Année : 2024/2025	**mini DS**	**2bac sm**
M. Ouikrim	**Fkih Ben Salh**	**biranzarane**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}_+$. Vérifier que $\alpha_n > 1$.
2. Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) = (\alpha_n - 1)(\alpha_n^{2n+2} + 1)$.
3. Établir la monotonie de (α_n) et en déduire qu'elle est convergente. On posera dans la suite $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = l$.
4. Vérifier que $l \geq 1$.
5. Montrer que $l > 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n^{n+1}(\alpha_n^n - 1) = +\infty$.
6. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 1$.
7. Soit $h(x) = x(x-1)$ définie sur $[1, +\infty[$. On pose $U_n = \alpha_n^n$. On admet que h est bijective sur $[1, +\infty[$

   a - Montrer que $h(U_n) = \dfrac{1}{\alpha_n}$.

   b - montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.