semath

Série n°2 (correction de la "Révision chez soi")

Exercice 1 : Soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

$$\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{1/2} + \left(b^2 + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{4}{3}}\left(a^{2-\frac{4}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\frac{4}{3}}\left(b^{2-\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{1/2}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^{4/3}\right)^{1/2}\left(b^{2/3} + a^{2/3}\right)^{1/2}$$

$$= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{2/3}\right)^{1/2}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{2/3}\right) = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$$

Calculons $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

on a :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)$$

$$= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) + \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)}{1 - \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) \cdot \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)}$$

d'autre part : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$

$$= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = 7/9$$

ainsi on a :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{56+9}{72}}{\frac{72-7}{72}} = \frac{65}{65} = 1$$

or on a :

$$\begin{cases} 0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < \frac{1}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < \frac{1}{8} < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{6} \\ 0 < \arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{6} \\ 0 < \arctan\left(\frac{1}{8}\right) < \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\tfrac{1}{5}\right) + \arctan\left(\tfrac{1}{8}\right) < \tfrac{\pi}{2}$$

Ainsi

$$\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\tfrac{1}{5}\right) + \arctan\left(\tfrac{1}{8}\right) = \pi/4$$

<u>Exercice 2</u>

1/ soit $t \in [0; \frac{\pi}{2}[$. on pose $\varphi(t) = 2\sin t + \tan t - 3t$

φ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fts dérivables.

et on a : $\varphi'(t) = 2\cos t + 1 + \tan^2 t - 3$

$$= 2\cos t + \frac{1}{\cos^2 t} - 3 = \frac{-3\cos^2 t + 2\cos^3 t + 1}{\cos^2(t)}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 t + 2\cos^3 t - 2\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{(1-\cos t)(1+\cos t) + 2\cos^2 t(\cos t - 1)}{\cos^2(t)}$$

$$= \frac{(1-\cos t)(1+\cos t - 2\cos^2 t)}{\cos^2(t)} = \frac{(1-\cos t)(\cos t - 1)(-1-2\cos t)}{\cos^2(t)}$$

$$\left(-2X^2 + X + 1 = (X-1)(-2X-1)\right)$$

donc $\varphi'(t) = \dfrac{(1-\cos t)^2(1+2\cos t)}{\cos^2(t)}$.

or $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}[$: $\begin{cases} (1-\cos t)^2 \geq 0 \\ 1 + 2\cos t > 0 \\ \cos^2(t) > 0 \end{cases}$

donc $\varphi'(t) \geq 0$ et φ' ne s'annule qu'en $t = 0$

donc φ est strictement croissante sur $[0; \pi/2[$

ainsi on a : $t > 0 \Rightarrow \varphi(t) > \varphi(0)$

$$\Rightarrow 2\sin t + \tan t - 3t > 0$$

$$\Rightarrow \underline{2\sin t + \tan t > 3t.}$$

2 méthode :

on pose $\varphi(t) = 2\sin(t) + \tan(t)$

• φ est dérivable sur $[0; \pi/2[$ (somme de fts dérivables)

et $\varphi'(t) = 2\cos t + 1 + \tan^2 t$

• φ' est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ (" " ")

et $\varphi''(t) = -2\sin t + 2\tan t(1+\tan^2 t)$

$$= -2\sin t + 2\sin t\left(\frac{1+\tan^2 t}{\cos t}\right)$$

$$= 2\sin t\left(\frac{1+\tan^2 t}{\cos t} - 1\right)$$

$$= 2\sin t\left(\frac{1+\tan^2 t - \cos t}{\cos t}\right)$$

or $1-\cos t \geq 0$ et $\tan^2 t \geq 0$ et $\frac{\sin t}{\cos t} \geq 0$

donc $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}[: \varphi''(t) \geq 0$

ainsi φ est convexe sur $[0; \pi/2[$

du coup ; $\mathcal{C}_\varphi$ est au dessus de ses tangentes sur $[0; \pi/2[$.

