mathcal{G}(p)} Z(p) = -\mathcal{S}(p) Z(p)$$

où $\mathcal{G}_\sigma(p)$ désigne la fonction de transfert du système et $W(p)$ et $Z(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace de l'entrée $\{w(t)\}$ et la sortie $\{z(t)\}$ du bloc d'incertitude.

La table 3.1 donne la fonction de transfert $\Sigma(p)$ pour chaque forme d'incertitude. Les conditions de robustesse en stabilité peuvent alors être obtenues à partir du théorème du petit gain sous la forme du résultat 3.5. Ce résultat précise la classe des erreurs de modélisation admissibles en supposant que les incertitudes du modèle de commande $\Delta(p)$ sont des fonctions de transfert propres et stables et fournit la valeur maximale admissible sur leur module. On notera que l'hypothèse de stabilité peut être relâchée si l'on utilise le théorème de \mathcal{N} quist au lieu du théorème du petit gain ([25], [14]). La condition de stabilité devient une condition d'égalité entre les pôles instables du système et ceux du modèle nominal.

Forme d'incertitude	Fonction de sensibilité $\Sigma(p)$
Forme additive directe	$-\mathcal{RS}(p)$
Forme additive inverse	$-\mathcal{GS}(p)$
Forme multiplicative directe	$-\mathcal{T}(p)$
Forme multiplicative inverse	$-\mathcal{S}(p)$

TAB. 3.1 – Quantificateurs de robustesse en stabilité

3.6 Performances nominales

Compte tenu des expressions des fonctions de transfert usuelles du système de commande \mathcal{SCOM} , son comportement d'entrée-sortie peut se récrire comme suit

$$\mathcal{SCOM} \begin{cases} y(t) - \mathcal{DP}(\rho) y^*(t) = \mathcal{DR}(\rho) v(t) \\ u(t) - \mathcal{PE}(\rho) y^*(t + d + 1) = \mathcal{RE}(\rho) v(t) \end{cases}$$

Ceci nous amène à définir naturellement les erreurs de poursuite d'un système asservi.

- Les erreurs de poursuite en sortie et en entrée sont respectivement définies par

$$\mathcal{ERPS} \begin{cases} e_y(t) \triangleq y(t) - \mathcal{DP}(\rho) y^*(t) \\ e_u(t) \triangleq u(t) - \mathcal{PE}(\rho) y^*(t) \end{cases}$$

Ces erreurs peuvent être interprétées comme des quantificateurs temporels des performances du système de commande. Elles représentent plus précisément les erreurs de poursuite d'entrée et de sortie par rapport aux trajectoires nominales de référence de la sortie et de l'entrée, respectivement définies par les séquences $\{\mathcal{DP}(\rho)y^*(t)\}$ et $\{\mathcal{PE}(\rho)y^*(t)\}$. Dans la pratique où les perturbations sont inéluctables, les erreurs de poursuite d'entrée-sortie du système de commande sont respectivement données par les équations différentielles

$$\mathcal{SCOM} \begin{cases} e_y(t) = \mathcal{DR}(\rho) v(t) \\ e_u(t) = \mathcal{RE}(\rho) v(t) \end{cases}$$

et peuvent être représentées comme l'indiquent respectivement les figures 3.26 et 3.27.

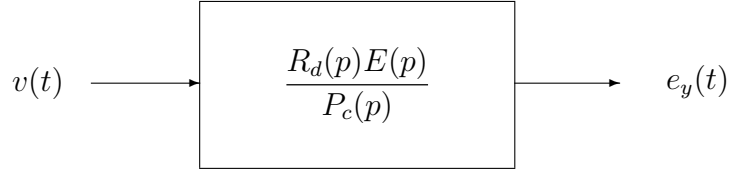


FIG. 3.26 – Erreur de poursuite en sortie

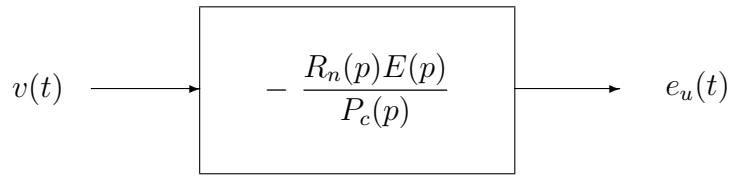


FIG. 3.27 – Erreur de poursuite en entrée

- L'erreur de poursuite d'un système asservi est communément définie par

$$e(t) \triangleq y^*(t) - y(t)$$

La dynamique d'une telle erreur peut être aisément déduite à partir de son équation de sortie, soit

$$\mathcal{ERP} \left\{ e(t) = \frac{A(\rho)R_d(\rho) + B(\rho)(R_n(\rho) - R_p(\rho))}{P_c(\rho)} y^*(t) - \frac{R_d(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \right.$$

Remarque 3.10 Dans le cas des systèmes de commande avec retour unitaire, i.e. $R_p(\rho) = R_n(\rho)$, l'équation de l'erreur de poursuite peut être réduite comme suit

$$\mathcal{ERPRU} \left\{ e(t) = \frac{A(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) - \frac{R_d(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \right.$$

3.6.1 Performances en régulation

Les performances réalisables en régulation sont relativement bien appréciables dans un contexte de régulation idéal où la séquence d'entrée du générateur des perturbations est réduite à une impulsion d'amplitude inconnue, soit

$$\mathcal{CRI} \left\{ v(t) = \frac{C(\rho)}{D(\rho)} v\delta(t) \right.$$

Et qui n'est autre que le contexte déterministe de modélisation des perturbations. Le problème crucial de ce contexte de régulation idéal concerne la compensation parfaite des perturbations qui consiste en une erreur de poursuite de sortie asymptotiquement nulle

$$\mathcal{CPCD} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \right.$$

Le résultat suivant précise la structure des régulateurs stabilisants qui permettent de réaliser une compensation parfaite des perturbations dans un contexte de régulation idéal \mathcal{CRI} .

Résultat 3.6 *Considérons la classe des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie est décrit par \mathcal{MODC} et supposons que la séquence d'entrée du générateur des perturbations est réduite à une impulsion unitaire d'amplitude inconnue \mathcal{CRI} . Alors la compensation parfaite des perturbations est réalisable par un régulateur stabilisant du type \mathcal{REG} satisfaisant la propriété suivante*

$$\mathcal{NSCPP} \left\{ D(\rho) \text{ divise } E(\rho)R_d(\rho) \right.$$

Ce résultat peut être aisément établi à partir de l'équation de l'erreur de poursuite en sortie dans le context de régulation idéal considéré, soit

$$e_y(t) = \frac{E(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \quad \text{avec} \quad v(t) = \frac{C(\rho)}{D(\rho)} v\delta(t)$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat 2.6 sur la classe des entrées asymptotiquement rejetées par un système stable.

On notera que la réalisation d'une compensation parfaite des perturbations \mathcal{NSCPP} requiert une structure particulière du régulateur, en l'occurrence

$$R_d(\rho) = S(\rho)D_r(\rho) \quad \text{avec} \quad D_r(\rho) = \frac{D(\rho)}{\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho))}$$

Cette structure relève du principe de modèle interne qui stipule que les pôles du générateur des perturbations qui ne sont pas des zéros du système par rapport aux perturbations doivent être des pôles du régulateur. Cette condition est naturellement satisfaite si tous les pôles du générateur des perturbations sont aussi des zéros du système par rapport aux perturbations, soit

$$\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho)) = D(\rho) \implies D_r(\rho) = 1$$

Et si la configuration des pôles du générateur des perturbations et celle des zéros du système par rapport aux perturbations sont disjointes, i.e. $\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho)) = 1$, alors $D_r(\rho) = D(\rho)$.

Par ailleurs, les erreurs de poursuite d'entré-sortie du système de commande réalisant une compensation parfaite des perturbations sont respectivement données par

$$\mathcal{ERPCPPCD} \begin{cases} e_y(t) = \frac{S(\rho)E_r(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} v\delta(t) \\ D_r(\rho)e_u(t) = -\frac{R_n(\rho)E_r(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} v\delta(t) \end{cases}$$

avec

$$E_r(\rho) = \frac{E(\rho)}{\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho))}$$

Il apparaît clairement que les séquences $\{e_y(t)\}$ et $\{D_r(\rho)e_u(t)\}$ sont asymptotiquement nulles. Elles représentent bien des quantificateurs de performances temporels d'un asservissement réalisant une compensation parfaite des perturbations.

Considérons maintenant un contexte stochastique, i.e. $\mathcal{E}\{\gamma(t)\} = 0$ et $\mathcal{E}\{(\gamma(t))^2\} = \sigma^2$, alors les erreurs de poursuite d'entré-sortie des système de commande issus de la classe des régulateurs caractérisée par $R_d(\rho) = S(\rho)D_r(\rho)$ sont respectivement données par

$$\mathcal{ERPCPPCS} \begin{cases} e_y(t) = \frac{S(\rho)E_r(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} \gamma(t) \\ D_r(\rho)e_u(t) = -\frac{R_n(\rho)E_r(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} \gamma(t) \end{cases}$$

Compte tenu du résultat 2.5, les séquences $\{e_y(t)\}$ et $\{D_r(\rho)e_u(t)\}$ sont des processus stochastiques de moyenne nulle et de variance finie qui représentent des quantificateurs de performances temporels des asservissements réalisant une compensation parfaite des perturbations dans un contexte stochastique. Le principe du modèle interne des perturbations est ainsi valable dans un contexte stochastique comme le montre le résultat suivant modulo une modification adéquate des performances requises comme suit

$$\mathcal{MPPCS} \{ \mathcal{E}\{e_y(t)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E}\{(e_y(t))^2\} = \gamma\sigma^2$$

Résultat 3.7 *Considérons le système décrit par les équations MODC, alors un régulateur stabilisant du type REG permet de réaliser une compensation parfaite des perturbations dans un contexte stochastique MPPCS si et seulement si les pôles du générateur des perturbations qui ne sont pas des zéros du système par rapport aux perturbations sont aussi des pôles du régulateur, i.e. la structure du régulateur est donnée par*

$$R_d(\rho) = S(\rho)D_r(\rho) \text{ avec } D_r(\rho) = \frac{D(\rho)}{\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho))}$$

Ce résultat peut être aisément établi à partir de l'équation de l'erreur de sortie dans le contexte stochastique de la modélisation des perturbations $\mathcal{ERPCPPCS}$ en appliquant le résultat 2.5 sur la réponse d'un système stable à une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies.

Remarque 3.11 *L'assignement d'une partie des pôles du régulateur peut conduire à une réduction des marges de robustesse du système asservi. Un assignement d'une partie des zéros du régulateur est généralement utilisée pour affiner la robustesse du système asservi. Une structure appropriée du régulateur est alors donnée par*

$$\mathcal{R}(p) = \frac{R_n(p)}{R_d(p)} = \frac{R(p)}{S(p)} \frac{D_c(p)}{D_r(p)}$$

Remarque 3.12 *Le cas $D(\rho) = \rho$ permet d'incorporer une action intégrale explicite dans le système de commande indépendamment de la méthode de sa synthèse. On assure ainsi une compensation des perturbations du type échelon. Cette propriété représente l'essence des performances de la commande \mathcal{PID} qui domine encore le marché de la régulation industrielle en dépit de sa grande sensibilité par rapport aux bruits de mesure.*

Exercice 3.1 *Considérons la classe des systèmes décrits par le modèle de commande standard MODCS et supposons que les bruits de mesure sont identiquement nuls et les modèles des perturbations de charge sont connus, soit*

$$CD\mathcal{R} \left\{ \begin{array}{l} \eta_u(t) = \eta_y(t) = 0 \text{ pour tout } t \\ v_u(t) = \frac{C_u(\rho)}{D_u(\rho)} v_u \delta(t) \\ v_y(t) = \frac{C_y(\rho)}{D_y(\rho)} v_y \delta(t) \end{array} \right.$$

Montrer que la compensation parfaite des perturbations de charges est réalisée si les pôles du générateur des perturbations en entrée (resp. en sortie) qui ne sont pas des zéros du système (resp. des pôles du système) sont des pôles du régulateur, soit

$$R_d(\rho) = S(\rho)D(\rho)$$

avec

$$D(\rho) = \text{ppcm} \left(\frac{D_y(\rho)}{\text{pgcd}(D_y(\rho), A(\rho))}, \frac{D_u(\rho)}{\text{pgcd}(D_u(\rho), B(\rho))} \right)$$

3.6.2 Performances en poursuite

Compte tenu des performances du système de commande, il apparaît clairement que les meilleures performances en poursuite consistent en une erreur de poursuite en sortie asymptotiquement nulle ou de moyenne nulle et de variance finie selon la nature de la séquence d'entrée du générateur des perturbations, soit

$$\mathcal{MPPCD} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \right.$$

ou

$$\mathcal{MPPCS} \left\{ \mathcal{E}\{e_y(t)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E}\{(e_y(t))^2\} = \gamma\sigma^2 \right.$$

Une étude de performances en poursuite n'aurait aucun sens pour un système de commande qui n'est pas doté des meilleurs performances en régulation, en l'occurrence une compensation parfaite des perturbations. Dans ce contexte, on distingue deux critères de performances en poursuite indépendamment de la nature de la séquence de référence à partir de la configuration des zéros du système qui est invariante par rétroaction.

- Une poursuite parfaite définie par

$$\mathcal{PP} \left\{ \mathcal{DP}(z) = \frac{B(p)R_p(p)}{P_c(p)} = 1 \right.$$

On notera que les zéros du systèmes sont des pôles du système de commande et doivent être situés dans le domaine de stabilité et de performances requis, i.e.

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(p)) \subset \mathcal{D}_{sp} \subset \mathcal{D}_{se}$$

Par ailleurs, il est important de remarquer que l'erreur de poursuite en sortie est identique à l'erreur de poursuite dans le cas d'une poursuite parfaite.

- Une poursuite semi-parfaite définie par

$$\mathcal{PSP} \left\{ \mathcal{DP}(p) = \frac{B(p)R_p(p)}{P_c(p)} = \beta B(p) \text{ avec } \beta = \frac{1}{B(0)} \right.$$

Le scalaire β est particulièrement introduit réaliser la propriété élémentaire d'une dynamique de poursuite, en l'occurrence un gain statique unitaire, qui requiert que le système n'admette aucun zéro à l'origine, i.e.

$$B(0) \neq 0$$

Remarque 3.13 Dans le cas d'une poursuite parfaite, les erreurs de poursuite d'entrée-sortie sont respectivement données par

$$\mathcal{ERPSP} \left\{ \begin{array}{l} e_u(t) = u(t) - A(\rho)\beta y^*(t) \\ e_y(t) = u(t) - B(\rho)\beta y^*(t) \end{array} \right.$$

3.6.3 Précision des asservissements avec retour unitaire

Il est important de mettre en évidence la précision des asservissements à retour unitaire, notamment une erreur de poursuite asymptotiquement nulle ou de moyenne nulle et de variance finie selon la nature de la séquence d'entrée du générateur des perturbations, soit

$$\mathcal{PRECD} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \right.$$

ou

$$\mathcal{PRECS} \left\{ \mathcal{E}(\{e(t)\}) = 0 \text{ et } \mathcal{E}\{(e(t))^2\} = \gamma\sigma^2 \right.$$

pour une classe de séquences de points de consigne décrite par

$$\mathcal{MSPC} \left\{ u^*(t) = \frac{E^*(\rho)}{D^*(\rho)} \delta(t) \right.$$

Le résultat suivant montre qu'une telle précision est réalisable pour des systèmes dont les zéros ne sont pas nécessairement situés dans le domaine de stabilité et de performances.

Résultat 3.8 *Considérons la classe des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie est décrit par MODC. Alors les performances en précision dans un contexte déterministe PRECD ou dans un contexte stochastique PRECS pour la classe de séquence de référence MSPC sont réalisables par un régulateur avec retour unitaire stabilisant satisfaisant la propriété suivante*

$$\mathcal{CNSPRE} \left\{ D^*(\rho) \text{ divise } A(\rho)R_d(\rho) \text{ et } D(\rho) \text{ divise } E(\rho)R_d(\rho) \right.$$

La preuve de ce résultat peut être aisément faite en remarquant que les polynômes $A(\rho)R_d(\rho)$ et $E(\rho)R_d(\rho)$ peuvent se mettre sous les formes

$$A(\rho)R_d(\rho) = W^*(\rho)D^*(\rho) \text{ et } E(\rho)R_d(\rho) = W(\rho)D(\rho)$$

pourvu que la propriété \mathcal{CNSPRE} soit satisfaite. Cette propriété permet de récrire l'équation de l'erreur de poursuite, en tenant compte des modèles des générateurs des perturbations et de la séquence de référence la séquence de référence, comme suit

$$e(t) = \frac{W(\rho)E^*(\rho)}{P_c(\rho)} \frac{B^*(\rho)}{A^*(\rho)} \delta(t) + \frac{W(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} \gamma(t)$$

Le résultat découle naturellement de la stabilité du système asservi et du résultat 2.5 sur la réponse d'un système stable à une entrée de moyenne nulle et de variance finie.

On notera que la réalisation des performances en précision \mathcal{CNSPRE} requiert une structure particulière du régulateur, en l'occurrence

$$R_d(z^{-1}) = S(\rho)D_r^*(\rho)$$

avec

$$D_r(\rho) = \text{ppcm} \left(\frac{D^*(\rho)}{\text{pgcd}(A(\rho), D^*(\rho))}, \frac{D(\rho)}{\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho))} \right)$$

Cette structure relève du principe de modèle interne. Elle stipule que les pôles du générateur de la séquence de points de consigne qui ne sont pas des pôles du système ou les pôles du générateur des perturbations qui ne sont pas des zéros de la fonction de transfert du système par rapport aux perturbations doivent être des pôles du régulateur.

Exercice 3.2 *Considérons la classe des systèmes décrits par le modèle de commande standard MODCS. Montrer que l'équation d'erreur du système de commande dans le cas d'un régulateur avec retour unitaire est donnée par*

$$\varepsilon(t) = \frac{A(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} \left(y^*(t) - v_y(t) \right) + \frac{B(\rho)R_n(\rho)}{P_c(\rho)} \eta_y(t) - \frac{B(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} \left(v_u(t) + \eta_u(t) \right)$$

et déduire la structure du régulateur réalisant une poursuite parfaite des séquences de référence issues d'une séquence de points de consigne décrite par pour une classe de séquences de points de consigne décrite par \mathcal{MSPC} .

3.6.4 Sensibilité aux bruits de mesure

L'étude de la sensibilité des systèmes asservis aux bruits de mesure inéluctables peut être aisément effectuée à partir de la fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(p)$ et la fonction de sensibilité $\mathcal{RS}(p)$ qui relie les bruits de mesure en sortie à la sortie et l'entrée du système. Le résultat suivant précise la classe des régulateurs qui conduisent à un système de commande insensible aux bruits de mesure.

Résultat 3.9 *Les systèmes asservis réalisent un filtrage intrinsèque des bruits de mesure si et seulement si le régulateur sous-jacent est strictement propre.*

La preuve de ce résultat est une conséquence naturelle du filtrage passe bas intrinsèquement réalisé par la fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(p)$ d'un système de commande et de la propriété de la fonction de sensibilité $\mathcal{RS}(p)$, soit

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{RS}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{R}(p)$$

Les bruits de mesure sont alors naturellement filtrés par le système asservi pourvu que le régulateur sous-jacent ait des gains relativement petit aux fréquences des composantes harmoniques du bruit de mesure.

3.7 Modelage des fonctions de sensibilité.

Les fonctions de sensibilité usuelles ne représentent pas uniquement des quantificateurs de performances nominales, mais aussi des mesures de robustesse en stabilité. On peut se demander s'il est toujours possible de modeler arbitrairement ces fonctions de sensibilité ? La réponse à cette question naturelle est négative puisque les fonctions de sensibilité doivent satisfaire des contraintes précises comme le montrent les résultats donnés ci-dessous ([9], [8], [22]). Ces résultats dépendent particulièrement de la configuration pôles-zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande, soit

$$\mathcal{G}_o(p) = \mathcal{G}(p) \mathcal{R}(p)$$

Pour mettre en évidence cette propriété, on suppose que la fonction de transfert en boucle ouverte admet n_p pôles et n_z zéros, comptés avec leur ordre de multiplicité, à partie réelle positive que l'on notera respectivement comme suit

$$p_k = \alpha_k + j\beta_k \text{ pour } k \in [1, n_p]$$

et

$$z_k = \gamma_k + j\delta_k \text{ pour } k \in [1, n_z]$$

Compte tenu de ces notations, on peut définir les produits de *Blaschke* associés au pôles et aux

zéros à partie réelle positive respectivement donnés par

$$\mathcal{B}_p(p) = \prod_{i=1}^{n_p} \frac{p - p_k}{p + p_k^*} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_z(p) = \prod_{k=1}^{n_z} \frac{p - z_k}{p + z_k^*}$$

Ces fonctions de transfert permettent de récrire la fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme

$$\mathcal{G}_o(p) = (\mathcal{B}_p(p))^{-1} \mathcal{B}_z(p) \mathcal{G}_{omp}(p)$$

où la fonction de transfert $\mathcal{G}_{omp}(p)$ peut être interprétée comme l'image système à déphasage minimal de la fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_o(p)$ dans la mesure où elle a été obtenue en remplaçant les pôles et les zéros instables de $\mathcal{G}_o(p)$ par leurs symétriques par rapport à l'axe imaginaire.

