Lycée Mohammed V	Date : 4 mai 2016
2■ année Bac Sciences Mathématiques A – B	Durée : 2h30 – Coefficient : 9

Devoir Surveillé n°3

Exercice 1 : Probabilités (5 points)

Un urne contient **4 boules noires** et **3 boules blanches**. On effectue l'expérience suivante :

– On tire une boule de l'urne.
 • Si elle est **noire**, on la remet dans l'urne puis on tire ensuite **deux boules successivement** de cette urne.
 • Si elle est **blanche**, on la met de côté puis on tire ensuite **deux boules successivement et sans remise** de cette urne.

1) Montrer que le nombre des issues possibles de cette expérience est **174**.
2) Montrer que la probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est **47/245**.
3) Sachant que les trois boules tirées sont de la même couleur, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit **blanche** ?
4) Soit X la variable aléatoire égale au **nombre de boules blanches restant dans l'urne** à la fin de l'expérience.
 a) Déterminer les valeurs possibles de X.
 b) Montrer que $P(X=1)=76/245$ et $P(X=2)=122/245$.
 c) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son **espérance mathématique**.
5) On répète la même expérience **trois fois** (en remettant les boules dans l'urne à chaque fois). Quelle est la probabilité d'obtenir **exactement deux fois** trois boules de la même couleur ? Donner le résultat arrondi à 0,01.

Exercice 2 : Analyse (5 points)

Soit la fonction u définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $u(x)=1/\ln(x)$, et $u(0)=0$.
Soit également la fonction v définie sur $[0,+\infty[$ par : $v(x)=(x-1)u(x)$, $v(0)=0$, $v(1)=1$.

Partie I : Étude de la fonction u
1) a) Étudier la continuité et la dérivabilité de u à droite en 0.
 b) Calculer les limites de u et préciser les branches infinies de la courbe Cu.
 c) Étudier les variations de u et dresser son tableau de variations.
2) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $2\ln(x) \leq \int[x,x^2]\ u(t)dt \leq \ln(x)$.
3) On pose $\phi(x)=x\int[x,x^2]\ u(t)dt$. Calculer : $\lim(x\to 0\blacksquare)\ \phi(x)/x$, $\lim(x\to 0\blacksquare)\ \phi(x)$, $\lim(x\to+\infty)\ \phi(x)/x$, $\lim(x\to+\infty)\ \phi(x)$.

Partie II : Étude de la fonction v

1) a) Montrer que v est continue sur $[0,+\infty[$.
   b) Étudier la dérivabilité à droite de v en 0 et donner une interprétation géométrique.
2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $v'(x)=1-x+x\ln(x)$.
   b) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $x\ln(x) > x-1$.
   c) Dresser le tableau de variations de v et tracer sa courbe C_v.
3) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $x-1 \leq \int[x,x^2]\, v(t)dt \leq x^2-1$.

Partie III : Étude de la fonction f

On définit $f(x)=\ln(1+x)-\int[x,x^2]\, u(t)dt$, avec $f(0)=f(1)=0$.
1) a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.
   b) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $f(x)=\ln((x+1)/2)-\int[x,x^2]\, v(t)dt$.
2) a) Montrer que f est continue et dérivable en 1.
   b) Montrer que pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $f'(x)=1/(x+1)-v(x)$.
3) a) Montrer que f' est strictement négative sur $[0,+\infty[$, puis en déduire le signe de f.
   b) Dresser le tableau de variations de f.

Partie IV : Étude de la fonction F

Soit $F(x)=\exp(\int[x,x^2]\, u(t)dt)$, avec $F(0)=F(1)=1$.
1) Vérifier que $F(x)=e^{(-f(x))}$.
2) En déduire que $\lim(x\to1) \int[x,x^2]\, (1/\ln(t))\, dt = \ln(2)$.
3) a) Montrer qu'il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que $f'(\alpha)=0$.
   b) Déterminer la branche infinie de la courbe C_F.
   c) Dresser le tableau de variations de F.

Fin de l'épreuve