

Année : 2024/2025	DS 1 — S1	2bac pc
M.ouikrim	fkih ben salh	ecole les nations

- une bonne rédaction va être récompensé
- l'usage de la calculatrice non programmable est autorisé

PROBLÈME

I - soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 1 - \frac{9}{8}x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = x^5 + x.$$

- montrer que  $g$  est impaire.
- soit  $n$  entier naturel impair et  $a \in \mathbb{R}$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^n = a$ .
  - Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'on déterminera.
  - Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
  - Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .
  - Représenter une allure de la courbe de  $f^{-1}$  dans un repère orthonormé (on vous donne la courbe de  $f$ ).
- Montrer que l'équation  $f(x) = g(x)$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et vérifier que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .
  - Déduire que  $\forall x < \alpha \quad f(x) > g(x)$  et interpréter graphiquement ce résultat.
  - Déduire que  $\forall x < \alpha \quad g(-x) + f(x) > 0$ .
- Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :
$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^5} & \text{si } x \leq \alpha, \\ \sqrt{x + \frac{9}{8}x^3} & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$
  - Montrer que  $h$  est continue sur  $]-\infty, \alpha[$  et  $]\alpha, +\infty[$ .
  - Montrer que  $h$  est continue en  $\alpha$ .
  - Déduire que  $h(\mathbb{R})$  est un intervalle.
  - Comparer les nombres  $h\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$  et  $h\left(\sqrt[3]{2}\right)$  (justifier).
  - montrer que la fonction  $x \mapsto xh\left(\frac{1}{x}\right) - h(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xh\left(\frac{1}{x}\right) - h(x)$ .

Ci-joint la courbe de  $f$  :

Desktop/dr.png