Les preuves de ces résultats sont particulièrement issues d'un excellent exercice d'analyse complexe qui est présenté d'une manière compréhensive dans [9].

3.7.1 Contrainte de la relation gain-phase.

Les conditions de performances nominales et de stabilité robuste données par les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire peuvent être exprimées en des conditions sur le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande pourvu que ce dernier soit relativement grand aux basses fréquences et suffisamment faibles aux hautes fréquences, soit

$$|\mathcal{G}_o(j\omega)| > W_S(\omega) \text{ pour tout } \omega \leq \omega_b$$

et

$$|\mathcal{G}_o(j\omega)| < W_T(\omega) \text{ pour tout } \omega \leq \omega_h$$

où $W_S(\omega)$ et $W_T(\omega)$ dépendent des pondérations considérées. Ces conditions définissent un gabarit fréquentiel sur le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande qui est connu sous l'appellation modelage du gain en boucle ouverte ou "open loop gain shaping" dans la littérature anglophone.

Il faut remarquer que l'on ne peut pas imposer une forme précise sur le diagramme de gain d'une fonction de transfert sans tenir compte des répercussions sur son diagramme de phase ([8]). La relation entre les diagrammes du gain et de la phase a été établit par *Bode* dans le cas d'un système à déphasage minimal, décrit par la fonction de transfert $\mathcal{G}_{mp}(p)$, notamment

$$\text{Arg}(\mathcal{G}_{mp}(j\omega_o)) - \text{Arg}(\mathcal{G}_{mp}(0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} \left(\log(|\mathcal{G}_{mp}(j\omega)|) \right) \log \left(\coth \left| \frac{\lambda}{2} \right| \right) d\lambda$$

avec

$$\lambda = \log \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)$$

Et comme la fonction $\log * \coth$ se comporte approximativement comme une fonction de *Dirac* modulo une constante multiplicative appropriée, soit

$$\log \left(\coth \left| \frac{\lambda}{2} \right| \right) \approx \frac{1}{2} \pi^2 \delta(\lambda)$$

la relation gain-phase est donnée, modulo une bonne approximation, par

$$\text{Arg}(\mathcal{G}_{mp}(j\omega_o)) \approx \text{Arg}(\mathcal{G}_{mp}(0)) + \frac{\pi}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(\log(|\mathcal{G}_{mp}(j\omega)|) \right)_{\omega=\omega_o}$$

Cette relation peut être interprétée comme suit : pour toute décroissance de gain de $\delta \times 20\text{db}$ par décade en ω_o , la phase en ω_o sera de $\delta \times \frac{\pi}{2}$ si $\text{Arg}(\mathcal{G}_{mp}(0)) \geq 0$. Il existe donc une contrainte inhérente à la relation gain-phase de la réponse harmonique d'un système. Cette relation est modifiée dans le cas des systèmes à déphasage non minimal mais elle existe toujours, e.g. on peut maintenir une pente de -20db/décade autour de la pulsation de coupure mais une décade peut être relativement faible pour permettre d'introduire l'avance de phase requise pour garantir la stabilité du système de commande.

3.7.2 Contrainte algébrique usuelle.

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire vérifient la propriété remarquable

$$\mathcal{S}(p) + \mathcal{T}(p) = 1 \text{ pour tout } p \in \mathcal{C}$$

Les performances d'un système de commande ne peuvent être réalisées conjointement pour toutes les fréquences. Un compromis doit alors être recherché pour réaliser ces performances sur des bandes de fréquences différentes à travers une pondération fréquentielle adéquate. Comme les bruits de mesure sont plutôt dominants pour les hautes fréquences et que les effets des perturbations sont particulièrement cruciaux pour les basses fréquences, il est naturel de chercher à réduire le gain de la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(p)$ (resp. la fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(p)$) en basses fréquences (resp. en hautes fréquences).

3.7.3 Contraintes sur la fonction de sensibilité

Les résultats suivants donnent des contraintes du type intégrale sur la fonction de sensibilité d'un système de commande et précisent les limitations de performances dues aux pôles et zéros à partie réelle positive de sa fonction de transfert en boucle ouverte

Résultat 3.10 *Considérons un système de commande stable et supposons que sa fonction de transfert en boucle ouverte a un degré relatif $n_r \geq 1$. Alors on a*

$$\int_0^\infty \ln(|\mathcal{S}(j\omega)|) d\omega = \begin{cases} \pi \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i \text{ pour } n_r > 1 \\ \pi \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i - \gamma \frac{\pi}{2} \text{ pour } n_r = 1 \end{cases}$$

avec

$$\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} p\mathcal{G}_o(p)$$

Résultat 3.11 *Considérons un système de commande stable et supposons que sa fonction de transfert en boucle ouverte admet un degré relatif $n_r \geq 0$. Alors la fonction de sensibilité vérifie la propriété suivante*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(|\mathcal{S}(j\omega)|) \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + (\delta_k - \omega)^2} d\omega = -\pi \ln(|\mathcal{B}_p(z_k)|) \text{ pour } k \in [1, n_z]$$

Le premier résultat, établi dans [8], généralise une propriété remarquable de la fonction de sensibilité d'un système asservi que *Bode* a élaboré dans le cas de fonctions de transfert en boucle ouverte stables au sens de *Lyapunov* et de degré relatif $n_r \geq 2$, soit

$$\int_0^{\infty} \ln(|\mathcal{S}(j\omega)|) d\omega = 0$$

Il permet de mettre en évidence le principe de conservation de la fonction de sensibilité d'un système de commande et précise sa relation avec les pôles instables de sa fonction de transfert en boucle ouverte. On notera plus particulièrement que

$$\sum_{i=1}^{n_p} p_i = \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i$$

et que la valeur exacte de l'intégrale n'est pas importante en elle même. Cependant le fait qu'elle soit positive signifie que si la fonction de sensibilité admet une bande d'atténuation ($|\mathcal{S}(j\omega)| \leq 1$), alors elle doit admettre une bande d'amplification ($|\mathcal{S}(j\omega)| \geq 1$). C'est ce que les automaticiens qualifient de principe de conservation de la sensibilité. Il apparaît clairement que plus la somme des pôles instables est grande, plus la compensation entre les zones d'atténuation et d'amplification des perturbations est difficile à réaliser sur une bande de fréquences finie mais elle peut se faire sur une bande de fréquences infinie avec des pics relativement grands et donc une marge de module relativement faible.

Le second résultat précise une autre contrainte sur l'intégrale de *Poisson* de la fonction de sensibilité qui dépend des pôles et des zéros à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle. On notera que les constantes $-\ln(|\mathcal{B}_p(z_k)|)$ sont positives et que leur valeur est relativement grande si le zéro z_k est relativement proche d'un pôle instable de la fonction de transfert en boucle ouverte. Par ailleurs, il est clair que la compensation pondérée des zones de petite et grande sensibilité est réalisée indépendamment de la méthode de synthèse d'un régulateur. La fonction de pondération fréquentielle est donnée par

$$\mathcal{W}(z_k, \omega) = \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + (\delta_k - \omega)^2}$$

Elle décroît avec la fréquence, ce qui signifie que la compensation est réalisée sur une bande de fréquence finie.

Remarque 3.14 *On peut définir une mesure pondérée de l'axe des fréquences à partir de l'intégrale suivante*

$$\mu(z_k, \omega_c) = 2 \int_0^{\omega_c} \mathcal{W}(z_k, \omega) d\omega = 2 \arctan\left(\frac{\omega_c - \delta_k}{\gamma_k}\right) + 2 \arctan\left(\frac{\delta_k}{\gamma_k}\right)$$

soit

$$2 \int_{\omega_\ell}^{\omega_h} \mathcal{W}(z_k, \omega) d\omega = \mu(z_k, \omega_h) - \mu(z_k, \omega_\ell) \text{ pour } \omega_h \geq \omega_\ell$$

et donc

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(z_k, \omega) d\omega = 2\pi$$

Tout se passe comme si on a donné une mesure de 2π à l'axe des fréquences.

3.7.4 Contraintes sur la fonction de sensibilité complémentaire

La contrainte intégrale sur la fonction de sensibilité a été obtenue en utilisant le fait qu'elle est propre et inversement propre, i.e. elle a un degré relatif nul, et ce n'est pas le cas des autres fonctions de sensibilité usuelles. Dans le cas de la fonction de sensibilité complémentaire, on retrouve des contraintes analogues en utilisant une pondération fréquentielle appropriée comme le montrent les deux résultats suivants.

Résultat 3.12 *Considérons un système de commande stable et supposons que sa fonction de transfert en boucle ouverte admet un degré relatif $n_r \geq 1$. Alors on a*

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2} \ln(|\mathcal{T}(j\omega)|) d\omega = \pi \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} - \frac{\pi}{2k_v}$$

où k_v est la constante de vitesse de la fonction de transfert en boucle ouverte donnée par

$$\frac{1}{k_v} = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p \mathcal{G}_o(p)} = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} (\mathcal{T}(p))$$

Résultat 3.13 *Considérons un système de commande stable et supposons que sa fonction de transfert en boucle ouverte admet un degré relatif $n_r \geq 0$. Alors la fonction de sensibilité complémentaire vérifie la propriété suivante*

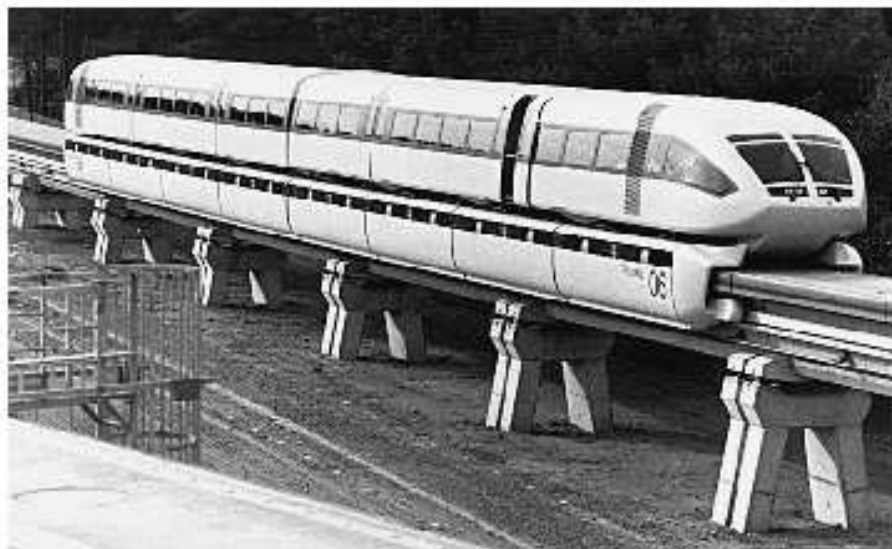
$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(|\mathcal{T}(j\omega)|) \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\beta_k - \omega)^2} d\omega = -\pi \ln(|\mathcal{B}_z(p_k)|) \text{ pour } k \in [1, n_p]$$

Ces résultats peuvent être interprétés comme le principe de conservation de la fonction de sensibilité complémentaire. Ils mettent en évidence l'influence des zéros et des pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte sur les performances du système de commande. On distingue plus particulièrement les pics de la fonction de sensibilité complémentaire du système de commande lorsque les modules des zéros (resp. des pôles) à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte sont relativement petits (resp. grands). Comme les pics des fonctions de sensibilité conduisent à des marges de robustesse relativement faibles et des dépassements relativement élevés, on est amené à réduire la bande passante du système de commande pour réaliser un bon compromis performances-robustesse.

3.8 Conclusion

Une classe relativement générale de systèmes de commande a été étudiée pour mieux apprécier les propriétés fondamentales des systèmes asservis, en l'occurrence la stabilité nominale, les performances nominales et la robustesse. Une attention particulière a été réservée au critère de Nyquist et au théorème du petit gain qui sont communément utilisés pour l'analyse de la stabilité des systèmes asservis et sa robustesse par rapport aux erreurs de modélisation. Les performances ont été définies aussi bien dans le domaine temporel à partir des erreurs de poursuite d'entrée-sortie, que dans le domaine fréquentiel à partir des dynamiques de poursuite et de régulation. L'importance des fonctions de sensibilité usuelles pour quantifier conjointement les performances nominales ainsi que la robustesse en stabilité a été mise en évidence.

Les performances en régulation et en poursuite ont été définies d'une manière compréhensive. La compensation des perturbations a été traitée d'une manière rigoureuse à la lumière du principe de modèle interne. Les limitations des performances intrinsèques à la configuration pôles-zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande ont été particulièrement soulignées à partir d'un ensemble de résultats fondamentaux. Ces derniers révèlent que l'on ne peut pas modéliser arbitrairement les performances d'un système de commande. L'automaticien est ainsi un ingénieur gestionnaire des compromis entre les performances et la robustesse.



Chapitre 4

Commande avec placement des pôles

La synthèse d'un asservissement est effectuée à partir d'un modèle de commande du système et des performances requises du système asservi sous-jacent ([7], [9], [10], [23], [24], [25]). On se propose dans ce chapitre de présenter d'une manière concise les synthèses par placement des pôles qui se distinguent par leur simplicité. Rappelons que le modèle de commande est une bonne approximation du comportement dynamique du système et des perturbations qui affectent son fonctionnement donnée par les équations aux différences

$$\mathcal{M}ODC \begin{cases} A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) + E(\rho)v(t) \\ D(\rho)v(t) = C(\rho)\gamma(t) \end{cases}$$

Quant aux performances requises, on distingue trois spécifications remarquables dans le cas d'une synthèse avec placement des pôles.

- S1. Une compensation des perturbations caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω_r .
- S2. Une poursuite caractérisée par un mode d'amortissement unitaire et de pulsation propre ω_p .
- S3. Une insensibilité aux bruits de mesure inéluctables.

Remarque 4.1 *Les performances en régulation permettent de définir le domaine de stabilité et de performances, e.g.*

$$\mathcal{D}_{sp} = \{p \in \mathcal{C} / \Im(p) = 0 \text{ et } \Re(p) \in [-\mu\omega_r, -\omega_r] \text{ avec } \mu \geq 2\}$$

et la dynamique de poursuite doit être spécifiée d'une manière cohérente par rapport à la dynamique de régulation, e.g.

$$\omega_p < \omega_r$$

Compte tenu des résultats fondamentaux sur la stabilité et les performances réalisables en régulation et en poursuite présentés au chapitre précédent, la classe des régulateurs qui permettent de réaliser une poursuite admissible avec une compensation parfaite des perturbations est donnée par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(\rho)D_r(\rho)u(t) + R(\rho)y(t) = T(\rho)y^*(t) \\ A^*(\rho)y^*(t) = B^*(\rho)u^*(t) \end{cases}$$

Cette structure de régulateur est obtenue à partir de la structure générale utilisée précédemment modulo un assignement d'une partie de la configuration des pôles et un changement de notation

$$R_d(\rho) = S(\rho)D_r(\rho), \quad R_n(\rho) = R(\rho) \quad \text{et} \quad R_p(\rho) = T(\rho)$$

L'assignement d'une partie des pôles du régulateur, à partir d'une spécification appropriée du polynôme $D_r(\rho)$, est une conséquence naturelle du principe du modèle interne pour la compensation parfaite des perturbations et/ou la poursuite parfaite dans le cas d'une séquence de points de consigne spécifique. Les polynômes $R(\rho)$ et $S(\rho)$ sont déterminés en fonction des performances requises en régulation alors que le polynôme $T(\rho)$ est judicieusement choisi en fonction de la spécification des performances en poursuite. Quant au changement de notation, il est particulièrement motivé par des considérations de conformité aux notations communément utilisées dans la littérature où la structure \mathcal{RST} s'est imposée par les récents acteurs de la régulation industrielle.

Le comportement d'entrée-sortie du système asservi correspondant est obtenu en éliminant successivement l'entrée et la sortie entre les équations du modèle de commande \mathcal{MOC} et du régulateur \mathcal{REG} , soit

$$\mathcal{SAS} \begin{cases} y(t) = \frac{B(\rho)T(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) + \frac{E(\rho)S(\rho)D_r(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \\ u(t) = \frac{A(\rho)T(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) - \frac{E(\rho)R(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \end{cases}$$

avec

$$P_c(\rho) = A(\rho)D_r(\rho)S(\rho) + B(\rho)R(\rho)$$

On notera que dans le cas d'une compensation parfaite des perturbations, les performances d'un asservissement peuvent s'exprimer en fonction des erreurs de poursuite d'entrée-sortie comme suit

$$\mathcal{SAS} \begin{cases} e_y(t) = \frac{S(\rho)E_r(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} \gamma(t) \\ D_r(\rho)e_u(t) = -\frac{S(\rho)C_r(\rho)E(\rho)}{P_c(\rho)} \gamma(t) \end{cases}$$

avec

$$D_r(\rho) = \frac{D(\rho)}{\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho))}$$

$$E_r(\rho) = \frac{D(\rho)}{\text{pgcd}(E(\rho), D(\rho))}$$

Ces équations montrent clairement que les séquences $\{e_y(t)\}$ et $\{D_r(\rho)e_u(t)\}$ sont des quantificateurs de performances du système asservi qui dépendent du contexte de modélisation des perturbations.

- Dans le contexte déterministe, $\{e_y(t)\}$ et $\{D_r(\rho)e_u(t)\}$ sont des séquences asymptotiquement nulle, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_r(\rho)e_u(t) = 0$$

- Dans le contexte stochastique, $\{e_y(t)\}$ et $\{D_r(\rho)e_u(t)\}$ sont des séquences de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies, i.e.

$$\mathcal{E} \{e_y(t)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E} \{(e_y(t))^2\} = \sigma_s^2$$

et

$$\mathcal{E} \{D_r(\rho)e_u(t)\} = 0 \text{ et } \mathcal{E} \{(D_r(\rho)e_u(t))^2\} = \sigma_e^2$$

Comme il a été mentionné plus haut, les synthèses avec placement des pôles sont fondamentalement motivées par leur simplicité. En effet, elles sont principalement basées sur la résolution d'une équation polynomiale à la lumière du résultat suivant

Résultat 4.1 Soient $\bar{A}(p)$ et $\bar{B}(p)$ des polynômes de degrés respectifs $n_{\bar{a}}$ et $n_{\bar{b}}$ et $\bar{C}(p)$ un polynôme arbitraire de degré $n_{\bar{c}}$ tels que

$$\mathcal{C1.} \quad n_{\bar{a}} > n_{\bar{b}}$$

$$\mathcal{C2.} \quad n_{\bar{c}} \geq n_{\bar{a}}$$

$$\mathcal{C3.} \quad \text{pgcd}(\bar{A}(p), \bar{B}(p)) = 1$$

Alors, l'équation polynomiale

$$\bar{A}(p)X(p) + \bar{B}(p)Y(p) = \bar{C}(p)$$

admet une solution unique pourvu que les degrés des polynômes $X(p)$ et $Y(p)$ soient spécifiés comme suit

$$n_x = n_{\bar{c}} - n_{\bar{a}} \text{ et } n_y = n_{\bar{a}} - 1$$

Remarque 4.2 Une équation polynomiale a une infinité de solutions si aucune contrainte n'est imposée sur la structure de la solution recherchée. En effet, on peut vérifier aisément que si $(X(p), Y(p))$ est une solution, alors $(X(p) + \bar{B}(p)W(p), Y(p) - \bar{A}(p)W(p))$ est une solution pour tout polynôme arbitraire $W(p)$.

4.1 Commande avec placement des pôles

La commande avec placement des pôles consiste à assigner arbitrairement les pôles du système asservi. Les polynômes $R(\rho)$ et $S(\rho)$ sont déterminés à partir de la résolution de l'équation polynomiale

$$SP \mathcal{P} \left\{ A(p)D_r(p)S(p) + B(p)R(p) = P(p) \right.$$

avec

$$P(p) = \prod_{i=1}^{np} (p - p_i)$$

où les $p_i \in \mathcal{D}_{sp}$ pour $i \in [1, np]$ désignent les pôles du système asservi et doivent être spécifiés conformément aux performances requises en régulation $\mathcal{S}1$. Quant au polynôme $T(\rho)$, il est judicieusement choisi en fonction des performances admissibles en poursuite. On distingue deux cas remarquables.

