Année : 2024/2025	**DS(bilan) -S1-(4h)**	**2bac sm**
M. Ouikrim	**Fkih Ben Salh**	**biranzarane**

• l'usage de la calculatrice est interdit
•la rigueur et la bonne rédaction seront récompensé

Exercice 1

soit f une fonction deux fois derivables sur $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\begin{cases} * \ C_f \text{coupe l'axe } (OX) \text{ aux points de coordonnées } (1,0) et (2,0). \\ * \ \forall x \leq 4 \quad (x-4)(f(x)-f(4)) \leq 0 \\ * \ \forall x \geq 4 \quad (x-4)(f(x)-f(4)) \geq 0 \end{cases}$$

1. montrer que $f'(4) = 0$
2. montrer que $\exists \alpha \in]1,4[: f''(\alpha) = 0$

Exercice 2

soit (u_n) une suite definie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \dfrac{1}{u_{n+1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{u_n^3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n} \end{cases}$$

1. montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n > 0$
2. montrer que (u_n) est decroissante
3. a - montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \dfrac{1}{u_n^3} = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

   b - déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 3

soit $f(x) = \cos(x)$ definie sur $I = [0, \pi]$

1. montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J qu'on determinera
2. a - montrer que f^{-1} est derivable sur $]-1,1[$
   b - montrer que
   $$\forall x \in]-1,1[: \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. a - soit $\alpha \in [2\pi, 3\pi]$. determiner $f^{-1}(\cos(\alpha))$ en fonction de α
   b - montrer que
   $$\forall x \in [-1,1] : f^{-1}(-x) + f^{-1}(x) = \pi$$
4. on pose
   $$g(x) = f^{-1}\left(1 - \frac{1}{(x+1)^3}\right) \quad \text{sur} \quad [0,+\infty[$$

   a - montrer que g est strictement decroissante sur $[0,+\infty[$
   b - montrer que g realise une bijection de $[0,+\infty[$ vers J qu'on determinera .
   c - determiner $g^{-1}(x)$ pour x de J .

Problème

partie 1:

soit la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \dfrac{3x}{1+x^2} - \arctan(x)$

le plan est muni d'un repere orthonorme $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1. montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$:$(\phi)'(x) = \dfrac{2(1-2x^2)}{(1+x^2)^2}$
2. dresser le tableau de variation de ϕ sur $\mathbb{R}$
3. montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty, 0[$ et que $-3 < \alpha < -2$ (on donne $\arctan(2) \approx 1,11 \quad . \quad \arctan(3) \approx 1,25$)
4. déduire le signe de $\phi(x)$ sur $\mathbb{R}^-$.

partie 2:

soit la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(x - \sqrt[3]{x^2}\right) & : \quad x \geq 0 \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{(\arctan(x))^3}{x}} & : \quad x < 0 \end{cases}$$

1. montrer que f est continue en 0
2. étudier les branches infinies de C_f aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$
3. a - montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$
   b - étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
4. a - montrer que :
   $$\begin{cases} \forall x < 0 \quad : \quad f'(x) = \dfrac{(\arctan(x))^2 \phi(x)}{2x^2 f(x)} \\ \forall x > 0 \quad : \quad f'(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}\left(1 + \left(x - \sqrt[3]{x^2}\right)^2\right)} \end{cases}$$
   b - dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. a - donner l'equation de la demi-tangente à C_f au point $(0,0)$ à gauche.
   b - montrer que : $\forall x < 0 \quad ; \quad f(x) + x = \dfrac{(\arctan(x))^3 - x^3}{x\left(\sqrt{\dfrac{(\arctan(x))^3}{x}} - x\right)}$
   c - montrer que $\forall x < 0 \quad : \arctan(x) > x$
   d - déduire la position relative de C_f par rapport à sa demi-tangente au point $(0,0)$ à gauche.
6. représenter C_f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$
   on donne : $\alpha \approx -2,17 \quad ; \quad f(\alpha) \approx 0,8 \quad \dfrac{8}{27} \approx 0,3 \quad ; \quad f(\dfrac{8}{27}) \approx -0,14$

partie 3:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in [1, +\infty[$ tel que : $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer que la suite (α_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

partie 4:

soit la suite (U_n) definie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) + 1 \end{cases}$$

1. montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq U_n \leq 2$
2. montrer que $f(\dfrac{3}{2}) < 1$ et que (U_n) est decroissante et deduire qu'elle est convergente
3. montrer que $\forall x \in [1, 2] \quad f'(x) \leq \dfrac{3 - \sqrt[3]{4}}{3}$

Problème (suite)

4. a - montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1}-1| \leq \left(\frac{3-\sqrt[3]{4}}{3}\right)|U_n-1|$

   b - determiner $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

partie 5:

Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \frac{8}{27}\right]$.

on admet que $\sum\limits_{k=8}^{k=n-1}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 8$

1. montrer que g admet une fonction reciproque g^{-1} definie sur un intervalle J qu'on determinera.
   on pose:
   $S_n = \sum\limits_{k=8}^{n-1}\left(\frac{g^{-1}\left(\frac{-1}{k}\right)}{k(k+1)}\right)$ pour $n \in \mathbb{N},\ n \geq 9$
   soit F la primitive de g^{-1} sur J qui s'annule en 0

2. Justifier l'existence de F sur J

3. Montrer que $\forall k \geq 8$:
$$\frac{g^{-1}(\frac{-1}{k+1})}{k(k+1)} < F\left(\frac{-1}{k}\right) - F\left(\frac{-1}{k+1}\right) < \frac{g^{-1}(\frac{-1}{k})}{k(k+1)}$$

4. montrer que $\forall n \geq 9 \quad \sum\limits_{k=8}^{n-1}\left(\frac{g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)}{k(k+1)}\right) < F\left(\frac{-1}{8}\right) - F\left(\frac{-1}{n}\right) < S_n$

5. a - montrer que $\forall n \geq 9 \quad S_n \leq 1$
   b - montrer que (S_n) est croissante
   c - montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \geq F\left(\frac{-1}{8}\right)$