Résolution des équations non linéaires à une dimension

1 Introduction

Les mathématiciens sont souvent confrontés à la résolution d'équations algébriques de la forme :

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Nous avons tous appris que dans le cas d'équation du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

les deux racines sont :

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

On peut aussi obtenir une formule générale pour une équation du troisième ou quatrième degré. Mais il n'existe pas de formule permettant de trouver les racines des polynômes de degré plus grand ou égal 5. De plus, en pratique on est souvent ramené à résoudre des problèmes dont la fonction f a une expression trop compliquée ou n'est même pas connue analytiquement.

Le but de ce chapitre est de présenter quelques méthodes pour la résolution numérique des équations nonlinéaires avec une seule variable.

Dans ce qui suit nous utiliserons la terminologie suivante :

Définition : Un nombre x^* est une racine, ou un zéro, de la fonction f si $f(x^*) = 0$.

Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe au moins une racine de f comprise entre a et b. Si de plus f est strictement monotone alors cette racine est unique.

On supposera désormais avoir un intervalle $[a; b]$ où f admet une unique racine.

2 Méthode de la bissection (dichotomie)

Idée

Si f est conitnue sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ ont signe opposé (c.-à-d. $f(a)f(b) < 0$) alors f possède nécessairement une racine entre a et b. On prend alors le milieu de l'intervalle $c = \dfrac{a+b}{2}$. Si $f(c) = 0$ (ou numériquement très proche de 0) on considère que l'on a résolu le problème. Sinon en fonction du signe de $f(c)$ on sait dans quelle demi intervalle se trouve la racine. On recommence donc avec ce demi-intervalle jusqu'à obtenir une précision désirée.

2.1 Algorithme

0) Etant Donné un intervalle initial $[a, b]$ et une tolérance ε. On pose $[a_0, b_0] = [a, b]$, $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et $n = 0$.
1) Tant que $|f(c_n)| > \varepsilon$ faire
   a) Si $f(c_n) = 0$, aller à 2)
   b) Si $f(a_n) \times f(c_n) < 0$, poser $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$
   c) Si $f(b_n) \times f(c_n) < 0$, poser $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$
   d) $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$
   e) $n \leftarrow n + 1$
2) La solution est c_n

Exemple : Calculons $\sqrt(2)$ comme une racine de $f = x^2 - 2$.
On prend $[a_0, b_0] = [1, 1, 5]$. On a $f(a_0) \times f(b_0) < 0$ puisque $f(a_0) = f(1) = -1$ et $f(b_0) = f(2) = 2$. De plus

$$\begin{gathered} c_0 = 1,25 \quad f(c_0) = -0,4375 < 0 \Longrightarrow [a_1, b_1] = [1,25; 1,5]. \\ c_1 = 1,37 \quad f(c_1) = -0.1231 < 0 \Longrightarrow [a_2, b_2] = [1,37; 1,5]. \\ c_2 = 1,43 \quad f(c_2) = 0,0449 \cdots > 0 \Longrightarrow [a_3, b_3] = [1,37; 1,43]. \\ \vdots \end{gathered}$$

2.2 Convergence

<u>Théorème :</u> Soient $[a_0, b_0] = [a, b]$, $[a_1, b_1]$, $\ldots$ $[a_n, b_n]$,..., les intervalles générés par la méthode de la bissection, alors

$$\lim a_n = \lim b_n = x^*$$

avec x^* est la racine de f. De plus,

$$|x^* - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

où $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Remarque : Pour une précision donnée on peut savoir grï¿½ce au théorème précédent le nombre d'itération à faire. Dans l'exemple précédent, pour retrouver $\sqrt(2)$ avec une erreur absolue inférieure ou égale à 10^{-3} il nous faudra 10 itérations. En effet par le Théorème précédent on a

$$|\sqrt(2) - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} = \frac{0,5}{2^{n+1}}.$$

Donc pour que $|\sqrt(2) - c_n|$ soit inférieure ou égale à 10^{-3} il suffit que

$$\frac{0,5}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 0,5 \times 10^3 \leq 2^{n+1}$$

ou encore

$$\log_2(0,5 \times 10^3) = \frac{\ln(0,5 \times 10^3)}{\ln(2)} = 8,97 \leq (n+1)$$

Ainsi n doit supérieure ou égale à $9,97$. La valeur minimale correspondante est $n = 10$.