- Le cas d'une poursuite semi-parfaite que l'on peut réaliser avec

$$T(\rho) = \beta P(\rho) \text{ avec } \beta = \frac{1}{B(0)}$$

Rappelons que le scalaire β est principalement introduit pour conférer un gain statique unitaire à la dynamique de poursuite. Les zéros du système peuvent avoir des positions arbitraires dans le plan complexe à l'exception de l'origine, i.e.

$$\mathcal{HSPP} \left\{ 0 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \right.$$

- Le cas d'une poursuite parfaite d'une séquence de référence générée à partir d'une séquence de points de consigne décrite par

$$\mathcal{MSPC} \left\{ u^*(t) = \frac{E^*(\rho)}{D^*(\rho)} \delta(t) \right.$$

que l'on peut réaliser par une commande avec retour unitaire

$$T(\rho) = R(\rho)$$

pourvu que le polynôme $D_r(\rho)$ soit spécifié conformément au principe du modèle interne, soit

$$D_r(\rho) = ppcm \left(\frac{D^*(\rho)}{pgcd(A(\rho), D^*(\rho))}, \frac{D(\rho)}{pgcd(C(\rho), D(\rho))} \right)$$

On notera que la dynamique de poursuite est partiellement (resp. complètement) caractérisée par celle du générateur de la séquence de référence si on considère une poursuite semi-parfaite (resp. une poursuite parfaite). La spécification du générateur de la séquence de référence peut être faite conformément à la spécification $\mathcal{S}2$ comme suit.

$$\mathcal{G}^*(p) = \mathcal{G}_d^*(p) \mathcal{G}_a^*(p)$$

La fonction de transfert $\mathcal{G}_d^*(p)$ permet de spécifier la partie dominante de la dynamique de poursuite, soit

$$\mathcal{G}_d^*(p) = \frac{\omega_p^2}{p^2 + 2\omega_p p + \omega_p^2}$$

alors que la fonction de transfert $\mathcal{G}_a^*(p)$ permet de spécifier une partie auxiliaire relativement rapide et principalement introduite pour des considérations de mise en oeuvre du régulateur si besoin est, i.e. $na \geq 2$, soit

$$\mathcal{G}_a^*(p) = \prod_{i=1}^{\ell \geq na-2} \frac{\mu_i \omega_p}{p + \mu_i \omega_p} \text{ avec } \mu_i \geq 2$$

Par ailleurs, compte tenu du résultat 3.9, la spécification $\mathcal{S3}$ est intrinsèquement satisfaite par un régulateur strictement propre, soit

$$\mathcal{RSP} \left\{ \begin{array}{l} nr < ns + nd_r \end{array} \right.$$

La synthèse du régulateur consiste alors à résoudre l'équation polynomiale \mathcal{SPP} sous la contrainte d'un régulateur strictement propre \mathcal{RSP} modulo la spécification de la dynamique de poursuite \mathcal{SGSR} . Compte tenu du résultat 4.1, ce problème est faisable pourvu que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\mathcal{CRSP} \left\{ \begin{array}{l} \text{pgcd}(A(p)D_r(p), B(p)) = 1 \\ np > 2na + nd_r \end{array} \right.$$

La première condition permet de garantir l'existence d'une solution de structure minimale unique, i.e. $nr = na + nd_r - 1$ et $ns = np - na - nd_r$, alors que la seconde condition permet de spécifier proprement le nombre des pôles conformément à la contrainte \mathcal{SPP} .

Quant à la spécification des pôles, elle est effectuée à partir des performances $\mathcal{S1}$ comme suit

$$P(p) = P_d(p) P_a(p)$$

avec

$$P_d(p) = p^2 + 2\omega_r p + \omega_r^2$$

et

$$P_a(p) = \prod_{i=1}^{np-2} (p + \mu_i \omega_r) \text{ avec } \mu_i \geq 2$$

Le polynôme $P_d(p)$ permet de spécifier les pôles dominants, alors que le polynôme $P_a(p)$ permet de spécifier des pôles auxiliaires. On notera que les pôles auxiliaires sont relativement rapides par rapport aux pôles dominants et sont généralement utilisés pour réaliser un modelage admissible des fonctions de sensibilité usuelles même s'ils sont principalement motivés pour des considérations de faisabilité de la synthèse.

En guise d'illustration, on traite le cas des systèmes flexibles soumis à des perturbations du type échelon dont le comportement d'entrée-sortie est décrit par

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} (\rho^2 + 2\zeta\omega\rho + \omega^2) y(t) = (-\rho + \omega) u(t) + \gamma v(t) \\ \rho v(t) = v\delta(t) \end{cases}$$

où ω et $0 < \zeta < 0.2$ désignent respectivement la fréquence propre et l'amortissement du mode flexible caractérisant le système.

Notons d'abord que le système admet un seul zéro, i.e. $z_1 = \omega$, qui n'est pas situé dans le domaine de stabilité et des performances. Et comme ce zéro n'est pas nul, on peut envisager une poursuite semi parfaite. Le régulateur qui réalise toutes les spécifications du cahier des charges est donné par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} \rho S(\rho)u(t) + R(\rho)y(t) = T(\rho)y^*(t) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(\rho)u^*(t) \end{cases}$$

avec

$$(\rho^2 + 2\zeta\omega\rho + \omega^2) \rho S(\rho) + (-\rho + \omega) R(\rho) = (\rho^2 + 2\omega_r\rho + \omega_r^2) (\rho + 2\omega_r)^3$$

$$T(\rho) = \frac{1}{\omega} (\rho^2 + 2\omega_r\rho + \omega_r^2) (\rho + 2\omega_r)^3$$

$$\mathcal{G}^*(\rho) = \frac{\omega_p^2}{\rho^2 + 2\omega_p\rho + \omega_p^2} \frac{3\omega_p}{\rho + 3\omega_p}$$

La spécification des pôles du système asservi a été effectuée à partir du domaine de stabilité et de performances considéré \mathcal{D}_{sp} . On distingue deux pôles dominants en $-\omega_r$ et trois pôles auxiliaires en $-2\omega_r$. Le choix du nombre de pôles, i.e. $np = 5$, permet d'avoir un régulateur strictement propre. Le pôle à l'origine du régulateur permet de réaliser un rejet asymptotique des perturbations de charges. Quant au choix du générateur de la séquence de référence, il permet de spécifier la dynamique de poursuite requise tout en garantissant les conditions de mise en oeuvre du régulateur.

La synthèse du régulateur est alors faite en résolvant l'équation polynomiale

$$\begin{aligned} (p^3 + 2\zeta\omega p^2 + \omega^2 p) (s_o p^2 + s_1 p + s_2) + (-p + \omega) (r_o p^2 + r_1 p + r_2) \\ = \\ (p^2 + 2\omega_r p + \omega_r^2) (p + 2\omega_r)^3 \\ = \\ p^5 + 8\omega_r p^4 + 25\omega_r^2 p^3 + 38\omega_r^3 p^2 + 28\omega_r^4 p + 8\omega_r^5 \end{aligned}$$

en les paramètres du régulateur r_o, r_1, r_2, s_o, s_1 et s_2 . En effectuant les produits polynômiaux requis et en égalisant les termes de même puissance, on aboutit aisément à la solution suivante

$$\begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ s_2 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\zeta\omega & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^2 & 2\zeta\omega & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 2\zeta\omega & \omega & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & \omega & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 8\omega_r \\ 25\omega_r^2 \\ 38\omega_r^3 \\ 28\omega_r^4 \\ 8\omega_r^5 \end{bmatrix}$$

4.2 Commande avec placement des pôles et des zéros

La commande avec placement des pôles et des zéros a été particulièrement conçue pour réaliser une poursuite parfaite indépendamment de la nature de la séquence de référence. Les polynômes $R(\rho)$, $S(\rho)$ et $T(\rho)$ sont alors déterminés à partir de la condition requise pour la poursuite parfaite, en l'occurrence

$$\mathcal{SPPZ} \left\{ A(p)D_r(p)S(p) + B(p)R(p) = B(p)T(p) \right\}$$

Cette propriété stipule particulièrement que les zéros du système sont des modes du système asservi et doivent être nécessairement situés dans le domaine de stabilité et de performances, i.e.

$$\mathcal{HSPPZ} \left\{ \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \in \mathcal{D}_{sp} \right\}$$

On notera que la dynamique de poursuite est complètement caractérisée par celle du générateur de la séquence de référence. Ce dernier peut être spécifié conformément aux performances requises en poursuite $\mathcal{S2}$ comme suit

$$\mathcal{G}^*(p) = \mathcal{G}_d^*(p) \mathcal{G}_a^*(p)$$

La fonction de transfert $\mathcal{G}_d^*(p)$ permet de spécifier la partie dominante de la dynamique de poursuite, soit

$$\mathcal{G}_d^*(p) = \frac{\omega_p^2}{p^2 + 2\omega_p p + \omega_p^2}$$

alors que la fonction de transfert $\mathcal{G}_a^*(p)$ permet de spécifier une partie auxiliaire relativement rapide et principalement introduite pour des considérations de mise en oeuvre du régulateur si besoin est, i.e. $na - nb \geq 2$, soit

$$\mathcal{G}_a^*(p) = \prod_{i=1}^{\ell \geq na-nb-2} \frac{\mu_i \omega_p}{p + \mu_i \omega_p} \text{ avec } \mu_i \geq 2$$

Par ailleurs, la condition d'assignement des pôles et des zéros \mathcal{SPPZ} peut être aisément satisfaite en déterminant les polynômes $R(p)$, $S(p)$ et $T(p)$ comme suit

$$S(p) = B(p)G(p) \text{ et } T(p) = P(p) = A(p)D_r(p)G(p) + R(p)$$

avec

$$P(p) = \prod_{i=1}^{np} (p - p_i)$$

où les $p_i \in \mathcal{D}_{sp}$ pour $i \in [1, np]$ désignent les pôles du système asservi et doivent être spécifiés conformément aux performances requises en régulation $\mathcal{S}1$. Et compte tenu du résultat 3.9, la spécification $\mathcal{S}3$ est intrinsèquement satisfaite par un régulateur strictement propre, soit

$$\mathcal{RSP} \left\{ nr < ns + nd_r = nb + ng + nd_r \right.$$

La synthèse du régulateur consiste alors à résoudre l'équation polynomiale

$$\mathcal{EQPP} \left\{ A(p)D_r(p)G(p) + R(p) = P(p) = \prod_{i=1}^{np} (p - p_i) \right.$$

sous la contrainte \mathcal{RSP} modulo la spécification de la dynamique de poursuite proposée ci-dessus. Pour ce faire, il suffit de spécifier proprement les pôles du système asservi, i.e. le nombre de pôles np et les pôles $\{p_i\}_{i \in [1, np]}$. La spécification du nombre de pôles est faite de manière à garantir une solution unique de l'équation polynomiale \mathcal{EQPP} vérifiant la contrainte \mathcal{RSP} . Et conformément au résultat 4.1, l'équation polynomiale admet une solution unique de structure minimale donnée par $nr = na + nd_r - 1$ et $ng = np - na - nd_r$ pourvu que $np \geq na + nd_r$. On aura alors un régulateur strictement propre pourvu que le nombre de pôles soit spécifié comme suit

$$\mathcal{CRSPZ} \left\{ np \geq 2na + nd_r - nb \right.$$

Quant à la spécification des pôles, elle est effectuée à partir des performances requises en régulation comme dans le cas d'une synthèse avec placement des pôles, soit

$$P(p) = P_d(p) P_a(p)$$

avec

$$P_d(p) = p^2 + 2\omega_r p + \omega_r^2$$

et

$$P_a(p) = \prod_{i=1}^{np-2} (p + \mu_i \omega_r) \text{ avec } \mu_i \geq 2$$

Le polynôme $P_d(p)$ permet de spécifier les pôles dominants, alors que le polynôme $P_a(p)$ permet de spécifier des pôles auxiliaires. Ces derniers sont relativement rapides par rapport aux pôles dominants et sont particulièrement utilisés pour réaliser un modélage admissible des fonctions de sensibilité usuelles tout en garantissant la faisabilité de la synthèse.

Remarque 4.3 Les polynômes $G(p)$ et $R(p)$ ne sont autres que le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $P(p)$ par le polynôme $A(p)D_r(p)$, soit

$$\frac{P(p)}{A(p)D_r(p)} = G(p) + \frac{R(p)}{A(p)D_r(p)}$$

Remarque 4.4 Les performances en sortie d'un système de commande avec placement des pôles et des zéros sont particulièrement données par l'équation

$$\mathcal{PERFS} \left\{ \begin{array}{l} y(t) = y^*(t) + \frac{G(\rho)E_r(\rho)C(\rho)}{P(\rho)} \gamma(t) \end{array} \right.$$

La sortie du système est asymptotiquement égale à la séquence de référence dans un contexte déterministe, i.e. $\gamma(t) = v\delta(t)$. Une telle propriété est l'essence de l'appellation commande avec modèle de référence utilisée pourquoi la commande avec placement des pôles et des zéros. Le modèle de référence n'est autre que la description du générateur de la séquence de référence, e.g. la fonction de transfert $\mathcal{G}^*(z)$.

En guise d'illustration, on traite le cas des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie peut être raisonnablement décrit par le modèle suivant

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{l} (\rho + \alpha) y(t) = \beta u(t) + \gamma v(t) \\ (\rho^2 + \omega^2) v(t) = v\delta(t) \end{array} \right.$$

Comme le système n'admet aucun zéro, on peut envisager une poursuite parfaite. Le régulateur qui réalise les spécifications $\mathcal{S1}$ à $\mathcal{S3}$ est donné par

$$\mathcal{REGU} \left\{ \begin{array}{l} S(\rho) (\rho^2 + \omega^2) u(t) + R(\rho)y(t) = T(\rho)y^*(t) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(\rho)u^*(t) \end{array} \right.$$

avec

$$(\rho + \alpha) (\rho^2 + \omega^2) S(\rho) + \beta R(\rho) = (\rho^2 + 2\omega_r\rho + \omega_r^2) (\rho^2 + 2\mu\omega_r\rho + \mu^2\omega_r^2)$$

$$T(\rho) = \frac{1}{\beta} (\rho^2 + 2\omega_r\rho + \omega_r^2) (\rho^2 + 2\mu\omega_r\rho + \mu^2\omega_r^2)$$

$$\mathcal{G}^*(\rho) = \frac{\omega_p^2}{\rho^2 + 2\omega_p\rho + \omega_p^2}$$

La spécification des pôles du système asservi a été effectuée à partir du domaine de stabilité et de performances considéré \mathcal{D}_{sp} . On distingue deux pôles dominants en $-\omega_r$ et deux pôles auxiliaires en $-\mu\omega_r$. Le choix du nombre de pôles, i.e. $np = 4$, permet d'avoir un régulateur strictement propre. Les pôles du régulateur en $\pm j\omega$ permettent de réaliser un rejet asymptotique des perturbations harmoniques considérées. Quant au choix du générateur de la séquence de référence, il est conforme à spécification $\mathcal{S1}$.

La synthèse du régulateur est donc effectuée en résolvant l'équation polynomiale suivante

$$\begin{aligned} (p + \alpha) (p^2 + \omega^2) (p + s_1) + \beta (r_0 p^2 + r_1 p + r_2) \\ = \\ (p^2 + 2\omega_r p + \omega_r^2) (p^2 + 2\mu\omega_r p + \mu^2\omega_r^2) \end{aligned}$$

en les paramètres du régulateur r_o, r_1, r_2 et s_1 . En effectuant les produits polynômiaux requis et en égalisant les termes de même puissance, on trouve aisément le système d'équations

$$\mathcal{SEQ} \left\{ \begin{array}{l} s_1 + \alpha = \gamma_1 = 2(\mu + 1)\omega_r \\ \alpha s_1 + \beta r_o + \omega^2 = \gamma_2 = (\mu^2 + 4\mu + 1)\omega_r^2 \\ \omega^2 s_1 + \beta r_1 + \alpha \omega^2 = \gamma_3 = 2\mu(\mu + 1)\omega_r^3 \\ \alpha \omega^2 s_1 + \beta r_2 = \gamma_4 = \mu^2 \omega_r^4 \end{array} \right.$$

qui conduit à une solution triviale en les paramètres, soit

$$\mathcal{PARREG} \left\{ \begin{array}{l} s_1 = \gamma_1 - \alpha \\ r_o = \frac{1}{\beta} (\gamma_2 - \omega^2 - \alpha(\gamma_1 - \alpha)) \\ r_1 = \frac{1}{\beta} (\gamma_3 - \alpha \omega^2 - \omega^2(\gamma_1 - \alpha)) \\ r_2 = \frac{1}{\beta} (\gamma_4 - \alpha \omega^2(\gamma_1 - \alpha)) \end{array} \right.$$

Exercice 4.1 *Considérons le cas des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie est décrit par*

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{\rho^2 + \omega^2}{\rho(\rho + \alpha)} (u(t) + v(t)) + \eta(t) \text{ avec } \alpha > 0 \\ v(t) = v \sin(\omega t) \alpha(t) \end{array} \right.$$

où $\omega > 0$ et $\alpha > 0$ désignent les paramètres du modèle du système et $\{\eta(t)\}$ représente les bruits de mesure inéluctables. On demande de concevoir un asservissement réalisant une poursuite asymptotique parfaite dans le cas d'une et d'une séquence de référence du type échelon avec une insensibilité aux bruits de mesure inéluctables.

Solution 4.1 *Compte tenu de la nature des perturbations de charge en entrée et de la configuration des zéros du système, on peut récrire l'équation du système suit*

$$\mathcal{SYS} \left\{ A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) + A(\rho)\eta(t) + C(\rho)v\delta(t) \right.$$

avec

$$A(\rho) = \rho^2 + \alpha\rho, \quad B(\rho) = \rho^2 + \omega^2 \text{ et } C(\rho) = \omega$$

Les perturbations de charge sont alors intrinsèquement filtrées par le système. Et compte tenu de la nature échelon de la séquence de référence et de la configuration des pôles du système, on peut conclure que les performances requises peuvent être réalisées par le régulateur avec retour unitaire suivant

$$\mathcal{REGRM} \begin{cases} S(\rho)u(t) = R(\rho)(y^*(t) - y(t)) \\ A^*(\rho)y^*(t) = B^*(\rho)u^*(t) \end{cases}$$

avec

$$A(\rho)S(\rho) + B(\rho)R(\rho) = (\rho + \omega_r)^2 (\rho + 2\omega_r)^2$$

Les pôles du système asservi ont été spécifiés à partir des performances requises en régulation. On distingue deux pôles dominants en $-\omega_r$ et deux pôles auxiliaires en $-2\omega_r$. Le choix du nombre de pôles, i.e. $n_p = 4$, permet d'avoir un régulateur strictement propre et réaliser ainsi une bonne insensibilité par rapport aux bruits de mesure. La synthèse du régulateur est alors faite en résolvant l'équation polynomiale

$$(p^2 + \alpha p)(s_o p^2 + s_1 p + s_2) + (p^2 + \omega^2)(r_o p + r_1) = p^4 + 6\omega_r p^3 + 13\omega_r^2 p^2 + 12\omega_r^3 p + 4\omega_r^4$$

en les paramètres du régulateur r_o , r_1 , s_o , s_1 et s_2 . En effectuant les produits polynômiaux requis et en égalisant les termes de même puissance, on aboutit aisément à la solution suivante

$$\begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ s_2 \\ r_o \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 6\omega_r \\ 13\omega_r^2 \\ 12\omega_r^3 \\ 4\omega_r^4 \end{bmatrix}$$

4.3 Automatique et santé

On se propose de faire la synthèse d'un asservissement du taux de glucose dans le sang, pour un diabétique, dont le schéma fonctionnel est donné par la figure 4.1. L'actionneur est un système d'injection de l'insuline constitué d'un asservissement de débit conçu à partir d'une cascade de systèmes composée d'un amplificateur de puissance, d'un moteur, d'une pompe et d'une vanne. La bande passante de cet asservissement est relativement large, par rapport à la bande passante désirée de l'asservissement du taux du glucose à concevoir, pour pouvoir être supposé comme un amplificateur de puissance de gain unitaire. Le capteur fournit une mesure du taux de glucose dans le sang du patient, il peut être considéré comme un amplificateur de gain statique unitaire. Les séquences $\{u(t)\}$ et $\{q(t)\}$ désignent respectivement le débit d'insuline à injecter au patient et le débit d'insuline qui lui a été effectivement injecté, alors que les séquences $\{c(t)\}$ et $\{y(t)\}$ désignent le taux de glucose dans le sang du patient et sa mesure. La séquence de référence $\{y^*(t)\}$ permet de spécifier les consignes de glucose dans le sang du patient, modulo un filtre asymptotiquement stable et bien amorti de gain statique unitaire. Quant à la séquence $\{v(t)\}$, elle représente toutes les imperfections du système d'injection de l'insuline qui peuvent être considérées dans le pire cas comme des échelons largement espacés d'amplitudes et d'instant d'occurrence inconnus. On considérera plus particulièrement le cas d'un seul échelon de perturbations pour des considérations de simplicité sans aucune perte de généralité, soit

$$\mathcal{PERT} \begin{cases} \rho v(t) = 0 \text{ avec } v(0) = v \end{cases}$$

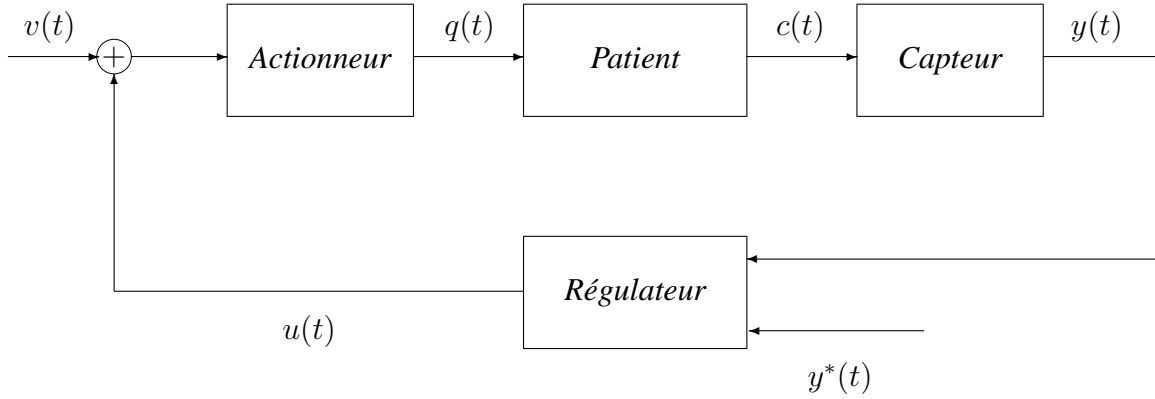


FIG. 4.1 – Asservissement du taux de glucose dans le sang d'un diabétique

Outre la stabilité du système de commande, on cherche à concevoir un asservissement du taux de glucose dans le sang du patient qui réaliserait une poursuite parfaite avec une dynamique de régulation caractérisée par deux modes rigides de fréquences propres respectives ω_c et ω_o satisfaisant la relation $\omega_c \leq 2 < \omega_o$. Dans le problème d'asservissement considéré, le modèle du patient dépend essentiellement de son corps, de son sang et de l'état de son pancréas et peut être obtenu à partir d'une identification appropriée. On suggère d'effectuer la synthèse considérée pas à pas en supposant que le modèle du patient est donné par

$$\mathcal{PATIENT} \left\{ C(p) = \mathcal{G}(p)Q(p) \text{ avec } \mathcal{G}(p) = \frac{p+2}{p^2+p} \right.$$

On développera dans ce qui suit les étapes de conception de l'asservissement et on présentera les résultats obtenus en simulation à partir du modèle du patient.

