| Année : 2024/2025 | Série n° : 3 | 2bac sc math |
|---|---|---|
| ouikrim | fonction reciproque | fkih ben salah |

## Résumé


► pour montrer que $f$ realise une bijection de $I$ vers $J$:

- **f continue sur I** • **f strictement monotone sur I** • **J = f(I)**

► monotonie de $f^{-1}$

- **La monotonie de $f^{-1}$ sur $J$ est la même que la monotonie de $f$ sur $I$.**

► la courbe de $f^{-1}$:

$C_{f^{-1}}$ **est symetrique à** $C_f$ **par rapport á la droite d'equation** $y = x$


## s'entraîner

### correction en classe

#### Exercice 1

soit la fonction $f$ definie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - 2x$.

1. • montrer que $f$ realise une bijection de $[0, 1]$ vers un imtervalle $J$ qu'on determinera
   • montrer que $\forall x \in J$ :$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\left(\sqrt{5 - x^2} - 2x\right)$
2. on pose $g(x) = f\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{2}\right)$ sur $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$
   • montrer que $g$ realise une bijection de $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ vers $K$ qu'on determinera
   • determiner $g^{-1}(x)$ pour $x \in K$
3. soit $h$ definie sur $\left[0. \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = f(\cos(x))$
   • montrer que $h$ realise une bijection de $\left[0. \frac{\pi}{2}\right]$ vers $L$ qu'on determinera
   • determiner $h^{-1}(x)$ pour $x \in L$

#### Exercice 2( Q 1 et 2 indépendantes)

1. soit $f$ definie sur $I = [-1, +\infty[$ par $f(x) = (1 + x^3)^2$
   • montrer que $f$ admet une fonction reciproque $f^{-1}$ definie sur $J$ qu'on determinera
   • determiner $f^{-1}(x)$
2. soit $\lambda \in \mathbb{R}^-$
   • etudier le signe de $\sqrt[3]{-\lambda} + \lambda$
   • resoudre l'equation $(x^4 - \lambda)^3 + \lambda = 0$

#### Exercice 3

Soit $f$ définie sur $I = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ par :$f(x) = \tan\left(\pi\sqrt{1 - x^2}\right)$

1. Calculer $\lim_{x \to (\frac{\sqrt{3}}{2})^-} f(x)$ et montrer que $f$ est continue sur $I$.
2. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$, définie sur un ensemble $J$ que l'on déterminera.
3. Déterminer explicitement $f^{-1}(x)$ pour $x$ dans $J$

### correction sur la chaîne youtube : ouikrimath

#### Exercice 1

- montrer que pour tout $a$ , $b$ de $\mathbb{R}^+$ on a:
$\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$
- calculer $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$

#### Exercice 2

1. montrer que : $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ : $2\sin(t) + \tan(t) > 3t$
2. en deduire que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $0 < \frac{\arctan(x)}{x} < \frac{2 + \sqrt{1 + x^2}}{3\sqrt{1 + x^2}}$

#### Exercice 3

soit $f$ definie sur $\left]-a, \frac{\pi}{2}\right[$ par:
$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x + a)}$ avec $0 < a < \frac{\pi}{2}$

1. calculer $\lim_{x \to (-a)^+} f(x)$ et montrer que $f$ admet une fonction reciproque $f^{-1}$ definie sur $\left]-\infty, \frac{1}{\cos(a)}\right]$
2. determiner $f^{-1}(x)$ pour $x \in \left]-\infty, \frac{1}{\cos(a)}\right]$

#### Exercice 4

soit la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(3x) + 2x - 1$

1. montrer que $f$ realise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. montrer que l'equation $f^{-1}(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < \frac{1}{3}$
3. verifier que $\alpha = 1 - \arctan(3\alpha)$ et puis que:
   $1 - \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$
4. montrer que $\forall x > \alpha$ : $f^{-1}(x) < x$

**correction en classe**

## Exercice 4

soit la fonction definie par $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

1. montrer$f$ que realise une bijection de $I$ vers $J$ qu'on determinera
2. tracer $C_f$ et $C_f^{-1}$
3. montrer que $f^{-1}$ est impair
4. on pose $g(x) = f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$
   a - determiner $D_g$
   b - montrer que

$$\forall x \in \left[\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad g(x) = 2f^{-1}(x)$$

## Exercice 5

1. calculer les limites :
   - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4\arctan(2x-1)-\pi}{x-1}$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3}\left(\arctan(\sqrt{2+x}) - \arctan(x)\right)$
   - $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(\frac{x}{1-x})\right)$
   - $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5\sqrt[3]{x^2-1}-2\sqrt{x^3-2}}{\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt{x^3-2}-10}$
   - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2}$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$
2. resoudre dans $\mathbb{R}$:
   - $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x} = 1$
   - $\arctan(x+1)+\arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}$
   - $\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x(x-1)} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 0$

## Exercice 6

soit $f_n$ definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = 2\arctan\left(\frac{x^n}{1+\sqrt{1+x^{2n}}}\right)$$

avec n impair

1. montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! \alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) : \tan(\alpha) = x^n$
2. montrer que $\forall x \in \mathbb{R} :\ f_n(x) = \arctan(x^n)$ et deduire que $\tan(\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$
3. montrer que $f_n$ realise une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $J$ qu'on determinera
4. determiner $f_n^{-1}(x)$ pour $x \in J$

**correction sur la chaîne youtube : ouikrimath**

## Exercice 5

1. montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \frac{1}{n}$
   ( poser $t = \sqrt[n]{x+1}$)
2. deduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

3. montrer que $\forall n \geq 3$ :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x+1}...\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k}$$

## Exercice 6

1. calculer les limites:
   - $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x-x^3} - \sqrt[4]{x^4-x^2+1}$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$
   - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arctan(\sqrt{x})-\arctan(\sqrt[3]{x})}{x-1}$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x}}-x)-\frac{\pi}{2}}{x}$
2. resoudre dans $\mathbb{R}$
   - $\arctan(x-3)+\arctan(x+3)+\arctan(x) = \frac{5\pi}{4}$

## Exercice 7

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$