D'une manière générale pour calculer la racine x^* à ϵ près. On doit effectuer n itération avec n vérifie

$$\mathbf{n+1} \geq \log_{\mathbf{2}}(\frac{\mathbf{b-a}}{\epsilon})$$

3 Méthode des points fixes

3.1 Idée

Soit g une fonction continue et soit la suite récurrente $x_{n+1} = g(x_n)$. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre x_f alors x_f vérifie

$$g(x_f) = x_f$$

<u>**Définition :**</u> Soit g une fonction continue. Le nombre x_f est dit un point fixe de g si

$$g(x_f) = x_f.$$

Géométriquement, un point fixe correspond à l'intersection du graphe de g avec la droite $y = x$.

3.2 Algorithme du point fixe

Pour trouver un point fixe de la fonction g on peut procéder comme suit :

0. Données une valeur initiale x_0 et une tolérance ε.
1. Poser $x_1 = g(x_0)$ et $n = 0$.

2. Tant que $|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon$ faire
   i) $x_{n+1} = g(x_n)$
   ii) $n \leftarrow n+1$
3) La solution est x_n

Remarque

i) On peut résoudre des équations non linéaires de la forme $f(x) = 0$ en utilisant l'algorithme des points fixes. Il suffit pour se faire de transformer l'équation $f(x) = 0$ en un problème équivalent de la forme $x = g(x)$. Par exemple on peut mettre $g(x) = x + f(x)$. En effet dans ce cas on a

$$g(x) = x \Leftrightarrow x + f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Mais ce choix de g n'est pas unique.

ii) Comme l'algorithme du point fixe ne converge pas toujours, il est nécessaire de prévoir l'arrêt de la procédure après un nombre maximum d'itérations.

3.3 Convergence

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $g : x \in I \to g(x) \in \mathbb{R}$ une fonction. On dit que g est une contraction (ou K-contractante) sur I s'il existe une constante $0 \leq K < 1$ telle que telle que

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y| \qquad \forall x,\, y \in I$$

Proposition (condition suffisante pour avoir la contraction). Si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I)$ (continuement différentiable) sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que

$$|g'(x)| \leq K < 1 \quad \forall x \in I$$

alors g est K-contractante sur I càd

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y| \qquad \forall x,\, y \in I.$$

Preuve : En effet on a

$$|g(x) - g(y)| = |\int_x^y g'(t)dt| \leq \sup_{t\in[x,y]} |g'(t)||x - y| \leq K|x - y|$$

Théorème :

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $g : \ I \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. On suppose que g satisfait les deux propriétés suivantes :

i) g est contraction sur I

ii) $g(I) \subset I$, c'est à dire, $\forall x \in I$ on a $g(x) \in I$.

Alors g admet un et un seul point fixe x_f et pour tout $x_0 \in I$ la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers x_f quand $n \to \infty$

Exemple. L'équation

$$f(x) = \cos(x) - x = 0.$$

admet une racine unique sur $I = [0, 1]$.

En effet résoudre cette équation revient à trouver un point fixe de la fonction $g(x) = \cos(x)$. Or on a

i) $\cos([0, 1]) \subset [0, 1]$.

ii) $|\cos'(x)| = |\sin(x)| \leq K = |\sin(1)| < 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Donc par le Théorème et la proposition précédents on déduit que $\exists x_f \in [0, 1]$ telle que $cos(x_f) = x_f$ et que pour tout $x_0 \in [0, 1]$ la suite $x_{n+1} = \cos(x_n)$ converge vers x_f quand $n \to \infty$.

3.4 Ordre et taux de convergence

La convergence de l'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ vers le point x_f peut se faire plus ou moins vite. C'est pourquoi il est intéressant de suivre le comportement de l'erreur au fil des itérations.

Définition : On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers r à l'ordre p avec un taux de convergence C si

$$|e_{n+1}| \sim C|e_n|^p \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C.$$

où $e_n = x_n - r$.

En particulier la convergence est dite

* linéaire si $p = 1$ et $C \in]0, 1[$.
* super-linéaire si $p = 1$ et $C = 0$.
* quadratique si $p = 2$.

Remarque : Plus p (resp. C) est grand (resp. est proche de 0), plus l'erreur diminue rapidement.

Corollaire :

On se place dans les conditions du Théorème précédent. Si de plus g est dérivable au voisinage de x_f alors la convergence de la suite $x_0 \in I$, $x_{n+1} = g(x_n)$ vers x_f est linéaire avec un taux de convergence égale à $g'(x_f)$:

$$|e_{n+1}| \sim |g'(x_f)||e_n| \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-x_f|}{|x_n-x_f|} = |g'(x_f)|.$$

Si $g'(x_f)=0$ la convergence est plutôt super-linéaire.

