

Correction (serie 1. pdf / contribute
sema th)

Exercice 1:

1/ Soit $f(x) = E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$

• $x \rightarrow 3 \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} < \frac{x}{2} < \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{2} < 2$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{x}{2}} < \sqrt{2} < 2$$

$$\Rightarrow E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 1$

• $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow 2 < x < 3$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{2} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{x}{2}} < \sqrt{\frac{3}{2}} < 2$$

$$\Rightarrow E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1$

$x \rightarrow 2^- \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{x}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{\frac{x}{2}} < 1$$

$$\Rightarrow E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 = 0$

Par suite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ n'existe pas.

$$2/ \begin{cases} g(x) = \frac{1 - \sqrt{1+3x^2} \cdot \cos(x)}{x^2} : x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+3x^2} \cdot \cos(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+3x^2} + (1 - \cos x) \sqrt{1+3x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+3x^2}}{x^2} + \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \sqrt{1+3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - 3x^2}{x^2(1 + \sqrt{1+3x^2})} + \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \sqrt{1+3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{1 + \sqrt{1+3x^2}} + \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \sqrt{1+3x^2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 = g(0)$$

Donc g est continue en 0

$$3/ h(x) = \frac{\sin(\pi \sqrt{\cos x})}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sqrt{\cos x})}{\pi \sqrt{\cos x} - \pi} \times \frac{\pi \sqrt{\cos x} - \pi}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sqrt{\cos x})}{\pi \sqrt{\cos x} - \pi} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X + \pi)}{X}$$

$$\left. \begin{array}{l} X = \pi \sqrt{\cos x} - \pi \\ X \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-\sin X}{X} = -1$$

المدرجات. وأعاد هدف حرميات الثقة والارتياح إلى الطاقم التقني والأعباء
الذين فرضوا سيطرة مطلقة على أطوار المباراة، مستغلين الانشغال الكامل
للكوادر. ولم تفض عشر دقائق حتى أجهز أسامة الملبوي على أما
الخاص، بتسجيل الهدف الثالث في الدقيقة 80 ليضاعف حماس اللاعبين

لة تدعى حسناء، إليها الانتظار
من تنزانيا، لدعم المنتخب الوطني
ه الكونغولي، وقالت في حديث مع
قطعت مسافة طويلة من تنزانيا

من
راه
دخل المنتخب المحلي
ما تحفة، بفضل أسامة الملبوي في الدقيقة الثامنة، بعد تعبيرة

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sqrt{\cos x} - \pi}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi(\sqrt{\cos x} - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi(\cos x - 1)}{x(\sqrt{\cos x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\sqrt{\cos x} + 1} \times \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \right)$$

$$= 0 \times (-1/2) = 0 \in \mathbb{R}$$

donc h admet un prolongement par continuité en 0 qui est définie par :

$$\begin{cases} \tilde{h}(x) = h(x), & x \neq 0 \\ \tilde{h}(0) = 0 \end{cases}$$

$$4/ \quad k(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x+a}{x-1}; \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{x+a}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + (x+a)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x^2 - 3x + ax - 3a}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (a-3)x + 1-3a}{(x-1)(x-3)}$$

$$\bullet \text{ Si } a \neq -1/2 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (a-3)x + 1-3a}{(x-1)(x-3)} = \frac{1+a-3+1-3a}{-2} = \frac{-2a-1}{-2} \neq 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} k(x) = \frac{-2a-1}{-2} = \infty$$

et la $\lim_{x \rightarrow 1} k(x) \notin \mathbb{R}$

et k n'admettra pas un prolongement par continuité.

• Si $a = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (-\frac{1}{2} - 3)x + 1 - 3x(-\frac{1}{2})}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{2(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-5)}{2(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-5}{2(x-3)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$$

et par suite k admet dans ce cas un prolongement par continuité en 1.

$$5/ \quad l(x) = \frac{2x}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Donc l admet un Prolongement par continuité

définie par $\begin{cases} \tilde{\ell}(x) = \ell(x), & x \neq 0 \\ \tilde{\ell}(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$6/ \quad f_1(x) = \frac{x}{1-x + \frac{E(x)}{x}}$$

$$\bullet \quad x \rightarrow 0^+ \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$$

$$\bullet \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$$

$$\Rightarrow E(x) = -1$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \frac{x}{1-x - \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{x-x^2-1}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x-x^2-1} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0 \in \mathbb{R}$$

donc f_1 admet un prolongement par continuité en 0.

7/ soit f_2 définie sur \mathbb{R} telle que,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f_2(x) - f_2(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$$

a/. f_2 définie sur \mathbb{R} donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x+2\pi \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ x-2\pi \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

• soit $x \in \mathbb{R}$. on a :

$$|f_2(x+2\pi) - f_2(x)| \leq |\sin(x+2\pi) - \sin(x)|$$

$$\Rightarrow |f_2(x+2\pi) - f_2(x)| \leq |\sin(x) - \sin(x)|$$

$$\Rightarrow |f_2(x+2\pi) - f_2(x)| \leq 0$$

$$\Rightarrow f_2(x+2\pi) - f_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_2(x+2\pi) = f_2(x)$$

donc f_2 est 2π -périodique.

b/ soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}: |f_2(x) - f_2(a)| \leq |\sin(x) - \sin(a)|$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow a} |\sin(x) - \sin(a)| = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = f_2(a)$$

par suite f_2 est continue en a et ceci
pour tout $a \in \mathbb{R}$

donc f_2 est continue sur \mathbb{R}