Correction (DS-1-) - PC -

Problème :

(I) $f(x) = 1 - \frac{9}{8}x^3$; $g(x) = x^5 + x$

1/ mq g est impaire :

- $D_g = \mathbb{R}$ (polynôme) donc $\forall x \in D_g : -x \in D_g$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x)$
$= -g(x)$

donc g est impaire.

2- a- soit n entier naturel impair ; $a \in \mathbb{R}$

Si $a \geq 0$: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$

$$S = \{\sqrt[n]{a}\}$$

si $a < 0$: $x^n = a \Leftrightarrow -x^n = -a$

$\Leftrightarrow (-x)^n = -a \qquad (-a > 0)$

$\Leftrightarrow -x = \sqrt[n]{-a}$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{-a}$

$$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$$

b- • f continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

• f dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on a :

$$f'(x) = \left(1 - \frac{9}{8}x^3\right)' = -\frac{9}{8} \times 3x^2 = -\frac{27}{8}x^2 \leq 0$$

et f' ne s'annule qu'en 0 donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

• $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[)$

$=]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$ (car f continue et stri $\downarrow$ sur $\mathbb{R}$)

$=]-\infty; +\infty[\ = \mathbb{R}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ (polynôme)

donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = \mathbb{R}$

c- puisque f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors f^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi on a :

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f^{-1}(x)$	$-\infty \longrightarrow +\infty$

d- Soit $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$.

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$
$$\iff 1 - \frac{9}{8}y^3 = x$$
$$\iff \frac{9}{8}y^3 = 1 - x$$
$$\iff y^3 = \frac{8}{9}(1-x) \quad (*)$$

- Si $x \geq 1$:

$$(*) \iff -y^3 = \frac{8}{9}(x-1)$$
$$\iff (-y)^3 = \frac{8}{9}(x-1) \quad\quad (x-1 \geq 0)$$
$$\iff -y = \sqrt[3]{\frac{8}{9}(x-1)}$$
$$\iff y = -\sqrt[3]{8/9\,(x-1)}$$

- Si $x \leq 1$:

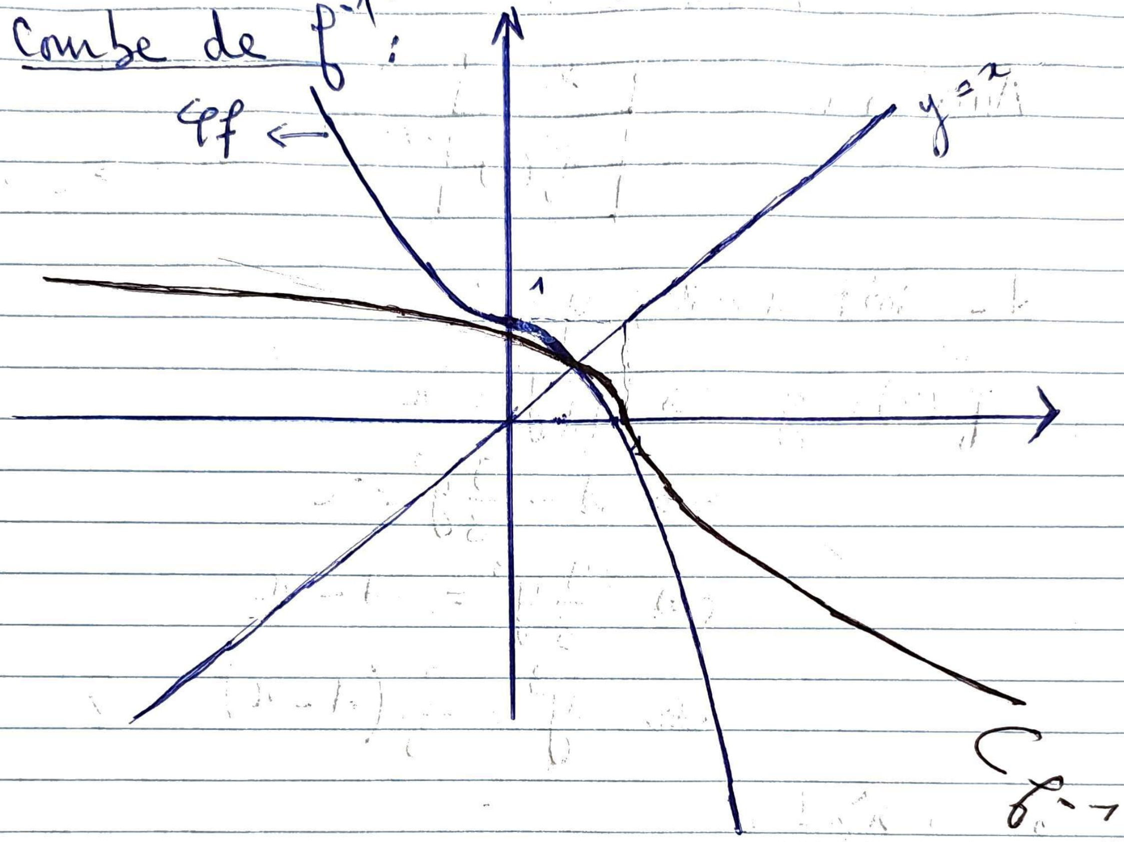
$$(*) \iff y^3 = \frac{8}{9}(1-x) \quad\quad (1-x \geq 0)$$
$$\iff y = \sqrt[3]{8/9\,(1-x)}$$

