Modello matematico con tre masse e tre molle smorzate

Matteo Bolognese

23/11/2019

1 Introduzione

La misura sperimentale della costante elastica dinamica di un materiale per mezzo di un martello strumentato é stata effettuata con fiverse configurazioni di misura. Una delle piú semplici, rappresentata in Figura 1, prevede il posizionamento di una piastra di carico sul campione a sua volta poggiato al suolo. La piastra di carico vuiene colpita con il martello strumentato e uno o piú accelerometri misurano l'accelerazione della piastra e/o del suolo a seconda degli intenti della misura. Al duplice scopo di validare le misure sperimentali e di estrapolare correttamente i valori di costate elastica dinamica del campione dai grafici sperimentali é utile sviluppare un modello matematico che riproduca il comportamento del sistema.

2 Tre masse e tre molle smorzate

La piú semplice rappresentazione matematica che conservi un sufficiente livello di dettaglio per rappresentare correttamente quanto misurato sperimentalmente é riportata in Figura 1 e consiste in un sistema di tre masse e tre oscillatori smorzati. Gli indici 1, 2 e 3 sono riferiti rispettivamente alla piastra, al campione e al solaio. Facciamo notare come la coordinata x é orientata dal basso verso l'alto quindi concorde con la direzione di misura degli accelerometri, ma discorde al verso del martello strumentato, che misura positiva una forza diretta dall'alto verso il basso. In fase di elaborazione delle misure sará quindi necessario introdurre un cambio di

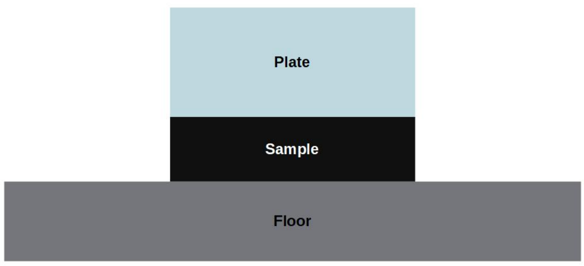

Figura 1: Configurazione sperimentale.

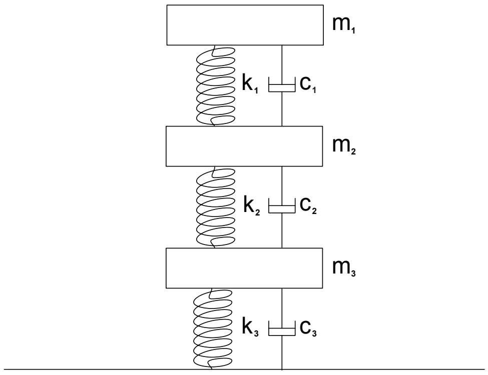

Figura 2: Modello teorico.

segno nella forza o nelle accelerazioni. Le coordinate generalizzate x_i rappresentano le distanze delle tre masse dalle posizioni di equilibrio $x_{i,0}$.

2.1 Trattazione lagrangiana

Un metodo efficace di ricavare le equazioni del moto di un sistema dinamico é quello lagrangiano che si basa sulla determinazione di due quantitá fondamentali, l'energia meccanica totale T e dell'energia potenziale del sistema V. Nel nostro caso l'energia meccanica non é altro che la somma delle energie cinetiche delle tre masse:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \tag{1}$$

L'energia potenziale é invece la somma delle energie potenziali delle molle:

$$V = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3x_3^2 \tag{2}$$

I contributi dovuti all'azione degli smorzatori verranno invece introdotti successivamente con la veste di forze esterne in quanto estranee all'azione dele molle. A questo punto le equazioni differenziali si ottengono attraverso la seguente eguaglianza:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \tag{3}$$

dove F_i sono le forze esterne agenti sull'i-esima massa. Siccome l'energia meccaneca del sistema non dipende dalle x_i il secondo termine dell'equazione (3) é automaticamente nullo. Deriviamo dumque l'energia meccanica rispetto alle coordinate $\dot{x}_i$ e quindi rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i\ddot{x}_i \tag{4}$$

La derivata parziale di V rispetto alle coordinate generalizzate produce invece:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1(x_1 - x_2) \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = -k_1(x_1 - x_2) - k_2(x_3 - x_2) \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} = k_3x_3 - k_2x_2 \end{cases}$$

Otteniamo le tre equazioni:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_2 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_1x_1 - (k_1+k_2)x_2 - k_2x_3 = F_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 - k_2x_2 = F_3 \end{cases}$$

Resta da identificare le forze dissipative agenti sulle tre masse, definite come segue:

$$F_{d,i} = -\sum_k c_{ik}\dot{x}_k \tag{5}$$

dove c_{ik} é la forza agente sulla i-esima massa quando la massa k-esima si muove con velocitá unitaria, per cui otteniamo:

$$\begin{cases} c_{11} = c_1 \\ c_{22} = c_1 + c_2 \\ c_{33} = c_2 + c_3 \\ c_{12} = c_{21} = -c_1 \\ c_{23} = c_{32} = -c_2 \\ c_{13} = c_{31} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

