Série n°2 (Semath)

Exercice 1 : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

$\Delta = 4 + 48 = 49$

donc $x_1 = \dfrac{-2-7}{6} = -9/6 = -3/2$

$x_2 = \dfrac{-2+7}{6} = 5/6$

Ainsi on a :

x	$-\infty$		$-3/2$		$5/6$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{47}{8}$	$\searrow$	$\frac{-229}{216}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-3/2) = \frac{-27}{8} + \frac{9}{4} + \frac{12}{2} + 1 = \frac{-27 + 18 + 48 + 8}{8} = \frac{47}{8}$$

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5^3}{6^3} + \frac{5^2}{6^2} - \frac{20}{6} + 1 = \frac{125}{216} + \frac{25}{36} - \frac{20}{6} + 1 = \frac{125 + 150 - 720 + 216}{216} = \frac{-229}{216}$$

- f continue et st $\nearrow$ sur $]-\infty ; -3/2]$ et $f(]-\infty ; -\frac{3}{2}]) =]-\infty ; \frac{47}{8}]$ donc f réalise une bijection de $]-\infty ; -\frac{3}{2}]$ vers $]-\infty ; \frac{47}{8}]$ et $0 \in]-\infty ; \frac{47}{8}]$ donc l'équation admet une unique sol α dans $]-\infty ; -3/2[$

de même on montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β et γ resp. dans $]-3/2 ; 5/6[$ et $]5/6 ; +\infty[$

Ainsi f admet 3 racines dans $\mathbb{R}$. (α, β et γ)

Exercice 2 :

1/ mq $\forall x \in \mathbb{R}$: $\frac{x}{x^2+1} < \frac{\pi}{4}$

On a $\pi(x^2+1) - 4x = \pi x^2 - 4x + \pi$

$$\Delta = 16 - 4\pi^2$$

$$\pi > 3 \Rightarrow \pi^2 > 9 \Rightarrow 4\pi^2 > 36$$

$$\Rightarrow 16 - 4\pi^2 < 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $\pi x^2 - 4x + \pi > 0$

donc $\pi(x^2+1) > 4x$

$$\Rightarrow \pi > \frac{4x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} > \frac{x}{x^2+1}$$

2/ mq l'équation $\tan\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \sin(x)$ admet une infinité de sols dans $\mathbb{R}$

On pose $\varphi(x) = \tan\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \sin(x)$ sur l'intervalle

$I_k = \left[\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right]$; $k \in \mathbb{N}$

- $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ contin sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $\frac{x}{x^2+1} \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$

et $x \mapsto \tan x$ continue sur $[0 ; \pi/4]$

- donc $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

d'où φ est continue sur I_k

• $\varphi\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2+1}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$= a_k - (-1)^k \quad \left(\begin{array}{l}\text{on pose:} \\ a_k = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2+1}\right)\end{array}\right)$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right) = a_{k+1} - \sin\left(\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$

$= a_{k+1} - (-1)^{k+1}$

d'aprés la question 1 : $\begin{cases} 0 < a_k < 1 \\ 0 < a_{k+1} < 1 \end{cases}$

<u>si k pair</u> : $\begin{cases} a_k - 1 < 0 \\ a_{k+1} + 1 > 0 \end{cases}$

donc $\varphi\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right) < 0$

<u>si K est impair</u> : $\begin{cases} a_k + 1 > 0 \\ a_{k+1} - 1 < 0 \end{cases}$

donc $\varphi\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right) < 0$

d'aprés le T.V.I l'équation $\varphi(x)=0$ admet au moins une sol α_k dans I_k et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.

du coup l'équation admet une infinité de sols dans $\mathbb{R}$

Exercice 3 : f définie sur $\mathbb{R}$ tq $f(\mathbb{R}) = \{0;1\}$

On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$

Soit $a;b \in \mathbb{R}$ / $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$.

Si $a<b$: $f([a;b]) = [m;M]$ avec $\begin{cases} m = \inf_{a\leq x\leq b} f(x) \\ M = \max_{a\leq x\leq b} f(x) \end{cases}$

Comme $f(\mathbb{R}) = \{0;1\}$ donc $\begin{cases} m=0 \\ M=1 \end{cases}$

d'où $f([a;b]) = [0;1] \subset \{0;1\}$

absurde

Si $a>b$: on fait de même sur l'intervalle $[b;a]$

Exercice 4 : f continue de $[0;1]$ vers $[0;1]$.

