

SYNTHÈSE DU CONTRÔLE OPTIMAL : THÉORIES, MÉTHODES ET APPLICATIONS PRATIQUES

Projet Master 1

Oumar Hassanty MAHAMAT



Professeur référent : M. Thomas Haberkorn

Master 1 Mathématiques Appliquées, Statistiques

Juillet 2024

Table des matières

Avant-Propos	2
1 Introduction : contrôle de la vitesse angulaire du rotor	3
2 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal	6
2.1 Le système ou le processus	6
2.2 L'état d'origine et la cible du système physique	6
2.3 La classe des contrôleurs admissibles	7
2.4 La fonction de coût ou l'indice de performance	7
3 Problèmes	7
3.1 Le problème de contrôlabilité	7
3.2 Le problème de contrôle optimal	8
4 Contrôle optimal de systèmes linéaires	10
4.1 Ensemble Accessible	12
4.1.1 Définitions et Théorème	12
4.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	14
4.2.1 Cas sans contrainte sur le contrôle : critère de Kalman	14
4.2.2 Cas avec contrainte sur le contrôle : critère de Kalman	15
4.3 Temps Optimal	18
4.4 Exemple : Contrôle d'un mécanisme sur une piste lisse	19
4.5 Exemple : Contrôle d'un oscillateur harmonique	29
Bibliographie	36

Avant-Propos

La théorie du contrôle est une branche des mathématiques qui se concentre sur l'étude des systèmes dynamiques sur lesquels on peut exercer une action ou une commande, comme par exemple la conduite d'une voiture ou la gestion d'un processus industriel. Un système est souvent modélisé de manière abstraite et la théorie du contrôle cherche à répondre à diverses questions relatives à la manipulation de ce système par des contrôles ou des actions spécifiques. Les principales classes de problèmes étudiés en théorie du contrôle sont les suivantes :

Contrôlabilité : Cette question fondamentale concerne la capacité à piloter ou à guider un système d'une configuration initiale à une configuration finale donnée. Il s'agit essentiellement d'une question d'existence : est-il possible d'atteindre l'état souhaité ? Existe-t-il une solution ? Si une telle solution existe, cela signifie que le système est contrôlable.

Contrôle optimal : Lorsqu'une solution existe, il peut y en avoir plusieurs. Le problème de contrôle optimal consiste alors à déterminer la solution qui minimise un certain critère de performance parmi toutes celles qui permettent de guider le système d'un point à un autre. Ce critère peut être le coût énergétique, le temps de trajet, ou toute autre mesure d'efficacité.

Stabilisation : En pratique, les modèles sont souvent imparfaits et sujets à des perturbations. La stabilisation est cruciale pour compenser les incertitudes ou les imperfections du modèle. Après avoir planifié une trajectoire, par exemple par le biais du contrôle optimal, il est important de la rendre insensible aux perturbations inévitables du modèle. La stabilisation consiste à concevoir des contrôles qui permettent de maintenir le système proche de la trajectoire de référence. En d'autres termes, lorsque le système s'éloigne de la trajectoire planifiée, on cherche à appliquer un contrôle qui le ramène vers cette trajectoire.

1 Introduction : contrôle de la vitesse angulaire du rotor

Pour expliquer et motiver la théorie du contrôle, nous allons partir d'un problème concret et simple : le contrôle optimal d'un rotor. Ce problème nous permettra de voir comment piloter un rotor, en partant d'un état initial pour atteindre un état final bien déterminé de manière efficace.

On considère un rotor R capable de tourner librement autour d'un axe fixe passant par son centre.

