Projet de Probabilité

Exercice 4 Fonction Caractéristique

1) Pour un vecteur gaussien X de moyenne b et de matrice de Variance V, montrer que :

$$\boxed{\Phi_X(u) = e^{<u,b> - \frac{1}{2}<u, Vu>}}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire de d-dimension

de vecteur moyenne $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$ et de matrice de var V.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^d$

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{i<u,X>}) = \mathbb{E}(e^{iu^tX}) = \underbrace{\mathbb{E}(e^{i(u_1X_1 + \dots u_dX_d)})}_{*}$$

On pose $Y = u_1X_1 + \dots + u_dX_d$

On sait que Y est gaussienne car combinaison linéaire des composantes d'un vecteur gaussien.

Cherchons ses caractéristiques

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(u_1X_1 + \dots + u_dX_d) = u_1\mathbb{E}(X_1) + \dots + u_d\mathbb{E}(X_d)$$

$$\mathbb{E}(Y) = u_1b_1 + \dots + u_dX_d = u^tb = <u, b>$$

$$Var(Y) = Var(u_1X_1 + \dots + u_dX_d)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{d} u_i^2 \, var(X_i) + 2\sum_{i \neq j} u_iu_j cov(X_i, X_j)$$

or on sait :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY}) = e^{it\mathbb{E}(Y) - \frac{t^2}{2}Var(Y)}$$

Ainsi $\Phi_X(U) = E(e^{iY}) = \varphi_Y(1)$ d'après (*)

$$\varphi_X(u) = e^{iE(Y) - \frac{1}{2}Var(Y)}$$
$$= e^{iu^t b - \frac{1}{2}Var(Y)}$$

En calculant $\langle u, Vu \rangle$ on a

$$\langle u, Vu \rangle = (u_1 \dots u_d) \begin{pmatrix} Var(X_1) & \dots & Cov(X_1, X_d) \\ cov(X_d, X_1) & & Var(X_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_d \\ \vdots \\ U_d \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} u_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i \neq j} u_i u_j cov(X_i, X_j)$$

$$\langle u, Vu \rangle = Var(Y)$$

ainsi $\boxed{\varphi_X(u) = e^{i\langle u, b \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu \rangle}}$

2) Si P_X et symetrique par rapport à l'origine, ie $P_X = P_{-X}$.
Montrer que Φ_X et à valeurs réelles.

. Soit X une variable aleatoire symetrique par rapport à 0
i.e. $P_X = P_{-X}$

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_{-X}(t) = E(e^{-itX}) = \overline{\varphi_X(t)}$$

or X et symetrique $\Rightarrow \varphi_X = \varphi_{-X}$
alors $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$

X etant donc symetrique $\Rightarrow \varphi_X = \varphi_{-X}$
$\Rightarrow$ alors $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$

Or un complexe et egal a son conjugué ssi sa partie imaginaire et nulle d'où φ_X et à valeurs réelles.

3) Pour une v.a. reelle, supposons que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ pour un certain entier $p \geq 1$.

Montrer que Φ_X et p fois derivable et

$$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k], \text{ pour } k = 1, \dots, p$$

- Ici on part de ce qu'on appelle transformée de Fourier

On suppose que X admet une fonction de densité dans ce cas

$$f(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt$$

$$\mathbb{E}|X|^p < +\infty \Rightarrow x \longmapsto (ix)^p e^{itx} f(x)$$

et uniformement integrable et d'aprés les prop de la derivation sous le signe integrale, f_X et p fois derivable et

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^{(k)} e^{itx} f(x)\, dx$$

i.e $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left((iX)^k e^{itX}\right)$$