La première étape consiste à élaborer un modèle du comportement dynamique du système, i.e. l'ensemble actionneur, patient et capteur. Compte tenu des hypothèses de modélisation faites sur l'actionneur et le capteur, on a

$$y(t) = c(t) \text{ et } q(t) = u(t) + v(t)$$

Le système peut être alors décrit à partir de la fonction de transfert du patient comme suit

$$Y(p) = \mathcal{G}(p) (U(p) + V(p))$$

ou d'une manière équivalente par l'équation différentielle suivante par un simple retour au domaine temporel.

$$\mathcal{SYS} \left\{ A(\rho)y(t) = B(\rho) (u(t) + v(t)) \right.$$

avec

$$A(\rho) = \rho^2 + \rho \text{ et } B(\rho) = \rho + 2$$

Les configurations des pôles et des zéros du systèmes sont alors respectivement données par

$$\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) = \{0, -1\} \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) = \{-2\}$$

Le système est alors marginalement stable et son zéro est situé dans le domaine de stabilité.

La seconde étape consiste en la synthèse du régulateur qui est progressivement effectuée comme suit.

- Compte tenu des performances requises en régulation, on peut définir le domaine de stabilité et de performances comme suit

$$\mathcal{D}_{sp} = \{p \in \mathcal{C} / \Im(p) = 0 \text{ et } \Re(p) \in [-\omega_c, -\omega_o]\}$$

- Le zéro du système est situé dans le domaine de stabilité et de performances puisque $\omega_c \leq 2 < \omega_o$. On peut alors envisager de réaliser une poursuite parfaite indépendante de la nature de la séquence de référence modulo une compensation parfaite des perturbations. Et compte tenu de la nature des perturbations, le régulateur suivant permet de réaliser les performances requises du système asservi

$$\mathcal{REG} \begin{cases} \rho S(\rho)u(t) + R(\rho)y(t) = T(\rho)y^*(t) \\ A^*(\rho)y^*(t) = B^*(\rho)u^*(t) \end{cases}$$

avec

$$S(\rho) = B(\rho)G(\rho)$$

$$T(\rho) = (p^2 + 2\omega_c p + \omega_c^2) (p^2 + 2\omega_o p + \omega_o^2)$$

$$\rho A(\rho)G(\rho) + R(\rho) = (p^2 + 2\omega_c p + \omega_c^2) (p^2 + 2\omega_o p + \omega_o^2)$$

et

$$\mathcal{G}^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)} = \frac{(\alpha^* \omega_c)^2}{(p + \alpha^* \omega_c)^2} \frac{\mu^*}{p + \mu^*} \text{ avec } 0 < \alpha^* < 1 \text{ et } \mu^* \gg 1$$

On notera que le système asservi a deux pôles doubles en $-\omega_c$ et $-\omega_o$ conformément aux performances requises en régulation et que la cohérence de la dynamique de poursuite par rapport à la dynamique de régulation est assurée via le scalaire α^* . Par ailleurs, l'équation polynomiale sous-jacente admet une solution unique si et seulement si $nq = 1$ et $nr = 1$ et conduit à un régulateur strictement propre, i.e. $nq + nb + 1 > nr$. Cette dernière propriété permet de garantir une insensibilité du système asservi par rapport aux bruits de mesure inéluctables.

La détermination des paramètres du régulateur est effectuée à partir de l'équation polynomiale

$$\begin{aligned} & (\rho^3 + \rho^2)(g_o \rho + g_1) + (r_o \rho^2 + r_1 \rho + r_2) \\ & = \\ & \rho^4 + 2(\omega_c + \omega_o)\rho^3 + (\omega_c^2 + \omega_o^2 + 4\omega_c \omega_o)\rho^2 + 2(\omega_c \omega_o^2 + \omega_c^2 \omega_o)\rho + \omega_c^2 \omega_o^2 \end{aligned}$$

qui permet de déterminer aisément les coefficients des polynômes $E(\rho)$ et $R(\rho)$, soit

$$\mathcal{PARAREG} \left\{ \begin{array}{l} g_o = 1 \\ g_1 = 2(\omega_c + \omega_o) - 1 \\ r_o = 1 + \omega_c^2 + \omega_o^2 + 4\omega_c\omega_o - 2(\omega_c + \omega_o) \\ r_1 = 2(\omega_c\omega_o^2 + \omega_o^2\omega_c) \\ r_2 = \omega_c^2\omega_o^2 \end{array} \right.$$

La troisième étape consiste à faire une application numérique pour apprécier les performances de l'asservissement conçu en spécifiant les paramètres de synthèse comme suit

$$(\omega_c, \omega_o) = (1, 2) \text{ et } (\alpha^*, \mu^*) = (0.3, 200)$$

On aura alors

$$G(\rho) = \rho + 5$$

$$R(\rho) = 8(\rho + 1)(\rho + 0.5)$$

$$S(\rho) = (\rho + 2)(\rho + 5)$$

Les figures 4.2, 4.3, et 4.4 montrent respectivement les diagrammes de Nyquist et Black de la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande ainsi que ses fonctions de sensibilité usuelles. Il est important de mettre en évidence les aspects suivants de la synthèse effectuée.

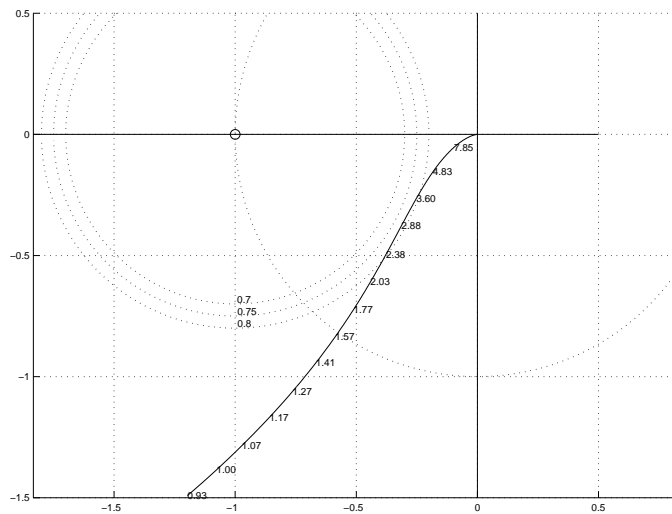


FIG. 4.2 – Diagramme de Nyquist

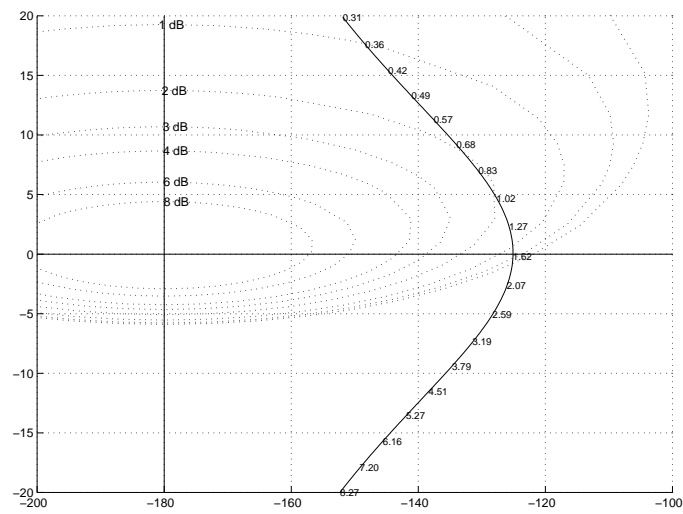


FIG. 4.3 – Diagramme de Black

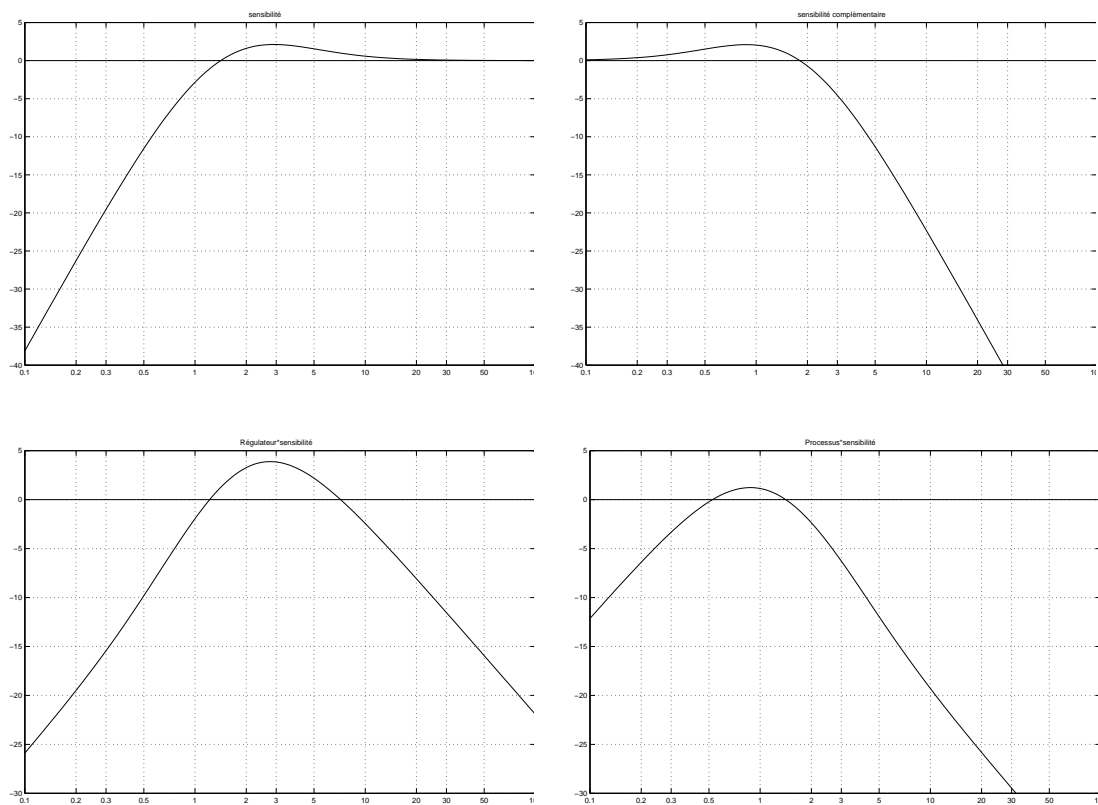


FIG. 4.4 – Fonctions de sensibilité usuelles

- Le régulateur correspondant peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{R}(p) = \gamma \frac{p + \alpha}{p} \frac{1 + \mu\beta p}{1 + \beta p} \frac{\varphi}{p + \varphi}$$

avec

$$\gamma = 0.4, \alpha = 1, \beta = 0.5, \mu = 4, \varphi = 5$$

Il s'agit d'un régulateur \mathcal{PT} avec une avance de phase \mathcal{AV} et un filtre \mathcal{F} que l'on peut utiliser pour initialiser la synthèse d'un régulateur qui réaliserait un cahier de charges plus exigeant, notamment un modelage adéquat des fonctions de sensibilité usuelles de l'asservissement.

- On peut étudier aisément la stabilité et les performances du système de commande à partir des diagrammes de \mathcal{N} yquist et de \mathcal{B} lack- \mathcal{N} ichols. La marge du module et le facteur de qualité peuvent y être directement relevées

$$MM = 0.8 \text{ et } Q = 2db$$

- Compte tenu de la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(p)$ et de la fonction de sensibilité en entrée $\mathcal{RS}(p)$, le système de commande réalise bien une compensation parfaite des perturbations en sortie du type échelon.
- Compte tenu de la fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(p)$ et la fonction de sensibilité en entrée $\mathcal{RS}(p)$, le système de commande est relativement insensible aux bruits de mesure inéluctables.

La figure 4.5 montre le comportement d'entrée-sortie du système de commande correspondant à la spécification donnée ci-dessus avec une loi de commande donnée par

$$u(t) = \frac{P_o(\rho) - S(\rho)D(\rho)}{P_o(\rho)} u(t) - \frac{R(\rho)}{P_o(\rho)} y(t) + \frac{T(\rho)B^*(\rho)}{P_o(\rho)A^*(\rho)} u^*(t)$$

avec

$$P_o(\rho) = (\rho + 100)^2 (\rho + 200)$$

où $\{u^*(t)\}$ est une séquence d'échelon d'amplitudes respectives 1, -1 et 0. On notera plus particulièrement que les objectifs de poursuite parfaite et de rejet asymptotique des perturbations ont été bien réalisés : la séquence de sortie $\{y(t)\}$ est confondue avec la séquence de référence $\{y^*(t)\}$ sauf sur un intervalle de temps raisonnable à la suite d'une perturbation de commande en échelon d'amplitude unitaire introduite à l'instant 65s. Les quatre valeurs statiques du signal de commande $\{u(t)\}$ sont justifiées par le caractère intégrateur du système et l'amplitude de la perturbation : la propriété suivante est vraie

$$\{y^*(t)\} \text{ converge} \implies \{u(t) + v(t)\} \text{ est asymptotiquement nulle}$$

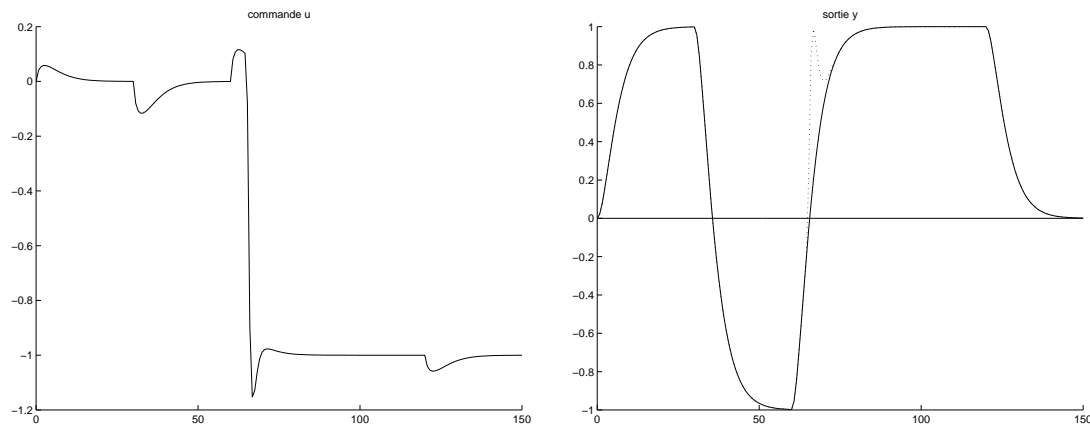


FIG. 4.5 – Comportement d'entrée-sortie

4.4 Conclusion

Les synthèses développées dans ce paragraphe ont permis de montrer que les spécifications usuelles des systèmes asservis peuvent être réalisées d'une manière pragmatique et rationnelle avec une synthèse basée sur le placement des pôles du système asservi. On distingue six étapes essentielles de la démarche.

- La définition du domaine de stabilité et de performances à partir des performances requises en régulation, i.e. la spécification $S1$.
- Le choix de la nature de poursuite à partir de la configuration des zéros du système par rapport au domaine de stabilité et de performances ou de la nature de la séquence des points de consigne. Rappelons qu'une poursuite parfaite indépendante de la nature de la séquence de référence ne peut être envisagée que dans le cas où tous les zéros du système sont situés dans le domaine de stabilité et de performances. On peut néanmoins réaliser une poursuite parfaite pour des séquences de points de consigne dont le modèle générateur est connue avec une loi de commande avec retour unitaire.
- L'assignement des pôles fixes du régulateur à la lumière du principe du modèle interne : les pôles du générateur des perturbations (resp. du modèle de la séquence de points de consigne) qui ne sont pas des zéros du système par rapport aux perturbations (resp. des pôles du système) doivent être des pôles du régulateur pour réaliser une compensation parfaite des perturbations (resp. une poursuite parfaite de la séquence de référence).
- La spécification des pôles du système asservi à partir du domaine de stabilité et de performances. Le nombre de pôles est spécifié de manière à garantir la faisabilité de la synthèse avec un régulateur strictement propre. Cette structure est vitale pour désensibiliser le système asservi par rapport aux bruits de mesure inéluctables, i.e. la spécification $S3$.
- La spécification du générateur de la séquence de référence en fonction des performances requises en poursuite, i.e. la spécification $S2$, et des contraintes de mise en oeuvre du régulateur si besoin est.
- La détermination des paramètres du régulateur à partir de la résolution d'une équation polynomiale appropriée

Une synthèse d'un asservissement du taux du glucose dans le sang d'un patient a été développée pour montrer que la théorie des systèmes est au coeur de belles réalisations humanitaires en matière de santé.

Problème 4.1 La figure 4.6 montre un asservissement de température domestique où \mathcal{REG} est le régulateur, \mathcal{ENC} est l'enceinte dont la température est mesurée par le capteur \mathcal{CAP} , \mathcal{CHA} est la chaudière qui permet de produire la puissance de chauffe requise pour l'enceinte, alors que \mathcal{EXT} représente toutes les sources externes susceptibles de dissiper la chaleur emmagasinée dans l'enceinte. Les séquences $\{u(t)\}$, $\{\theta_{en}(t)\}$ et $\{y(t)\}$ désignent respectivement la puissance de chauffe fournie par la chaudière, la température dans l'enceinte et sa mesure, alors que la séquence $\{v(t)\}$ représente la température extérieure. Le profil de température désiré dans l'enceinte est spécifié à partir de la séquence de référence $\{y^*(t)\}$ que l'on peut générer via un filtrage approprié d'une séquence d'échelons largement espacés dont les valeurs et les instants d'occurrence sont préalablement spécifiés.