4 Méthode de Newton

4.1 Idée

à partir d'une valeur initiale x_0, on cherche une correction δx_0 telle que :

$$f(x_0+\delta x_0)=0.$$

Pour cela on linéarise l'équation $f(x_0+\delta x_0)=0$ autour de x_0 puis on résout l'équation linéarisée pour trouver le δx_0 comme suit

$$0=f(x_0+\delta x_0)\approx f(x_0)+f'(x_0)\delta x_0$$

On obtient

$$\delta x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

et on pose

$$x_1 = x_0+\delta x_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On recommence le processus en cherchant à corriger x_1 d'une nouvelle quantité δx_1 et ainsi de suite. On obtient alors l'algorithme suivant.

4.2 Algorithme

0) étant Données une valeur initiale x_0 et une tolérance ε
1) Poser $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ et $n=1$.
2) Tant que $|f(x_n)| \geq \varepsilon$ faire
   - i) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   - ii) $n \leftarrow n+1$
3) La solution est x_{n+1}

Remarque :

a) Il s'agit donc d'une méthode de point fixe $x_{n+1}=g(x_n)$ pour laquelle g est définie par $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Si la méthode du point fixe converge vers x^* alors on a en passant à la limite quand $n\to\infty$

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

On voit alors que l'on obtient bien $f(x^*) = 0$ à condition que $f'(x^*) \neq 0$. On suppose dorénavant que cette condition est remplie.

b) Géométriquement la méthode de Newton consiste à obtenir x_{n+1} comme l'intersection de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_n avec l'axe Ox.

Exemple. Reprenons l'exemple où on doit calculer $\sqrt(2)$ en résolvant :

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Pour utiliser la méthode de Newton, il faut obtenir la dérivée de cette fonction, qui est $f'(x) = 2x$. L'algorithme se résume à :

$$x_0 = 1; \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}).$$

On trouve

$$x_1 = 3/2 = 1.5 \qquad x_2 = 17/12 = 1,4167 \qquad x_3 = \frac{1}{2}(17/12 + 24/17) = 1,4142...$$

4.3 Convergence de la méthode

Proposition : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}[a;b]$ et $x^* \in [a;b]$ tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que la suite générée par la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge pour tout $x_0 \in [x^* - \epsilon; x^* + \epsilon]$

Cette proposition donne une condition suffisante de convergence locale càd si on est proche de la solution la méthode converge. Heureusement, en pratique, la méthode de Newton converge souvent même si l'on part loin de la solution. Montrons maintenant que la vitesse de convergence est quadratique, ce qui est mieux que linéaire.

Proposition : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}[a;b]$ et soit $x^* \in [a;b]$ tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$. Alors la convergence de la méthode de Newton est quadratique

$$|e_{n+1}| \sim \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right| |e_n|^2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x_f|}{|x_n - x_f|^2} = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|.$$

Preuve : Le développement de Taylor de la fonction $f(x)$ au voisinage de x_n donne

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2} f''(\xi_n) \quad \xi_n \in]x_n; x^*[$$

Or

$$f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) = (x^* - x_{n+1})f'(x_n)$$

puisque
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
Ainsi
$$|x_{n+1} - x^*| = (x_n - x^*)^2 \left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\right|.$$
En passant à la limite on trouve le résultat.

5 La méthode de la sécante

Cette méthode peut être vue comme une approximation de la méthode de Newton, présentée dans le paragraphe précédent. En effet la méthode de Newton nécessite le calcul de la dérivée de la fonction en un point à chaque itération. Si le calcul de la dérivée est couteux en temps ou peu précis (par exemple c'est le résultat d'une approximation numérique), on peut approcher la dérivée de la manière suivante
$$f'(x) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$
On obtient ainsi la méthode de la sécante
$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ donnés tels que } f(x_0)f(x_1) < 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{cases}$$
Cette méthode n'est pas une méthode de point fixe puisque chaque point de la suite est construit partir des deux précédents. La convergence de la suite ne peut être assurée que pour deux valeurs x_0 et x_1 de la solution x^*. L'étude de l'erreur est compliquée mais elle montre que
$$|x_{n+1} - x^*| \leq K|x_n - x^*|^{\frac{1+\sqrt(5)}{2}}$$
où K dépend de la fonction f et la solution x^*.