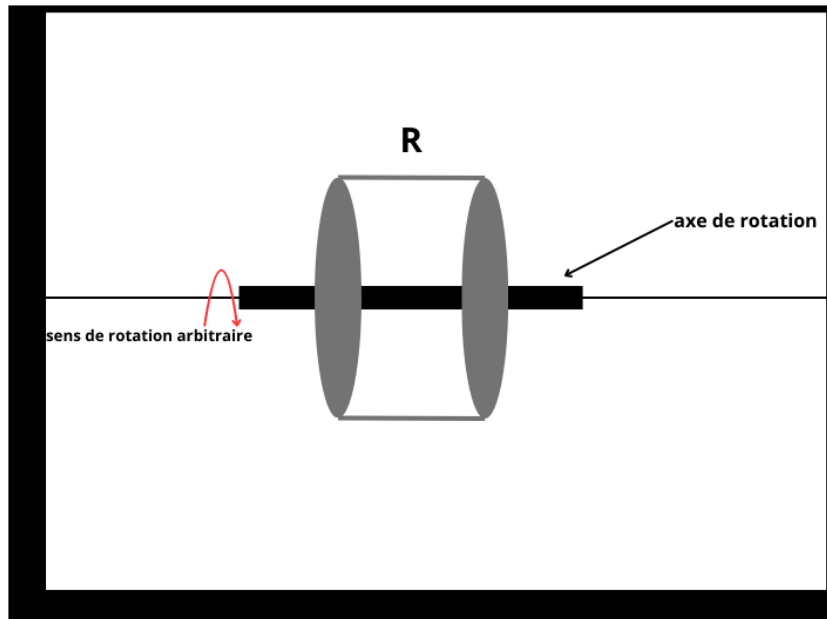


FIGURE 1 – Le rotor R

Soit $\omega(t)$ la vitesse angulaire de rotation du rotor R à l'instant $t > 0$, avec $\omega(0) = \omega_0$ la vitesse angulaire initiale. Notre objectif est d'arrêter le rotor. Autrement dit l'état final qu'on cherche à atteindre est $\omega(T) = 0$ à un temps $T > 0$ donné. Pour ce faire, nous appliquons un couple externe, notée $L(t)$, le long de l'axe de rotation de R afin de contrôler $\omega(t)$. Cette force extérieure est appelée **le contrôleur**.

Le mouvement du rotor est décrit par l'équation suivante :

$$I \frac{d\omega}{dt}(t) = L(t) \quad (1)$$

Avec I le moment d'inertie positif constant de R autour de son axe.

L'état initial de R étant donné, le but est de trouver une fonction $L(t)$ en respectant la contrainte $|L(t)| \leq 1$, qui permet d'arrêter le rotor en un temps minimal.

On explore deux cas de contrôle de la sortie :

- **Contrôle en boucle ouverte** : Dans cette approche, étant donnée la vitesse initiale ω_0 , nous prévoyons à l'avance l'application de la force extérieure $L(t)$ sans mesurer la vitesse angulaire $\omega(t)$ à chaque instant t . Cela signifie que $L(t)$ est appliquée en se basant uniquement sur l'état initial du rotor, sans ajustements en temps réel.

- **Contrôle en boucle fermée :** Dans cette approche, nous utilisons un contrôle par rétroaction, adapté pour un système qui doit s'ajuster automatiquement à différentes vitesses initiales ω_0 et aux perturbations. Cela signifie que la force $L(t)$ est ajustée en fonction de la vitesse angulaire actuelle $\omega(t)$. Pour ce faire, nous définissons ϕ comme une fonction de la vitesse angulaire $\omega(t)$ à l'instant t , que nous utilisons ensuite comme force extérieure.

Considérons le contrôle linéaire par rétroaction défini par :

$$\phi(\omega(t)) = -k\omega(t)$$

avec $k > 0$. L'équation (1) décrivant le mouvement du rotor devient alors :

$$I \frac{d\omega}{dt}(t) = -k\omega(t)$$

avec la condition initiale $\omega(0) = \omega_0$. Pour déterminer la vitesse angulaire $\omega(t)$ qui varie progressivement avec le temps t , nous devons résoudre cette équation différentielle de premier ordre, qui modélise le mouvement du rotor.