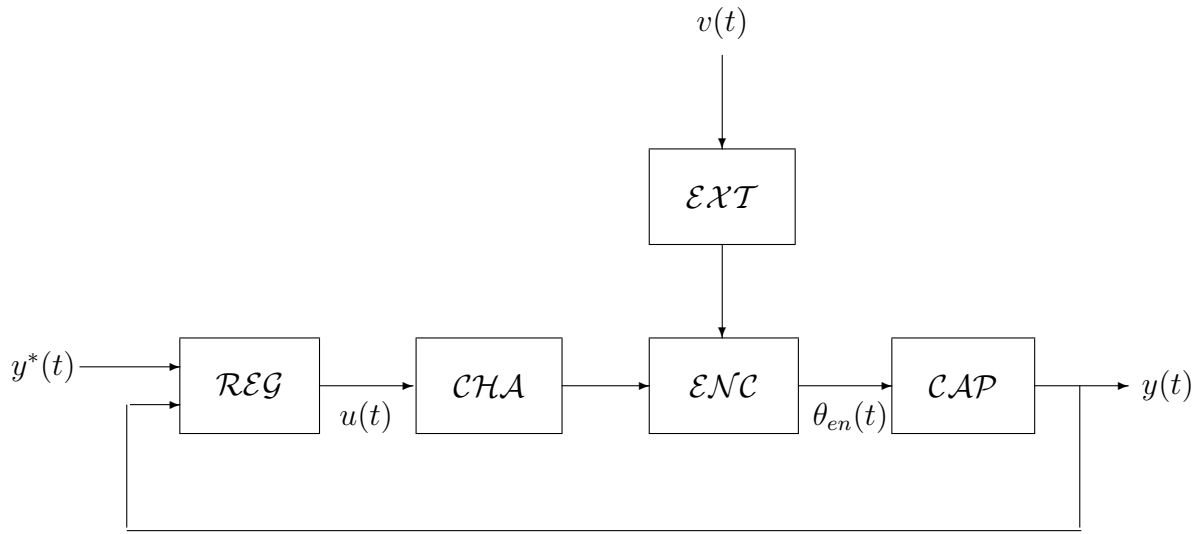


FIG. 4.6 – Asservissement de température

On se propose de réaliser une synthèse de cet asservissement en adoptant les hypothèses de modélisation suivantes.

- Le capteur de température dans l'enceinte peut être décrit par un gain unitaire modulo un bruit de mesure additif, i.e.

$$y(t) = \theta_e(t) + \eta(t)$$

- Le système thermique peut être modélisé en exploitant son analogie par rapport au système électrique de la figure 4.7. La source de courant SC et la capacité C_{ch} représentent respectivement la puissance de chauffe de la chaudière et sa capacité calorifique, alors que la capacité C_{en} représente la capacité calorifique de l'enceinte. Les résistances \mathcal{R}_{en} et \mathcal{R}_{ex} permettent de modéliser respectivement la dissipation de la chaleur de la chaudière vers l'enceinte et de l'enceinte vers l'extérieur. Quant à la source de tension ST , elle représente les effets de la température extérieure.

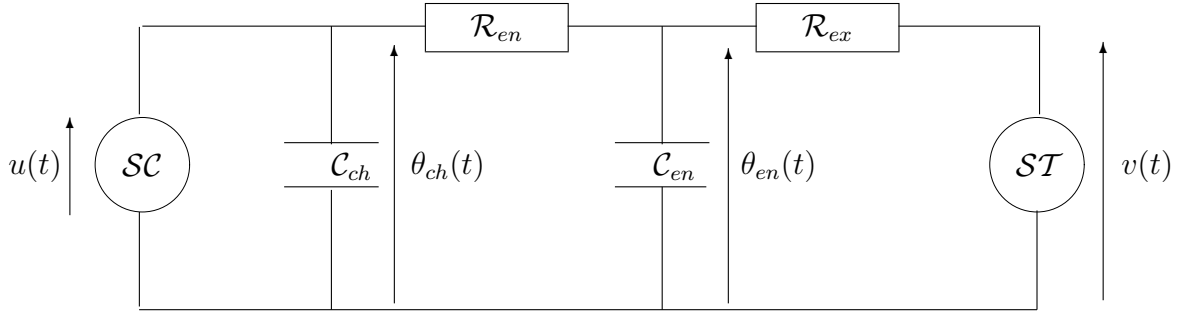


FIG. 4.7 – Modélisation de l'installation de chauffage

Pour ce faire, on suggère de procéder progressivement comme suit.

- 1) Etablir les équations du système thermique, en l'occurrence la relation entre la température de l'enceinte d'une part et la puissance de chauffe et la température extérieure d'autre part, et en déduire l'équation du système.
- 2) Effectuer une synthèse qui permet de réaliser les spécifications $S1$, $S2$ et $S3$. On précisera pourquoi ces spécifications ne peuvent être satisfaites par des régulateurs du type P , PI et PID .

Problème 4.2 La figure 4.8 montre un asservissement de position d'un système électro-mécanique composé d'une source de courant qui alimente un électroaimant permettant d'appliquer une force électromagnétique sur le plateau afin de le maintenir dans une position verticale donnée. La position du plateau est mesurée par un potentiomètre muni d'une adaptation d'impédance appropriée, alors que son asservissement est réalisée avec un régulateur adéquat. Les séquences $\{u(t)\}$ et $\{i(t)\}$ désignent respectivement la tension appliquée à la source de courant et le courant qu'elle délivre, alors que les séquences $\{z(t)\}$ et $\{y(t)\}$ désignent la position du plateau et sa mesure. Quant à $\{y^*(t)\}$, elle représente la séquence de référence.

On se propose d'effectuer une synthèse du système asservi en supposant que la source du courant peut être décrite par un amplificateur de gain γ_1 , que l'électroaimant a été préalablement asservi pour pouvoir être considéré comme un amplificateur de gain γ_2 et que la capteur de position est raisonnablement décrit par un amplificateur de gain unitaire modulo un bruit de mesure, soit

$$y(t) = z(t) + \eta(t)$$

Pour ce faire, on suggère de procéder d'une manière progressive comme suit en adoptant une approche transfert.

- 1) Etablir un modèle du plateau et en déduire un modèle de commande du système électro-mécanique.
- 2) Effectuer une synthèse qui permet de réaliser les spécifications $S1$, $S2$ et $S3$.

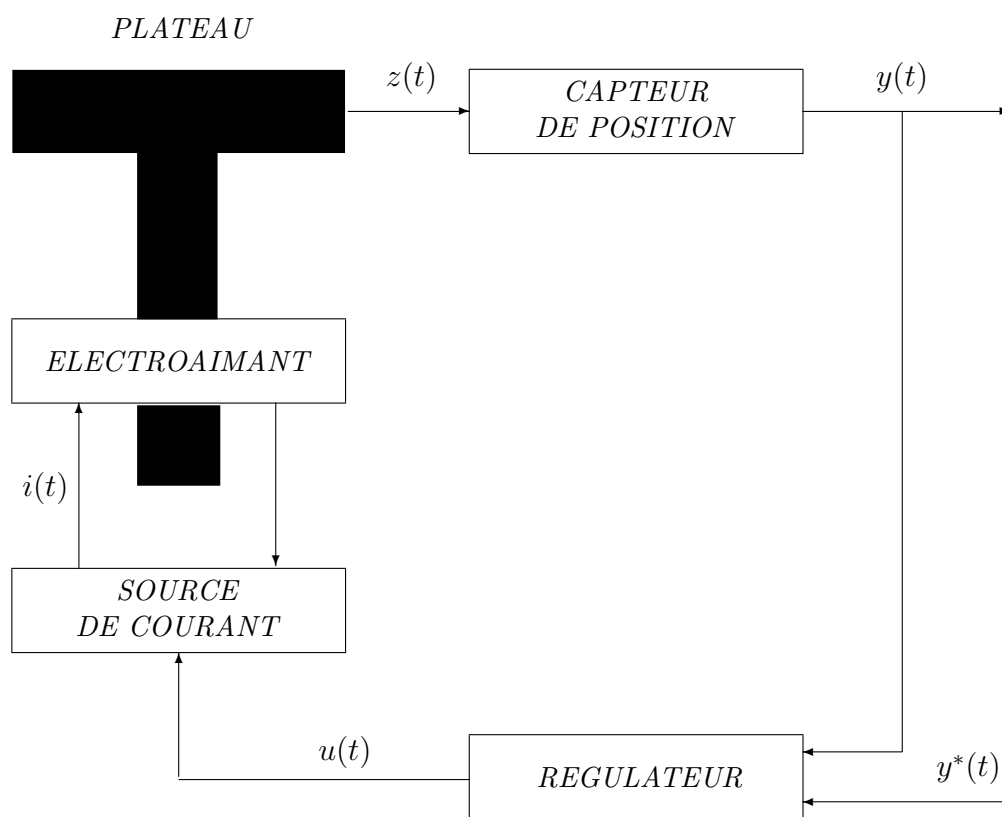
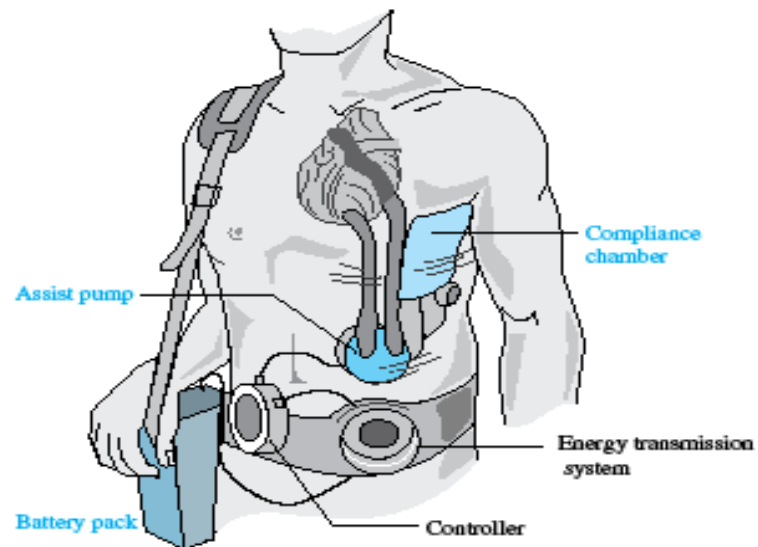


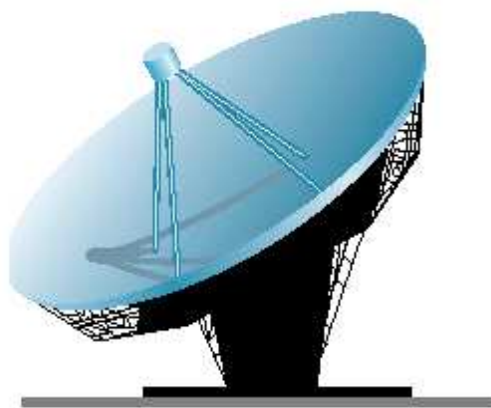
FIG. 4.8 – Asservissement de position d'un plateau



Chapitre 5

Eléments de régulation industrielle

La régulation industrielle est principalement basée sur la commande PID et la commande avec modèle interne. Les fans de la commande PID se réjouissent d'un certain compromis simplicité-performances. En effet, les actions proportionnelle, intégrale et dérivée sont généralement ajustées d'une manière empirique, pour ne pas dire manuelle, en dépit d'un certain nombre de procédures éprouvées d'auto-calibrage disponibles sur le marché ([3]). La commande avec modèle interne s'est principalement imposée par sa simplicité et sa robustesse intrinsèques ainsi que sa vraisemblance avec la commande prédictive de Smith qui offrit la première solution potentielle du problème du retard.



La motivation de ce chapitre est multiple. On présente d'abord les deux méthodes chéries de la régulation industrielle, en l'occurrence la commande PID et la commande avec modèle interne. Les limitations intrinsèques de ces méthodes sont particulièrement mises en évidence à partir d'une analyse de stabilité et de performances. Le problème du retard est ensuite étudiée d'une manière compréhensive à partir d'une prédiction adéquate introduite par Smith. L'utilisation des approximations usuelles de P adé est particulièrement remise en cause.

5.1 Commande PID.

Les figures (5.1)-(5.3) montrent les systèmes de commande \mathcal{PID} communément utilisés. L'appellation \mathcal{PID} est justifiée par le fait que le signal de commande est une combinaison linéaire de l'erreur de poursuite, de son intégrale et de sa dérivée filtrée comme le montre la loi de commande correspondante est donnée par

$$u(t) = u_p(t) + u_d(t) + u_i(t)$$

avec

$$u_p(t) = K (\alpha_p y^*(t) - y(t))$$

$$\left(\rho + \frac{1}{T_{fd}} \right) u_d(t) = K \frac{T_d}{T_{fd}} \rho (\alpha_d y^*(t) - y(t))$$

$$\rho u_i(t) = K \frac{1}{T_i} (y^*(t) - y(t))$$

où K , T_i , T_d et T_{fd} désignent respectivement le gain proportionnel, le temps d'intégration, le temps de dérivation et la constance de temps du filtre de réalisation de l'action dérivée dans la mesure où un dérivateur pur n'est pas un système propre, soit

$$F_d(p) = \frac{T_d p}{1 + T_{fd} p} \text{ avec } \frac{T_d}{T_{fd}} = N_{fd}$$

Les coefficients α_p et α_d caractérisent la structure \mathcal{PID} considérée comme l'indique la table 5.1. On notera que des actions proportionnelle et dérivée qui ne portent que sur la sortie conduisent à un dépassement raisonnable pour des séquences de référence du type échelon.

\mathcal{PID}	α_p	α_d
Structure 1	1	1
Structure 2	1	0
Structure 3	0	0

TAB. 5.1 – Structures \mathcal{PID}

Les régulateurs \mathcal{PID} sont donc des systèmes dynamiques que l'on peut décrire par une équation différentielle de la forme

$$S(\rho)D(\rho)u(t) + R(\rho)y(t) = T(\rho)y^*(t)$$

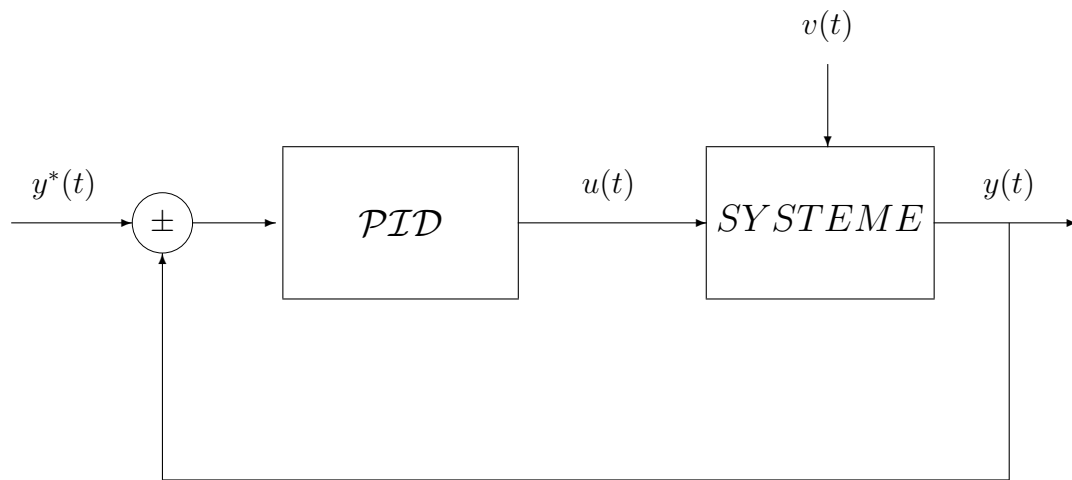
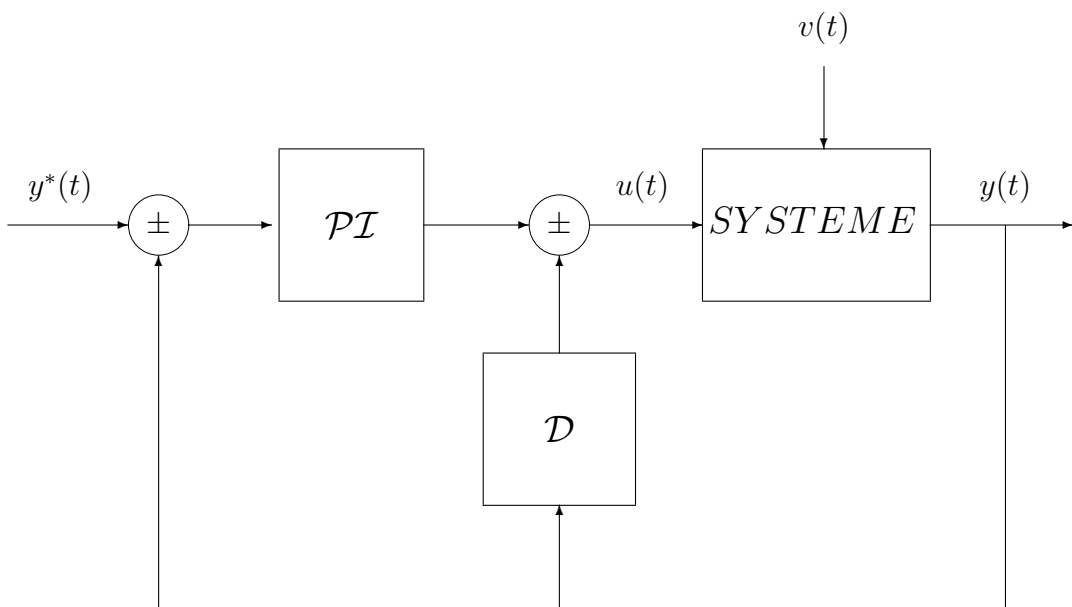
avec

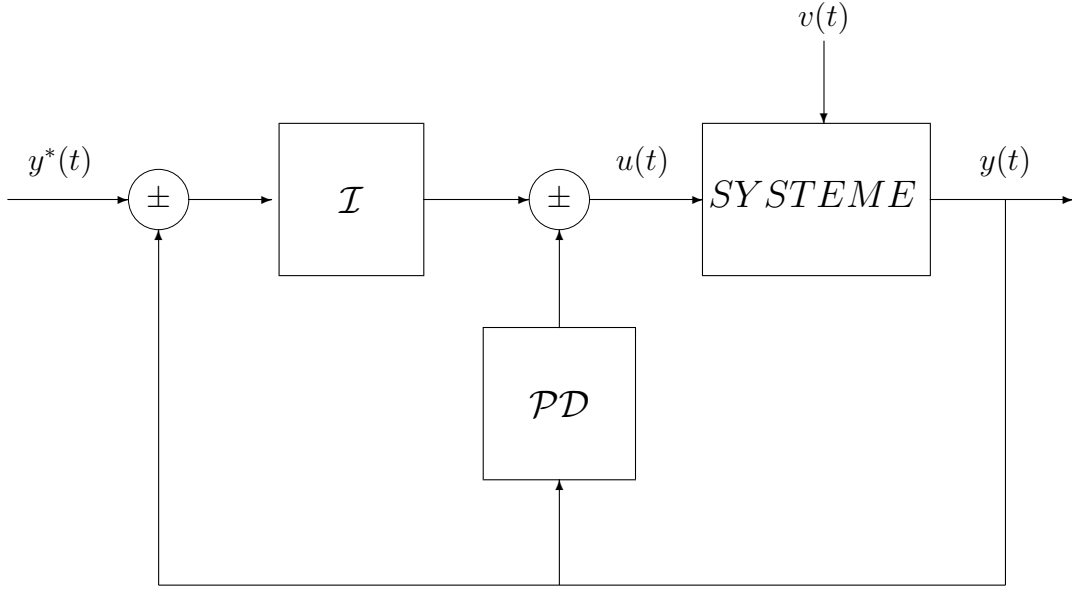
$$D(\rho) = \rho$$

$$S(\rho) = s_o \rho + s_1 = \rho + \frac{1}{T_{fd}}$$

$$R(\rho) = r_o \rho^2 + r_1 \rho + r_2 = K \left(\left(1 + \frac{T_d}{T_{fd}} \right) \rho^2 + \left(\frac{1}{T_{fd}} + \frac{1}{T_i} \right) \rho + \frac{1}{T_{fd} T_i} \right)$$

$$T(\rho) = t_o \rho^2 + t_1 \rho + t_2 = K \left(\left(\alpha_p + \alpha_d \frac{T_d}{T_{fd}} \right) \rho^2 + \left(\alpha_p \frac{1}{T_{fd}} + \frac{1}{T_i} \right) \rho + \frac{1}{T_{fd} T_i} \right)$$

FIG. 5.1 – Commande PID : structure 1FIG. 5.2 – Commande PID : structure 2

FIG. 5.3 – Commande \mathcal{PID} : structure 3

On notera que les trois structures de systèmes de commande \mathcal{PID} conduisent au même régulateur, soit

$$\mathcal{R}(p) = \frac{K \left(1 + \frac{T_d}{T_{fd}} \right) p^2 + K \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_{fd}} \right) p + K \left(\frac{1}{T_i T_{fd}} \right)}{p \left(p + \frac{1}{T_{fd}} \right)}$$

et ont donc les mêmes dynamiques de régulation. Elles ne diffèrent que par le polynôme $T(\rho)$ et donc par les dynamiques de poursuite sous-jacentes.

