Exercice 94 p 63.

f définie de $[0;1]$ vers $[0;1]$; continue sur $[0;1]$

on suppose que $\forall x \in [0;1]$: $\begin{cases} (f\circ f)(x) = x \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1/ mq f est injective :

Soit x, y de $[0;1]$.

$f(x) = f(y) \implies f(f(x)) = f(f(y))$ $\left(\begin{array}{l} f(x) \in [0;1] \\ f(y) \in [0;1] \end{array}\right)$

$\implies (f\circ f)(x) = (f\circ f)(y)$

$\implies x = y$

donc f est injective.

2/ soit $a \in [0;1]$. on pose $\varphi_a(x) = (x-a)(f(x)-f(a))$

- φ_a continue sur I comme produit de ft continus
- on suppose que : $\exists b \in I$ / $\begin{cases} b \neq a \\ \varphi_a(b) = 0 \end{cases}$

du coup $f(b) = f(a)$!! (f injective)

donc φ_a ne s'annule sur I qu'en a

et comme elle est continue sur I donc φ_a garde un signe constant sur I par suite (en divisant par $(x-a)^2$) on obtient $\forall x, a \in I$ avec $x \neq a$

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a un signe constant sur I

et non nul

d'ou f est st monotone sur I

3/ Soit $x \in I$ tq $x > 0$.

on sait que $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{et} \\ f(x) \in [0;1] \\ \text{et} \\ f(x) \neq 0 \quad (\text{car } x \neq 0) \text{ et } f \text{ inj} \end{cases}$

donc $f(x) \in]0;1]$ d'où $f(x) > 0$

Par suite f ne peut être st $\searrow$

du coup elle est str $\nearrow$ sur $[0;1]$

(*) supposons que $\exists a \in [0;1] : f(a) \neq a$.

donc ou bien $f(a) < a$ ou $f(a) > a$

Si $f(a) < a$ alors $f(f(a)) < f(a)$ (f st $\nearrow$ sur I)

d'où $a < f(a)$!!!

Si $f(a) > a$ alors $f(f(a)) > f(a)$ (Idem)

donc $a > f(a)$!!!

donc $f(a) = a$ pour tout $a \in I$

Exercice 80 p 62

f continue sur $\mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \end{cases}$ et $ab < 0$

1/ Supposons que $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) \cdot f(y) \geq 0$

donc f aura un signe constant sur $\mathbb{R}$

~~Si par exemple~~ Si : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geq 0$ d'où $a \geq 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \geq 0$ d'où $b \geq 0$

du coup $ab \geq 0$!!!

donc $\exists (x_0 ; y_0) \in \mathbb{R}^2 :$ $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0.$

2/ f continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f continue sur $I = [x_0 ; y_0]$ (ou $[y_0 ; x_0]$)

et $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$ donc d'après le T.V.I

$\exists c \in I :$ $f(c) = 0$

d'où le résultat.

Exercice 83 : p 62 soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ tq.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$

on a $\forall x \in \mathbb{R}^+ :$ $f(x) \geq 0.$ (f positive sur $\mathbb{R}^+$)

1ier cas : $f(0) > 0$

on pose $\varphi(x) = f(x) - x.$

- φ continue sur $\mathbb{R}^+$ (comme diff de fts continues)

on suppose que $\forall x > 0 :$ $f(x) \geq x$

donc $\frac{f(x)}{x} \geq 1$ du coup $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \geq 1$

ce qui est faux

donc $\exists a > 0 :$ $f(a) < a$

d'où $\varphi(a) < 0$

ainsi on aura : $\begin{cases} \varphi \text{ continue sur } [0 ; a] \\ \varphi(0) \cdot \varphi(a) < 0 \end{cases}$

d'après le T.V.I, $\exists c \in]0;a[: \varphi(c)=0$

c.à.d $f(c)=c$

d'où le résultat

Exercice 86 p 62 :

1/ soit f continue str positive sur $[a;b]$

- f continue sur $[a;b]$ donc $f([a;b])=[m;M]$

avec $m = \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x) = f(c) \quad (c\in[a;b])$