donc f^{-1} est défini par :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{\frac{8}{9}(x-1)} & : x \geq 1 \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{8}{9}(1-x)} & : x \leq 1 \end{cases}$$

(les deux expressions marchent pour le cas $x = 1$)

e/ Courbe de f^{-1} :



3 - a - $f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0$

$\iff h(x) = 0$ (avec $h(x) = f(x) - g(x)$)

- h continue sur $\mathbb{R}$ (h est un polynome)
- h dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on a :

$$h'(x) = \left(1 - \frac{9}{8}x^3 - x^5 - x\right)'$$

$$= -\frac{27}{8}x^2 - 5x^4 - 1 = -\left(\frac{27}{8}x^2 + 5x^4 + 1\right)$$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{27}{8}x^2 + 5x^4 + 1 > 0$

donc $h'(x) < 0$

donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi on aura $h(\mathbb{R}) = h(]-\infty;+\infty[)$

$$=]\lim_{x\to+\infty} h(x) ; \lim_{x\to-\infty} h(x)[$$

$$=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^5 = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^5 = +\infty \end{cases}$ (h est un polynôme)

or $0 \in h(\mathbb{R})$ donc l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

♦ <u>vérification</u> :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{9}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - (1/2)$$

$$= 1 - \frac{9}{64} - \frac{1}{32} - 1/2 = \frac{64-9-2-32}{64}$$

$$= \frac{21}{64}$$

$$h(1) = 1 - \frac{9}{8} - 1 - 1 = -\frac{17}{8}$$

donc $h(1) < 0 < h(1/2)$

çad $h(1) < h(\alpha) < h(1/2)$

comme h est strict ↓ sur $\mathbb{R}$ alors

$$\boxed{1/2 < \alpha < 1}$$

~~(x) le résultat de 3/x~~

b- $x < \alpha \Rightarrow k(x) > k(\alpha)$ (k st $\downarrow$ sur $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow f(x) - g(x) > 0$

$\Rightarrow f(x) > g(x)$

<u>interprétation graphique</u>:

$\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty;\alpha[$

c- $x < \alpha \Rightarrow k(x) > k(\alpha)$ (k strict $\downarrow$ sur $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow f(x) - g(x) > 0$

$\Rightarrow f(x) + g(-x) > 0$ (g impaire sur $\mathbb{R}$)

$g(-x) = -g(x)$

4/ $\begin{cases} h(x) = \sqrt{1-x^5} & : x \leq \alpha \\ h(x) = \sqrt{x + \frac{9}{8}x^3} & : x > \alpha \end{cases}$

a/ • la ft $x \mapsto 1-x^5$ est continue et positive sur $]-\infty;\alpha[$ ($x \leq \alpha < 1 \Rightarrow 1-x^5 > 0$)

donc $x \mapsto \sqrt{1-x^5}$ continue sur $]-\infty;\alpha[$

• la ft $x \mapsto x + \frac{9}{8}x^3$ est continue et positive sur $]\alpha;+\infty[$ ($\alpha > 0$) donc $x \mapsto \sqrt{x + \frac{9}{8}x^3}$ est continue sur $]\alpha;+\infty[$

b/ • $h(\alpha) = \sqrt{1-\alpha^5}$

$\lim\limits_{x \to \alpha^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^-} \sqrt{1-x^5} = \sqrt{1-\alpha^5}$

