esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 □ Session : Principale ■ Rattrapage □

Module : Méthodes Numériques pour l'Ingénieur (MNI)
Enseignant(s) : Équipe MNI de l'UP-Maths
Classe(s) : 3A1->3A14
Documents autorisés : OUI □ NON ■ Nombre de pages : 2
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON □ Internet autorisé : OUI □ NON ■
Date : 04/01/2020 Heure : 09h00 Durée : 1h30

NB : Pour les trois exercices de l'examen, les nombres décimaux seront donnés avec 4 chiffres après la virgule.

Exercice 1: .... 8 points

On considère le systéme d'équations linéaires (S_α) : $A_\alpha X = b$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad et \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) *(1 point) Pour quelles valeurs du paramètre réel* α, *le système* (S_α) *est de Cramer : il admet une unique solution?*

(b) *(1 point) Pour quelles valeurs du paramètre réel* α, *la matrice* A_α *est à diagonale strictement dominante?*

Dans la suite, on considère $\alpha = 3$.

(c) *(1 point) Justifier l'existence d'une unique décomposition LU de la matrice* A_3.

(d) *(2 points) Réaliser la factorisation LU de la matrice* A_3.

(e) *(1 point) Résoudre le système* (S_3) *avec une méthode directe de votre choix, vue en cours.*

(f) *(1 point) Établir le schéma itératif de la méthode de Jacobi pour la résolution de* (S_3) *tout en justifiant sa convergence.*

(g) *(1 point) En partant du vecteur initial,* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Jacobi pour la résolution de* (S_3).

Exercice 2: .... 6 points

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E): $f(x) = 0$ *dans* $I = [0, \frac{\pi}{3}]$, *où la fonction* f *est donnée par :*

$$f(x) = cos(x) - 3x, x \in I.$$

Il est à noter que la variable x *est exprimée en* ***radian***.

(a) *(1 point) Montrer que l'équation* (E) *admet une unique solution* $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$.

<u>*Application de la métohde de dichotomie :*</u>

(b) *(0.5 points) En utilisant la méthode de dichotomie sur* I*, estimer le nombre minimal d'itérations pour calculer* x^* *avec une tolérence de* $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$.

<u>*Application de la méthode de Newton :*</u>

(c) *(0.5 points) Écrire le schéma itératif de la méthode de Newton associé à* (E).

(d) *(1 point) Étudier la convergence de la méthode.*

(e) *(0.5 points) Choisir une condition initiale* x_0 *assurant la convergence de la méthode.*

(f) *(2 points) Déterminer* x^* *avec une précision de* $\varepsilon = 10^{-3}$.

(g) *(0.5 points) Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes en terme de nombre minimal d'itérations.*

Exercice 3: . . . . *6 points*

On considère le problème de Cauchy (PC) suivant :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = t - tx(t), \quad t \in [0,1] \\ \hfill x(0) = 2. \end{cases}$$

(a) *(0.5 points) Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy* (PC) *est donnée par :* $x(t) = 1 + e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in [0,1]$.

Pour la suite, nous notons par h *le pas de discrétisation de* $[0,1]$, t_n, $n \geq 0$, *les points de discrétisation de* $[0,1]$, x_n^E, *l'approximation de* x *au point* t_n, $n \geq 0$, *par la méthode d'Euler Explicite et* x_n^I, *l'approximation de* $x(t_n)$, $n \geq 0$, *par la méthode d'Euler Implicite.*

(b) *(1 point) Donner, en fonction de* h*, le schéma d'Euler Explicite (EE), associé au problème* (PC).

(c) *(1 point) Pour* $h = 0.25$*, approcher* $x(1)$ *par la méthode EE.*

(d) *(1 point) Donner, en fonction de* h*, le schéma d'Euler Implicite (EI), associé au problème* (PC).

(e) *(1 point) En déduire que pour* $\forall n \geq 0$ *:*

$$x_{n+1}^I = \frac{x_n^I + (n+1)h^2}{1 + (n+1)h^2}, \quad \forall n \geq 0,$$

(f) *(1 point) Pour* $h = 0.25$*, approcher* $x(1)$ *par la méthode EI.*

(g) *(0.5 points) Calculer l'erreur absolue commise par les deux méthodes, EE et EI, au point* $t = 1$*. Comparer les résutats.*