Exercice 61 p 59

1/ Soit f continue et périodique de période T sur $\mathbb{R}$.

• f périodique de période T sur $\mathbb{R}$ donc $f(\mathbb{R}) = f([0;T])$

• f continue sur $[0;T]$ donc f est bornée et atteint ses bornes sur $[0;T]$:

$$f([0,T]) = [m;M]$$

$$m = \min_{0 \leq x \leq T} f(x) \quad ; \quad M = \max_{0 \leq x \leq T} f(x)$$

d'où $f(\mathbb{R}) = [m;M]$

f est alors bornée sur $\mathbb{R}$.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n(x) = \frac{1 + \cos(x) + \dots + \cos^n(x)}{1 + \cos^{2n}(x)}$$

mq f_n continue et bornée sur $\mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R} : (\cos(x))^{2n} \geq 0$

donc $1 + \cos^{2n}(x) \neq 0$

et les deux fcts

$x \mapsto 1 + \cos x + \dots + \cos^n(x)$

et

$x \mapsto 1 + \cos^{2n}(x)$

sont continues sur $\mathbb{R}$ comme somme de fcts continues

donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$

or $\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x + 2\pi) = f_n(x)$

d'où f_n périodique de période 2π donc

f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ (d'après ①)

Exercice 65 p 60

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ tq :
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$
mq f est continue sur $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. on a
$\forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - f(a)| \leq k|x-a|$

or $\lim_{x \to a} k|x-a| = 0$

donc $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

d'où f est continue en a

et ceci pour tout a de $\mathbb{R}$

cl : f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 66 p 60

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) = f(x) + f(y)$

on suppose que f continue en 0.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} : x = (x-a) + a$

donc $f(x) = f(x-a) + f(a)$

donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x-a) + f(a)$

$= \lim\limits_{h\to 0} f(h) + f(a)$ $\quad (h = x-a)$

$= f(0) + f(a)$ $\quad$ (f continue en 0)

$= f(0+a) = f(a)$

donc f est continue en a
et ceci pour tout a de $\mathbb{R}$
donc f continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 68 p 60 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+1/x} - \sqrt{x^2+2x}}{x} - 1$$

1/ domaine de définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f \iff x \neq 0$ et $1 + \frac{1}{x} \geq 0$ et $x^2+2x \geq 0$

$\iff x \neq 0$ et $\frac{x+1}{x} \geq 0$ et $x^2+2x \geq 0$

On a :

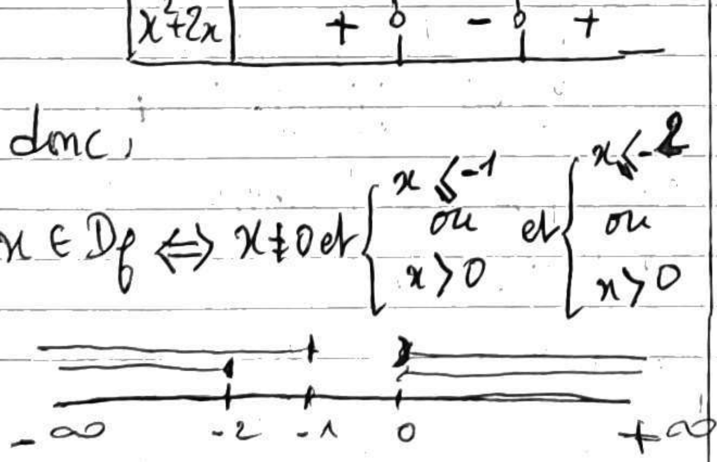
x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

et

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^2+2x	$+$	0	$-$	0	$+$

donc,

$x \in D_f \iff x \neq 0$ et $\begin{cases} x \leq -1 \\ \text{ou} \\ x > 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x \leq -2 \\ \text{ou} \\ x > 0 \end{cases}$



donc $D_f =]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$

2/ limites aux bornes

3/ f est continue sur $[\frac{1}{2}; 1]$

car $\begin{cases} x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \text{ continue sur } [\frac{1}{2}; 1] \\ \text{et} \\ \forall x \in [\frac{1}{2}; 1] : 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases}$

$\implies x \mapsto \sqrt{1 + 1/x}$ conti sur $[\frac{1}{2}; 1]$

$\begin{cases} x \mapsto x^2 + 2x \text{ continue sur } [\frac{1}{2}; 1] \\ \text{et} \\ \forall x \in [\frac{1}{2}; 1] : x^2 + 2x \geq 0 \end{cases}$

