Devoir Surveillé n°3

Lycée Mohammed V – 2■ année baccalauréat Sciences Mathématiques A – B
Date : 4 mai 2016
Matière : Mathématiques – Durée : 2h30 – Coefficient : 9

Exercice 1 : Probabilités (5 points)

Un urne contient 4 boules noires et 3 boules blanches. On effectue l'expérience suivante :

- On tire une boule de l'urne.
- Si elle est noire, on la remet dans l'urne puis on tire ensuite deux boules successivement de cette urne.
- Si elle est blanche, on la met de côté puis on tire ensuite deux boules successivement et sans remise de cette urne.

1) Montrer que le nombre des issues possibles de cette expérience est 174.
2) Montrer que la probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est $47/245$.
3) Sachant que les trois boules tirées sont de la même couleur, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche ?
4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne à la fin de l'expérience.
a) Déterminer les valeurs possibles de X.
b) Montrer que $P(X=1)=76/245$ et $P(X=2)=122/245$.
c) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
5) On répète la même expérience trois fois (en remettant les boules dans l'urne à chaque fois). Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois trois boules de la même couleur ? Donner le résultat arrondi à 0,01.

Exercice 2 : Analyse (5 points)

Soit la fonction u définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $u(x)=1/\ln(x)$, et $u(0)=0$.
Soit également la fonction v définie sur $[0,+\infty[$ par : $v(x)=(x-1)u(x)$, $v(0)=0$, $v(1)=1$.

Partie I : Étude de la fonction u
1) a) Étudier la continuité et la dérivabilité de u à droite en 0.
b) Calculer les limites de u et préciser les branches infinies de la courbe Cu.
c) Étudier les variations de u et dresser son tableau de variations.
2) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $2\ln(x) \le \int[x,x^2]\, u(t)dt \le \ln(x)$.
3) On pose $\phi(x) = x\int[x,x^2]\, u(t)dt$.
Calculer : $\lim(x\to0■)\ \phi(x)/x$, $\lim(x\to0■)\ \phi(x)$, $\lim(x\to+\infty)\ \phi(x)/x$, $\lim(x\to+\infty)\ \phi(x)$.

Partie II : Étude de la fonction v
1) a) Montrer que v est continue sur $[0,+\infty[$.
b) Étudier la dérivabilité à droite de v en 0 et donner une interprétation géométrique.
2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $v'(x)=1-x+x\ln(x)$.
b) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $x\ln(x) > x-1$.
c) Dresser le tableau de variations de v et tracer sa courbe Cv.
3) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $x-1 \le \int[x,x^2]\, v(t)dt \le x^2-1$.

Partie III : Étude de la fonction f
On définit $f(x)=\ln(1+x)-\int[x,x^2]\, u(t)dt$, avec $f(0)=f(1)=0$.
1) a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $f(x)=\ln((x+1)/2)-\int[x,x^2]\, v(t)dt$.
2) a) Montrer que f est continue et dérivable en 1.
b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $f'(x)=1/(x+1)-v(x)$.
3) a) Montrer que f' est strictement négative sur $[0,+\infty[$, puis en déduire le signe de f.
b) Dresser le tableau de variations de f.

Partie IV : Étude de la fonction F
Soit $F(x)=\exp(\int[x,x^2]\, u(t)dt)$, avec $F(0)=F(1)=1$.
1) Vérifier que $F(x)=e^{(-f(x))}$.
2) En déduire que $\lim(x\to 1) \int[x,x^2]\, (1/\ln(t))\, dt = \ln(2)$.
3) a) Montrer qu’il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f'(\alpha)=0$.
b) Déterminer la branche infinie de la courbe CF.
c) Dresser le tableau de variations de F.

Fin de l’épreuve.