

# Modello matematico con tre masse e tre molle smorzate

Matteo Bolognese

23/11/2019

## 1 Introduzione

La misura sperimentale della costante elastica dinamica di un materiale  $K(\omega)$  per mezzo di un martello strumentato é stata effettuata con diverse configurazioni di misura. Una delle piú semplici, rappresentata in Figura 1, prevede il posizionamento di una piastra di carico sul campione a sua volta poggiato al suolo. La piastra di carico viene colpita con il martello strumentato e uno o piú accelerometri misurano l'accelerazione della piastra e/o del suolo a seconda degli intenti della misura. Al duplice scopo di validare le misure sperimentali e di estrapolare correttamente i valori di costante elastica dinamica del campione dai grafici sperimentali é utile sviluppare un modello matematico che riproduca il comportamento del sistema.

## 2 Tre masse e tre molle smorzate

La piú semplice rappresentazione matematica che conservi un sufficiente livello di dettaglio per rappresentare correttamente quanto misurato sperimentalmente é riportata in Figura 2 e consiste in un sistema di tre masse e tre oscillatori smorzati. Gli indici 1, 2 e 3 sono riferiti rispettivamente alla piastra, al campione e al solaio. Facciamo notare come la coordinata  $x$  é orientata dal basso verso l'alto quindi concorde con la direzione di misura degli accelerometri, ma discorde al verso del martello strumentato, che misura positiva una forza diretta dall'alto verso il basso. In fase di elaborazione delle misure sará quindi necessario introdurre un cambio di

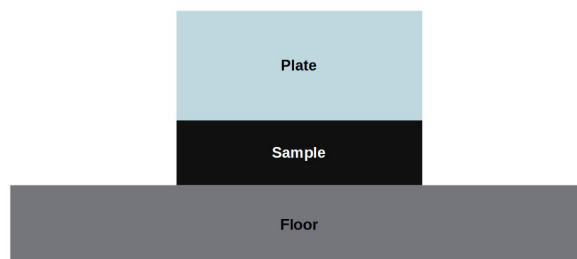


Figura 1: Configurazione sperimentale.

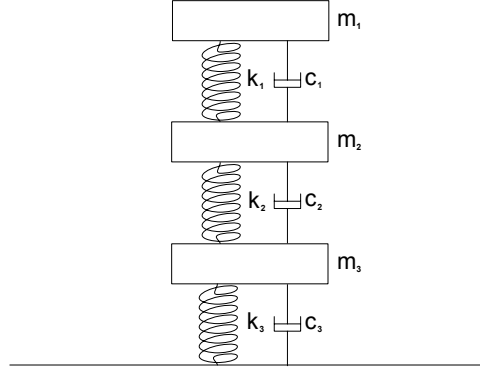


Figura 2: Modello teorico.

segno nella forza o nelle accelerazioni. Le coordinate generalizzate  $x_i$  rappresentano le distanze delle tre masse dalle posizioni di equilibrio  $x_{i,0}$ .

## 2.1 Trattazione lagrangiana

Un metodo efficace di ricavare le equazioni del moto di un sistema dinamico é quello lagrangiano (introdurre citazione) che si basa sulla determinazione di due quantità fondamentali, l'energia meccanica totale  $T$  e dell'energia potenziale  $V$  del sistema. Nel nostro caso l'energia meccanica totale non é altro che la somma delle energie cinetiche delle tre masse:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 \quad (1)$$

dove  $\dot{x}_i$  è la velocità della massa  $i$ -esima. L'energia potenziale é invece la somma delle energie potenziali delle molle:

$$V = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3x_3^2 \quad (2)$$

I contributi dovuti all'azione degli smorzatori verranno invece introdotti successivamente con la veste di forze esterne in quanto estranee all'azione delle molle. A questo punto le equazioni differenziali si ottengono attraverso la seguente eguaglianza:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \quad (3)$$

dove  $F_i$  é la risultante della forze esterne e delle forze dissipative agenti sull' $i$ -esima massa. Siccome l'energia meccanica del sistema non dipende dalle  $x_i$  il secondo termine dell'equazione (3) é automaticamente nullo. Deriviamo dunque l'energia meccanica rispetto alle velocità  $\dot{x}_i$  e quindi rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i = m_i \ddot{x}_i \quad (4)$$

La derivata parziale di  $V$  rispetto alle coordinate generalizzate produce invece:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1(x_1 - x_2) \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = -k_1(x_1 - x_2) - k_2(x_3 - x_2) \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} = (k_3 + k_2)x_3 - k_2x_2 \end{cases} \quad (5)$$