mq $\exists c \in [0;1]$: $f(c)+f(1-c) = 2c$

on pose $\varphi(x) = f(x)+f(1-x) - 2x$

- $x \mapsto 1-x$ continue sur $[0;1]$ (Rest d'un poly)
et $\forall x \in [0;1]$: $1-x \in [0;1]$ (encadrement)
et f continue sur $[0;1]$
donc $x \mapsto f(1-x)$ est continue sur $[0;1]$ (comme composée)
- $x \mapsto f(x) - 2x$ continue sur $[0;1]$ (Comme diff)

donc φ continue sur $[0;1]$ (Comme somme)

d'autre part : $\varphi(0) = f(0)+f(1)$; $\varphi(1) = f(1)+f(0)-2$

on a : $f(0) \in [0;1]$ et $f(1) \in [0;1]$ donc $f(0)+f(1) \geq 0$

et $0 \leq f(0)+f(1) \leq 2$ donc $f(0)+f(1)-2 \leq 0$

donc $\varphi(0)\cdot\varphi(1) \leq 0$

d'après le T.V.I : $\exists c \in [0;1]$: $\varphi(c)=0$

çad tq $f(c)+f(1-c)=2c$

Exercice 5 : f continue sur $[a;b]$. $p>0$ et $q>0$

mq $\exists c \in]a;b[$: $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(c)$

On pose $\varphi(x)=(p+q)f(x)-pf(a)-qf(b)$

- φ continue sur $[a;b]$ (comme produit et somme)
- $\varphi(a)=(p+q)f(a)-pf(a)-qf(b)$

$=q(f(a)-f(b))$

$\varphi(b)=(p+q)f(b)-pf(a)-qf(b)$

$=p(f(b)-f(a))$

donc $\varphi(a)\cdot\varphi(b)=qp(f(a)-f(b))(f(b)-f(a))$

$=-pq(f(a)-f(b))^2 \leq 0$

donc $\exists c \in [a;b]$: $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(c)$

Exercice 6 : f continue sur $\mathbb{R}$ et non nulle tq :

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(|x|)=|f(x)|$. mq f est paire

- f continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x)\neq 0$

donc f a une signe constant sur $\mathbb{R}$

car sinon, supp que $\exists a;b \in \mathbb{R}$ /

~~[illegible]~~ et $f(a)\geq 0$ et $f(b)<0$

Comme f continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a;b]$, d'après le T.V.I : $\exists c \in]a;b[$: $f(c)=0$!!!

- On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq 0$.

du coup $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(|x|) = f(x)$

Par suite $f(-x) = f(|-x|) = f(|x|)$

donc $f(-x) = f(x)$

et $D_f = \mathbb{R}$ (sym/o)

cl : f est paire.

Exercice 7 : soit f continue sur $\mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$: $(f(x))^2 = 1$

mq : $(\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -1)$

- $(f(x))^2 = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$.

on supp que $\exists a, b \in \mathbb{R}$ / $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$

Comme $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a;b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases}$ donc

$\exists c \in]a;b[$: $f(c) = 0$

$\Rightarrow f^2(c) = 0$!!!

Exercice 8 : Soit f continue sur $[0;1]$ tq $f(0) = f(1)$

on pose pour $n \geq 2$:

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \text{ sur } \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$$

1/ $$\sum_{k=0}^{k=n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(0) - f(1)\right) = f(1) - f(0) = 0$$

e/ $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \Rightarrow \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\} /$
$f_n\left(\frac{i}{n}\right) \geq 0$ et
$f_n\left(\frac{j}{n}\right) \leq 0$

f_n continue sur $\left[\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right]$ (si $i < j$)

et $f_n\left(\frac{i}{n}\right) \cdot f_n\left(\frac{j}{n}\right) \leq 0$

$\Rightarrow \exists c \in \left[\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right] ; \quad f_n(c) = 0$

$\Rightarrow \exists c \in [0, 1] : f(c + 1/n) = f(c)$

Exercice 9 : f continue sur $[0, 2]$ tq $f(0) = f(2)$.

mq : $\exists (x_1, x_2) \in [0, 2]^2 : \begin{cases} f(x_1) = f(x_2) \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$

autrement dit mq $\exists x_1 \in [0, 2] : f(x_1) = f(1 + x_1)$

On pose $\varphi(x) = f(x) - f(1+x)$ sur $[0, 1]$.

- $x \mapsto 1 + x$ est continue sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1] : 1 + x \in [0, 2]$ et f continue sur $[0, 2]$ donc $x \mapsto f(x+1)$ est continue sur $[0, 1]$ d'où φ continue sur $[0, 1]$ comme différence.