Comme l'équation de la tangente en 0 est

$y = \varphi'(0)(t-0) + \varphi(0)$ çad $y = 3t$

donc $\forall t \in]0; \pi/2[: \varphi(t) > 3t$

Par suite $2\sin t + \tan t > 3t$

2/ **déduction** : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

on a $1 + \tan^2(\arctan x) = \dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\arctan x)} = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2(\arctan(x)) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow |\sin(\arctan x)| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (0 < \arctan x < \pi/2)$$

~~Ainsi on a~~ d'autre part $0 < \arctan x < \pi/2$
donc on peut appliquer l'inégalité de (1)
pour $t = \arctan x$.

on obtient : $2\sin(\arctan x) + \tan(\arctan x) > 3\arctan x$

$$\Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + x > 3\arctan x$$

$$\Rightarrow \frac{3\arctan x}{x} < \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{\arctan(x)}{x} < \frac{2+\sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}$$

et comme $\arctan x > 0$ et $x > 0$ donc $\frac{\arctan x}{x} > 0$

Ainsi on a $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$: $0 < \frac{\arctan x}{x} < \frac{2+\sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}$

Si $x \in \mathbb{R}_-^*$ alors $-x \in \mathbb{R}_+^*$ et on lui applique le résultat précédent ($\mathbb{R}_+^*$).

$$0 < \frac{\arctan(-x)}{-x} < \frac{2+\sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{-\arctan(x)}{-x} < \frac{2+\sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\arctan(x)}{x} < \frac{2+\sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}$$

finalement : $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$0 < \frac{\arctan(x)}{x} < \frac{2+\sqrt{1+x^2}}{3\sqrt{1+x^2}}$$

<u>Exercice 3</u> : Soit f définie sur $]-a; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x+a)} \quad \text{avec} \quad 0 < a < \pi/2$$

1/

- $\lim\limits_{x \to (-a)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-a)^+} \dfrac{\sin(x)}{\sin(x+a)}$

$$= \text{"} \frac{-\sin(a)}{0^+} \text{"} = -\infty \quad \left(\begin{array}{l} x \to (-a)^+ \Rightarrow x+a \to 0^+ \\ \Rightarrow \sin(x+a) > 0 \end{array} \right)$$

- $x \mapsto x+a$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sin(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \sin(x+a)$ dérivable sur $]-a; \pi/2[$ (sur $\mathbb{R}$ en fait)

et $x \mapsto \sin(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-a; \frac{\pi}{2}[$

et $-a < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x+a < \frac{\pi}{2}+a < \pi$

$$\Rightarrow \sin(x+a) \neq 0$$

donc f est dérivable sur $]-a; \frac{\pi}{2}[$

et par suite elle est continue sur $]-a; \pi/2[$

- f dérivable sur $]-a; \pi/2[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \sin(x+a) - \sin(x) \cdot \cos(x+a)}{\sin^2(x+a)}$$

$$= \frac{\cos x(\sin x \cos a + \cos x \sin a) - \sin x(\cos x \cos a - \sin x \cdot \sin a)}{\sin^2(x+a)}$$

$$= \frac{\cos^2 x \cdot \sin a + \sin^2 x \sin a}{\sin^2(x+a)} = \frac{\sin a}{\sin^2(x+a)} > 0$$

car $0 < a < \pi/2$

donc f est strictement $\nearrow$ sur $]-a; \pi/2[$

- $f(]-a; \frac{\pi}{2}[) =]\lim_{x \to (-a)^+} f(x); \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x)[$

$$=]-\infty; \frac{1}{\cos(a)}[\quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a\right)$$

donc f réalise une bijection de $]-a; \frac{\pi}{2}[$ vers $]-\infty; \frac{1}{\cos(a)}[$
du coup ; elle admet une ft réciproque f^{-1} définie
sur $]-\infty; \frac{1}{\cos(a)}[$

2/ déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x \in]-\infty; \frac{1}{\cos(a)}[\setminus \{0\}$; $y \in]-a; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

$$\iff \frac{\sin(y)}{\sin(a+y)} = x \iff \frac{\sin(a+y)}{\sin(y)} = \frac{1}{x}$$

$$\iff \frac{\sin(a)\cos(y) + \cos(a)\sin(y)}{\sin(y)} = \frac{1}{x}$$

$$\iff \frac{\sin(a)}{\tan(y)} + \cos(a) = \frac{1}{x}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin(a)}{\tan(y)} = \dfrac{1}{x} - \cos(a) \Leftrightarrow \dfrac{\tan y}{\sin a} = \dfrac{x}{1-x\cos(a)}$ $\left(\begin{array}{c}\sin a \neq 0 \\ \text{et} \\ 1-x\cos a \neq 0\end{array}\right)$

