إصلاح اختبار الرّياضيات دورة 2011

التّمرين الأوّل :

1- العدد $3^{2011}+3^{2009}$ يقبل القسمة على : 15 (أ)

$$3^{2011}+3^{2009}=3^2\times3^{2009}+3^{2009}\times1=3^{2009}\times(3^2+1)=10\times3^{2009}$$

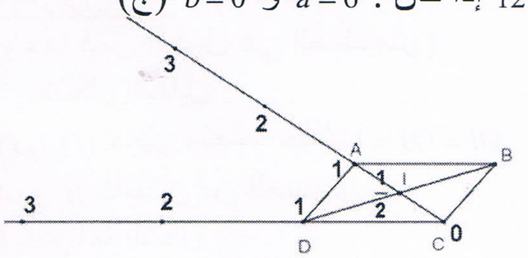
$3^{2011}+3^{2009}$ يقبل القسمة على 3 و على 5 و هما أوّليان في ما بينهما إذن فهو يقبل القسمة على 15.

2- العدد $6b87a$ حيث a و b رقمان، يقبل القسمة على 12 إذا كان : $a=6$ و $b=0$ (ج)

3- ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النّقطة I .

إحداثيات النّقطة I في المعيّن (C,A,D) هي الزّوج :

$(\frac{1}{2},0)$ (ب)



في المعيّن (C,A,D)، النّقطة C هي أصل المعيّن و (CA) هو محور الفاصلات و (CD) هو محور التّرتيبات. النّقطة I تنتمي إلى محور الفاصلات إذن فترتيبتها تساوي 0 و بالتّالي $I(\frac{1}{2},0)$.

4- لتكن A و B نقطتين من مستقيم مدرّج فاصلتاهما $-\sqrt{2}$ و -2 فإنّ البعد AB يساوي :

$2-\sqrt{2}$ (ب)

$$AB=|x_B-x_A|=|-2-(-\sqrt{2})|=|-2+\sqrt{2}|=|\sqrt{2}-2|=2-\sqrt{2}$$

التّمرين الثّاني :

$a=(\sqrt{3}+2)^2$ و $b=3\sqrt{18}-\sqrt{32}+7$

1- أ- $a=(\sqrt{3}+2)^2=\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{3}\times2+2^2=3+4\sqrt{3}+4=7+4\sqrt{3}$

$b=3\sqrt{18}-\sqrt{32}+7=3\sqrt{9\times2}-\sqrt{16\times2}+7=9\sqrt{2}-4\sqrt{2}+7=5\sqrt{2}+7$

ب- * $\begin{cases}(4\sqrt{3})^2=16\times3=48\\(5\sqrt{2})^2=25\times2=50\end{cases}$ إذن $(4\sqrt{3})^2<(5\sqrt{2})^2$ يعني $4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$.

** $4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$ يعني $7+4\sqrt{3}<7+5\sqrt{2}$ يعني $a<b$.

2- $c=7-4\sqrt{3}$

أ- $a\times c=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})=7^2-(4\sqrt{3})^2=49-48=1$ و بالتّالي فالعددان a و c مقلوبان.

ب- a و c هما عددان مقلوبان إذن فلهما نفس العلامة و بما أنّ $a>0$ فإنّ $c>0$.

$\begin{cases}b>a\\c>0\end{cases}$ إذن $bc>ac$ و بالتّالي $bc>1$.

-3 $$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2=\frac{a^2}{ac}+\frac{c^2}{ac}+2=\frac{a^2+c^2}{ac}+2=a^2+c^2+2=(7+4\sqrt{3})^2+(7-4\sqrt{3})^2+2=$$

$$7^2+2\times7\times4\sqrt{3}+(4\sqrt{3})^2+7^2-2\times7\times4\sqrt{3}+(4\sqrt{3})^2+2=49+28\sqrt{3}+48+49-28\sqrt{3}+48+2=$$

$$196=2^2\times7^2=(2\times7)^2=14^2$$

و بالتّالي $\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2}=\sqrt{14^2}=14$ إذن $\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2}$ هو عدد صحيح طبيعي.

التّمرين الثّالث :

$A=x^2-30x+216$ حيث $x\in IR$.

1- أ- $x=15$ إذن $A=15^2-30\times15+216=225-450+216=-9$.

ب- $x=12$ إذن $A=12^2-30\times12+216=144-360+216=0$.

2- أ- $(x-15)^2=x^2-2\times x\times15+15^2=x^2-30x+225$

ب- $(x-15)^2-9=x^2-30x+225-9=x^2-30x+216=A$ و بالتّالي $A=(x-15)^2-9$.

