Année : 2024/2025	Série n° : 2	pc/tech/svt
ouikrim	TVI	fkih ben salah

Résumé

1. • $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ k \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = k$

2. • $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ k \text{ strictement compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = k$

3. • $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ k \text{ strictement compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \\ \text{f strictement monotone sur } [a,b] \end{cases} \Rightarrow \exists! \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = k$

4. • $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = 0$

5. • $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = 0$

6. • $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \\ \text{f strictement monotone sur } [a,b] \end{cases} \Rightarrow \exists! \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = 0$

s'entraîner

correction en classe

Exercice 1

• montrer que :

$$\exists c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos(c) = \frac{c}{1+c} + \frac{1}{2}$$

• montrer que l'équation $x^3 + x - \sqrt{x+1} = 1$ admet une solution α dans $]1,2[$
• montrer que l'équation $(x-2)^5 + (x-1)^3 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1,2[$.
• montrer que :

$$\exists! \alpha \in \left]0, , \frac{\pi}{2}\right[\quad \sqrt{1+\alpha} = \sqrt{\alpha} + \sin(\alpha)$$

Exercice 2

1. montrer que l'équation $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une seule solution β dans $]1,2[$
2. montrer que $\beta^2 (\beta - 2) = 1 - \beta$

Exercice 3

soit la fonction f definie par $f(x) = x^3 - 2x\sqrt{x} - 1$

1. etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$
2. determiner $f([1, +\infty[)$
3. montrer que l'equation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$

correction sur la chaîne youtube : ouikrimath

Exercice 1

• montrer que l'equation $\tan(x) = \frac{1}{x}$ admet une solution dans $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

Exercice 2

soit la fonction f définie par $f(x) = x\sin(x) + \cos(x)$

1. étudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$
2. montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$
3. montrer que $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$

Exercice 3

1. montrer que l'équation $4x^3 - 12x + 1 = 0$ admet une solution unique α dans $]-1, 1[$
2. deduire que l'équation $x^4 - 6x^2 + x = -1$ admet exactement deux solutions dans $]-1, 1[$

correction en classe

Exercice 4

soit f une fonction continue sur $[-5,5]$ .son tableau de variation est le suivant:

x	-5	-3	0	1	4	5
$f(x)$	1 ↗	5 ↘	-1 ↗	2 ↘	1 ↗	4

• déterminer le nombre de solution des equations $f(x)=0$ et $f(x)=-1$ dans $[-5,5]$

Exercice 5

1. étudier les variations de la fonction g définie par $g(x)=5x^5+3x^3-1$
2. montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et comparer α et 1
3. résoudre l'inéquation $g(x)<0$

Exercice 6

1. montrer que l'equation $x^3+x=1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$
2. soit la fonction f definie par

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x} \quad , \quad x\geq\alpha \\ g(x)=x^2+1 \quad , \quad x<\alpha \end{cases}$$

• montrer que g est continue en α

Exercice 7

1. soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=4x^3-3x-8$$

a - étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
b - montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
c - déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

2. soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^3+1}{4x^2-1}$$

a - étudier les variations de f sur $[1,+\infty[$
b - montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3}{8}\alpha$ puis déduire un encadrement de $f(\alpha)$

correction sur la chaîne youtube : ouikrimath

Exercice 4

1. etudier les variations de la fonction $x\longmapsto 2x^3-3x^2-1$ puis déduire le signe de $2x^3-3x^2-1$ sur $\mathbb{R}$
2. déduire les variations de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$

Exercice 5

soit f continue sur $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ et soit g definie sur $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ par $g(x)=f(x)-xf(\dfrac{1}{x})$

1. montrer que g est continue sur $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$
2. montrer que C_g coupe l'axe (OX) en au moins un point dont l'abscisse est dans $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$
3. deduire que $f(a)=af(\dfrac{1}{a})$