$$\Leftrightarrow \tan y = \frac{x\sin(a)}{1-x\cos(a)}$$

$$\Leftrightarrow \arctan(\tan(y)) = \arctan\left(\frac{x\sin(a)}{1-x\cos(a)}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \arctan\left(\frac{x\sin(a)}{1-x\cos(a)}\right) \quad \left(-a < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right.$$

car $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$)

donc $\forall x \in]-\infty; \frac{1}{\cos(a)}[\setminus \{0\}$: $f^{-1}(x) = \arctan\left(\frac{x\sin(a)}{1-x\cos(a)}\right)$

et comme $f(0)=0$ donc $f^{-1}(0)=0$

de plus $\arctan\left(\dfrac{0\sin(a)}{1-0\cdot\cos(a)}\right) = 0$

donc $\forall x \in]-\infty; \frac{1}{\cos(a)}[$:

$$f^{-1}(x) = \arctan\left(\frac{x\sin(a)}{1-x\cos(a)}\right)$$

Exercice 4 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan(3x) + 2x - 1.$$

1/ ⊛ on a : • $\begin{cases} x \mapsto 3x \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(x) \text{ continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$ donc $x \mapsto \arctan(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

• $x \mapsto 2x-1$ continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

⊛ Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x < y \Rightarrow \begin{cases} \arctan(3x) < \arctan(3y) \\ 2x-1 < 2y-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \arctan(3x) + 2x-1 < \arctan(3y) + 2y - 1$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

donc f est strict croissante sur $\mathbb{R}$

* $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$
$=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \right)$

donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

2/ soit $x \in \mathbb{R}$. $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(x)$ (f bij)
$\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$
$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \quad (\varphi(x) = f(x) - x)$

on a : • φ continue sur $\mathbb{R}$ (comme diff de 2 fct continues)

• $\varphi(x) = \arctan(3x) + x - 1$

soit $x, y \in \mathbb{R}$. on a $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$

donc φ str $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

• $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} \varphi(x); \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)[= \mathbb{R}$

donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le th de la bijection.

$\exists! \alpha \in \mathbb{R} / \quad \varphi(\alpha) = 0$

çad $f(\alpha) = \alpha$ du coup $f^{-1}(\alpha) = \alpha$

⊛ d'autre part :

$\varphi(0) = f(0) - 0 = -1$ et $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}$
$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} - 1$
$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3\pi - 8}{12} > 0$

donc $\varphi(0) < 0 < \varphi(\frac{1}{3})$

qad $\varphi(0) < \varphi(\alpha) < \varphi(\frac{1}{3})$

Comme φ est st $\nearrow_{\text{sur } \mathbb{R}}$ alors $0 < \alpha < \frac{1}{3}$

3/ $f(\alpha) = \alpha \iff \arctan(3\alpha) + \alpha - 1 = 0$

$\iff \alpha = 1 - \arctan(3\alpha)$

on a : $\alpha < \frac{1}{3} \Rightarrow 3\alpha < 1$

$\Rightarrow \arctan(3\alpha) < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow -\arctan(3\alpha) > -\pi/4$

$\Rightarrow 1 - \arctan(3\alpha) > 1 - \pi/4 \Rightarrow \alpha > 1 - \pi/4$

on sait déjà que $\alpha < 1/3$ donc

$1 - \frac{\pi}{4} < \alpha < 1/3$

4/ on a :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

$x > \alpha \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(\alpha)$ (φ est st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow f(x) - x > 0$ ($\varphi(\alpha) = 0$)

$\Rightarrow f(x) > x$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(x)$ (f st $\nearrow$ sur $\mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}$ st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow x > f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) < x$

<u>Exercice 5</u> :

1/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t - 1}{t^n - 1}$ $\left(\begin{array}{c} t = \sqrt[n]{1+x} \\ \Downarrow \\ x = t^n - 1 \end{array}\right)$

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t - 1}{(t-1)\sum_{k=0}^{n-1} t^k} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k}$

$$= \frac{1}{n} \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 \Rightarrow 1 \times (n-1-0+1) = n \right)$$

2/ $\bullet \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3} - \sqrt[6]{(x+1)^2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt[6]{(x+1)^2} \left(\frac{\sqrt[6]{x+1} - 1}{x} \right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{6} = 1/6 .$$

$\bullet \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}\,\sqrt[6]{(x+1)^2} - 1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1 + 1)\,\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)}{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} + \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} .$$

3/ montrons par recurrence que $\forall n \geq 3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x+1} \ldots \sqrt[n]{x+1} - 1}{x} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Initialisation : pour $n = 3$.