ج- $A=(x-15)^2-9=(x-15)^2-3^2=(x-15-3)(x-15+3)=(x-18)(x-12)$

د- $A=0$ يعني $(x-18)(x-12)=0$ يعني $x-18=0$ أو $x-12=0$ يعني $x=18$ أو $x=12$

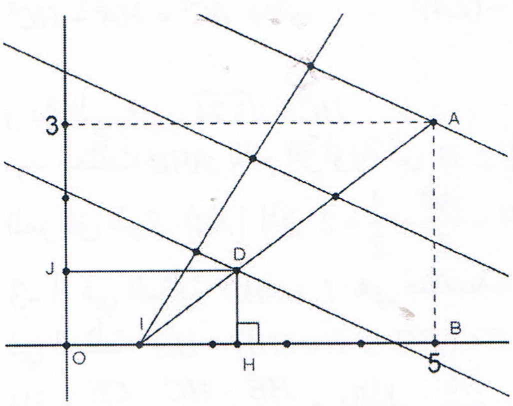
$S_{IR}=\{12,18\}$

3- أ- إذا رمزنا بـ a لأحد بعدي المستطيل و بـ b للبعد الثّاني فإنّ $a+b=30$ {لأنّ نصف المحيط يساوي 30} يعني $b=30-a$.

ب- بعدا المستطيل هما a و $30-a$ إذن فمساحته هي $a\times(30-a)$ يعني $a\times(30-a)=216$ يعني $a\times30-a\times a=216$ يعني $216-(30a-a^2)=0$ يعني $216-30a+a^2=0$ يعني $a^2-30a+216=0$ و بالتّالي فـ a هو حلّ للمعادلة $x^2-30x+216=0$.

ج- بما أنّ كلاً من بعدي المستطيل هو حلّ للمعادلة $x^2-30x+216=0$ فبعدا المستطيل هما 18 و 12 {حسب السّؤال 2- د-}

التّمرين الرّابع :



1- أ- $A(5;3)$ و $B(5;0)$.

ب- $IB=4$ و $AB=3$.

2- $x_A=x_B=5$ إذن $(AB)//(OJ)$ و بما أنّ $(OI)\perp(OJ)$ فإنّ $(OI)\perp(AB)$ و بالتّالي فالمثلّث ABI قائم الزّاوية في B إذن حسب نظريّة بيتاغور فإنّ

$AI^2=BA^2+BI^2=3^2+4^2=9+16=25$

و بالتّالي $AI=\sqrt{25}=5$

3- $IA=3ID$ يعني $ID=\frac{1}{3}IA$.

4- أ- H هي المسقط العمودي للنّقطة D على (IB) إذن $(HD)\perp(OI)$.

$\begin{cases}(HD)\perp(OI)\\(AB)\perp(OI)\end{cases}$ إذن $(HD)//(AB)$.

في المثلّث ABI ، $D\in(IA)$ و $H\in(IB)$ و $(HD)//(AB)$ إذن بتطبيق نظريّة طالس في هذا المثلّث فإنّ $\frac{IH}{IB}=\frac{ID}{IA}=\frac{HD}{AB}=\frac{1}{3}$ لأنّ $\frac{ID}{IA}=\frac{ID}{3ID}=\frac{1}{3}$.

ب- * $\frac{IH}{IB}=\frac{1}{3}$ يعني $IH=\frac{1}{3}IB=\frac{1}{3}\times4=\frac{4}{3}$

** $\frac{HD}{AB}=\frac{1}{3}$ يعني $HD=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}\times3=1$

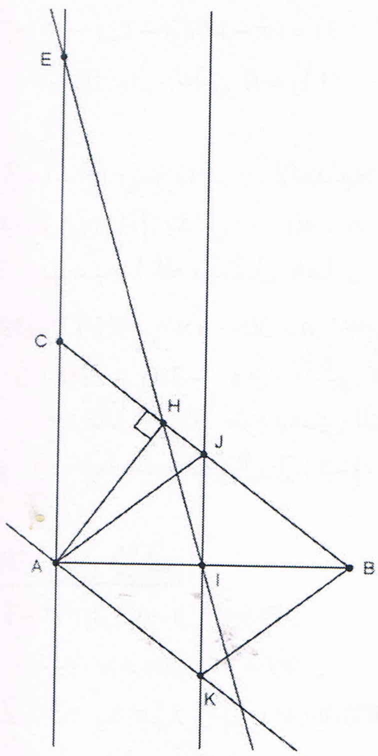
-5 $\begin{cases}(HD)\perp(OI)\\(OJ)\perp(OI)\end{cases}$ إذن $(HD)//(OJ)$.

$\begin{cases}(HD)//(OJ)\\HD=OJ\end{cases}$ إذن $OJDH$ هو متوازي أضلاع و بالتالي $(JD)//(OI)$.

$(HD)//(OJ)$ إذن $x_D = x_H = OH = OI + IH = 1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$.

$(JD)//(OI)$ إذن $y_D = y_J = 1$ و بالتّالي $D(\frac{7}{3},1)$.

