Correction (série 1 . pdf / continuité semath)

Exercice 1 :

1/ Soit $f(x) = E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$

- $x \to 3 \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{5}{4} < \frac{x}{2} < \frac{7}{4}$

$\Rightarrow 1 < \frac{x}{2} < 2$

$\Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{x}{2}} < \sqrt{2} < 2$

$\Rightarrow E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = 1$

donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1$

- $x \to 2^+ \Rightarrow 2 < x < 3$

$\Rightarrow 1 < \frac{x}{2} < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{x}{2}} < \sqrt{\frac{3}{2}} < 2$

$\Rightarrow E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = 1$

donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1$

$x \to 2^- \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$

$\Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{x}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{\frac{x}{2}} < 1$

$\Rightarrow E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 0 = 0$

Par suite $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.

2/ $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1+3x^2} \cdot \cos(x)}{x^2} & : x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+3x^2} \cdot \cos(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+3x^2} + (1 - \cos x)\sqrt{1+3x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+3x^2}}{x^2} + \left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right)\sqrt{1+3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 - 3x^2}{x^2\left(1 + \sqrt{1+3x^2}\right)} + \left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right)\sqrt{1+3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-3}{1 + \sqrt{1+3x^2}} + \left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right)\sqrt{1+3x^2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 = g(0)$$

donc g est continue en 0

3/ $h(x) = \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos(x)}\right)}{x}$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{\pi\sqrt{\cos x} - \pi} \times \frac{\pi\sqrt{\cos x} - \pi}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{\pi\sqrt{\cos x} - \pi} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin(X + \pi)}{X} \quad \left(\begin{array}{l} X = \pi\sqrt{\cos x} - \pi \\ X \to 0 \end{array}\right)$$

$$= \lim_{X \to 0} -\frac{\sin X}{X} = -1$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\pi\sqrt{\cos x} - \pi}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi(\sqrt{\cos x} - 1)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\pi(\cos x - 1)}{x(\sqrt{\cos x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\pi x}{\sqrt{\cos x} + 1} \times \left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)$$

$$= 0 \times (-1/2) = 0 \in \mathbb{R}$$

donc h admet un prolongement par continuité en 0 qui est défini par :

$$\begin{cases} \tilde{h}(x) = h(x) \ ; \ x \neq 0 \\ \tilde{h}(0) = 0 \end{cases}$$

4/ $k(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x + a}{x - 1}$; $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 1} k(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{x+a}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 + (x+a)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 + x^2 - 3x + ax - 3a}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + (a-3)x + 1 - 3a}{(x-1)(x-3)}$$

- si $a \neq -1/2$ alors $\lim_{x \to 1} x^2 + (a-3)x + 1 - 3a = 1 + a - 3 + 1 - 3a$

$$= -2a - 1 \neq 0$$

donc $\lim_{x \to 1} k(x) = \frac{"-2a-1"}{0} = \infty$

et là $\lim_{x \to 1} k(x) \notin \mathbb{R}$

et k n'admettrai pas un prolongement par continuité.

- Si $a = -1/2$

$$\lim_{x \to 1} k(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + (-\frac{1}{2} - 3)x + 1 - 3 \times (-1/2)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{2(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(2x-5)}{2\cancel{(x-1)}(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{2(x-3)} = \frac{-3}{-4} = 3/4 \in \mathbb{R}$$

et par suite k admet dans ce cas un prolongement par continuité en 1.

5/ $l(x) = \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x \to 0} l(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = 1/2$$

donc l admet un prolongement par continuité défini par $\begin{cases} \tilde{\ell}(x) = \ell(x) ; & x \neq 0 \\ \tilde{\ell}(0) = 1/2 \end{cases}$

6/ $$f_1(x) = \frac{x}{1 - x + \frac{E(x)}{x}}$$

- $x \to 0^+ \Rightarrow 0 < x < 1/2$

$$\Rightarrow E(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \frac{x}{1-x}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$

- $x \to 0^- \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$

$$\Rightarrow E(x) = -1$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \frac{x}{1 - x - \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{x - x^2 - 1}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x - x^2 - 1} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f_1(x) = 0$.

d'où $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0 \in \mathbb{R}$

donc f_1 admet un prolongement par continuité en 0.

7/ soit f_2 définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$: $|f_2(x) - f_2(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$

a/ • f_2 définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + 2\pi \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ x - 2\pi \in \mathbb{R} \end{cases}$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. on a :

$$|f_2(x+2\pi) - f_2(x)| \leq |\sin(x+2\pi) - \sin(x)|$$

$$\Rightarrow |f_2(x+2\pi) - f_2(x)| \leq |\sin(x) - \sin(x)|$$

$$\Rightarrow |f_2(x+2\pi) - f_2(x)| \leq 0$$

$$\Rightarrow f_2(x+2\pi) - f_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_2(x+2\pi) = f_2(x)$$

donc f_2 est 2π-périodique.

b/ soit $a \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $|f_2(x) - f_2(a)| \leq |\sin(x) - \sin(a)|$

or $\lim\limits_{x \to a} |\sin(x) - \sin(a)| = 0$

donc $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = f_2(a)$

par suite f_2 est continue en a et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}$

donc f_2 est continue sur $\mathbb{R}$