Combinando le equazioni 4 e 5 otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_2 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_1x_1 + (k_1 + k_2)x_2 - k_2x_3 = F_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + (k_3 + k_2)x_3 - k_2x_2 = F_3 \end{cases} \quad (6)$$

Resta da identificare le forze dissipative  $F_{d,i}$  agenti sulle tre masse, definite come segue:

$$F_{d,i} = - \sum_k c_{ik} \dot{x}_k \quad (7)$$

dove  $c_{ik}$  é la forza agente sulla  $i$ -esima massa quando la massa  $k$ -esima si muove con velocità unitaria, per cui otteniamo:

$$\begin{cases} c_{11} = c_1 \\ c_{22} = c_1 + c_2 \\ c_{33} = c_2 + c_3 \\ c_{12} = c_{21} = -c_1 \\ c_{23} = c_{32} = -c_2 \\ c_{13} = c_{31} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

A questo punto esplicitiamo le forze dissipative:

$$\begin{cases} F_{d1} = -c_{11}\dot{x}_1 - c_{12}\dot{x}_2 = -c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 \\ F_{d2} = -c_{21}\dot{x}_1 - c_{22}\dot{x}_2 - c_{23}\dot{x}_3 = c_1\dot{x}_1 - (c_1 + c_2)\dot{x}_2 + c_2\dot{x}_3 \\ F_{d3} = -c_{32}\dot{x}_2 - c_{33}\dot{x}_3 = c_2\dot{x}_2 - (c_2 + c_3)\dot{x}_3 \end{cases} \quad (9)$$

ed otteniamo le equazioni complete aggiungendo la forza esterna  $F_1$ :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_2 = -c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 + F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_1x_1 + (k_1 + k_2)x_2 - k_2x_3 = c_1\dot{x}_1 - (c_1 + c_2)\dot{x}_2 + c_2\dot{x}_3 \\ m_3\ddot{x}_3 + (k_3 + k_2)x_3 - k_2x_2 = c_2\dot{x}_2 - (c_2 + c_3)\dot{x}_3 \end{cases} \quad (10)$$

Risulta utile riscrivere il sistema nella rappresentazione matriciale che permette una lettura piú comoda e mette in evidenza le proprietà di simmetria del sistema.

$$\begin{vmatrix} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + c_1\dot{x}_1 & -k_1x_2 - c_1\dot{x}_2 & 0 \\ -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 & m_2\ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_2 & -k_2x_3 - c_2\dot{x}_3 \\ 0 & -k_2x_2 - c_2\dot{x}_2 & m_3\ddot{x}_3 + (k_3 + k_2)x_3 + (c_2 + c_3)\dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

A ragione del fatto che la misura sperimentale dell'accelerazione viene effettuata sulla massa  $m_1$  ci interessa risolvere il sistema in funzione della coordinata  $x_1$ . A tal proposito ipotizziamo

che il sistema venga sottoposto a una forza esterna  $F(t)$ . In generale se la forza  $F(t)$  appartiene a  $L^2$  può essere espressa in funzione di una base dello spazio  $L^2(R)$ , ad esempio  $e^{i\omega t}$  (con  $\omega$  positivo e reale) e quindi usare la sua trasformata di Fourier  $F(\omega)$ . Se l'azione di  $F(\omega)$  é abbastanza duratura nel tempo in modo da superare la fase transiente il sistema, anche le coordinate generalizzate  $x_i$  seguiranno un andamento del tipo  $x_i(\omega, t) = A_i(\omega)e^{i\omega t}$ . Calcoliamo quindi le derivate prima e seconda di una  $x_1$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial t} = i\omega A_i(\omega)e^{i\omega t} = i\omega x_i \\ \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} = -\omega^2 A_i(\omega)e^{i\omega t} = -\omega^2 x_i \end{cases} \quad (12)$$

e sostituiamo nella (11) tenendo implicite le coordinate:

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + c_1i\omega & -k_1 - c_1i\omega & 0 \\ -k_1 - c_1i\omega & -m_2\omega^2 + (k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)i\omega & -k_2 - c_2i\omega \\ 0 & -k_2 - c_2i\omega & -m_3\omega^2 + (k_3 + k_2) + (c_2 + c_3)i\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Dalla terza riga della (13) ricaviamo  $x_3$  in funzione di  $x_2$ :

$$x_3 = x_2 \frac{+k_2 + c_2i\omega}{-m_3\omega^2 + (k_3 + k_2) + (c_2 + c_3)i\omega} = x_2 A \quad (14)$$

e riscriviamo la seconda riga:

$$\begin{aligned} (-k_1 - c_1i\omega)x_1 + [-m_2\omega^2 + (k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)i\omega - (k_2 + c_2i\omega)A]x_2 &= 0 \\ x_2 = x_1 \frac{+k_1 + c_1i\omega}{-m_2\omega^2 + (k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)i\omega + (-k_2 - c_2i\omega)A} &= x_1 B \end{aligned} \quad (15)$$