$\bullet \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = 5/6$ (ce qui précède)

$\bullet \sum_{k=2}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 5/6$

d'ou $P(3)$ est vrai

hérédité: soit $n \geq 3$ tq $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x+1}\cdots\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$

$$= \sum_{k=2}^{n} 1/k$$

et mq $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x+1}\cdots\sqrt[n+1]{x+1}-1}{x} = \sum_{k=2}^{n+1} 1/k$

on a: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x+1}\cdots\sqrt[n+1]{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1}\cdots\sqrt[n]{x+1}-1+1)\sqrt[n+1]{x+1}-1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1}\cdots\sqrt[n]{x+1}-1)\sqrt[n+1]{x+1} + \sqrt[n+1]{x+1}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x+1}\cdots\sqrt[n]{x+1}-1}{x}\right)\sqrt[n+1]{x+1} + \frac{\sqrt[n+1]{x+1}-1}{x}$$

$$= \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) \times 1 + \frac{1}{n+1} \quad \text{(ce qui précède)}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

cl: d'où le résultat.

Exercice 6:

1/. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt[6]{(x-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt[6]{(x-1)^2}}$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} \quad \left(t = \sqrt[6]{x-1}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1-t}{t^3} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x-x^3} - \sqrt[4]{x^4-x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[4]{\sqrt[3]{(x-x^3)^4}} - \sqrt[4]{x^4-x^2+1}$

on pose $a = \sqrt[3]{(x-x^3)^4}$ et $b = x^4 - x^2 + 1$

or $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}=\dfrac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}$

donc la limite devient :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-x^3)^4}-x^4+x^2-1}{\underbrace{\left(\sqrt{\sqrt[3]{(x-x^3)^4}}+\sqrt{x^4-x^2+1}\right)\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{(x-x^3)^4}}+\sqrt[4]{x^4-x^2+1}\right)}_{A}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-x^3)^4}-x^4}{A}+\frac{x^2-1}{A}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-x^3)^4}-\sqrt[3]{x^{12}}}{A}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-x^3)^4-x^{12}}{A\left(\underbrace{\sqrt[3]{(x-x^3)^8}+x^4\sqrt[3]{(x-x^3)^4}+\sqrt[3]{x^{24}}}_{B}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{12}\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4-1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^6\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}+x^2\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{-x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)B}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{12}\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4-1\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)(-x)\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)B}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{12}\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4-1\right)}{-x^3\underbrace{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)}_{C}\cdot B}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{12}\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4-1\right)}{-x^3\cdot C\cdot\left(x^8\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^8}+x^8\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+x^8\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4-1\right)}{-C\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^8}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2-1\right)\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2+1\right)}{-C\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^8}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\times\frac{\left(\frac{1}{x^2}-2\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2+1\right)}{D}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2+1\right)}{D}$$

$= 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1} \right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{(x+1)-(x-1)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-1/x}\right)\left(\sqrt[4]{x}\right)\left(\sqrt[4]{1+1/x}+\sqrt[4]{1-1/x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^{3/2}}{x^{1/2} \cdot x^{1/4}\left(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x}\right)\left(\sqrt[4]{1+1/x}+\sqrt[4]{1-1/x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/4}} \times \frac{2}{\left(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x}\right)\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-1/x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{3/4} \times \frac{2}{\left(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x}\right)\left(\sqrt[4]{1+1/x}+\sqrt[4]{1-1/x}\right)}$$

$= +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arctan(\sqrt{x}) - \arctan(\sqrt[3]{x})}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \arctan(\sqrt[3]{x})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\arctan(\sqrt{x}) - \pi/4}{x-1} - \frac{\arctan(\sqrt[3]{x}) - \pi/4}{x-1}$$

→ calculons $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(\sqrt{x}) - \pi/4}{x-1}$

