Devoir surveillé :

2017-2018

Exercice 1 :

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (sans justification) :

1. Si $u_n > 0$ et la série $\sum u_n$ diverge alors (u_n) ne tend pas vers 0 .
2. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature .
3. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument alors elle converge uniformément.
4. Si (f_n) sont continues sur I et $\sum f_n$ converge normalement sur I alors $f = \sum f_n$ est continue sur I.
5. La série $\sum \frac{n}{n! + n\sin^2(n)}$ converge.
6. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{2^{n!}}$ est convergente.
7. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ est semi-convergente .
8. La série $\sum (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ est divergente.

Solution :

1 Fausse	5 Vraie
2 Fausse	6 Vraie
3 Fausse	7 Vraie
4 Vraie	8 Fausse

Exercice 2 :

Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Montrer que si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge et si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Solution :

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \iff \forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \geq N;\quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon$

Si $l < 1$, on pose $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0.$

On a $\sqrt[n]{u_n} < l + \dfrac{1-l}{2} = \dfrac{l+1}{2} < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge .

Si $l > 1$, on pose $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2} > 0.$

On a $\sqrt[n]{u_n} > l - \dfrac{l-1}{2} = \dfrac{l+1}{2} > 1$, donc la série $\sum u_n$ diverge .

Exercice 3 :

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \quad , \quad x \in [0, +\infty[$$

Solution :

Étude de la convergence simple :

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$$

Or la fonction $f \equiv 1$ continue sur $I = [0, +\infty[$

Donc :

$$f_n \xrightarrow{CVS} f$$

Étude de la convergence uniforme :

Soit $x \in I$, déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n - f|$:

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n - f| &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left|\frac{-1}{nx+1}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \frac{1}{nx+1}\end{aligned}$$

On pose la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{nx+1} \quad , \quad \forall x \in I$

On a $g'(x) = \dfrac{-n}{(nx+1)^2} \leqslant 0$, alors g est décroissante sur I .

Donc le tableau de variation de la fonction g est le suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g_n'(x)$	$-$
g_n	$g(0)$ $\searrow$

D'où :

$$\sup_{x\in I} \frac{1}{nx+1} = g(0) = 1$$

Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \frac{1}{nx+1} = 1 \neq 0$$

Donc f ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Considérons la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la continuité de $f = \sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{n(1+n^2x^2)}\right| &= \frac{|x|}{n(1+n^2x^2)} \\ &\leqslant \frac{|x|}{x^2n^3} = \frac{1}{|x|n^3}\end{aligned}$$

Et on a $\sum \dfrac{1}{|x|n^3}$ est une série convergente (*Critère de Riemann pour :* $\alpha = 3 > 1$), donc on peut conclure que la série $\sum \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$ est absolument convergente, par suite elle converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. On a :

$$\left|\frac{x}{n(1+n^2x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{|x|n^3}$$

Puisque la série $\sum \dfrac{1}{|x|n^3}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. On a la série $\sum f_n$ converge normalement, donc elle est convergente uniformément sur $\mathbb{R}$.
De plus, les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$
Par suite , d'après le théorème de continuité , la fonction $f = \sum f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.