$M = \max f(x) = f(d) \quad (d\in[a;b])$

- $c\in[a;b] \Rightarrow f(c)>0 \Rightarrow m>0.$

donc $\forall x\in[a;b],\ f(x)\geq m>0$

donc $(\exists \alpha>0)(\forall x\in[a;b]),\ f(x)\geq \alpha \quad (\alpha=m)$

2/ g et h continues sur $[a;b]$ tq $\forall x\in[a;b]$:

$g(x)>h(x)$

on pose $k(x)=(g-h)(x)$

on a k continue et str positive sur $[a;b]$

d'après 1/ : $(\exists\alpha>0)(\forall x\in[a;b]) : k(x)\geq\alpha$

$\Rightarrow (\exists\alpha>0)(\forall x\in[a;b]) : g(x)\geq \alpha+h(x)$

Exercice 92 p 63 :

le marcheur parcourt 12 km en une heure. en partant d'un pt A à un pt B

Soit la ft f défini ~~sur~~ par A(0) — B(12)

$f(t)$ = le nombre de kilomètre parcourus à l'instant t.

c'est une ft continue et on a $f(0) = 0$ et $f(60) = 12$

mq $\exists\, t_0 \in [0;60]$: $f(t_0+30) - f(t_0) = 6$

on pose $\varphi(t) = f(t+30) - f(t) - 6$

. φ continue sur $[0;30]$

. $\varphi(0) = f(30) - f(0) - 6 = f(30) - 6$

$\varphi(30) = f(60) - f(30) - 6 = 12 - f(30) - 6 = 6 - f(30)$

on a $\varphi(0)\cdot\varphi(30) = -(f(30)-6)^2 \leq 0$

d'après le T.V.I : $\exists\, t_0 \in [0;30]$: $\varphi(t_0) = 0$

çad $f(t_0+30) - f(t_0) = 6$

d'ou le résultat

Devoir 1 p 64 :

I/ • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2/3} - 1}{\arctan(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt[3]{x})^2 - 1}{\arctan(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{x-1} \times \underbrace{\dfrac{x-1}{\arctan(x-1)}}_{A(x)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1} \times A(x)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} \times A(x)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} \times A(x) = \frac{2}{3} \times 1 = 2/3$$

$$\left(\lim_{x\to 1} A(x) = \lim_{X\to 0} \frac{X}{\operatorname{Arctan} X} = 1\right)$$

- $$\lim_{x\to +\infty} x\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan\sqrt{x} - \pi/2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad \left(\arctan\sqrt{x} + \arctan\frac{1}{\sqrt{x}} = \pi/2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{\arctan(1/\sqrt{x})}{(1/\sqrt{x})} \times \sqrt{x} = -\infty$$

$$\text{Car} \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{1/\sqrt{x}} = \lim_{X\to 0} \frac{\arctan(X)}{X} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{(\sqrt{x})^3+x} - \sqrt[6]{x^3+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \cancel{\sqrt[6]{(x\sqrt{x}+x)^2}} -$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x\sqrt{x}+x} - \sqrt[3]{\sqrt{x^3+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}+x - \sqrt{x^3+x^2}}{\underbrace{\sqrt[3]{(x\sqrt{x}+x)^2} + \sqrt[3]{(x\sqrt{x}+x)\sqrt{x^3+x^2}} + \sqrt[3]{x^3+x^2}}_{A(x)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x\sqrt{x}+x)^2 - (x^3+x^2)}{A(x)\left(\underbrace{(x\sqrt{x}+x) + \sqrt{x^3+x^2}}_{B(x)}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3} + 2x^2\sqrt{x} + \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^2}}{A(x) \times B(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\sqrt{x}}{A(x) \cdot B(x)}$$

Or $A(x) = \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{x})^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x})^3\sqrt{1+1/x}} + x\sqrt[3]{1+1/x}$

$$= x\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} + x\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{1+1/x}} + x\sqrt[3]{1+1/x}$$

$$= x\Big(\underbrace{\sqrt[3]{(1+1/\sqrt{x})^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(1+1/x)} + \sqrt[3]{1+1/x}}_{C(x)}\Big)$$

et

$$B(x) = (x\sqrt{x}+x) + \sqrt{x^3+x^2}$$

$$= x\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x^3}\sqrt{1+1/x}$$

$$= x\sqrt{x}\Big(\underbrace{1+1/\sqrt{x} + \sqrt{1+1/x}}_{D(x)}\Big)$$

Ainsi la limite devient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\sqrt{x}}{x \cdot C(x) \cdot x\sqrt{x} \cdot D(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{C(x) \cdot D(x)}$$

Comme $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} C(x) = 3 \\ \lim_{x\to+\infty} D(x) = 2 \end{cases}$ donc le résultat de

la limite demandée est $1/3$.