$$\lim_{x \to \alpha^+} h(x) = \lim_{x \to \alpha^+} \sqrt{x + \frac{9}{8}x^3} = \sqrt{\alpha + \frac{9}{8}\alpha^3}$$

or α est solution de l'équation $f(x) = g(x)$

donc $f(\alpha) = g(\alpha)$

d'où $1 - \frac{9}{8}\alpha^3 = \alpha^5 + \alpha$

Par suite $\alpha + \frac{9}{8}\alpha^3 = 1 - \alpha^5$

donc $\sqrt{\alpha + 9/8\,\alpha^3} = \sqrt{1 - \alpha^5}$ $\left(\begin{array}{l} \alpha > 0 \Rightarrow \alpha + \frac{9}{8}\alpha^3 > 0 \\ \alpha < 1 \Rightarrow 1 - \alpha^5 > 0 \end{array} \right)$

d'où $\lim_{x \to \alpha^+} h(x) = \lim_{x \to \alpha^-} h(x) = h(\alpha)$

du coup : h continue en α.

c/ d'après a/ et b/ : $\begin{cases} h \text{ continue sur }]-\infty ; \alpha[\\ h \text{ continue sur }]\alpha ; +\infty[\\ h \text{ continue en } \alpha \end{cases}$

donc h est continue sur $\mathbb{R}$.

d'où $h(\mathbb{R})$ est un intervalle

(l'image d'un intervalle par une ft continue est un intervalle)

Par suite la fct $x \mapsto x h\left(\frac{1}{x}\right) - h(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et difference de fts continues.

d/ on va utiliser la fonction k cité dans la question 3-a pour montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}} > \alpha.$$

on a $k\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) = 1 - \frac{9}{8} \times \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^5 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

$$= 1 - \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

$$= \frac{8\sqrt[5]{2^3} - 9 - 4\sqrt[5]{2^3} - 8\sqrt[5]{2^2}}{8\sqrt[5]{2^3}}$$

$$= \frac{4\sqrt[5]{2^3} - 8\sqrt[5]{2^2} - 9}{8\sqrt[5]{2^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{4^5 \times 2^3} - \sqrt[5]{8^5 \times 2^2} - 9}{8\sqrt[5]{2^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{2^{13}} - \sqrt[5]{2^{17}} - 9}{8\sqrt[5]{2^3}} < 0$$

car $2^{13} < 2^{17} \Rightarrow \sqrt[5]{2^{13}} < \sqrt[5]{2^{17}}$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{2^{13}} - \sqrt[5]{2^{17}} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{2^{13}} - \sqrt[5]{2^{17}} - 9 < 0$$

donc $k\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) < 0$

Par suite : $k\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) < 0$

ç.a.d $k\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) < k(\alpha)$

Comme k strict ↘ sur $\mathbb{R}$ donc

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}} > \alpha$$

d'autre part : $\sqrt[3]{2} > 1 > \alpha$

donc $\begin{cases} h\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}} \\ h(\sqrt[3]{2}) = \sqrt{\sqrt[3]{2} + \frac{9}{8}\sqrt[3]{2^3}} \end{cases}$

or (1) $\boxed{\frac{1}{\sqrt[5]{2}} < \sqrt[3]{2}}$. $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}} < 1 \text{ et } \sqrt[3]{2} > 1\right)$

donc $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^3 < (\sqrt[3]{2})^3$

d'ou (2) $\boxed{\frac{9}{8}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^3 < \frac{9}{8}(\sqrt[3]{2})^3}$

de (1) et (2) on déduit :

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{9}{8}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}\right) < \sqrt[3]{2} + \frac{9}{8}(\sqrt[3]{2})^3$$

donc $h\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) < h(\sqrt[3]{2})$

f- $\lim\limits_{x \to +\infty} x h\left(\frac{1}{x}\right) - h(x)$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1 - \frac{1}{x^5}} - \sqrt{x + \frac{9}{8}x^3}$$

car:

$x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \alpha \Rightarrow h\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1 - 1/x^5}$

$x \to +\infty \Rightarrow x > \alpha \Rightarrow h(x) = \sqrt{x + \frac{9}{8}x^3}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x h\left(\frac{1}{x}\right) - h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1 - 1/x^5} - \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{8}x\right)}$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1 - \frac{1}{x^5}} - x\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{9}{8}x}$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^5}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{9}{8}x}\right)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^5}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{9}{8}x} = -\infty \end{cases}$