Nous partons de l'équation :

$$I \frac{d\omega}{dt}(t) = -k\omega(t) \iff I \dot{\omega}(t) = -k\omega(t) \iff \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} = -\frac{k}{I}$$

En intégrant cette égalité de part et d'autre sur $[0, t]$, nous obtenons :

$$\int_0^t \frac{\dot{\omega}(s)}{\omega(s)} ds = \int_0^t -\frac{k}{I} ds \iff \ln(\omega(t)) - \ln(\omega(0)) = -\frac{k}{I}t$$

Simplifiant davantage, nous avons :

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega_0}\right) = -\frac{k}{I}t \iff \frac{\omega(t)}{\omega_0} = e^{-\frac{k}{I}t}$$

Finalement, la vitesse angulaire en fonction du temps est :

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{k}{I}t}$$

k représente un gain constant. Pour améliorer l'efficacité d'un système de commande linéaire, notamment en ce qui concerne le temps de réponse (le délai nécessaire pour que la vitesse du rotor passe de ω_0 à 0) et la précision, il est souvent avantageux d'ajuster le gain k . Une plus grande précision implique une réduction de l'écart entre la vitesse angulaire finale du rotor et la valeur cible qui est 0. Plus k est élevé, plus rapidement la vitesse angulaire $\omega(t)$ diminue, tendant ainsi vers l'arrêt. Cependant, il est important de noter que $\omega(t)$ ne s'arrête jamais complètement. En pratique, des gains trop élevés peuvent entraîner des phénomènes indésirables tels que la saturation. Cela signifie qu'il existe une limite physique à la force pouvant être appliquée. Pour éviter ce problème, on impose une contrainte à la force extérieure,

$$-1 \leq L(t) \leq 1$$

Cela montre également que nos possibilités d'action sont limitées.

— **Contrôle optimal en boucle ouverte :**

1. Si $\omega_0 > 0$,

nous appliquons la force extérieure $L(t) = -1$ dans le sens contraire à la rotation du rotor, jusqu'à ce que la vitesse atteigne 0. Cette stratégie permet de ralentir le rotor et de le faire revenir à l'arrêt. Dans ce cas, l'équation (1) devient,

$$I \frac{d\omega}{dt}(t) = -1$$

En intégrant et réarrangeant cette égalité, nous obtenons comme solution :

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{1}{I}t$$

Supposons que $T > 0$ représente le temps nécessaire pour atteindre 0, c'est-à-dire $\omega(T) = 0$, ce qui se produit lorsque $\omega_0 - \frac{1}{I}T = 0$. Donc

$$T = I\omega_0$$

Donc, le temps de réponse est proportionnel au moment d'inertie I du rotor et à sa vitesse angulaire initiale ω_0 . Plus le moment d'inertie I est grand, plus il faudra du temps pour arrêter le rotor. De même, plus la vitesse angulaire initiale ω_0 est grande, plus il faudra de temps pour arrêter le rotor.

Par conséquent, le choix de $L(t) = -1$ est optimal car il minimise le temps de réponse en assurant que la force de décélération est maximale et ne change pas dans le temps, ce qui permet un arrêt rapide et efficace du rotor. Tout autre choix de force qui ne serait pas maximal résulterait en un temps d'arrêt plus long.

2. Lorsque $\omega_0 < 0$,

nous choisissons d'appliquer une force extérieure $L(t) = 1$ agissant dans le sens contraire à la rotation du rotor. l'équation (1) devient,

$$I \frac{d\omega}{dt}(t) = 1$$

En résolvant cette équation, nous obtenons la solution $\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{I}t$. Le temps pour atteindre 0 est : $T = -I\omega_0$

Cette approche est également considérée comme optimale car

$$\forall c \in]0, 1[\text{ tel que } L(t) = c, \text{ on a } T = \frac{-I\omega_0}{c} > -I\omega_0$$

Donc, en appliquant une force constante $L(t) = 1$, le rotor est freiné de manière efficace, favorisant ainsi son retour à l'arrêt. Cette stratégie garantit une accélération constante du rotor, ce qui permet un arrêt progressif et contrôlé. Ainsi, le choix de cette action est cohérent avec l'objectif global d'arrêter le rotor de manière rapide et efficace.

— **Synthèse du contrôle par rétroaction :**

La fonction $\phi(\omega) = -\text{sgn}(\omega)$ est définie en utilisant la fonction signum, notée $\text{sgn}(\omega)$, définie comme suit :

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } \omega < 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ 1 & \text{si } \omega > 0 \end{cases}$$

Autrement dit, la fonction $\phi(\omega)$ attribue un signe à la vitesse angulaire du rotor, indiquant la direction de son mouvement.