A questo punto esplicitiamo le forze:

$$\begin{cases} F_{d1} = -c_{11}\dot{x}_1 - c_{12}\dot{x}_2 = -c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 \\ F_{d2} = -c_{21}\dot{x}_1 - c_{22}\dot{x}_2 - c_{23}\dot{x}_3 = c_2\dot{x}_1 - (c_1+c_2)\dot{x}_2 + c_2\dot{x}_3 \\ F_{d3} = -c_{32}\dot{x}_2 - c_{33}\dot{x}_3 = c_2\dot{x}_2 - (c_2+c_3)\dot{x}_3 \end{cases} \tag{7}$$

ed otteniamo le equazioni complete aggiungendo la forza esterna F_1:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_2 = -c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 + F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_1x_1 - (k_1+k_2)x_2 - k_2x_3 = c_2\dot{x}_1 - (c_1+c_2)\dot{x}_2 + c_2\dot{x}_3 \\ m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 - k_2x_2 = c_2\dot{x}_2 - (c_2+c_3)\dot{x}_3 \end{cases} \tag{8}$$

Risulta utile riscrivere il sistema nella rappresentazione matriciale che permette una lettura piú comoda e mette in evidenza le proprietá di simmetria del sistema.

$$\begin{vmatrix} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + c_1\dot{x}_1 & -k_1x_2 - c_1\dot{x}_2 & 0 \\ -k_1x_1 - c_2\dot{x}_1 & m_2\ddot{x}_2 - (k_1+k_2)x_2 + (c_1+c_2)\dot{x}_2 & -k_2x_3 - c_2\dot{x}_3 \\ 0 & -k_2x_2 - c_2\dot{x}_2 & m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 + (c_2+c_3)\dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

A ragione del fatto che la misura sperimentale dell'accelerazione viene effettuata sulla massa m_1 ci interessa risolvere il sistema in funzione della coordinata x_1. A tal proposito ipotizziamo che il sistema venga sottoposto a una forza esterna $F(t)$. In generale se la forza $F(t)$ appartiene a L^2 puó essere espressa in funzione di una base dello spazio $L^2(R)$, ad esempio $e^{i\omega t}$ (con ω positivo e reale) e quindi usare la sua trasformata di Fourier $F(\omega)$. Se l'azione di $F(\omega)$ é abbastanza duratura nel tempo in modo da superare la fase transiente il sistema, anche le coordinate generalizzate x_i seguiranno un andamento del tipo $x_\mathrm{i}(\omega,t) = A_\mathrm{i}(\omega)e^{i\omega t}$. Calcoliamo quindi le derivate prima e seconda di una x_1:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial t} = i\omega A_\mathrm{i}(\omega)e^{i\omega t} = i\omega x_i \\ \\ \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} = -\omega^2 A_\mathrm{i}(\omega)e^{i\omega t} = -\omega^2 x_i \end{cases} \tag{10}$$

e sostituiamo nella (9) tenendo implicite le coordinate:

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + c_1 i\omega & -k_1 - c_1 i\omega & 0 \\ -k_1 - c_2 i\omega & m_2\omega^2 - (k_1+k_2) + (c_1+c_2)i\omega & -k_2 - c_2 i\omega \\ 0 & -k_2 - c_2 i\omega & -m_3\omega^2 + k_3 + (c_2+c_3)i\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Dalla terza riga della (11) ricaviamo x_3 in funzione di x_2:

$$x_3 = x_2 \frac{+k_2 + c_2 i\omega}{-m_3\omega^2 + k_3 + (c_2+c_3)i\omega} = x_2 A \tag{12}$$

e riscriviamo la seconda riga:

$$(-k_1 - c_2 i\omega)x_1 + \left[m_2\omega^2 x_1 - (k_1+k_2) + (c_1+c_2)i\omega + (-k_2 - c_2 i\omega)A\right] x_2 = 0$$

$$x_2 = x_1 \frac{+k_1 + c_2 i\omega}{m_2\omega^2 x_1 - (k_1+k_2) + (c_1+c_2)i\omega + (-k_2 - c_2 i\omega)A} = x_1 B \tag{13}$$

e quindi dalla prima riga:

$$\left[-m_1\omega^2 + k_1 + c_1 i\omega - (k_1 + c_1 i\omega)B\right] x_1 = F_1$$

$$\frac{F_1}{x_1} = -m_1\omega^2 + k_1 + c_1 i\omega - (k_1 + c_1 i\omega)B$$

Ricordando che derivare x nel tempo equivale a moltiplicare per $i\omega$ otteniamo la tra F_1 e $\ddot{x}_1$ otteniamo l'espressione algebrica dell'impedenza meccanica I del sistema la quale andrà confrontata con quella misurata sperimentalmente:

$$I = \frac{F_1}{\ddot{x}_1} = \frac{-m_1\omega^2 + k_1 + c_1 i\omega - (k_1 + c_1 i\omega)B}{-\omega^2} \tag{14}$$