

I. calcul algébrique

1. Pré-requis

- factorisation et développement, identités remarquables
- puissances et racines
- réduction au même dénominateur
- utilisation du conjugué

2. exercice

- soit $x \in]1, +\infty[$
on pose $a = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x(x-1)^2}$, $b = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{x}{\sqrt{x}+1}$, $c = \frac{-1}{x^2+x} + \frac{x-2}{x+1} - \frac{x-1}{x}$
 $d = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}$, $h = (x-\sqrt{x})^3 + (x+\sqrt{x})^3$
 \rightarrow montrer que $a = \frac{(x+2)(x-3)}{2x(x-1)^2}$, $b = \frac{2x}{x-1}$, $c = \frac{-2}{x+1}$, $d = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$
 \rightarrow montrer de deux façons différentes que $h = 2x^2(x+3)$
- soit x tel que toutes les expressions ci-dessous soient définies.
on pose $u = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ et $v = x^3 - 2x + 1$
 \rightarrow montrer que $u-v = x(x-1)(x^2-3x-1)$
 \rightarrow montrer que $\frac{u}{v} = \frac{x^3-2x^2-1}{x^2+x-1}$
 \rightarrow montrer que $\frac{\sqrt{u-v}}{|x|} = \sqrt{x^2-4x+\frac{1}{x}+2}$
- soit $x \in \mathbb{R}$. factoriser chacune des expressions ci-dessous lorsqu'elles sont bien définies:
 $x^6 + 2x^3 + 1$, $x^4 - 4x^2 + 4$, $x - 1$, $x\sqrt{x} - 1$, $x\sqrt{x} + 1$, $x - \sqrt{2x} + \frac{1}{2}$
 $x + 2\sqrt{x-1}$, $x^3 + x^2 - 2x - 2$, $x\sqrt{x-1} + x^3 - \sqrt{x-1} - 1$

II. encadrements, comparaisons

1. Pré-requis

- encadrer une somme, un produit, une différence, un quotient
- encadrer des puissances, des racines
- signe d'un binôme et d'un trinôme, résolution des inéquations
- les intervalles

2. exercice

- soit $x \in]1, 2[$. montrer que $2\sqrt{5-x} - 1 > 0$ et que $\frac{(1-x)^3 + (x-3)^2}{2x-5} > -4$
- soit x tel que $\sqrt{2-(x-2)^2} \in [0, 1]$. montrer que $x \in [2-\sqrt{2}, 1] \cup [3, 2+\sqrt{2}]$
- montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > x$
- montrer que $\forall x \geq 9 : x+1 \geq 3\sqrt{x}$
- montrer que $\forall x, y \geq 0 : \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
- montrer que $\forall t \geq 0 : 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$
- montrer que $\forall t \in [0, 2] : \frac{3}{2} \leq \frac{2t+3}{t+2} \leq \frac{7}{4}$
- montrer que $\forall u \in [1, 2] : 2-u \leq \frac{1}{u} \leq 1$