disjonction des cas

Exercice 1

• Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1} - x \geq 0$.
• Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$\hookrightarrow -2 < \dfrac{1}{x} < 1$
$\hookrightarrow x + 4 = \sqrt{x^2+3x+2}$
$\hookrightarrow 2x + 1 \leq \sqrt{x^2+3}$
$\hookrightarrow |7x^2 - x - 8| - |x-1| + 2 = 0$
$\hookrightarrow (m^2-1)x^2 - 2x + 1 = 0$ (m paramètre réel)
• Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + xy + y^2 \geq 0$$

• Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, 3 ne divise pas n^2+1.

contraposée

Exercice 2

• montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: (8 ne divise pas n^2-1) $\Rightarrow$ (n est pair)
• soit $x \geq 1, y \geq 0, z \geq 3$.
montrer que $(x \neq 2$ ou $y \neq 1$ ou $z \neq 4\ ) \Rightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{y} + \sqrt{z-3} \neq \dfrac{x+y+z-1}{2})$
• soit $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
montrer que $(x^2+y^2+z^2 > xy+yz+zx) \Rightarrow (\sqrt{xy} < z$ ou $\sqrt{yz} < x$ ou $\sqrt{zx} < y)$
• soit $a > 0, b > 0, c > 0$.
montrer que $a^2+b^2+c^2 < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \neq \dfrac{1}{abc}$
•$x, y \in \mathbb{R}$.
montrer que $x \neq y \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} \neq y + \sqrt{y^2+1}$

les equivalences successives

Exercice 3

• soit a,b et c des reels. montrer que :

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

• soit x et y des reels strictement positifs.
montrer que

$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}$$

• montrer que pour tout x et y de $]1, +\infty[$:

$$(x+y) + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2$$

• soit x et y de $\mathbb{R}$. montrer que :

$$(x+y)(x-y)^2 < 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 > 4(x^3+y^3)$$

l'absurde

Exercice 4

• montrer que l'equation $x^3+x+1=0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}$
• montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$
• montrer que le systeme : $\begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$
• montrer que $\forall x \in \mathbb{R} :\ 4\cos(x) \neq x^2 - 4x + 12$