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\sqrt[3]{(-x)^2}}{\sqrt[3]{(-x)^3}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{-x}} = 1$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x+1 - \sqrt[3]{x-8x^3} \right) = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt[3]{x-8x^3} = -\infty \end{cases}$

<u>Ajout</u>: $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x+1 + \sqrt[3]{x-8x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x-8x^3} - \sqrt[3]{(-2x-1)^3}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-8x^3-(-2x-1)^3}{\sqrt[3]{(x-8x^3)^2} + (-2x-1)\sqrt[3]{x-8x^3} + (2x+1)^2}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \cancel{8x^3} + \cancel{8x^3} + 3(2x)^2 + 3 \times 2x + 1}{A(x)}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{12x^2 + 7x + 1}{A(x)}$

on a $A(x) = \sqrt[3]{(x-8x^3)^2} - (2x+1)\sqrt[3]{x-8x^3} + (2x+1)^2$

$$= \sqrt[3]{x^6\left(\frac{1}{x^2}-8\right)^2} - (2x+1)\sqrt[3]{(-x^3)\left(8-\frac{1}{x^2}\right)} + (2x+1)^2$$

$$= x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-8\right)^2} + x(2x+1)\sqrt[3]{8-\frac{1}{x^2}} + x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= x^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-8\right)^2} + \left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{8-1/x^2} + \left(2+\frac{1}{x}\right)^2\right).$$

donc la limite devient :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(12+\frac{7}{x}+1/x^2\right)}{\cancel{x^2}\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-8\right)^2}+\left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{8-1/x^2}+\left(2+\frac{1}{x}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{12}{12} = 1.$$

- $$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\,\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = +\infty$$

car $\begin{cases} \lim_{x\to0^+} \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x+1}} = \lim_{X\to0^+}\frac{\arctan X}{X} = 1 \\ \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = +\infty \end{cases}$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[5]{x}\,\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}$$

$$\left(\sqrt[5]{x}\,\sqrt[15]{x^2} = x^{\frac{1}{5}}\times x^{\frac{2}{15}} = x^{5/15} = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) \times \frac{1}{\dfrac{(x-1) - x}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x(x-1)} + \sqrt[3]{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) \times \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x(x-1)} + \sqrt[3]{x^2}}{-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\sqrt[3]{x}\left(2\sqrt[3]{1+1/x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x(x-1)} + \sqrt[3]{x^2}\right)$$

$$= -\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{3/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(x^{2/3}\right)^{3/2}\left(1 - x^{-1/3}\right)^{3/2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot x\left(1 - \frac{1}{x^{1/3}}\right)^{3/2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^{1/3}}\right)^{3/2} = 1$$

II/ mq $2\arctan(2) + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi$.

ça revient à mq $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi - 2\arctan(2)$

- On sait que $-\pi/2 < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \pi/2$

et : $\frac{\pi}{3} < \arctan(2) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < 2\arctan(2) < \pi$ $\quad (2 > \sqrt{3})$

$$\Rightarrow -\pi < -2\arctan(2) < -\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < \pi - 2\arctan(2) < \pi/3$$

$$\Rightarrow -\pi/2 < \pi - 2\arctan(2) < \pi/2$$

- d'autre part :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 4/3$$

et $\tan\left(\pi - 2\arctan(2)\right) = -\tan\left(2\arctan(2)\right)$

$$= -\frac{2\tan(\arctan(2))}{1-\tan^2(\arctan 2)}$$

$$= -\frac{4}{1-4} = 4/3$$

donc $\begin{cases} \tan\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \tan\left(\pi - 2\arctan(2)\right) \\ \text{et} \\ -\pi/2 < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \pi/2 \text{ et } -\pi/2 < \pi - 2\arctan(2) < \pi/2 \end{cases}$

donc $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi - 2\arctan(2)$

CQFD.