$\implies x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$ conti sur $[\frac{1}{2}; 1]$

et $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1] : x \neq 0$

donc f conti sur $[\frac{1}{2}; 1]$

d'où $f([\frac{1}{2}; 1]) = [m; M]$

avec $m = \min\limits_{\frac{1}{2} \leq x \leq 1} f(x)$

$M = \max\limits_{\frac{1}{2} \leq x \leq 1} f(x)$

Ainsi $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1]$,

$m \leq f(x) \leq M$

$\implies m \leq \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x}}{x} - 1 \leq M$

$\implies (m+1)x \leq \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x} \leq M+1$

on pose $\alpha = m+1$ et $\beta = M+1$

donc $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1]$

$\exists \alpha; \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha x \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2+2x} \leqslant \beta x$

4/ • f continue sur $[\frac{1}{2}; 1]$

• $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3} - (\sqrt{5}+1)$

on $(2\sqrt{3})^2 = 12$

$(\sqrt{5}+1)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$

or $\sqrt{5} < 3 \Rightarrow 2\sqrt{5} < 6$

$\Rightarrow 6 + 2\sqrt{5} < 12$

$\Rightarrow (2\sqrt{3})^2 > (\sqrt{5}+1)^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{3} > \sqrt{5} + 1$

d'où $f(\frac{1}{2}) > 0$

• $f(1) = \sqrt{2} - (\sqrt{3}+1) < 0$

donc $f(1) \cdot f(1/2) < 0$

d'après le T.V.I.

$\exists c \in]1/2; 1[$;

$f(c) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{1+1/c} - \sqrt{c^2+2c}}{c} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+1/c} - \sqrt{c^2+2c} = c$

Exercice 69 :

les questions ① et ② et ③ sont similaires à l'exercice précédent

1/ mq f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$.

• f continue sur $[0; 1]$

• on a : $\begin{cases} \frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1} \\ 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \end{cases}$

donc $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 - \frac{2}{x+1}} + \sqrt{1 - (x-1)^2}\right)$

soit $x; y \in [0; 1]$.

$x < y \Rightarrow \begin{cases} x+1 < y+1 \\ x-1 < y-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x+1} > \frac{2}{y+1} \\ (x-1)^2 > (y-1)^2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x-1 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{x+1} < -\frac{2}{y+1} \\ -(x-1)^2 < -(y-1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1} < 2 - \frac{2}{y+1} \\ 1 - (x-1)^2 < 1 - (y-1)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2-\frac{2}{x+1}} < \sqrt{2-\frac{2}{y+1}} \\ \sqrt{1-(x-1)^2} < \sqrt{1-(y-1)^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$;

d'où f est strict ↗ sur $[0;1]$

• $f([0;1]) =$ f étant continue et strict ↗ sur $[0;1]$ alors :

$f([0;1]) = [f(0); f(1)]$

$= [0; 1]$

donc f réalise une bijection de $[0;1]$ vers $[0;1]$

5/ soit $[a;b] \subset [0;1]$

on pose $\varphi(x) = f(x) - \frac{a-x}{a-2b+x}$

• $a-2b+x=0 \Leftrightarrow x = 2b-a$

or $2b-a > b$ car

. $(2b-a)-b = b-a > 0$

donc $\forall x \in [a;b] : a-2b+x \neq 0$

d'où φ est continue sur $[a;b]$ comme difference de deux fts continus

. $\varphi(a) = f(a) \in [0;1]$

$\varphi(b) = f(b) - \frac{a-b}{a-b}$

$= f(b) - 1$

or $f(b) \in [0;1]$

d'où $\begin{cases} \varphi(a) \geq 0 \\ \varphi(b) \leq 0 \end{cases}$

donc $\varphi(a) \cdot \varphi(b) \leq 0$

d'après le T.V.I :

$\exists c \in [a;b] : \varphi(c) = 0$

$\Rightarrow f(c) = \frac{a-c}{a-2b+c}$

Exercice 70 p 61 :

on pose $\varphi(x) = f(x) + f(1-x) - 2x$

•
$\begin{cases} x \mapsto 1-x \text{ continue sur } [0;1] \\ \forall x \in [0;1] : 1-x \in [0;1] \end{cases}$

$\Rightarrow x \mapsto f(1-x)$ continue sur $[0;1]$ (comme composée)

$\Rightarrow \varphi$ continue sur $[0;1]$ comme somme de fts continus

• $\varphi(0) = f(0) + f(1)$; $\varphi(1) = f(1) + f(0) - 2$

donc $\varphi(0) \geq 0$ et $\varphi(1) \leq 0$

d'où $\varphi(0) \cdot \varphi(1) \leq 0$