En incorporant cette fonction dans l'équation du mouvement, $I\dot{\omega} = \phi(\omega)$, nous garantissons que la force appliquée au rotor est toujours maximale et dans la direction opposée à sa rotation. Cette approche permet ainsi d'obtenir un arrêt optimal en respectant les limites. En assurant que le couple appliqué au rotor est toujours ajusté de manière à contrecarrer son mouvement et à ralentir sa rotation, cette méthode contribue à stabiliser le système et à atteindre un arrêt précis et contrôlé.

2 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal général est défini par quatre types de données :

- Le système ou le processus ;
- L'état d'origine et la cible du système physique ;
- La classe des contrôleurs admissibles ;
- La fonction de coût ou l'indice de performance, qui évalue l'efficacité des différents contrôleurs.

2.1 Le système ou le processus

Soit $T > 0$ une période temporelle, n et m deux nombres entiers naturels non nuls. Le système ou processus relie l'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ à l'entrée ou commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$ pour tout $t \in [0, T]$ par une équation différentielle ordinaire vectorielle.

$$\dot{x}^i(t) = f^i(t, x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t), u^1(t), \dots, u^m(t)) \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{E})$$

Parfois $x(t)$ est appelé *sortie ou réponse*. Le processus peut être autonome (c'est-à-dire que les fonctions f^i de (E) ne dépendent pas explicitement du temps t), linéaire ou d'ordre n , en fonction de la nature du système différentiel (E). Dans chaque problème de contrôle optimal, notre objectif ultime est de concevoir un contrôleur optimal en utilisant une boucle fermée ou de rétroaction. L'avantage d'un tel contrôle en boucle fermée, par rapport à un contrôle en boucle ouverte, est que le processus devient auto-ajusté et auto-corrigé. Un contrôle par rétroaction peut souvent compenser les variations imprévisibles de l'environnement de l'installation ainsi que les perturbations ou irrégularités récurrentes du processus.

2.2 L'état d'origine et la cible du système physique

Le point initial, ou état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, est un vecteur connu dans l'espace des phases. Dans un processus physique réel, x_0 et la réponse $x(t)$ peuvent comporter des composantes décrivant des positions, des vitesses, des vitesses angulaires, des températures ou d'autres paramètres mesurés et enregistrés par des instruments de détection appropriés. Un point objectif $x(t_1) =$

$x_1 \in \mathbb{R}^n$ pour $t_1 \in [0, T]$ ou un ensemble d'objectifs, G , est également prescrit pour le problème de contrôle.

Parfois, la cible est représentée par un ensemble compact $G(t)$ en mouvement continu sur l'intervalle $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$. En d'autres termes, pour chaque instant t , nous définissons un ensemble compact non vide $G(t)$ dans \mathbb{R}^n .

2.3 La classe des contrôleurs admissibles

La classe Δ de contrôleurs admissibles se compose généralement de fonctions mesurables $u(t)$ sur divers intervalles de temps $t_0 \leq t < t_1$ avec t_0 et $t_1 \in [0, T]$, chacune visant à guider x_0 vers la cible $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ou $G(t_1)$. En d'autres termes, la solution $x(t)$ de l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{avec} \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{S})$$

satisfait $x(t_1) = x_1$ ou $x(t_1) \in G(t_1)$

2.4 La fonction de coût ou l'indice de performance

Le coût fonctionnel (ou indice de performance, ou objectif fonctionnel, ou effort) est un critère quantitatif utilisé pour évaluer l'efficacité de chaque contrôleur $u(t)$ sur $t_0 \leq t \leq t_1$ dans la classe Δ . Si Δ comprend des contrôleurs agissant sur différents intervalles de temps pour diriger x_0 vers une cible, le coût de $u(t)$ est souvent défini comme :

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

où $f^0(t, x, u)$ est une fonction continue donnée. Lorsque $f^0(t, x, u) = 1$, alors $C(u) = t_1 - t_0$, correspondant au problème du temps minimal.