التّمرين الخامس :



1- أ-

ب- $\begin{cases}BC^2=25\\AB^2=16\\AC^2=9\end{cases}$ إذن $AB^2+AC^2=BC^2$ و بالتّالي حسب عكس نظريّة بيتاغور فالمثلّث ABC قائم الزّاوية في A .

2- أ- *المثلّث ABC قائم الزّاوية في A و H هي مسقطها العمودي على (BC) إذن $AB\times AC=BC\times AH$ يعني

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}=2.4$$

** المثلّث ACH قائم الزّاوية في H إذن حسب نظريّة بيتاغور فإنّ $AC^2=HA^2+HC^2$ يعني

$$HC^2=AC^2-HA^2=3^2-(2.4)^2$$
$$=9-5.76=3.24$$

و بالتّالي $HC=\sqrt{3.24}=1.8$

ب- المثلّث AHB قائم الزّاوية في H و $[HI]$ هو الموسّط الموافق للوتر $[AB]$ إذن $HI=\frac{AB}{2}=\frac{4}{2}=2$.

3- أ- في المثلّث ABC ، I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[BC]$ إذن $(IJ)//(AC)$.

في المثلّث IJH ، $E\in(HI)$ و $C\in(HJ)$ و $(CE)//(IJ)$ إذن بتطبيق نظريّة طالس في هذا المثلّث فإنّ : $\frac{HE}{HI}=\frac{HC}{HJ}=\frac{CE}{IJ}$ و بالتّالي $\frac{HE}{HI}=\frac{HC}{HJ}$.

ب- $\frac{HE}{HI}=\frac{HC}{HJ}$ يعني $HE=HI\times\frac{HC}{HJ}=2\times\frac{1.8}{2.5-1.8}=2\times\frac{1.8}{0.7}=\frac{36}{7}$

4- * المثلّث ABC قائم الزّاوية في A إذن $(AC)\perp(AB)$ و بما أنّ $(IJ)//(AC)$ فإنّ $(IJ)\perp(AB)$.

طريقة أولى : في المثلّث IJB ، $A\in(IB)$ و $K\in(IJ)$ و $(AK)//(JB)$ إذن بتطبيق نظريّة طالس في هذا المثلّث فإنّ $\frac{IA}{IB}=\frac{IK}{IJ}=\frac{AK}{JB}=1$ لأنّ $IA=IB$ و بالتّالي $\frac{IK}{IJ}=1$ يعني $IK=IJ$ و بما أنّ $I\in[JK]$ فإنّ I هي منتصف $[JK]$.

قطرا الرّباعي $AKBJ$ يتقاطعان في منتصفهما إذن فهو متوازي أضلاع و بما أنّهما متعامدان فهو معيّنٌ.

طريقة ثانية : I هي منتصف $[AB]$ إذن $IA = IB$.

$(JB)//(AK)$ و (AB) قاطع لهما. الزّاويتان $J\hat{B}I$ و $K\hat{A}I$ متبادلتان داخليّا إذن $J\hat{B}I = K\hat{A}I$.

الزّاويتان $J\hat{I}B$ و $K\hat{I}A$ متقابلتان بالرّأس إذن $J\hat{I}B = K\hat{I}A$.

$\begin{cases} IB = IA \\ J\hat{B}I = K\hat{A}I \\ J\hat{I}B = K\hat{I}A \end{cases}$ إذن المثلّثان JIB و KIA متقايسان حسب الحالة الأولى لتقايس المثلّثات.

$[IJ]$ و $[IK]$ نظيران في تقايس المثلّثين JIB و KIA إذن $IJ = IK$ و بما أنّ $I \in [JK]$ فإنّ I هي منتصف $[JK]$.

قطرا الرّباعي $AKBJ$ يتقاطعان في منتصفهما إذن فهو متوازي أضلاع و بما أنّهما متعامدان فهو معيّنٌ.

طريقة ثالثة : $\begin{cases} (JK)//(AC) \\ (AK)//(CJ) \end{cases}$ إذن $AKJC$ هو متوازي أضلاع و بالتّالي $AK = JC$.

$\begin{cases} AK = JC \\ JB = JC \end{cases}$ إذن $AK = JB$ و بما أنّ $(AK)//(JB)$ فإنّ $AKBJ$ هو متوازي أضلاع و لأنّ قطريه متعامدان فهو معيّن.

** مساحة المعيّن : $\dfrac{AB \times JK}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6\ cm^2$.

من لم يثبت أنّ $AKJC$ هو متوازي أضلاع {لم يتّبع الطّريقة الثّالثة} يمكنه أن يحسب مساحة المعيّن كما يلي : في المثلّث ABC ، I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[BC]$ إذن

$IJ = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{3}{2} = 1.5$ و بالتّالي $JK = 2IJ = 2 \times 1.5 = 3$.

مساحة المعيّن $AKBJ$ تساوي $\dfrac{AB \times JK}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6\,cm^2$.