Année : 2024/2025	**Série n° : 2**	**2bac sc math**
ouikrim	**TVI**	**fkih ben salah**

Résumé

1. $\bullet \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ k \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = k$

2. $\bullet \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ k \text{ strictement compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = k$

3. $\bullet \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ k \text{ strictement compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \\ \text{f strictement monotone sur } [a,b] \end{cases} \Rightarrow \exists! \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = k$

4. $\bullet \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = 0$

5. $\bullet \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = 0$

6. $\bullet \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \\ \text{f strictement monotone sur } [a,b] \end{cases} \Rightarrow \exists! \alpha \in]a,b[: f(\alpha) = 0$

s'entraîner

correction en classe

Exercice 1

montrer que les equations suivantes admettent au moins une solution dans l'intervalle I indiqué:
- $x^7 - x^2 + 1 = 0 \quad I = [-2, 0]$
- $2\tan(x) = 3x \quad I = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$
- $x^3 - 3x^2 + 15x - 7 = 0 \quad I = \mathbb{R}$
- $\sum_{k=1}^{k=n} \cos(kx) = 0 \quad I = [0, \pi]$

Exercice 2

montrer que :

$\bullet \exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: \frac{1-\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$

$\bullet \exists \beta \in \mathbb{R} : \frac{2}{(\beta+1)^2} = \cos(\beta)$

$\bullet \exists \gamma \in]0,1[: \frac{\gamma}{1+\sqrt{\gamma}} = 1 - \gamma^2$

• montrer que $\exists! c \in]a,b[$:
$\sqrt{\frac{b-c}{c-a}} - \sqrt{\frac{c-a}{b-c}} = \sqrt{(b-c)(c-a)}$

Exercice 3

• montrer que l'équation $\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5} = 0$
admet une solution unique dans $]1,2[$

• soit $n \in \mathbb{N}^*$:
montrer que $\exists! \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: \frac{\sin^n(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{1}{4} - \alpha$

• soient $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$
montrer que C_f et C_g se coupent en un unique point sur l'intrevalle $[1,2]$

correction sur la chaîne youtube : ouikrimath

Exercice 1

• quel est le nombre de racines de la fonction :
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ puis graçe á la dichotomie , encadrer ces racines á 10^{-1} prés.

Exercice 2

1. montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \frac{x}{x^2+1} < \frac{\pi}{4}$
2. montrer que l'equation $\tan\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \sin(x)$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$

Exercice 3

• soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$
montrer que f est discontinue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

• soit f définie et continue de $[0,1]$ vers $[0,1]$.
montrer que $\exists c \in [0,1] : f(c) + f(1-c) = 2c$

Exercice 5

• soit f continue sur $[a,b]$ et $p > 0$ et $q > 0$.
montrer que $\exists c \in [a,b] : pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$

Exercice 6

• soit f continue et non nulle sur $\mathbb{R}$ telle que:
$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(|x|) = |f(x)|$. momtrer que f est paire

correction en classe

Exercice 4

• montrer que l'equation $\cos(x)=\dfrac{1}{x}$ admet une infinités de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$
• montrer que l'equation $\sin(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^+$ $\left(\text{utiliser les intervalles } \left[\frac{(4k-1)\pi}{2},\frac{(4k+1)\pi}{2}\right], k\in\mathbb{N}^*\right)$

Exercice 5

• quel est le nombre de racines de la fonction $f(x)=x\sin(x)+\cos(x)$ dans $[0,2\pi]$
• quel est le nombre de solutions de l'equation : $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-2x=-3$
• determiner suivant les valeurs de λ le nombre de solutions de l'equation :
$x^3-3\lambda\cdot x^2-3x+\lambda=0$ dans $]0,1[$
• determiner le domaine de definition de la fonction definie par $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{4x^3-12x+1}$

Exercice 6

• soit $a>0$ et f continue sur $[0,a]$ avec $f(0)=0$ et $f(a)=a$
montrer que $\exists\alpha\in]0,a[\ :\ f(\alpha)=\dfrac{a-\alpha}{a+\alpha}$
• soit f continue sur $[a,b]$. montrer que , $\exists\alpha\in]a,b[$:
$f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-a}+\dfrac{1}{\alpha-b}$
• soit f continue sur $[1,2]$ avec $f([1,2])\subset[1,2]$
montrer que ,$\exists\alpha\in]1,2[:f(\alpha)=\dfrac{-\alpha}{2(\alpha-1)}$

Exercice 7

• soit f une fonction definie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{Z}$

1. montrer que f est constante .
2. application:
déterminer toutes les fonctions f telle que
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad E\left(f^2(x)\right)=f(x)$$

Exercice 8

• soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,a_2,.....,a_n$ des réels de $[0,1]$
on pose $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}|x-a_k|$
calculer $f_n(0)+f_n(1)$ et deduire que:
$$\exists u\in]0,1[:f_n(u)=\frac{1}{2}$$

Exercice 9

• on cherche à déterminer le nombre de triangle ABC , rectangles en A tels que BC=12 et le périmètre vaut 28 . pour cela posons $AC=x$

1. exprimer le périmètre $p(x)$ de ABC en fonction x.
2. déduire le nombre de triangles possibles.

correction sur la chaîne youtube : ouikrimath

Exercice 7

• soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall x\in\mathbb{R}: (f(x))^2=1$
montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=1)$ ou $(\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=-1)$

Exercice 8

• soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$
on pose pour $n\geq 2$:
$f_n(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$ sur $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$

1. calculer $\sum_{k=0}^{k=n-1}f_n\left(\dfrac{k}{n}\right)$
2. montrer que $\exists x_0\in[0,1]$:
$f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 9

• soit la fonction f continue sur $[0,2]$ telle que $f(0)=f(2)$.
montrer que
$$\exists x_1,x_2\in[0,2]:\begin{cases}f(x_1)=f(x_2)\\ x_2-x_1=1\end{cases}$$

Exercice 10

• soit$f$ continue sur $[0,1]$ telle que:
$$\begin{cases}f(0)=f(1)=0,\\ \forall x\in\left[0,\dfrac{7}{10}\right], \qquad f\left(x+\dfrac{3}{10}\right)\neq f(x)\end{cases}$$
montrer que C_f coupe (OX) en au moins 7 points dans $[0,1]$

Exercice 11

• soit f definie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases}f(x)=x^3-4x+2+x\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si}\quad x\neq 0\\ f(0)=2\end{cases}$$

1. calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
3. montrer que :
$$\exists a\in]0,1[\,,f(a+1)=f(a)$$