- La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements interviendront pour une **<u>Part importante</u>** dans l'appréciation des copies
- Le sujet comporte trois exercices et un problème
  - Un exercice sur les structures algébriques
  - Un exercice sur les complexes
  - Un exercice d'arithmétique
  - Et un problème d'analyse

Exercice n°1 (3.5 points)

On pose $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}$

Et Soit $E=\left\{xI+yJ\ /\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ On pose $M(x,y)=xI+yJ$

φ l'application de $\mathbb{C}$ vers E tel que $\varphi\left(x+iy\sqrt{3}\right)=xI+yJ$

0.25	1) Montrer que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel réel
0.5	2) Montrer que (I,J) est une base de E et en déduire la dimension de E
0.5	3) Montrer que $J^2=-3I$,en déduire que E est stable dans $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$
0.75	4) a- Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E,\times)$
0.5	b- Déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix}a+b&4b\\-b&a-b\end{pmatrix}$ en donnant la condition de son existence.
0.5	5) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif
0.5	6) Résoudre dans E l'équation $X^3=I$

Exercice n°2 (3.5points)

I)On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2mz+m^2+4=0$ avec $m\in\mathbb{C}^*$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

0.5

0.75 2) On suppose que $m=2e^{i\theta}$ et $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ Donner les solutions (E) de sous forme trigonométrique

3) Soient A et B respectivement les image de $m+2i$ et $m-2i$

0.5 a- Déterminer chacun des ensembles suivants

$(D)=\{M(m)\in P / OA=OB\}$ et $(C)=\{M(m)\in P / \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\}$

0.25

b- Quelles sont les valeurs possibles de m pour que le triangle OAB soit rectangle et isocèle en O

II) On considère les points $I(1.0),\Omega(1.1)$ et $C(2,0)$

Soient $M_1(z_1)$ l'image de $M(z)$ par la symétrie centrale de centre I

et $M_2(z_2)$ l'image de $M(z)$ par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 1) Montrer que $z_1=-z+2$ et $z_2=iz+2$

1 2) Déterminer l'ensemble des points M pour que les points C,Ω,M_1 et M_2 soient cocycliques

Exercice n°3 (3 points)

Dans $\mathbb{Z}$ On considère le système $(S):\begin{cases}n\equiv 3[5]\\ n\equiv 9[17]\end{cases}$ et Dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 5x-17y=6$

0.25 1) a- Déterminer une solution particulière de (E)

0.25 b- résoudre l'équation (E)

0.5 2) a- Montrer que (n solution de $(S)\Leftrightarrow n\equiv 43[85]$)

0.25 b- Résoudre le système (S)

3) Soit n une solution de (S)

0.5 a- Montrer que $n\wedge 17=1$ et $n\wedge 5=1$

0.5 b- Montrer que $n^{16}\equiv 1[85]$

0.25 c- En déduire que $n^{2019}-n^3$ est un multiple de 85

0.5 4) Existe-t-il un entier naturel m solution de (S) et vérifiant : $m=\overline{1aba}^{(5)}$

Problème (10points)

Partie I Soit $x \in]-1,+\infty[- \{0\}$

0.75 1) a-Montrer que : $\dfrac{x}{3(x+1)} \leq \dfrac{1}{x^2}\int_0^x \dfrac{t^2}{t+1}dt \leq \dfrac{x}{3}$

0.25 b- Montrer que : $\int_0^x \dfrac{t^2}{t+1}dt = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$

0.25 2) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$

0.5 3) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[- \{1\}); x\ln x > x-1$

Partie II Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}; x \in]0,+\infty[- \{1\} \\ f(1) = 1 \end{cases}$

0.5 1) Montrer f que est continue et dérivable en 1

0.5 2) Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

0.75 3) Tracer f et sa tangente au point 1 dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0. 5 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $nf(x) = n+1$ admet une solution unique u_n dans $]0,+\infty[$ et que $0 < u_n < 1$

0.5 5) a- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n>0}$

0.5 b- En déduire que $(u_n)_{n>0}$ est convergente et calculer sa limite

0.75 c- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-u_n) = 2$ puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = e^{-2}$

Partie III Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt; x \in]0,+\infty[\\ F(0) = 0 \end{cases}$

0.5 1) a- Montrer que $(\forall x \in]0,1[); \dfrac{2x\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x\ln x$

0.25 b- Montrer que F est continue à droite en 0

0.25 c-Montrer que C_F admet une demie tangente verticale à droite en 0

0.5 2) a- Montrer que $(\forall x \in]1,+\infty[); \ln x \cdot \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2\ln x \cdot \ln(x+1)$

0.25 b- Etudier la branche infinie de C_F au voisinage de $+\infty$

0.5 3) a- Montrer que F est dérivable au point 1

0.5 b- Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$

0.5 c-Montrer que $(\forall]0,1[\cup]1,+\infty[), F'(x) = \dfrac{(3x-1)\ln x}{x^2-1}$

0.25 4) a- Montrer que $F'(x)$ est du signe de $(3x-1)(x+1)$

0.25 b- dresser le tableau de variations de F

0.5 c- tracer C_F dans un repère orthonormé autre que $(O,\vec{i},\vec{j})$ .on prendra $F\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx \dfrac{-1}{2}$