Année : 2024/2025	Série n° : 1	Classe : 2ème Bac SM
ouikrim mohamed	continuité: part I	fkih ben salah

en classe

Exercice 1 (continuite en a et $a^{\pm}$)

1. $$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} : x \neq 0 \\ f_1(0) = -2 \end{cases}$$

   • montrer que f_1 est continue en 0

2. $$\begin{cases} f_2(x) = \dfrac{|2x^2-x-1|}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq 0 \\ f_2(1) = 0 \end{cases}$$

   • f_2 est-elle-continue en 1^- ?

3. $$\begin{cases} f_3(x) = xE\left(x - \dfrac{1}{x}\right), \quad x \neq 0 \\ f_3(0) = 0 \end{cases}$$

   • montrer que f_3 est continue en 0

4. $$f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sin\left(\dfrac{6\pi}{x}\right)}{x\sqrt{2x+1}-6\sqrt{x}}, & \text{si } x \neq 4 \\ 0, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

   • étudier la continuité de f_4 en 4

5. soit la fonction $f_5(x) = \dfrac{x-x^2}{E\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

   a - déterminer D_{f_5}
   b - étudier la continuité de f_5 en 3 et 4

6. soit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

   $$\begin{cases} f_6(x) = \dfrac{(3-x)^n - a}{x-2}, & x \leq 2 \\ f_6(x) = \dfrac{b-nx}{\sqrt{x^2+5}}, & x \succ 2 \end{cases}$$

   • déterminer a et b pour que f_6 soit continue en 2

Exercice 2 (continuité sur un intervalle)

1. soit $a, b \in \mathbb{R}$ et la fonction f_1 définie sur $[a,b]$ telle que :
   $\forall x \in [a,b]$, $\forall y \in [a,b]$: $|f_1(x) - f_1(y)| \leq |x-y|$
   • montrer que f_1 est continue sur $[a,b]$

2. soit la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par
   $f_2(x) = E(x) + (x - E(x))^2$
   • étudier la continuité de f_2 sur $\mathbb{R}$

chez soi

Exercice 1

1. soit la fonction f définie par $f(x) = E\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)$
   • étudier la continuité de f en 3 et 2

2. soit la fonction g definie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+3x^2}.\cos(x)}{x^2} \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

   • montrer que g est continue en 0

3. soit la fonction h définie par

   $$h(x) = \frac{\sin\left(\pi.\sqrt{\cos(x)}\right)}{x}$$

   • h admet - elle - un prolongement par continuité en 0?

4. soit la fonction k définie par :

   $$k(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{x+a}{x-1}, a \in \mathbb{R}$$

   • trouver a pour que k admette un prolongement par continuité en 1

5. soit la fonction l définie par :

   $$l(x) = \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}$$

   • montrer que l est prolongeable par continuité en 0

6. soit f_1 définie par $f_1(x) = \dfrac{x}{1-x+\dfrac{E(x)}{x}}$
   • f_1 admet - elle - un prolongement par continuité en 0?

7. soit f_2 definie sur $\mathbb{R}$ telle que ,

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f_2(x) - f_2(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$$

   a - montrer que f_2 est 2π - périodique.
   b - montrer f_2 est continue sur $\mathbb{R}$.

en classe (suite)

3. soit la fonction f_3 definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_3(x) = \begin{cases} (ax^2 + bx - a - b)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right), & \text{si } x \neq 1 \\ 0, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a - Montrer que $\forall x \in [0, 2]$:

$$|f_3(x)| \leq (3|a| + |b|)|x - 1|$$

b - montrer que f_3 est continue sur $\mathbb{R}$

4. soit la fonction g definie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 telle que:

$$\begin{cases} g(1) = 1 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (g(x+y) - g(x) - g(y))^2 = 4g(x)g(y) \end{cases}$$

a - montrer que $g(0) = 0$ et que g est paire
b - montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0$
c - montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : g(2x) = 4g(x)$ ou $g(2x) = 0$
d - montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|g(x+y) - g(x)| \leq 2\sqrt{g(x) \cdot g(y)} + g(y)$$

e - montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 (prolongement par continuité)

1. soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{\sqrt{3x+4}} - 2}$

a - determiner D_f
b - f admet - elle - un prolongement par continuité en 4 ?

2. soit la fonction g définie sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[- \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ par:

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x+4} - 3\sqrt{2x-1} + 3}{\sqrt{2x+11} - \sqrt{2x-1} - 2}$$

• montrer que g admet un prolongement par continuité en $\dfrac{1}{2}$ qu'on doit définir.

3. soit la fonction h définie par
$h(x) = \left(ax^2 + \pi.x - \pi^2\right).\tan(3x)$, $a \in \mathbb{R}$
a - déterminer D_h
b - determiner a pour que h soit prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{6}$.

chez soi (suite)

8. soit la fonction f continue sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : f(x).\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

• montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : f(x) = 0$

9. soit une fonction g continue sur $[a, b]$ et strictement croissante sur $]a, b[$.
a - on suppose que :

$$\exists (x_0, x_1) \in (]a, b[)^2 : \begin{cases} g(x_0) \prec g(a) \\ g(x_1) \succ g(b) \end{cases}$$

• montrer que $g(x_0) \geq g(a)$ et $g(x_1) \leq g(b)$
b - deduire que g est strictement croissante sur $[a, b]$

10. soit la fonction k definie par:

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(\sqrt{x})}{x(1 - E(x))} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x \cdot \tan(x)} & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0. \end{cases}$$

a - déterminer D_k
b - étudier le prolongement par continuité de k en $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^+$ et en 0

11. soit h une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que :

$$\exists a \in]0, 1[: h(a) = \frac{1}{2}$$

• montrer que l'on peut trouver un intervalle non vide I tel que :

$$\begin{cases} I \subseteq]0, 1[\\ \forall x \in I : h(x) \leq \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

12. soit deux fonctions f et g continues sur un intervalle I.
• montrer que les fonctions h et k définies par $h(x) = sup\,(f(x), g(x))$ et $k(x) = inf\,(f(x), g(x))$ sont continues sur I
indication: montrer d'abord que pour tout a et b de $\mathbb{R}$:

$$\sup(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

$$\inf(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$