\mathcal{PID}	$T(\rho)$
Structure 1	$K \left(\left(\alpha_p + \alpha_d \frac{T_d}{T_{fd}} \right) \rho^2 + \left(\frac{1}{T_{fd}} + \frac{1}{T_i} \right) \rho + \frac{1}{T_{fd} T_i} \right)$
Structure 2	$K \left(\rho^2 + \left(\frac{1}{T_{fd}} + \frac{1}{T_i} \right) \rho + \frac{1}{T_{fd} T_i} \right)$
Structure 3	$K \frac{1}{T_i} \left(\rho + \frac{1}{T_{fd}} \right)$

TAB. 5.2 – Polynômes $T(\rho)$ des structures \mathcal{PID}

Par ailleurs, si l'on considère la classe des systèmes dont le comportement d'entrée-sortie peut être raisonnablement décrit par

$$\text{SYS} \begin{cases} A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t) + C(\rho)v(t) \\ D(\rho)v(t) = E(\rho)\delta(t) \end{cases}$$

alors les performances des systèmes de commande \mathcal{PID} sous-jacents sont données par

$$SYS_{PID} \begin{cases} y(t) = \frac{B(\rho)T(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) + \frac{S(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} D(\rho)v(t) \\ u(t) = \frac{A(\rho)T(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) - \frac{R(\rho)C(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \end{cases}$$

avec

$$P_c(\rho) = A(\rho)D(\rho)S(\rho) + B(\rho)R(\rho)$$

La synthèse d'un \mathcal{PID} est généralement faite à partir d'une procédure appropriée qui consiste à déterminer les actions proportionnelle, intégrale et dérivée. Cette procédure est basée sur un modèle de commande relativement réduit, en l'occurrence un ou deux points de la réponse fréquentielle du système ou à la rigueur une réponse indicielle. Les performances obtenues ne sont généralement pas satisfaisantes ([3]). On peut toutefois concevoir un système de commande \mathcal{PID} en utilisant une méthode de synthèse avec placement de pôles à partir d'un modèle de commande décrit par les équations \mathcal{SYS} avec une structure spécifique donnée par

$$A(\rho) = a_o\rho^2 + a_1\rho + a_2, \quad B(\rho) = b_o\rho + b_1, \quad C(\rho) = c_o\rho^2 + c_1\rho + c_2$$

$$D(\rho) = \rho \text{ et } E(\rho) = e_0\rho + e_1$$

Pour illustrer cette contrainte structurelle, on se propose d'effectuer la synthèse d'un système de commande \mathcal{PID} avec placement des pôles. Pour ce faire, il suffit de résoudre, en les polynômes $S(p) = s_op + s_1$ et $R(p) = r_op^2 + r_1p + r_2$, l'équation polynomiale

$$pA(p)S(p) + B(p)R(p) = P(p) = \prod_{i=1}^{np} (p - p_i^*)$$

où les p_i^* pour $i \in [1, np]$ désignent les pôles désirés du système de commande et que l'on peut spécifier d'une manière arbitraire dans le domaine de stabilité et de performances. Conformément au résultat 4.1, la solution de cette équation polynomiale est unique si les polynômes $pA(p)$ et $B(p)$ sont premiers entre eux et si les conditions structurelles suivantes sont satisfaites

$$(np > na) \text{ et } (nb < na) \text{ et } (nr = na) \text{ et } (ns = np - na - 1)$$

soit

$$(np = 2na) \text{ et } (na = 2) \text{ et } (nb = 1)$$

Supposons que la spécification des pôles désirés est faite à partir de deux modes réels μ_1 et μ_2 et d'un mode oscillatoire bien amorti de fréquence propre ω et d'amortissement ζ , la synthèse d'un système de commande \mathcal{PID} avec placement des pôles consisterait alors à résoudre, i.e. déterminer les paramètres du régulateur, $(s_o, s_1, r_o, r_1, r_2)$, l'équation polynomiale

$$\begin{aligned} & ((a_op^2 + a_1p + a_2)p)(s_op + s_1) + (b_op + b_1)(r_op^2 + r_1p + r_2) \\ & = \\ & (p - \mu_1)(p - \mu_2)(p^2 + 2\zeta\omega p + \omega^2) \end{aligned}$$

En posant

$$(p - \mu_1)(p - \mu_2)(p^2 + 2\zeta\omega p + \omega^2) = p_o p^4 + p_1 p^3 + p_2 p^2 + p_3 p + p_4$$

et en développant les produits polynômiaux, on trouve

$$\begin{aligned} a_o s_o p^4 + (a_1 s_o + a_o s_1 + b_o r_o) p^3 + (a_2 s_o + a_1 s_1 + b_1 r_o + b_o r_1) p^2 + (a_2 s_1 + b_1 r_1 + b_o r_2) p + b_1 r_2 \\ = \\ p_o p^4 + p_1 p^3 + p_2 p^2 + p_3 p + p_4 \end{aligned}$$

La solution recherchée est celle du système d'équations donné par

$$\begin{bmatrix} a_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_o & b_o & 0 & \\ a_2 & a_1 & b_1 & b_o & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_1 & b_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_o \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Il apparaît clairement que les paramètres s_o et r_2 peuvent être obtenus directement en égalisant les coefficients des puissances 4 et 0, soit

$$s_o = \frac{p_o}{a_o} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{p_4}{b_1}$$

et que les paramètres s_1 , r_o et r_1 sont la solution du système d'équations suivant

$$\begin{bmatrix} a_o & b_o & 0 \\ a_1 & b_1 & b_o \\ a_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ r_o \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - \frac{a_1}{a_o} p_o \\ p_2 - \frac{a_2}{a_o} p_o \\ p_3 - \frac{b_o}{b_1} p_4 \end{bmatrix}$$

Un tel système est linéaire et admet une solution unique en (s_1, r_2, r_1) si et seulement si

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_o & b_o & 0 \\ a_1 & b_1 & b_o \\ a_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix} = a_2 \det \begin{pmatrix} b_o & 0 \\ b_1 & b_o \end{pmatrix} + b_1 \det \begin{pmatrix} a_o & b_o \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

soit

$$\Delta = a_2 b_o^2 + b_1 (a_o b_1 - a_1 b_o) \neq 0$$

On aura alors

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ r_o \\ r_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 & -b_o b_1 & b_o^2 \\ b_o a_2 - b_1 a_1 & b_1 a_o & -b_o a_o \\ -b_1 a_2 & b_o a_2 & b_1 a_o - b_o a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 - \frac{a_1}{a_o} p_o \\ p_2 - \frac{a_2}{a_o} p_o \\ p_3 - \frac{b_o}{b_1} p_4 \end{bmatrix}$$

Les paramètres du régulateur recherché sont alors donnés par

$$s_o = \frac{p_o}{a_o}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{\Delta} \left\{ b_1^2 \left(p_1 - \frac{a_1}{a_o} p_o \right) - b_o b_1 \left(p_2 - \frac{a_2}{a_o} p_o \right) + b_o^2 \left(p_3 - \frac{b_o}{b_1} p_4 \right) \right\} \\
r_o &= \frac{1}{\Delta} \left\{ (b_o a_2 - b_1 a_1) \left(p_1 - \frac{a_1}{a_o} p_o \right) + a_o b_1 \left(p_2 - \frac{a_2}{a_o} p_o \right) - a_o b_o \left(p_3 - \frac{b_o}{b_1} p_4 \right) \right\} \\
r_1 &= \frac{1}{\Delta} \left\{ -a_2 b_1 \left(p_1 - \frac{a_1}{a_o} p_o \right) + a_2 b_o \left(p_2 - \frac{a_2}{a_o} p_o \right) + (a_o b_1 - a_1 b_o) \left(p_3 - \frac{b_o}{b_1} p_4 \right) \right\} \\
r_2 &= \frac{p_4}{b_1}
\end{aligned}$$

On notera que la synthèse du régulateur requiert les conditions suivantes

$$a_o \neq 0, \quad b_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta = a_2 b_o^2 + b_1 (a_o b_1 - a_1 b_o) \neq 0$$

La première condition stipule que le système doit être de second ordre ; i.e. $na = 2$. La seconde condition nécessite que les polynômes ρ et $B(\rho)$ doivent être premiers entre eux, i.e. $B(0) \neq 0$, autrement le système de commande aurait un pôle à l'origine et ne peut être asymptotiquement stable. Quant à la troisième condition, elle stipule que les polynômes $A(\rho)$ et $B(\rho)$ doivent être premiers entre eux. Autrement, $B(\rho)$ divise le polynôme caractéristique $P_c(\rho)$ et il serait impossible de réaliser un placement arbitraire des pôles du système de commande. En effet si l'on effectue la division euclidienne de $A(\rho)$ par $B(\rho)$, on trouve

$$\frac{A(\rho)}{B(\rho)} = G(\rho) + \frac{F(\rho)}{B(\rho)}$$

avec

$$G(\rho) = \frac{a_o}{b_o} \rho + \left(\frac{a_1}{b_o} - \frac{a_o b_1}{b_o^2} \right) \quad \text{et} \quad F(\rho) = a_2 - \frac{a_1 b_1}{b_o} + \frac{a_o b_1^2}{b_o^2}$$

Il apparaît clairement que $B(\rho)$ divise $A(\rho)$ si et seulement si le reste de la division est identiquement nul, soit

$$a_2 b_o^2 + b_1 (a_o b_1 - a_1 b_o) = \Delta = 0$$

On retrouve ainsi toutes les conditions structurelles requises sur le modèle de commande du système.

Remarque 5.1 La loi de commande PID est donnée par

$$s_o = 1 \quad \text{et} \quad s_1 = \frac{1}{T_{fd}}$$

et

$$r_o = K \frac{T_d + T_{fd}}{T_{fd}}, \quad r_1 = K \left(\frac{1}{T_{fd}} + \frac{1}{T_i} \right) \quad \text{et} \quad r_2 = K \frac{1}{T_{fd} T_i}$$

soit

$$K = \frac{r_1 s_1 - r_2}{s_1^2}, \quad T_i = \frac{r_1 s_1 - r_2}{r_2 s_1}, \quad T_d = \frac{r_o s_1^2 - r_1 s_1 + r_2}{s_1 (r_1 s_1 - r_2)} \quad \text{et} \quad T_{fd} = \frac{1}{s_1}$$

Comme les paramètres $(s_o, s_1, r_o, r_1, r_2)$ du régulateur \mathcal{PID} dépendent des pôles désirés du système de commande, on ne peut pas garantir que les actions proportionnelle, intégrale et dérivée, i.e. les paramètres (K, T_i, T_d, T_{fd}) , soient des constantes positives. On ne peut donc retrouver les actions \mathcal{P} , \mathcal{I} et \mathcal{D} classiques du régulateur \mathcal{PID} .

Par ailleurs, comme pour toutes les lois de commande linéaires admissibles, les performances des systèmes de commande \mathcal{PID} peuvent être complètement caractérisées par leurs dynamiques de poursuite et de régulation. On distingue trois limitations principales de la commande \mathcal{PID} indépendamment de la méthode de synthèse considérée.

- Le système ne doit avoir aucun zéro à l'origine. Autrement le système de commande aurait un pôle à l'origine et ne serait donc pas asymptotiquement stable.
- Seules les perturbations du type échelon peuvent être parfaitement compensées, soit celles décrites par

$$\rho v(t) = F(\rho)\gamma(t)$$

où $F(p)$ désigne un filtre stable.

- Le gain de la fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{R}(p)\mathcal{S}(p)$ est relativement élevé aux hautes fréquences puisque la propriété suivante est toujours vérifiée.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{R}(p)\mathcal{S}(p) = K \left(1 + \frac{T_d}{T_{fd}} \right)$$

Ceci conduit à une amplification des bruits de mesure sur le signal de commande qui est aussi importante que la bande proportionnelle K et le rapport $\frac{T_d}{T_{fd}}$. Certains bouquins de régulation industrielle suggèrent de prendre N_{df} aussi grand que possible, e.g. $N_{df} > 10$, pour réaliser convenablement l'action dérivée. Il est clair que leurs auteurs ne se sont jamais investis en matière de régulation industrielle.

L'automatique actuelle est au delà des limitations de la commande \mathcal{PID} qui domine la régulation industrielle. Les méthodes disponibles permettent de mieux appréhender et traiter l'inéluctable compromis entre les performances et la robustesse des systèmes asservis. On remarquera que le problème de sensibilité aux bruits de mesure de la commande \mathcal{PID} peut être résolu en utilisant des filtres en amont ou en aval du système comme l'indique la figure 5.4. Cette suggestion découle naturellement du concept de pondérations fréquentielles. La synthèse de ces filtres nécessite un investissement culturel qui va au delà du bon compromis performances-simplicité souvent mis en avant par les fans de la commande \mathcal{PID} . Le régulateur correspondant n'est plus un simple \mathcal{PID} comme l'indique sa fonction de transfert

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{F}_y(p)\mathcal{R}_{pid}(p)\mathcal{F}_u(p)$$

où $\mathcal{R}_{pid}(p)$ désigne la fonction de transfert du régulateur \mathcal{PID} et $\mathcal{F}_u(p)$ et $\mathcal{F}_y(p)$ sont les fonctions de transfert des filtres utilisés respectivement à l'entrée et la sortie du système et doivent être strictement propres.

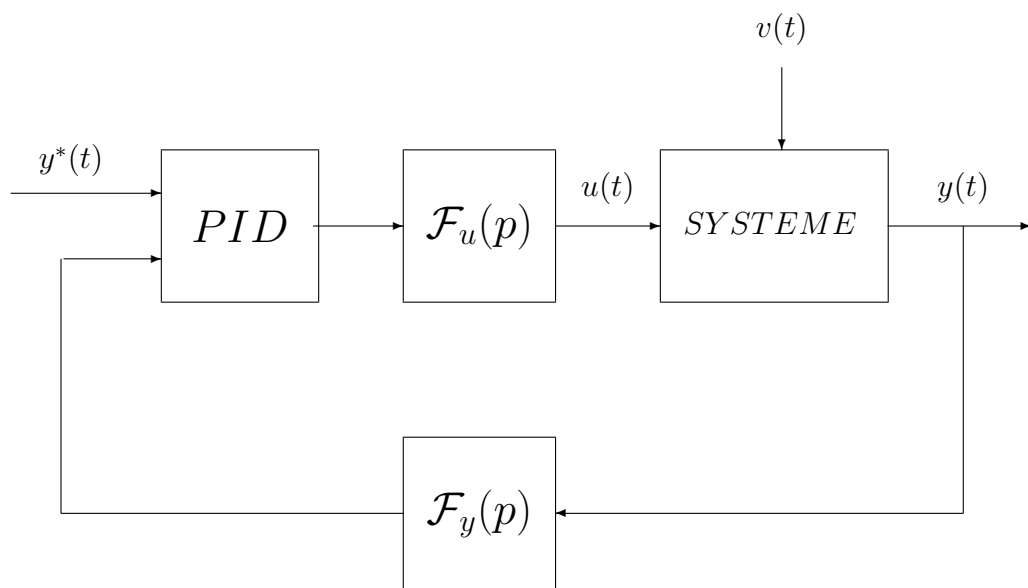
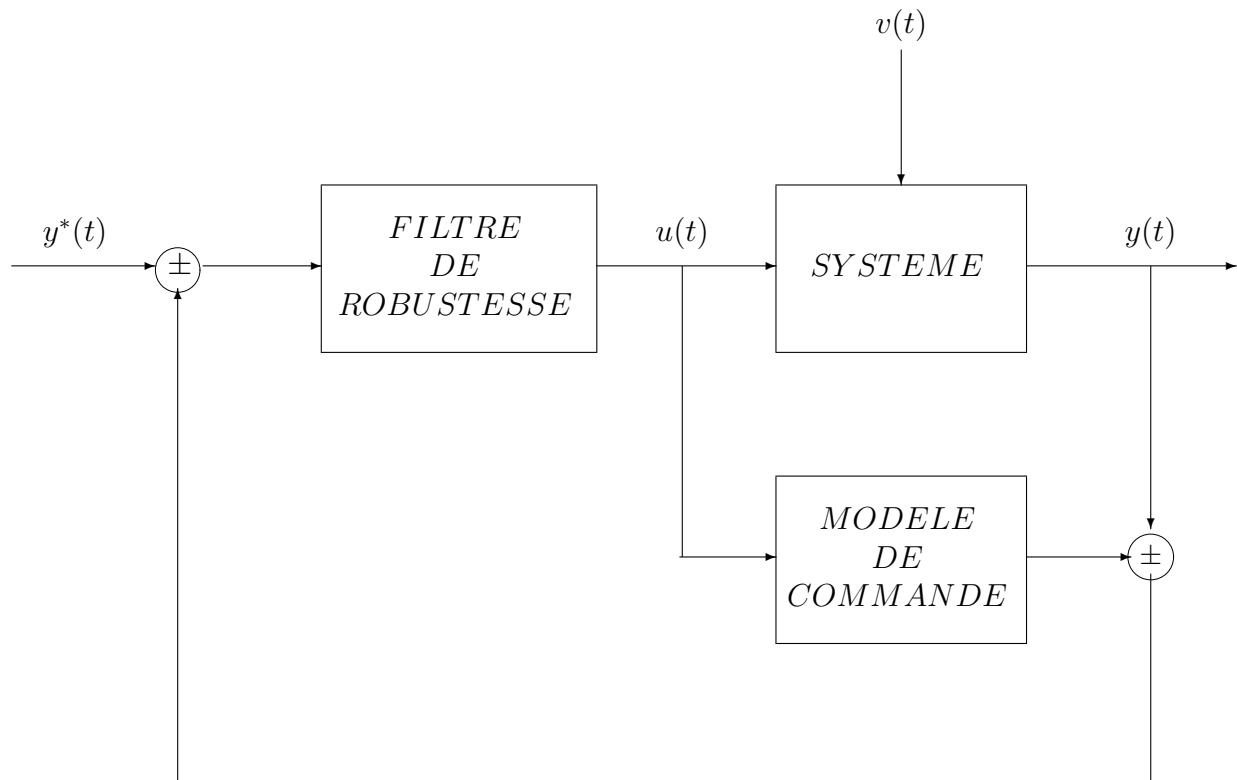
FIG. 5.4 – Commande PID avec filtrage

FIG. 5.5 – Commande avec modèle interne

5.2 Commande avec modèle interne.

Le principe de la commande avec modèle interne est très simple comme le montre la figure 5.5. Un modèle de commande est mis en parallèle avec le système pour estimer les perturbations qui affectent le fonctionnement du système en supposant qu'elles peuvent être ramenées en sortie. Ces perturbations sont compensées par une contre réaction appropriée utilisant un filtre de robustification. Une analyse du système de commande avec model interne permet d'apprécier rigoureusement son applicabilité et ses performances. Pour ce faire, on supposera que le comportement d'entrée-sortie du système est décrit par

$$\mathcal{SYS} \left\{ y(t) = \mathcal{G}(\rho)u(t) + H(\rho)v(t) \right.$$

avec

$$\mathcal{G}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(p) = \frac{C(p)}{A(p)}$$

et que le filtre de robustification est décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{F}(p) = \frac{F_n(p)}{F_d(p)}$$

La loi de commande avec modèle interne peut être facilement obtenue à partir du diagramme fonctionnel du système de commande correspondant, soit

$$\mathcal{CMI} \left\{ (1 - \mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p)) U(p) = \mathcal{F}(p) (Y^*(p) - Y(p)) \right.$$

Il s'agit d'un régulateur à un degré de liberté dont la fonction de transfert est donnée

$$\mathcal{R}(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 - \mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p)} = \frac{F_n(p)A(p)}{F_d(p)A(p) - F_n(p)B(p)}$$

que l'on peut récrire sous la forme usuelle

$$\mathcal{CMI} \left\{ \frac{R_d(\rho)}{P_o(\rho)} u(t) + \frac{R_n(\rho)}{P_o(\rho)} y(t) = \frac{R_n(\rho)}{P_o(\rho)} y^*(t) \right.$$

avec

$$R_d(\rho) = F_d(\rho)A(\rho) - F_n(\rho)B(\rho)$$

$$R_n(\rho) = F_n(\rho)A(\rho)$$

$$P_o(\rho) = F_d(\rho)A(\rho)$$

Le comportement d'entrée-sortie du système de commande est obtenu en éliminant respectivement la sortie et l'entrée entre les équations du régulateur et du système. On aura alors

$$SCMI \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{B(\rho)R_n(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) + \frac{C(\rho)R_d(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \\ u(t) = \frac{A(\rho)R_n(\rho)}{P_c(\rho)} y^*(t) - \frac{C(\rho)R_n(\rho)}{P_c(\rho)} v(t) \end{array} \right.$$

avec

$$P_c(\rho) = A(\rho)R_d(\rho) + B(\rho)R_n(\rho) = A(\rho)A(\rho)F_d(\rho)$$

Ces équations différentielles permettent de mettre en évidence les aspects fondamentaux de la commande avec modèle interne.

