Série 1 (Pc)
continuité

Exercice 1 :

① $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{1+x^2-1-x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2-x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}$

$= \dfrac{2}{-1} = -2 = f(0)$

donc f est continue en 0

② $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1+\sqrt{x}-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 1/3 = g(1)$

donc g est continue en 1

③ a/ $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\cos^2(x) - \cos(x) - 1}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\cos x - 1)(2\cos x + 1)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0^-} -\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)(2\cos x + 1)$

$= -1/2 \times 3 = -3/2 = h(0)$

donc h continue en 0^-

b/ Soit $x > 0$.

$h(x) - 1 = 1 + x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$= x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

donc $|h(x)-1| = |x| \cdot |\sin(1/x)| = x \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$

or $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

donc $x\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x$ (car $x > 0$)

d'où $|h(x)-1| \leq x$

c/ on a $\forall x > 0 : |h(x)-1| \leq x$

et $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$

mais $h(0) = -3/2$ donc h n'est pas continue en 0^+

c/c : h n'est pas continue en 0.

(4) • examinons $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

<u>Si $a \neq 0$:</u>

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2}{3x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3}x = \infty$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 2$ donc $a = 0$

ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{bx-1}{3x+c}$

Si $b = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{3x}$

$= 0$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 2$

donc $b \neq 0$ du coup on aura

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx}{3x} = \frac{b}{3}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 2$ donc

$\dfrac{b}{3} = 2 \Longrightarrow b = 6$

d'autre part k continue en 2

donc $\lim\limits_{x\to 2^-} k(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} k(x) = k(2)$.

$$\lim_{x\to 2^-} k(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x + c = 6 + c$$

$$\lim_{x\to 2^+} k(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax^2+bx-1}{3x+c} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{6x-1}{3x+c} = \frac{11}{6+c}$$

on doit alors avoir $6+c = \frac{11}{6+c}$

$\Rightarrow (6+c)^2 = 11$

$\Rightarrow 6+c = \pm\sqrt{11}$

$\Rightarrow c = \sqrt{11}-6$ ou $c = -\sqrt{11}-6$

5

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1$

et $f(0) = 0$

donc f est discontinue en 0 à droite

Par suite f n'est pas continue en 0

$\left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x-1 = -1 \neq 0 \right.$

donc f est aussi discontinue en 0^-)

• $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{x+a}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{(x+a)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1+(x+a)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$ la limite devient : $\frac{-1-2a}{0} = \infty$

et f ne peut être continue en 1

donc $a = -\frac{1}{2}$

du coup on aura

$$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 + \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 + x^2 - 3x - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-\frac{5}{2}}{x-3}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{-2} = -\frac{3}{4}$$

donc $\alpha = -\frac{3}{4}$