## problème

soit la fonction $f$ définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=x^3-2\sqrt{x^3+1}$.

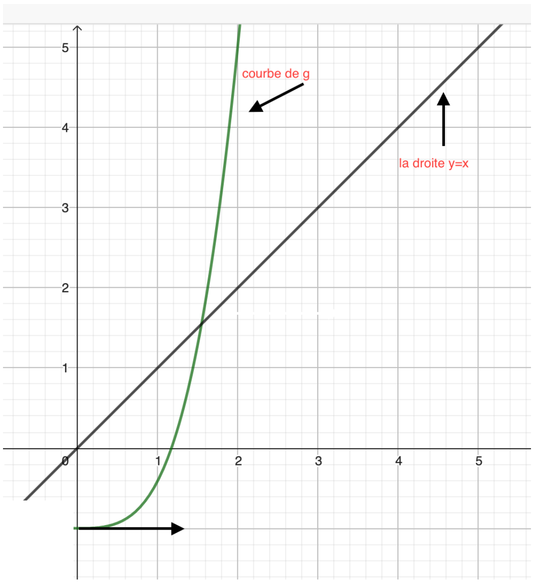
❶ montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

❷ a - montrer que $\forall x\succ -1$ : $\frac{f(x)+1}{x+1}=x^2-x+1-2\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}$
b - déduire que f n'est pas dérivable en $(-1)^+$.
c - interpréter graphiquement ce résultat.

❸ a - montrer que $f$ est dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$
b - montrer que $\forall x\succ -1$ : $f'(x)=\frac{3x^5}{\sqrt{x^3+1}(\sqrt{x^3+1}+1)}$
c - déterminer $f([0,1])$ et déduire que $\forall x\in[0,1]$ : $f(x)\prec 0$ .

❹ a - montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}^+$ et que $1\prec\alpha\prec 2$.
b - montrer que : $\begin{cases} \forall x\in[0,\alpha] & : \ f(x)\leq 0 \\ \forall x\in[\alpha,+\infty[ & : \ f(x)\geq 0 \end{cases}$
c - soit $a\succ 0$. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3+f(a)=0$

❺ soit $g$ la restriction de $f$ á $\mathbb{R}^+$.
a - montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur $[-2,+\infty[$.
b - montrer que $g^{-1}$ est dérivable en 0 et que : $(g^{-1})'(0)=\frac{\alpha^3+2}{12\alpha^2}$
c - montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^+$ : $g(x)=(\sqrt{x^3+1}-1)^2-2$
d - montrer que $\forall x\geq -2$ : $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{(\sqrt{x+2}+1)^2-1}$
e - déduire que $\alpha=\sqrt[3]{2+2\sqrt{2}}$ et déterminer l'intersection de $C_g$ avec la droite d'équation $y=-1$.
f - tracer dans le repère ci-joint $C_{g^{-1}}$.




ouikrim mohamed