- Les pôles du système sont invariants par une loi de commande avec modèle interne. Les pôles du systèmes doivent être nécessairement situés dans le domaine de stabilité et de performances, i.e.

$$\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

Et il en de même pour le filtre de robustification qui représente le paramètre de synthèse de la commande avec modèle interne.

- Compte tenu des expressions des polynômes $R_n(p)$, $R_d(p)$ et $P_c(p)$ et de la stabilité du système de commande, les dynamiques de poursuite et de régulation sont respectivement données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{DP}(p) = \frac{B(p)F_n(p)}{A(p)F_d(p)} \text{ et } \mathcal{DR}(p) = \frac{C(p)(F_d(p)A(p) - F_n(p)B(p))}{A(p)A(p)F_d(p)}$$

Et dans le cas où les perturbations peuvent être ramenées en sortie, i.e. $C(p) = A(p)$, la dynamique de régulation est réduite comme suit

$$\mathcal{DR}(p) = \frac{F_d(p)A(p) - F_n(p)B(p)}{A(p)F_d(p)}$$

- Comme la dynamique de poursuite doit avoir un gain statique unitaire, alors on aura

$$\mathcal{DP}(0) = \frac{B(0)F_n(0)}{A(0)F_d(0)} = 1 \iff A(0)F_d(0) - B(0)F_n(0) = 0$$

Et compte tenu de la condition de stabilité du système de commande et des expressions des fonctions de transfert du modèle de commande, du filtre de robustification et du régulateur, on aura

$$\mathcal{G}(0) \neq 0, \mathcal{F}(0) \neq 0, \mathcal{F}(0) = \frac{1}{\mathcal{G}(0)} \text{ et } R_d(0) = 0$$

Les trois premières conditions portent sur les gains statiques du système et du filtre de robustification, alors que la dernière condition stipule que le régulateur doit avoir un pôle à l'origine, i.e sa fonction de transfert peut se récrire comme suit

$$\mathcal{R}(p) = \frac{R(p)}{pS(p)}$$

Le système de commande avec modèle interne réalise naturellement un rejet asymptotique des perturbations du type échelon, i.e. une séquence d'échelons d'amplitudes inconnues préalablement filtrées. Par ailleurs, on peut en déduire aisément l'équation de l'erreur de poursuite du système de commande à partir de son équation de comportement en sortie, soit

$$e(t) \triangleq y^*(t) - y(t) = \frac{S(\rho)}{A(\rho)F_d(\rho)} \rho y^*(t) - \frac{C(\rho)S(\rho)}{A(\rho)A(\rho)F_d(\rho)} \rho v(t)$$

On peut alors conclure qu'un système de commande avec modèle interne permet de réaliser asymptotiquement une poursuite parfaite des séquences de référence de type échelon en présence des perturbations de type échelon.

Notons néanmoins que si tous les zéros du système sont situés dans le domaine de stabilité et de performances adopté, i.e. $B(p) = 0 \implies p \in \mathcal{D}_{sp}$, alors on peut spécifier le filtre de robustification de manière à réduire la dynamique de poursuite à un filtre indépendant du système comme le montre la propriété suivante.

$$\mathcal{F}(p) = \frac{A(p)F(0)}{B(p)F(p)} \implies \mathcal{DP}(p) = \frac{F(0)}{F(p)}$$

On peut ainsi réaliser une poursuite parfaite de la séquence de référence filtrée définie par

$$y_f^*(t) = \frac{F(0)}{F(\rho)} y^*(t)$$

- Les fonctions de sensibilité usuelles nominales qui en résultent sont données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{S}(p) = 1 - \mathcal{G}(p)\mathcal{F}(p)$$

$$\mathcal{T}(p) = \mathcal{G}(p)\mathcal{F}(p)$$

$$\mathcal{GS}(p) = \mathcal{G}(p)(1 - \mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p))$$

$$\mathcal{RS}(p) = \mathcal{F}(p)$$

Il apparaît clairement que les performances nominales et la robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation inéluctables des systèmes de commande avec modèle interne peuvent être affinées en choisissant judicieusement le filtre de robustification. Ce dernier doit être strictement propre pour pouvoir réduire la sensibilité du système de commande aux bruits de mesure.

On peut faire un bilan ingénieur sur la commande avec modèle interne pour mieux appréhender ses atouts et ses limitations. Les atouts résultent des propriétés remarquables suivantes.

- ♠ La simplicité de mise en œuvre qui résulte naturellement de la simplicité du principe de la commande avec modèle interne.

- ♣ Les pôles du système doivent être situés dans le domaine de stabilité et de performances et son gain statique ne doit pas être nul, i.e.

$$\left(\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \in \mathcal{D}_{sp} \right) \quad \text{et} \quad \left(z \in \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \implies z \neq 0 \right)$$

La première condition résulte naturellement de l'invariance des pôles du système par une loi de commande avec modèle interne, alors que la seconde condition est une contrainte usuelle des performances en poursuite, i.e. $\mathcal{DP}(0) = 1$.

- ♣ Les perturbations doivent être du type échelon puisque la seule propriété générique du régulateur est qu'il admet une action intégrale.

En guise d'illustration, considérons le cas d'un système de commande avec modèle interne où le système et le filtre de robustification sont respectivement donnés par les fonctions de transfert suivantes

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{1 + \tau_m p} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(p) = \frac{1}{1 + \tau_f p}$$

On peut alors en déterminer facilement toutes les composantes à partir des résultats établis ci dessus.

- La fonction de transfert du régulateur est

$$\mathcal{R}(p) = \frac{1 + \tau_m p}{\tau_i p (1 + \alpha \tau_m p)} \quad \text{avec} \quad \tau_i = \tau_f + \tau_m \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\tau_f}{\tau_f + \tau_m} < 1$$

On distingue deux actions principales au sein de ce régulateur : une action intégrale et une action d'avance de phase. L'action intégrale du régulateur permet de réaliser une compensation parfaite asymptotique des perturbations du type échelon alors que l'avance de phase permet de conférer une bonne robustesse en stabilité au système de commande.

- Les dynamiques de poursuite et de régulation sont respectivement données par les fonction de transfert

$$\mathcal{DP}(p) = \frac{1}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_f p)} \quad \text{et} \quad \mathcal{DR}(p) = \frac{\tau_i p (1 + \alpha \tau_m p)}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_f p)}$$

On retrouve les pôles du système et du filtre de robustification : la bande passante d'un système de commande avec modèle interne est relativement réduite par rapport celle du système. La compensation parfaite asymptotique des perturbations du type échelon est particulièrement réalisée par le zéro à l'origine de la dynamique de régulation : une conséquence naturelle de l'action intégrale.

- Les fonctions de sensibilité usuelles du système de commande sont données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{S}(p) = \frac{\tau_i p (1 + \alpha \tau_m p)}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_f p)}$$

$$T(p) = \frac{1}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_f p)}$$

$$\mathcal{RS}(p) = \frac{1}{1 + \tau_f p} = \mathcal{F}(p)$$

$$\mathcal{GS}(p) = \frac{\tau_i p (1 + \alpha \tau_m p)}{(1 + \tau_m p)^2 (1 + \tau_f p)}$$

Il apparaît clairement que l'on peut modéliser parfaitement la fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{RS}(p)$ via le filtre de robustification. On peut donc réduire arbitrairement la sensibilité au bruit de mesure du système de commande. Par ailleurs, compte tenu de la fonction de sensibilité complémentaire, il apparaît clairement que le système de commande n'exhiberait aucun dépassement et aurait donc une bonne marge de phase.

Exercice 5.1 *Considérons le système de commande d'un mélangeur d'eau pure et d'un produit concentré dont le schéma fonctionnel est donné par la figure 5.6. La concentration du mélange est réglée par la position d'une électrovanne $p(t)$, qui est proportionnelle à la tension $u(t)$ qui lui est appliquée. Elle est mesurée par un détecteur optique, qui délivre une tension $y(t)$ proportionnelle à la concentration du mélange $c(t)$.*

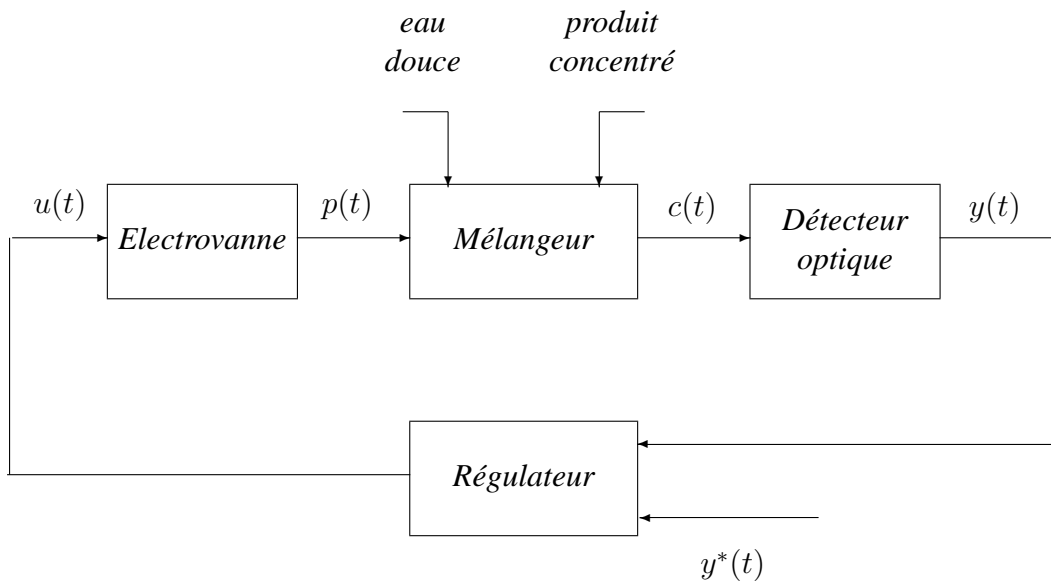


FIG. 5.6 – Commande avec modèle interne d'un mélangeur

Le comportement d'entrée-sortie est donc décrit par les séquences $\{u(t)\}$ et $\{y(t)\}$ qui ont été utilisées pour effectuer une identification. Le modèle qui a donné les meilleurs résultats de validation est donné par l'équation différentielle

$$(\rho + 10)(\rho^2 + 5\rho + 25)y(t) = -0.5(\rho - 10)u(t)$$

On demande de concevoir un système de commande avec modèle interne dont le filtre de robustification est spécifié de manière à réaliser une dynamique de poursuite indépendante de la dynamique du système avec une bonne insensibilité vis à vis des imperfections du détecteur optique.

5.3 Commande predictive de Smith.

La plupart des procédés industriels exhibent un retard pur relativement important selon la nature du processus physique sous-jacent et l'emplacement du capteur. Le comportement d'entrée-sortie du système est alors décrit par l'équation différentielle

$$\text{SYS} \begin{cases} A(\rho)y(t) = B(\rho)u(t - \tau) + C(\rho)v(t) \\ D(\rho)v(t) = E(\rho)\delta(t) \end{cases}$$

où τ désigne le retard pur du système. Le problème de commande des systèmes continus à retard est relativement crucial car on ne peut les représenter par des fonctions de transfert d'ordre fini. En effet, les fonctions de transfert correspondantes ne peuvent être représentées que par des fractions rationnelles d'ordre infini comme l'indique la propriété suivante

$$\mathcal{G}(p) = e^{-\tau p} \frac{B(p)}{A(p)} \text{ avec } e^{-\tau p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{n}p\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{\tau}{2n}p}{1 + \frac{\tau}{2n}p} \right)^n$$

La commande des systèmes continus avec retard est encore à l'ordre du jour dans la communauté d'automatique. Les solutions disponibles sont relativement restrictives d'une part et ne conduisent généralement pas à un bon compromis performances-robustesse d'autre part. On distingue trois approches en fonction du retard et du système.

- Lorsque le retard est relativement petit par rapport au temps de montée du système, on peut le négliger et le mettre ainsi sur le compte des erreurs de modélisation. Cette approche de fuite en avant requiert une bonne marge de retard pour assurer la robustesse du système de commande vis-à-vis de cette erreur de modélisation volontaire.
- Lorsque le retard est relativement important par rapport au temps d'établissement du système, on peut utiliser les limites ci-dessus pour approximer un retard pur par une fonction de transfert dont l'ordre est relativement important selon la valeur du retard. Le système est alors décrit par

$$\mathcal{G}(p) = e^{-\tau p} \frac{B(p)}{A(p)} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{m}p\right)^m} \frac{B(p)}{A(p)}$$

ou

$$\mathcal{G}(p) = e^{-\tau p} \frac{B(p)}{A(p)} \approx \frac{\left(1 - \frac{\tau}{2m}p\right)^m}{\left(1 + \frac{\tau}{2m}p\right)^m} \frac{B(p)}{A(p)}$$

où l'entier m est judicieusement choisi en fonction du rapport entre le retard pur et la constante de temps dominante du système. On notera que ces approximations conduisent à une augmentation de l'ordre du modèle de commande et donc à la complexité du régulateur. La seconde approximation, dite approximation de Padé, introduit plus particulièrement des zéros situés dans le domaine d'instabilité conduisant inéluctablement à une limitation de performances.

- Imaginons que l'on puisse réaliser une avance pure équivalente au retard pur que l'on dans la chaîne du retour et dans le modèle générateur de la séquence de référence comme l'indique la figure 5.7, alors on peut compenser parfaitement le retard pur du système.

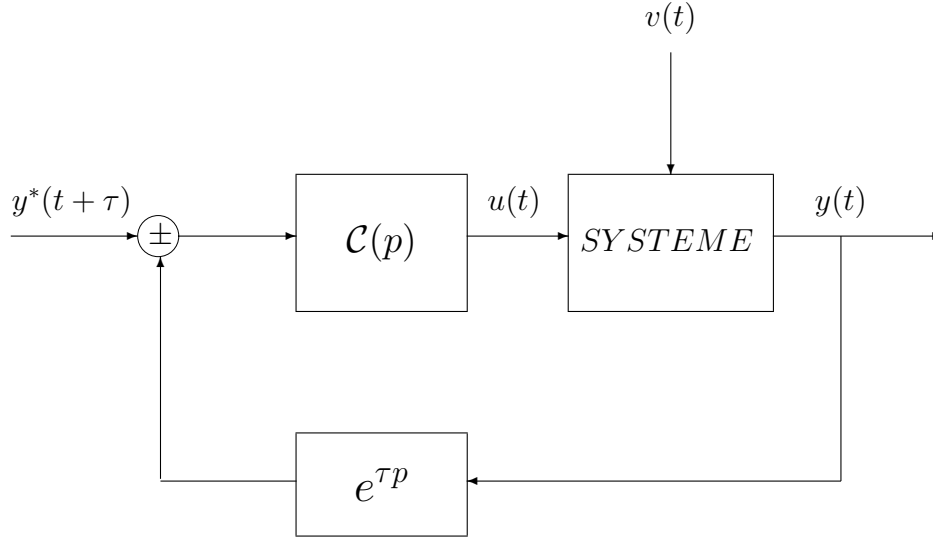


FIG. 5.7 – Compensation parfaite d'un retard pur : système de commande fictif

En effet, le comportement en sortie du système de commande fictif considéré est donné par

$$Y(p) = \frac{\mathcal{M}(p)\mathcal{C}(p)}{1 + \mathcal{M}(p)\mathcal{C}(p)} Y^*(p) + \frac{\mathcal{H}(p)}{1 + \mathcal{M}(p)\mathcal{C}(p)} V(p)$$

où $\mathcal{M}(p)$ désigne la fonction de transfert du système sans retard, i.e. $\mathcal{G}(p) = e^{-\tau p}\mathcal{M}(p)$. Tout se passe comme si le système n'avait pas de retard : c'est l'essence de la commande prédictive de Smith qui a été utilisée pour développer une solution ingénieuse du problème du retard. On notera que le système de commande est asymptotiquement stable si et seulement si le compensateur stabilise le système sans retard, soit

$$P_f(p) \triangleq A(p)C_d(p) + B(p)C_n(p) = 0 \implies p \in \mathcal{D}_{sa}$$

où $C_n(p)$ et $C_d(p)$ désignent respectivement le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert du compensateur, i.e.

$$\mathcal{C}(p) = \frac{C_d(p)}{C_n(p)}$$

Par ailleurs les perturbations peuvent être parfaitement compensées conformément au concept de modèle interne si et seulement si $D(p)$ divise $C_d(p)C(p)$.

La commande prédictive de Smith est une solution admissible de la troisième approche qui consiste à remplacer le bloc d'avance pure non réalisable par un système dynamique qui permet de réaliser une bonne prédiction de la sortie du système à l'instant $t + \tau$ à partir des informations disponibles à l'instant t sur le comportement d'entrée-sortie du système, que l'on notera $\hat{y}(t + \tau/t)$, comme l'indique la figure 5.8. Ce système dynamique est le prédicteur de Smith qui constitue la contribution principale de Smith au problème de commande des systèmes continus

exhibant un retard pur. La différence entre le système de commande fictif et le système de commande admissible respectivement données par les figures 5.7 et 5.8 concerne donc les lois de commande correspondantes, notamment

$$u(t) = \mathcal{C}(\rho)(y^*(t + \tau) - y(t + \tau))$$

et

$$u(t) = \mathcal{C}(\rho)(y^*(t + \tau) - \hat{y}(t + \tau/t))$$

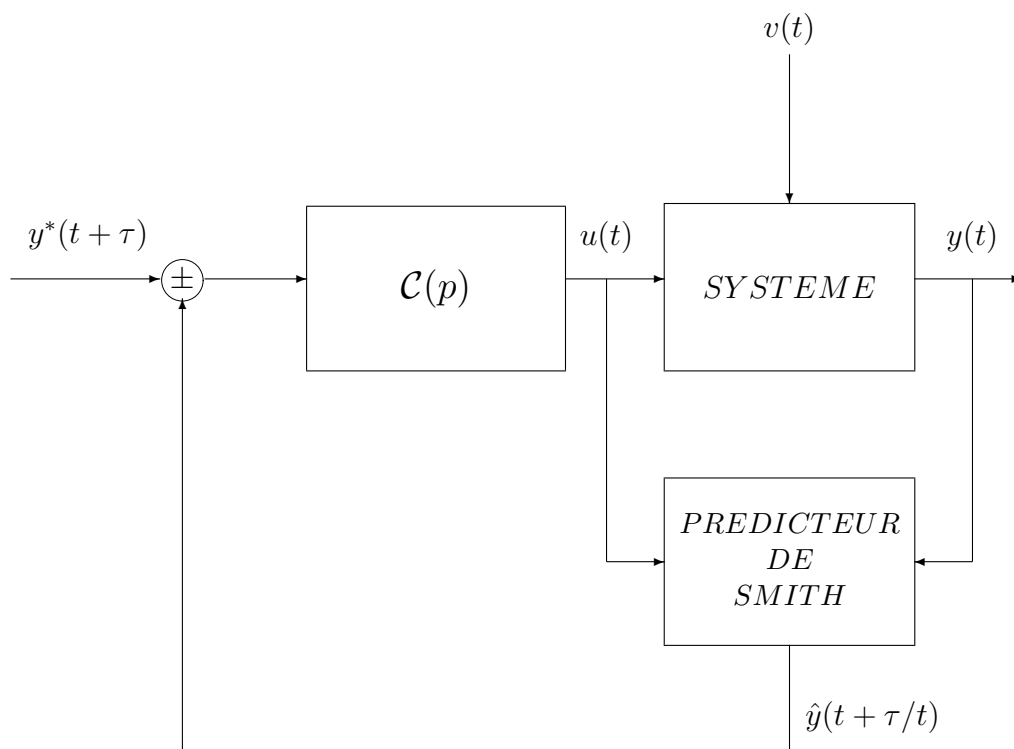


FIG. 5.8 – Compensation d'un retard pur : système de commande admissible

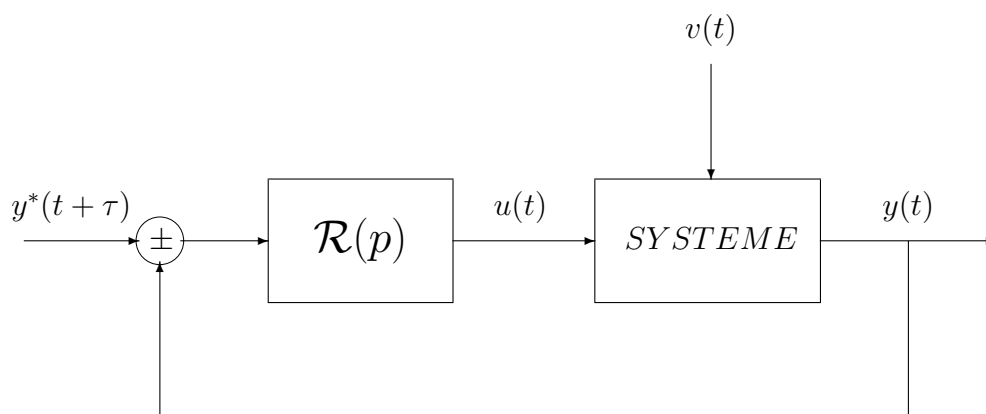


FIG. 5.9 – Système de commande usuel

La vraisemblance des performances du système de commande fictif et du système de commande admissible dépend donc essentiellement de la dynamique de prédiction requise par l'exigence de réalisation du régulateur. C'est cette vraisemblance qui a été judicieusement utilisée par Smith pour concevoir son prédicteur après avoir remarqué que le système de commande admissible peut être mis sous la forme usuelle donnée par la figure 5.9 où $\mathcal{R}(p)$ désigne la fonction de transfert du régulateur qui est réalisable. Notons que le comportement en sortie du système de commande usuel est donné par

$$Y(p) = \frac{\mathcal{M}(p)\mathcal{R}(p)}{1 + \mathcal{G}(p)\mathcal{R}(p)} Y^*(p) + \frac{\mathcal{H}(p)}{1 + \mathcal{G}(p)\mathcal{R}(p)} V(p)$$

Il apparaît clairement que les systèmes de commande fictif et usuel ont les mêmes performances en poursuite si et seulement si le compensateur et le régulateur sous-jacents sont reliés comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}(p)\mathcal{C}(p)}{1 + \mathcal{M}(p)\mathcal{C}(p)} &= \frac{\mathcal{M}(p)\mathcal{R}(p)}{1 + \mathcal{G}(p)\mathcal{R}(p)} \\ \Leftrightarrow \\ \mathcal{R}(p) &= \frac{\mathcal{C}(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p}) \mathcal{M}(p)\mathcal{C}(p)} \end{aligned}$$

Le régulateur peut être représenté à partir de deux rétroactions de systèmes réalisables comme le montre la figure 5.10. Et c'est cette réalisation qui a été utilisée pour élaborer le système de commande prédictive de Smith donné par la figure 5.11 qui est communément utilisé dans la littérature.