On pose $t = \arctan(\sqrt{x})$. $(x = \tan^2(t))$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{t-\frac{\pi}{4}}{\tan^2(t)-1} = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\dfrac{\tan^2(t)-1}{t-\pi/4}}$$

$$= \frac{1}{\varphi'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{4}.$$

avec $\varphi(t) = \tan^2(t)$. φ dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

et $\varphi'(t) = 2\tan t\,(1+\tan^2(t))$

→ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(\sqrt[3]{x}) - \pi/4}{x-1}$

on pose $t = \arctan(\sqrt[3]{x})$. $(x = \tan^3(t))$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{t-\pi/4}{\tan^3(t)-1} = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\dfrac{\tan^3(t)-1}{t-\pi/4}}$$

$$= \frac{1}{\psi'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{6}$$

avec $\psi(t) = \tan^3(t)$. ψ dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

et $\psi'(t) = 3\tan^2(t)\,(1+\tan^2(t))$

d'ou le résultat est : $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

• $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x}} - x) - \pi/2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) - \pi/2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}\right) - \pi/2}{x} = \lim_{x\to 0^+} - \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} - \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}} \times \frac{\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} - \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}} \times \frac{1}{\sqrt{x}(1-x\sqrt{x})}$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x\sqrt{x})} = +\infty \end{cases}$

Remarques :

- Si $x \leqslant 3$ alors $x-3 \leqslant 0$ donc $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x-3) \leqslant 0$

et $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \pi/2$

et $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x+3) < \pi/2$

d'où $-\pi < \arctan(x-3) + \arctan(x+3) + \arctan(x) < \pi$

mais $\frac{5\pi}{4} > \pi$

donc $S \subset]3 ; +\infty[$.

Ainsi $-1-\sqrt{3}$ et $-1+\sqrt{3}$ sont éliminés

- (E) $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pi/4$

(*) $\Leftrightarrow \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right)$

d'autre part : $0 < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{6}$ et $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$

donc $0 < \frac{1}{x+3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $0 < \frac{1}{x} < \frac{\sqrt{3}}{3}$

d'où $0 < \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) < \pi/6$ et $0 < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \pi/6$

donc $0 < \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \pi/3$

et $0 < \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) < \pi/2$

$\Rightarrow -\pi/2 < -\arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) < 0$

$\Rightarrow -\pi/4 < \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) < \pi/4$

du coup on aura :

$(*) \Leftrightarrow \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right)\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x(x+3)}} = \frac{1 - \frac{1}{x-3}}{1 + \frac{1}{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x(x+3)-1} = \frac{x-4}{x-2}$$

$\Leftrightarrow (2x+3)(x-2) = (x-4)(x^2+3x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3x - 6 = x^3 + 3x^2 - x - 4x^2 - 12x + 4$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x^3 + 12x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 12x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 10x - 2x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-5) + 2x(x-5) - 2(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 + 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0$ ou $x^2 + 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ ou $\begin{cases} x = -1-\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ x = -1+\sqrt{3} \end{cases}$ (utilisé Δ)

Comme $x > 3$ alors $x = 5$

$$S = \{5\}$$

Exercice 7 :

1/ mq $\forall x \in \mathbb{R}$: $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{\pi}{2}$

ça revient à mq : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\tan(\arctan(x)) = x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)\right) = \dfrac{1}{\tan(2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x))}$

$$= \dfrac{1}{\dfrac{2\tan(\arctan(\sqrt{1+x^2}-x))}{1-\tan^2(\arctan(\sqrt{1+x^2}-x))}} \quad \left(\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)$$

$$= \frac{1-(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{2(\sqrt{1+x^2}-x)} = \frac{1-(1+x^2)+2x\sqrt{1+x^2}-x^2}{2(\sqrt{1+x^2}-x)}$$

$$= \frac{-2x^2+2x\sqrt{1+x^2}}{2(\sqrt{1+x^2}-x)} = \frac{2x\cancel{(\sqrt{1+x^2}-x)}}{2\cancel{(\sqrt{1+x^2}-x)}}$$

$$= x$$

donc $\tan(\arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)\right)$

d'autre part :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\arctan x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

et $\sqrt{1+x^2}-x > 0$ donc $0 < \arctan(\sqrt{1+x^2}-x) < \pi/2$

$\Rightarrow -\pi < -2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) < 0$

$\Rightarrow -\pi/2 < \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) < \pi/2$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$: $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \pi/2$

2/ • soit $x>0$.

on sait que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pi/2$

et $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \pi/2$

donc $2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \arctan(1/x)$

càd $\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{1}{2}\arctan(1/x)$

de même on montre pour $x<0$,

$\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arctan(1/x)$