e quindi dalla prima riga:

$$\begin{aligned} [-m_1\omega^2 + k_1 + c_1i\omega - (k_1 + c_1i\omega)B]x_1 &= F_1 \\ K_1(\omega) = \frac{F_1}{x_1(\omega)} &= -m_1\omega^2 + k_1 + c_1i\omega - (k_1 + c_1i\omega)B \end{aligned}$$

dove  $K_1(\omega)$  è la costante elastica dinamica misurata sulla massa  $m_1$ . Ricordando che derivare  $x$  nel tempo equivale a moltiplicare per  $i\omega$  otteniamo la tra  $F_1$  e  $\ddot{x}_1$  otteniamo l'espressione algebrica della Massa Dinamica  $M(\omega)$  del sistema la quale verrà utilizzata per generare segnali di test per lo script di elaborazione:

$$M = \frac{F_1}{\ddot{x}_1} = \frac{-m_1\omega^2 + k_1 + c_1i\omega - (k_1 + c_1i\omega)B}{-\omega^2} \quad (16)$$

### 3 Dati disponibili

Riportiamo in Tabella 1 i dati disponibili sui materiali utilizzati e le  $k$  statiche attese.

### 4 Analisi dei segnali

I segnali acquisiti sperimentalmente necessitano di essere opportunamente processati per ottenere la risposta in frequenza del sistema.

Tabella 1: Proprietà meccaniche dei materiali utilizzati

Materiale	Spessore [m]	Superficie [m <sup>2</sup> ]	Modulo E [GPa]	K [GN/m]	Peso [Kg]
Piastra pesante 1	0.024	$\pi * 0.05^2 = 0.0079$	180	59.3	1.4293
Piastra pesante 2	0.0475	$\pi * 0.05^2 = 0.0079$	180	30.0	2.8871
Blocco cemento	0.13	$0.25^2 = 0.0625$	45	21.6	$\sim 15$
Polipropilene	0.005	$0.096 * 0.098 = 0.0094$	1.5	2.8	0.0383

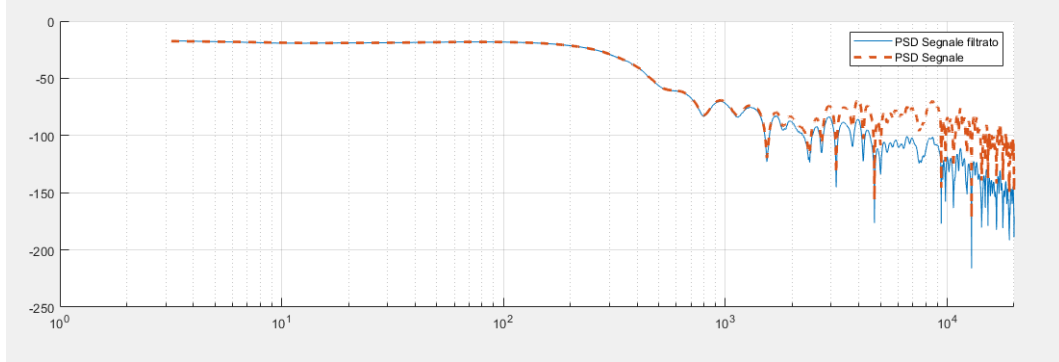


Figura 3: Effetto del filtraggio sulla PSD del segnale della forza. Differenze evidenti si riscontrano esclusivamente ad alta frequenza.

## 4.1 Ricerca picchi e costruzione matrici dei dati

## 4.2 Filtraggio

L'operazione di filtraggio viene effettuata sulla matrice  $F$  allo scopo di abbattere il segnale prodotto dal martello dopo il suo distacco dalla superficie del campione e quindi non correlato con l'accelerazione misurata sul campione. In Figura 3 è possibile osservare come l'effetto del filtraggio (operato tramite media mobile) sulla Power Spectral Density si concentri al di sopra della regione in cui lo spettro della Forza risulta piatto e della frequenza di coerenza. Considerando che la stima delle grandezze oggetto della misura avviene al di sotto della frequenza di coerenza, l'operazione di filtraggio appare in ultima analisi ininfluente.