- $\varphi(0) = f(0) - f(1)$; $\varphi(1) = f(1) - f(2)$
$= f(1) - f(0)$

donc $\varphi(0) \cdot \varphi(1) \leq 0$ $\quad (\varphi(0) \cdot \varphi(1) = -(f(0) - f(1))^2)$

d'après T.V.I : $\exists c \in [0, 1] ; \varphi(c) = 0$

çad $\exists c \in [0;1]$: $f(c) = f(1+c)$

(on pose $x_1 = c$ et $x_2 = 1+c$)

donc $\exists x_1 ; x_2 \in [0;2]$: $\begin{cases} f(x_1) = f(x_2) \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$

Exercice 10 :

soit f continue sur $[0;1]$ tq :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ \forall x \in [0; \frac{7}{10}] : f(x + \frac{3}{10}) \neq f(x) \end{cases}$$

on pose $\varphi(x) = f(x + \frac{3}{10}) - f(x)$

on a $\forall x \in [0; \frac{7}{10}]$: $\varphi(x) \neq 0$

et comme φ est continue sur $[0; \frac{7}{10}]$ donc

φ a un signe constant sur $[0; 7/10]$

on supposera par exemple que $\forall x \in [0; \frac{7}{10}]$: $\varphi(x) > 0$

donc
- $\varphi(0) > 0 \Rightarrow f(3/10) > 0$ $\quad (f(0) = 0)$
- $\varphi(\frac{1}{10}) > 0 \Rightarrow f(\frac{4}{10}) > f(\frac{1}{10})$
- $\varphi(\frac{2}{10}) > 0 \Rightarrow f(\frac{5}{10}) > f(2/10)$
- $\varphi(\frac{3}{10}) > 0 \Rightarrow f(\frac{6}{10}) > f(3/10) > 0$
- $\varphi(\frac{4}{10}) > 0 \Rightarrow f(\frac{7}{10}) > f(4/10)$
- $\varphi(\frac{5}{10}) > 0 \Rightarrow f(\frac{8}{10}) > f(5/10)$
- $\varphi(\frac{6}{10}) > 0 \Rightarrow f(9/10) > f(6/10)$
- $\varphi(\frac{7}{10}) > 0 \Rightarrow 0) f(1) > f(7/10)$

donc • $f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$; $f\left(\frac{4}{10}\right) < 0$

• $f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$; $f\left(\frac{6}{10}\right) > 0$

• $f\left(\frac{1}{10}\right) < 0$; $f\left(\frac{9}{10}\right) > 0$

on aura alors :

• f continue sur $[0;1]$

• $f\left(\frac{1}{10}\right) \cdot f\left(\frac{3}{10}\right) < 0 \Rightarrow \exists c_1 \in \left]\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right[; f(c_1) = 0$

$f\left(\frac{3}{10}\right) \cdot f\left(\frac{4}{10}\right) < 0 \Rightarrow \exists c_2 \in \left]\frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right[; f(c_2) = 0$

$f\left(\frac{4}{10}\right) \cdot f\left(\frac{6}{10}\right) < 0 \Rightarrow \exists c_3 \in \left]\frac{4}{10}; \frac{6}{10}\right[; f(c_3) = 0$

$f\left(\frac{6}{10}\right) \cdot f\left(\frac{7}{10}\right) < 0 \Rightarrow \exists c_4 \in \left]\frac{6}{10}; \frac{7}{10}\right[; f(c_4) = 0$

$f\left(\frac{7}{10}\right) \cdot f\left(\frac{9}{10}\right) < 0 \Rightarrow \exists c_5 \in \left]\frac{7}{10}; \frac{9}{10}\right[; f(c_5) = 0$

donc ~~Cf~~ il y'a 5 solutions et en plus de 0 et 1 on obtient 7 solutions. CQFD

Exercice 11 : f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x + 2 + x\cos\frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

1/ $\forall x > 0$: $x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \geq -x$

$\Rightarrow f(x) \geq x^3 - 5x + 2$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 5x + 2 = +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2/

• $x \mapsto \frac{\pi}{x}$ conti sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ conti sur $\mathbb{R}$

donc $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ contin sur $\mathbb{R}^*$ (composée)

d'ou $x \mapsto x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit)

finalement f contin sur $\mathbb{R}^*$ (somme)

• $\lim_{x \to 0^+} f(x)$?

on a $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$: $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$

$$\Rightarrow -x \leq x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x$$

$$\Rightarrow x^3 - 5x + 2 \leq f(x) \leq x^3 - 3x + 2$$

or $\lim_{x \to 0^+} x^3 - 5x + 2 = \lim_{x \to 0^+} x^3 - 3x + 2 = 0$

donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

or $f(0) = 2$ donc f continue en 0^+

(de même on montre que f conti en 0^-)

en faisant attention au signe de x

donc f continue en 0

c/c : f continue sur $\mathbb{R}$

3/ mq $\exists a \in]0;1[: f(a+1) = f(a)$

On pose $\varphi(x) = f(x+1) - f(x)$

• $x \mapsto x+1$ contin sur $[0;1]$ (Res d'un poly)

f contin sur $\mathbb{R}$

donc $x \mapsto f(x+1)$ continue sur $[0;1]$

par suite φ continue sur $[0;1]$

- $\varphi(0) = f(1) - f(0) = -2 - 2 = -4 < 0$

$\varphi(1) = f(2) - f(1) = 2 > 0$

donc $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$

d'après le T.V.I : $\exists a \in]0;1[: f(a+1) = f(a)$