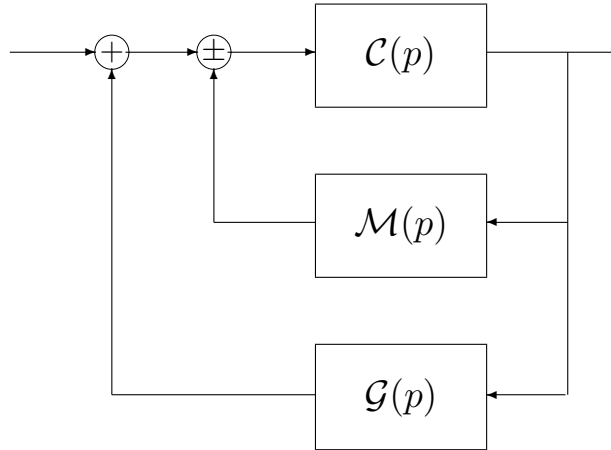


FIG. 5.10 – Réalisation du régulateur de Smith

On notera que la dynamique de régulation du système de commande admissible diffère de celle du système de commande fictif. Et en utilisant les expressions des fonctions de transfert du système et du compensateur, on peut récrire la dynamique de régulation du système de commande admissible sous la forme

$$\mathcal{DR}(p) = \frac{C(p)}{A(p)} \frac{A(p)C_d(p) + (1 - e^{-\tau p}) B(p)C_n(p)}{A(p)C_d(p) + B(p)C_n(p)}$$

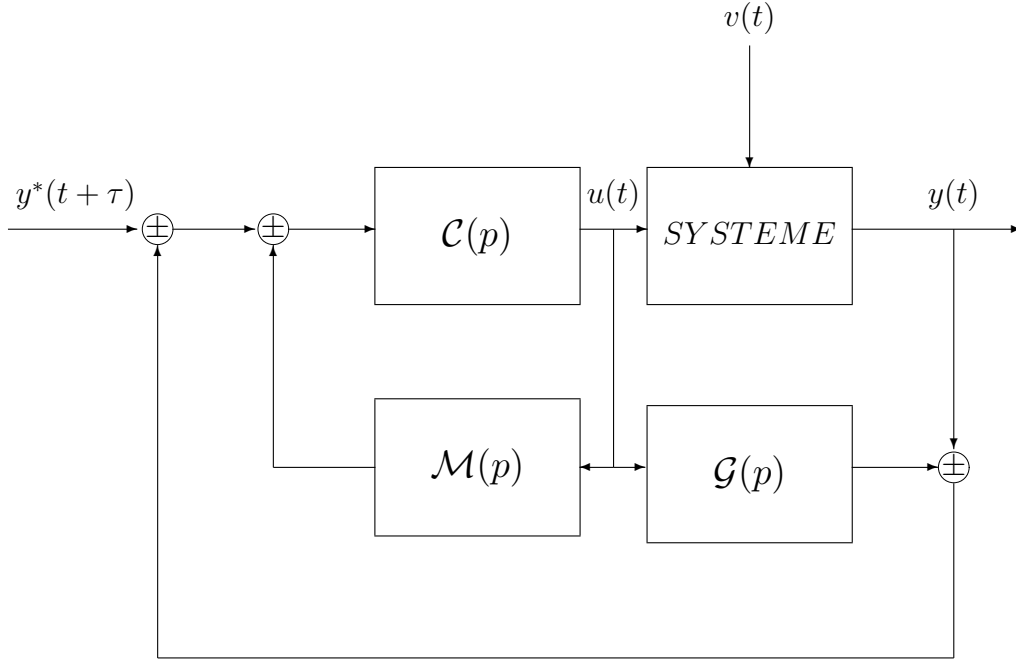


FIG. 5.11 – Système de commande prédictive de Smith

Le système de commande prédictive de Smith est donc asymptotiquement stable si et seulement si le compensateur stabilise le système sans retard, *comme c'est le cas du système de commande fictif*, et que le système est asymptotiquement stable. Par ailleurs, la condition requise pour le rejet asymptotique des perturbations diffère de celle requise pour le système de commande fictive sauf dans le cas des perturbations de charge du type échelon. Dans ce cas, le polynôme $C(p)C_d(p)$ doit avoir une racine à l'origine pour réaliser une compensation asymptotique parfaite des perturbation. Et si $C(o) \neq 0$, il faut absolument que le précompensateur ait un pôle à l'origine, e.g. $C_d(p) = pG(p)$.

En remarquant que la figure 5.11 peut être transformée comme l'indique la figure 5.12, on peut obtenir les équations différentielles du prédicteur de Smith et de l'erreur de prédiction qui lui est associée, i.e. $\tilde{y}(t + \tau) \triangleq y(t + \tau) - \hat{y}(t + \tau/t)$, soit

$$A(\rho)\hat{y}(t + \tau/t) = B(\rho)(u(t) - u(t - \tau)) + A(\rho)y(t)$$

et

$$A(\rho)\tilde{y}(t + \tau) = C(\rho)(v(t + \tau) - v(t))$$

L'erreur de prédiction est donc asymptotiquement nulle pourvu que le système soit asymptotiquement stable et que les perturbations qui affectent son fonctionnement soient du type échelon, i.e. $v(t) = v\alpha(t)$. En effet, on a bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0 \iff (A(\rho) \in \mathcal{R}_h(\rho)) \text{ et } (v(t) = v\alpha(t))$$

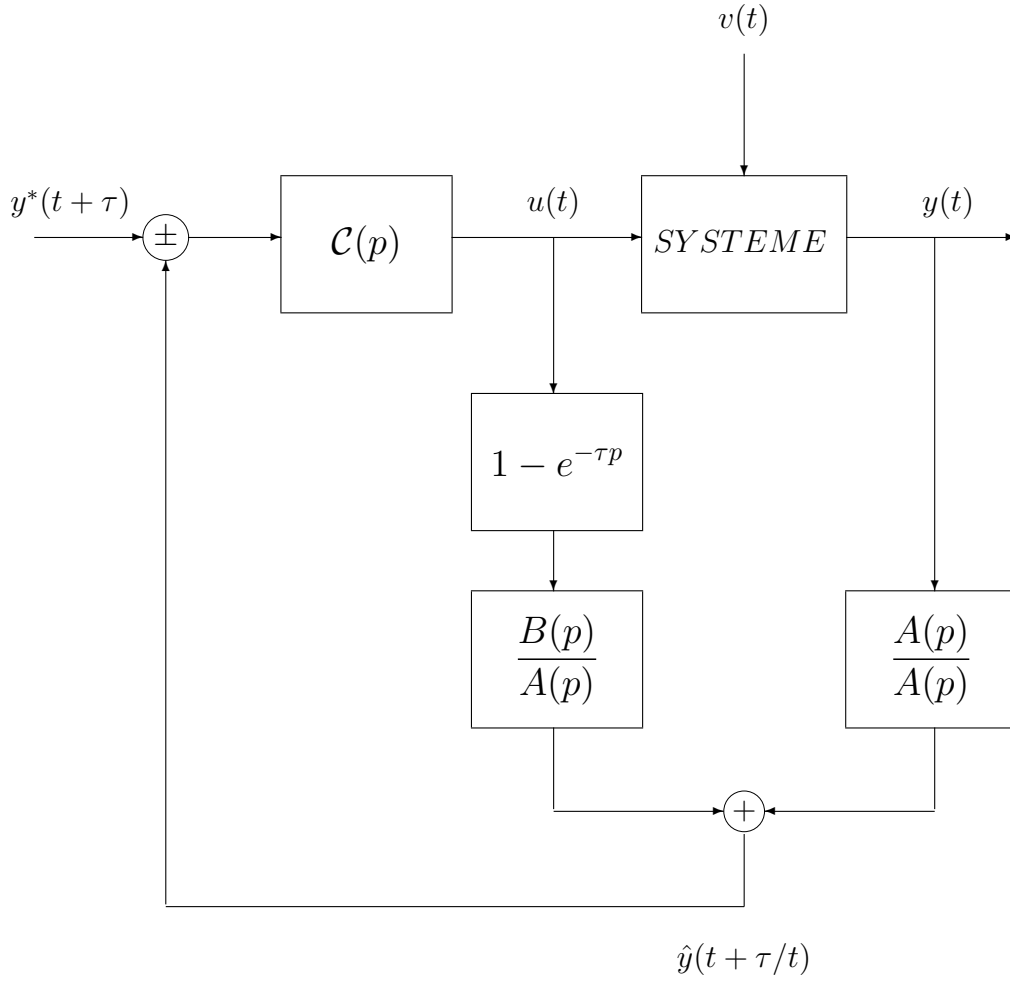


FIG. 5.12 – Commande prédictive de Smith

Remarque 5.2 Dans la pratique, le comportement du système doit être asymptotiquement stable et apériodique pour pallier un comportement oscillatoire du système de commande. Quant aux perturbations, elles sont supposées pouvoir être ramenées en sortie, i.e. $C(p) = A(p)$, pour garantir que la dynamique de convergence de l'erreur de prédiction soit la plus rapide possible.

Remarque 5.3 La mère spirituelle de la commande avec modèle interne est la commande prédictive de Smith qui a été introduite principalement pour résoudre le problème du retard. En effet, le système de commande peut être représenté comme l'indique la figure 5.5 qui met en évidence les composantes principales d'un système de commande : le modèle de commande et le filtre de robustification sont respectivement donnés par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}(p) = e^{-\tau p} \frac{B(p)}{A(p)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(p) = \frac{A(p)C_n(p)}{A(p)C_d(p) + B(p)C_n(p)}$$

On notera que le filtre de robustification a une structure adéquate pour réaliser de bonnes performances en poursuite, e.g. la configuration des zéros du filtre.

5.4 Conclusion.

Les éléments de régulation industrielle ont été présentés d'une manière critique en deux parties. La première partie a été consacrée à la présentation des méthodes usuelles de régulation industrielle, dans l'esprit de l'approche système développée pour l'analyse et la synthèse des systèmes asservis, afin de mieux appréhender ses limitations intrinsèques, en l'occurrence

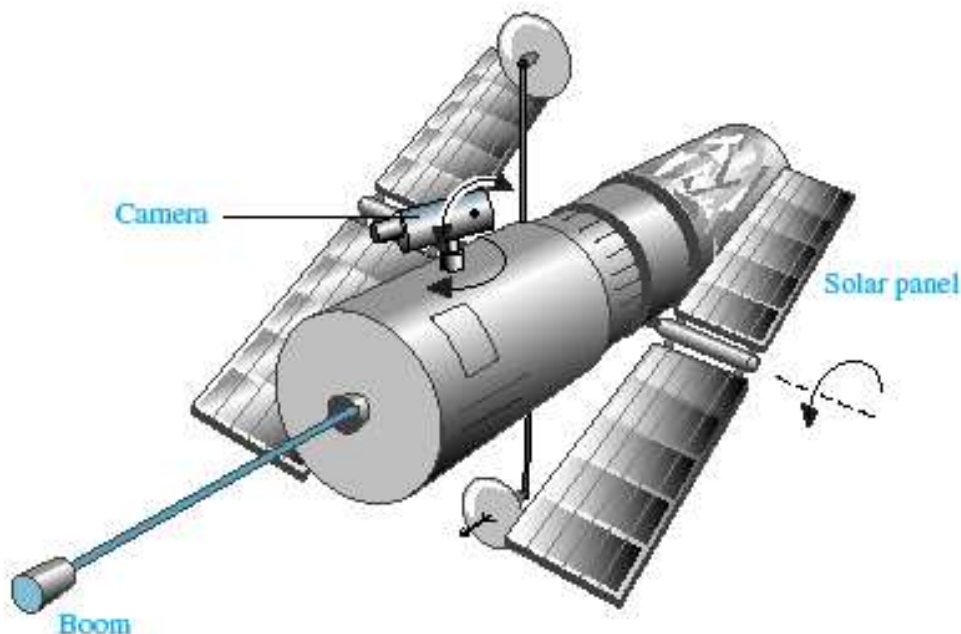
- La commande PID est principalement conçue pour les systèmes dont la dynamique dominante peut être décrite par un modèle de second ordre sans retard et est intrinsèquement sensible aux bruits de mesure.
- La commande avec modèle interne est principalement conçue pour les systèmes dont les pôles sont situés dans le domaine de stabilité et de performances requis, i.e. $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$. La configuration des pôles du système de commande correspondant est constituée par la réunion de la configurations des pôles du système et celle du filtre de robustification.
- L'approximation usuelle de \mathcal{P} adé ne constitue point une bonne solution du problème de retard. Elle introduit des zéros instables dans le modèle de synthèse et conduit ainsi à des limitations intrinsèques en performances.

La seconde partie a été dédiée à l'étude du problème de commande des systèmes exhibant un retard pur. Cette étude a été effectuée à lumière du concept de prédiction en guise d'une sensibilisation à l'utilisation de la commande prédictive de Smith. La vraisemblance avec la commande avec modèle interne a été particulièrement mise en exergue pour ce faire.

Chapitre 6

Conclusion

L'arbre de la vie ne donne qu'un seul fruit est une mauvaise pensée



L'automatique a atteint un niveau de maturité pour répondre aux exigences d'une révolution en matière de régulation industrielle comme le montrent les nombreuses applications industrielles réussies et l'essor considérable des technologies de l'information. Des conceptions assistées par ordinateur ont été développées pour réaliser toutes les étapes de la synthèse d'un système de commande, en l'occurrence l'identification d'un modèle de commande et sa validation, la synthèse de régulateurs en fonction des performances requises, l'analyse de la robustesse et des performances du système de commande et la mise en oeuvre du régulateur retenu. Elles sont utilisées aussi bien comme une base d'apprentissage de l'automatique que comme des stations de travail pour des ingénieurs désireux de tirer le meilleur profit de cette discipline de la modélisation, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques que constitue l'automatique. Des logiciels pour l'auto-ajustement des régulateurs, l'auto-calibrage des régulateurs si besoin est et même une adaptation paramétrique continue quand elle s'impose sont disponibles sur le marché de régulation industrielle. Les ingénieurs de recherche et développement utilisent désormais des méthodologies de synthèse rationnelles et efficaces pour réaliser de bons compromis performances-robustesse et performances-simplicité qui sont au delà des structures relativement réduites des systèmes de commande avec modèle interne ou de commande \mathcal{PID} .

La motivation principale de cet enseignement a été de faire une introduction aux systèmes asservis à partir du problème de commande des systèmes linéaires invariants en quatre parties. La première partie est une présentation comprehensive des différentes représentations des systèmes linéaires, en l'occurrence les réponses impulsionnelle et harmonique, l'équation différentielle, et la fonction de transfert, et des résultats fondamentaux sous-jacents sur la stabilité externe. La deuxième partie est consacrée à l'analyse des systèmes asservis à partir d'une démarche méthodologique efficace et rationnelle. Une telle démarche permet d'acquérir agréablement les bases de l'automatique et de découvrir des solutions ingénieuses inaccessibles par les chemins du bon sens et de l'habileté de l'ingénieur. On distingue les faits suivants

- La stabilisation requiert que les intersections des configurations pôles-zéros du système et du régulateur soient dans le domaine de stabilité et de performances requis et interdit toute compensation entre la configuration des pôles (respectivement des zéros) du régulateur et celle des zéros (respectivement les pôles) du système.
- Les erreurs de poursuite d'entrée-sortie et la dynamique de poursuite sont des quantificateurs de performances appropriés en matière de poursuite.
- Le rejet des perturbations est réalisé d'une manière parfaite pourvu que les pôles du générateur des perturbations, qui ne sont pas des zéros du système par rapport aux perturbations, sont des pôles du régulateur.
- Les fonctions de sensibilité usuelles sont des quantificateurs adéquats aussi bien pour les performances en matière de régulation que pour la robustesse en matière de stabilité.
- La poursuite parfaite d'une séquence de référence arbitraire est un objectif de commande qui n'est réalisable que pour les systèmes dont les zéros sont situés dans le domaine de stabilité et de performances requis. On peut néanmoins réaliser une poursuite parfaite d'une séquence de référence avec un système de commande avec retour unitaire pourvu que la nature de cette séquence de référence soit prise en considération lors de la synthèse.
- Les performances dynamiques peuvent être réalisées par un placement convenable des pôles du système de commande.
- L'essence de l'ingénierie en automatique est la réalisation d'un bon compromis entre les performances et la robustesse puisque le modelage arbitraire des performances d'un système de commande n'est pas toujours faisable. La configuration pôles-zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte peut conduire à des limitations en performances.

Le problème de synthèse est traité dans la troisième partie via le concept de placement des pôles du système asservi. Le placement des pôles et des zéros d'un système asservi a été étudiée pour mettre en exergue les meilleures performances réalisables en poursuite et les conditions requises sur le système à commander pour pouvoir les réaliser. La relevance de la démarche d'analyse et synthèse de systèmes de commande adoptée est démontrée à partir d'une application biomédicale, en l'occurrence la synthèse d'un asservissement du taux du glucose dans le sang d'un patient. La quatrième partie a été réservée à la régulation industrielle avec une attention particulière aux limitations de performances intrinsèques à la commande PID et à la commande avec modèle interne d'une part, et d'autre pat à la problématique du retard.

Bibliographie

- [1] B. D. O. Anderson and J. Moore. *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, 1989.
- [2] K. J. Åström. *Introduction to stochastic control theory*. Academic Press, 1970.
- [3] K. J. Åström and T. Hägglund. *PID Controllers : Theory, Design and Tuning*. Instrument Society of America, 1995.
- [4] C. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems : Input-Output Properties*. Academic Press, New York, 1975.
- [5] R. Dorf and R. Bishop. *Modern Control Systems*. Addison Wesley, 1995.
- [6] G. F. Franklin, T. D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, 1994.
- [7] G. F. Franklin, T. D. Powell, and M. L. Workman. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, 1990.
- [8] J. S. Freudenberg and D. P. Looze. *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*. Springer Verlag, 1988.
- [9] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control System design*. Prentice Hall, 2001.
- [10] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Robust Linear Control*. Prentice Hall, 1995.
- [11] S. Haykin and B. V. Veen. *Signals and Systems*. John Wiley and Sons, 2003.
- [12] P. Ioannou and J. Sun. *Stable and Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, 1996.
- [13] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [14] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [15] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear optimal control systems*. Wiley Interscience, 1972.
- [16] I. D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive Control*. Springer Verlag, 1997.
- [17] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, 1997.
- [18] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall.
- [19] N. S. Nise. *Control Systems Engineering*. Addison Wesley, 1995.
- [20] A. Papoulis. *Probability, Random variables and Stochastic Processes*. Prentice Hall, 1991.
- [21] W. J. Rugh. *Linear system theory*. Prentice Hall, 1996.
- [22] M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer-Verlag, 1997.
- [23] S. Skogestad and I. Postletwaite. *Multivariable Feedback Control - Analysis and Design using Frequency-domain Methods*. Jhon Willey and Sons, 1995.
- [24] K. Zhou and J. Doyle. *Essential of Robust Control*. Prentice Hall, 1998.
- [25] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.