## 4.3 Finestratura

La finestratura del segnale ha lo scopo di scongiurare l'incorrere di artefatti nella trasformata del segnale dovuti alla durata finita del segnale nel tempo. A tal fine sono state prese in esame diverse tipologie di finestre tra cui Hamming, Hann, rettangolare e se ne sono studiate le prestazioni in funzione della lunghezza delle stesse. In Figura 4 possiamo osservare l'effetto prodotto da finestre Hann progressivamente più larghe (la 1/64 della lunghezza del campione alla lunghezza del campione). Come possiamo osservare, nessun effetto è riscontrabile sulla coerenza, che resta invariata al cambiare della larghezza della finestra ma lo stesso non lo si può dire per fase e modulo della Costante elastica dinamica. Allargando la finestra sopraggiungono una serie di risonanze inizialmente non riscontrate dunque ci chiediamo se queste siano presenti nel segnale originale o piuttosto figlie della finestratura.

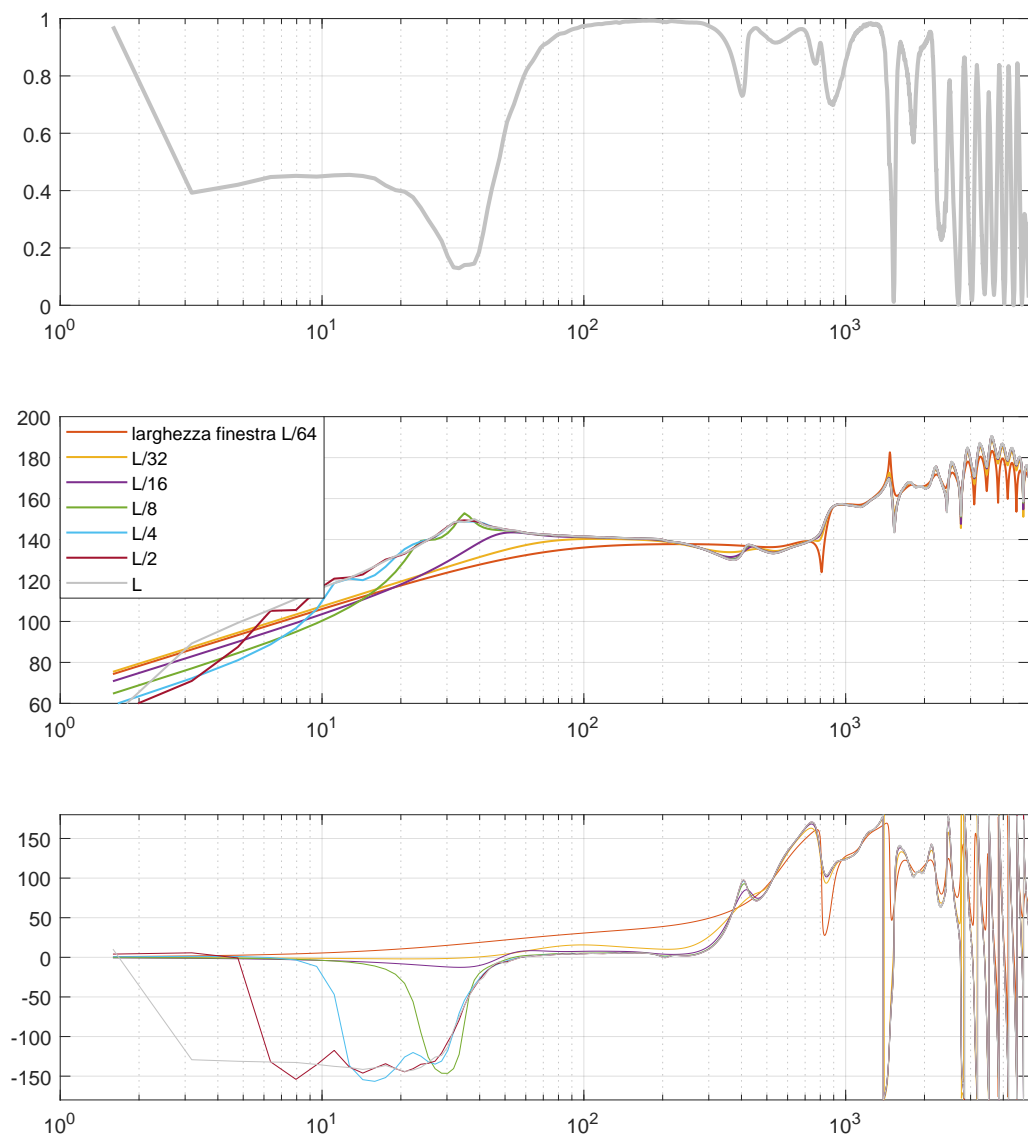


Figura 4: Effetto della finestratura su coerenza dei segnali e modulo e fase della Dynamic Stiffness K. In alto la coerenza tra i segnali, al centro il modulo della costante elastica dinamica K e in basso la sua fase.

## 4.4 Calcolo delle PSD