Dans certains cas, Δ peut consister en un contrôleur agissant sur une durée fixe spécifiée, par exemple $t_0 \leq t \leq T$, sans l'exigence d'atteindre une cible comme e_T . Dans ce scénario, les coûts fonctionnels sont souvent définis comme :

$$C(u) = \|x(T) - e_T\| + \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

En particulier, il existe des fonctions de coût quadratiques importantes qui prennent en compte l'erreur moyenne de la réponse $x(t)$ et l'énergie dépensée par le contrôleur $u(t)$.

Considérons maintenant un problème de contrôle impliquant les quatre types de données mentionnés précédemment.

3 Problèmes

3.1 Le problème de contrôlabilité

Dans cette section, nous examinons la possibilité d'orienter un état initial x_0 précisément vers un état cible x_1 en un temps fini.

Définition 3.1. *On considère le processus de contrôle autonome (S) suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (S)$$

où :

- $T > 0$: une période de temps,
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: vecteur de contrôle,
- $f(x(t), u(t)) \in C^1$: fonction vectorielle de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$: état initial.

Ce processus est appelé (complètement) contrôlable si pour chaque paire de points x_0 et x_1 dans \mathbb{R}^n , il existe un contrôleur mesurable borné $u(t)$ sur un intervalle fini $0 \leq t \leq t_1$ tel que la réponse correspondante $x(t)$ satisfasse $x(0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$.

Remarque 3.2. Pour un processus non autonome décrit par l'équation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

nous définissons un concept correspondant de contrôlabilité pour chaque instant initial t_0 . Ce concept stipule qu'à partir de tout point initial x_0 et pour tout point cible x_1 , il existe un contrôleur mesurable borné $u(t)$ sur l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$ tel que la trajectoire $x(t)$ résultante satisfait $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$.

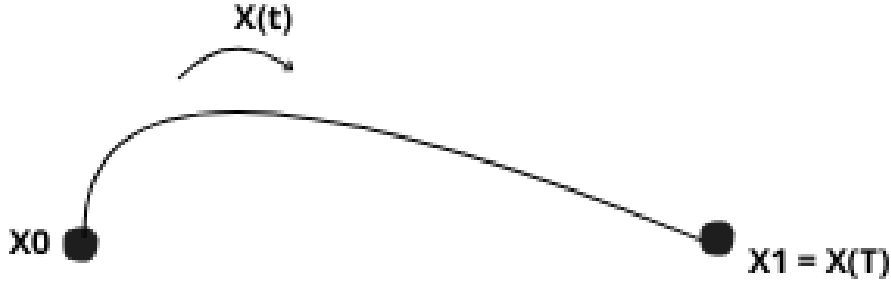


FIGURE 2 – Problème de contrôlabilité

3.2 Le problème de contrôle optimal

On considère le processus de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

où :

- $T > 0$: une période de temps,
- $x(t) \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$: vecteur d'état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: vecteur de contrôle,

- $f(t, x(t), u(t)) \in C^1$: fonction vectorielle de classe C^1 définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$: état initial.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe un contrôle $u \in \mathbb{R}^m$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle relie x_0 à x_1 en un temps fini. Le problème de contrôle optimal consiste à trouver le contrôle u qui permet de joindre x_0 à x_1 tout en minimisant une certaine fonctionnelle $C(u)$. Cette fonctionnelle peut représenter, par exemple, le temps requis pour effectuer cette jonction.

