Année : 2024/2025	DS 1——S1	2bac pc
M.ouikrim	fkih ben salh	ecole les nations

● une bonne rédaction va être récompensé
● l'usage de la calculatrice non programmable est autorisé

PROBLÈME

I - soient les fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{9}{8}x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = x^5 + x.$$

1. montrer que g est impaire.

2. a - soit n entier naturel impair et $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^n = a$.
   b - Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
   c - Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
   d - Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
   e - Représenter une allure de la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormé (on vous donne la courbe de f).

3. a - Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et vérifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
   b - Déduire que $\forall x < \alpha \quad f(x) > g(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.
   c - Déduire que $\forall x < \alpha \quad g(-x) + f(x) > 0$.

4. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^5} & \text{si} \quad x \leq \alpha, \\ \sqrt{x + \frac{9}{8}x^3} & \text{si} \quad x > \alpha. \end{cases}$$

   a - Montrer que h est continue sur $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.
   b - Montrer que h est continue en α.
   c - Déduire que $h(\mathbb{R})$ est un intervalle.
   d - Comparer les nombres $h\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$ et $h\left(\sqrt[3]{2}\right)$ (justifier).
   e - montrer que la fonction $x \mapsto xh\left(\dfrac{1}{x}\right) - h(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
   f - Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xh\left(\frac{1}{x}\right) - h(x)$.

Ci-joint la courbe de f :