Année : 2025/2026	**Série n°3**	**pc/tech/svt**
ouikrim	**reciproques,racines niemes**	**fkih ben salah**

Résumé

soit f definie sur I

1. **montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J qu'on determinera**
   ♦ *f continue sur I*
   ♦ *f strictement monotone sur I*
   ♦ *on determine l'intervalle $J = f(I)$*

2. **montrer que f^{-1} est continue sur J**
   ♦ *puisque f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J*

3. **dresser le tableau de variation de f**
   ♦ *la monotonie de f^{-1} sur J est la même que celle de f sur I*

4. **déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$**
   ♦*soit $x \in J \quad , \quad y \in I \quad : \quad f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$*

5. **tracer la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormé**
   ♦ *la courbe de f^{-1} est symetrique à la courbe de f par rapport à la droite d'equation $y = x$*

s'entraîner

correction en classe

Exercice 1

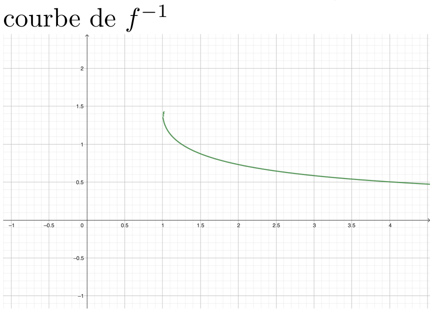
soit f definie sur $]-\infty, -2[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

1. montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J qu'on detrminera
2. montrer que $\forall x \in J$: $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{1-4x}{1-x}}$
3. montrer que l'equation $f(x) = \sqrt[3]{3}$ admet une solution unique α dans $]-\infty, -2[$ et verifier que : $\dfrac{-7}{2} < \alpha < -3$
4. deduire que $3 < \sqrt{\dfrac{1 - 4\sqrt[3]{3}}{1 - \sqrt[3]{3}}} < \dfrac{7}{2}$

Exercice 2

soit $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ definie sur $[1, +\infty[$

1. montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J qu'on determinera
2. en utilisant la courbe de f ci-dessous tracer la courbe de f^{-1}



3. determiner $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

correction sur la chaine youtube : oukrimath

Exercice 1

soit f dedfinie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 - x\sqrt[3]{x}$

1. montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J qu'on doit determiner
2. determiner $f^{-1}([-15, 0])$
3. calculer les limites :
   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^{-1}(x) - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f^{-1}(x) - 1}{x}$
   (on ne demande pas de determiner $f^{-1}(x)$)

Exercice 2

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]-1, 0[$.
5. a - Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
   b - Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) = -1 \end{cases}$$

   • Étudier la continuité de F en 0.

correction en classe

Exercice 3

soit f definie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x^2-2x\sqrt{x}+x+2$

1. calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. montrer que $\exists a\in[1,+\infty[: a^2+a=2a\sqrt{a}+3$
3. montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J qu'on doit determiner
4. a - montrer que
$$\forall x\in[2,+\infty[\ , f^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{x-2}}\right)^2$$
b - deduire la valeur exacte de a

Exercice 3

soit f définie par $f(x)=\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1-x}$ sur $]1,2[$.

1. montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
2. determiner $f^{-1}(0)$
3. montrer que :
$\forall x\in\,]1,2[\ ,\ (2x-3)(f(x))(f^{-1}(x)-2)<0$
4. montrer que :
$$\forall x>0\,,\frac{3x-2-\sqrt{x^2+4}}{2x}<1$$
$$\forall x<0\,,\frac{3x-2-\sqrt{x^2+4}}{2x}>2$$
5. déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 4

soit la fonction f definie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

1. determiner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$
2. montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle Jqu'on doit determiner
3. determiner $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$

Exercice 58 (questions indépendantes)

1. Calculer les limites :
• $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}-2}$
• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-x}-\sqrt[3]{x^2+x}}{\sqrt[4]{x-x^3}}$
• $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-x}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$
2. Montrer que $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
•$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1$
•$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1$

correction sur la chaine youtube: ouikrimath

Exercice 5(questions indépendantes)

1. a - Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$:
$x^5+x^3-2=(x-1)\left(x^2(x^2+x)+2(x^2+x+1)\right)$
b - Étudier le signe de $x\sqrt[3]{x^2+x}-2$
2. resoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation : $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$
3. simplifier $\dfrac{\sqrt[5]{8}.\sqrt[6]{32}.\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}}$

Exercice 6

soit la fonction f definie par $f(x)=\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{x}$

1. determiner le domaine de définition de f
2. soient x et y dans D_f tels que $x<y$.
montrer que $f(x)>f(y)$ et deduire la monotonie de f dans D_f
3. montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J qu'on determinera.
4. montrer que l'equation $f^{-1}(x)+\dfrac{1}{x}=1$ admet une solution unique α dans $]1,2[$
5. a - montrer que $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=-\dfrac{5}{12}$
b - deduire $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{x-1}$

Exercice 7

soit la fonction g definie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{8}{9}x^3-3$

1 partie

1. montrer que g admet une fonction reciproque g^{-1} definie sur $\mathbb{R}$.
2. dresser le tableau de variation de g^{-1}

2 partie

1. soit la fonction ϕ definie sur $\mathbb{R}$ par:
$\phi(x)=8x^3+9x-27$
• montrer que la courbe C_ϕ coupe l'axe (ox) en un unique point d'abcsisse α dans $\mathbb{R}$
2. deduire le tableau de signe de ϕ.
3. calculer $g(\alpha)$
4. resoudre l'inequation $x+g(x)\geq0$