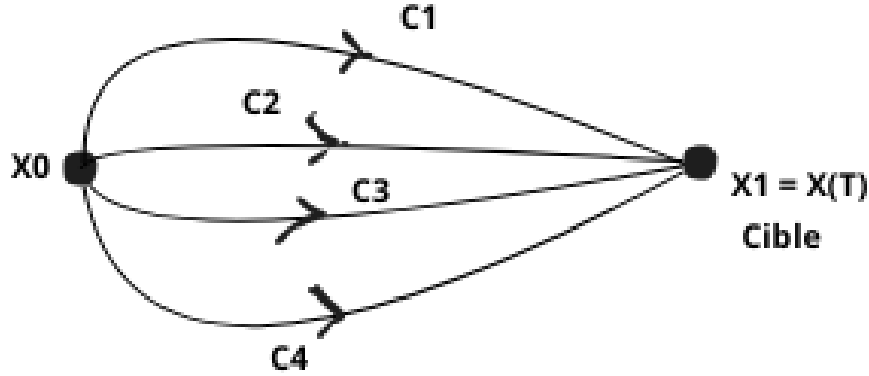


FIGURE 3 – Problème de contrôle optimal

Définition 3.3. Un contrôleur u^* dans la classe admissible est considéré optimal par rapport à la fonction de coût $C(u)$, si $C(u^*) \leq C(u)$ pour tout u dans Δ .

Théorème 3.4. Considérons le problème de contrôle suivant :

1. Un système différentiel

$$\dot{x}^i(t) = g^i(t, x(t)) + \sum_{j=1}^m h_j^i(t, x(t))u^j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{S})$$

où $g^i(t, x(t))$, $h_j^i(t, x(t))$, $\frac{\partial g^i}{\partial x^k}(t, x(t))$ et $\frac{\partial h_j^i}{\partial x^k}(t, x(t))$ pour $k = 1, \dots, n$ sont tous continus sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

2. Un ensemble de contraintes non vide, convexe et compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

3. Le point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'ensemble cible compact $G(t) \subset \mathbb{R}^n$ en mouvement continu sur l'intervalle fini $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$.

4. La fonction de coût

$$C(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[g^0(t, x(t)) + \sum_{j=1}^m h_j^0(t, x(t))u^j(t) \right] dt$$

où $g^0(t, x(t))$ et $h_j^0(t, x(t))$ sont continus sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Soit $\Delta = \Delta(S, \Omega, x_0, G)$ la classe des contrôleurs mesurables $u(t) \in \Omega$ sur des sous-intervalles $t_0 \leq t \leq t_1$ de $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$ avec des réponses $x(t)$ pilotant $x(t_0) = x_0$ à $x(t_1) \in G(t_1)$.

Supposons que :

- Δ est non vide ;
 - Il existe une borne uniforme $B < \infty$ pour toutes les réponses $x(t)$ correspondant aux contrôles dans Δ , c'est-à-dire $\|x(t)\| \leq B, \forall t$.
- Alors, il existe un contrôle optimal $u^* \in \Delta$.

Démonstration. Voir [2] □

4 Contrôle optimal de systèmes linéaires

Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervalle de \mathbb{R} , et A , b , et r trois applications appartenant à $L^\infty(I)$, prenant respectivement des valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ce dernier étant identifié à \mathbb{R}^n). Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^m , et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La forme général de la fonction f du système (S) dans le cas linéaire non-autonome s'écrit comme suit :

$$f(t, x(t), u(t)) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + r(t), \quad \forall (t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Donc le système de contrôle linéaire considéré est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + r(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\tau)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $A(t)$ est une matrice $n \times n$ dépendant du temps, $b(t)$ est une matrice $n \times m$ dépendant du temps et $r(t) \in \Omega$ représente des influences environnementales, des bruits de mesure, ou toute autre force extérieure non contrôlable qui affecte le comportement du système.

Exemple 4.1. On considère un train se déplaçant le long d'une voie définie. La position du train à un instant t est notée $x(t)$. Le train suit un trajet précisément défini le long de cette voie. Le mouvement du train est décrit par le système de contrôle suivant :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u$$

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Le système de contrôle est exprimé de manière matricielle comme suit :

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t)u(t). \quad (3)$$

Considérons maintenant le système (τ) , pour simplifier la résolution, on considère que les perturbations extérieures sont négligeables. Donc notre système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (T_1)$$

où l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I , à valeurs dans le sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Les théorèmes d'existence

de solutions pour les équations différentielles garantissent que, pour tout contrôle u , le système (T_1) admet une solution unique $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est absolument continue.

Prenons le cas où le système différentiel (T_1) est autonome (avec A et b constants). Pour le résoudre, nous procéderons de la manière suivante :

Solution de l'équation homogène associée

Sachant que l'équation homogène associée est

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

la solution est

$$x_h(t) = e^{At}x_0$$

Solution particulière par variation de la constante

Nous supposons une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = e^{At}x_0(t)$$

où $x_0(t)$ est un vecteur de fonctions à déterminer ou qui est donné.

Prenons la dérivée de $x_p(t)$:

$$\dot{x}_p(t) = e^{At}\dot{x}_0(t) + Ae^{At}x_0(t)$$

En substituant dans l'équation originale

$$e^{At}\dot{x}_0(t) + Ae^{At}x_0(t) = Ae^{At}x_0(t) + bu(t)$$

Les termes $Ae^{At}x_0(t)$ se simplifient :

$$e^{At}\dot{x}_0(t) = bu(t)$$

On multiplie par e^{-At} des deux côtés :

$$\dot{x}_0(t) = e^{-At}bu(t)$$

On intègre des deux cotés pour obtenir $x(t)$:

$$x_0(t) = \int_0^t e^{-As}bu(s) ds$$

ce qui nous donne comme solution particulière

$$x_p(t) = e^{At}x_0(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As}bu(s) ds$$

Alors, la solution $x(\cdot)$ du système (T_1) associée au contrôle u est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As}bu(s) ds$$

Dans le cas général, prenons $M(\cdot) : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = \text{Id}$. Alors, la solution $x(\cdot)$ du système (T_1) associée au contrôle u est donnée par

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s)u(s) ds, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

La solution dépend du contrôle u , ce qui signifie qu'elle varie en fonction de u . En d'autres termes, chaque choix différent de u entraîne une trajectoire distincte du système.

Ce constat nous amène à poser les questions suivantes : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée à ce contrôle relie x_0 à x_1 en un temps fini T ?

On rappelle que **c'est le problème de contrôlabilité**

Si oui, existe-t-il un contrôle qui relie x_0 à x_1 et qui, de plus, minimise le temps de parcours ? **c'est le problème du temps minimal.**

4.1 Ensemble Accessible

4.1.1 Définitions et Théorème

Définition 4.2. *L'ensemble accessible à partir de point initial x_0 en un temps $t > 0$ est un ensemble de points défini par*

$$K(t) = \{x(t) \mid u \in L^\infty([0, t], \Omega)\}$$

où $x(\cdot)$ est la solution du système différentielle (T_1) associée au contrôleur u et $x(0) = x_0$ la condition initiale.

Autrement dit, On définit l'ensemble $K(t)$ comme étant l'ensemble de tous les points d'arrivée des solutions du système qui commencent à x_0 à $t_0 = 0$. $K(t)$ représente l'ensemble de tous les points qui peuvent être atteints au temps t en partant de x_0 à $t_0 = 0$, en utilisant un contrôleur soumis à des contraintes.

Pour assurer la cohérence, nous posons $K(0) = \{x_0\}$.

Théorème 4.3. *Considérons le système de contrôle linéaire suivant :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est convexe et compact. Soient $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $K(t)$ est fermé, borné, convexe, et varie continûment avec t sur $[0, T]$.

Démonstration. Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est convexe et montrons que $K(t)$ est convexe.

Soient $x_1, x_2 \in K(t)$, et $\lambda \in [0, 1]$. Montrer $K(t)$ est convexe revient à montrer que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K(t)$. Par définition, pour $i = 1, 2$, il existe un contrôle $u_i : [0, t] \rightarrow \Omega$ tel que la trajectoire $x_i(\cdot)$ associée à u_i vérifie :

$$x_i(0) = x_0, \quad x_i(t) = x_i, \quad \dot{x}_i(s) = A(s)x_i(s) + b(s)u_i(s).$$

D'après la formule de variation de la constante,

$$x_i = x_i(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s)u_i(s) ds, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Pour tout $s \in [0, t]$, posons $u(s) = \lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)$. Le contrôle u est dans L^∞ , à valeurs dans Ω car Ω est convexe. Soit $x(\cdot)$ la trajectoire associée à u . Alors, par définition de $K(t)$, on a

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s)u(s) ds \in K(t).$$

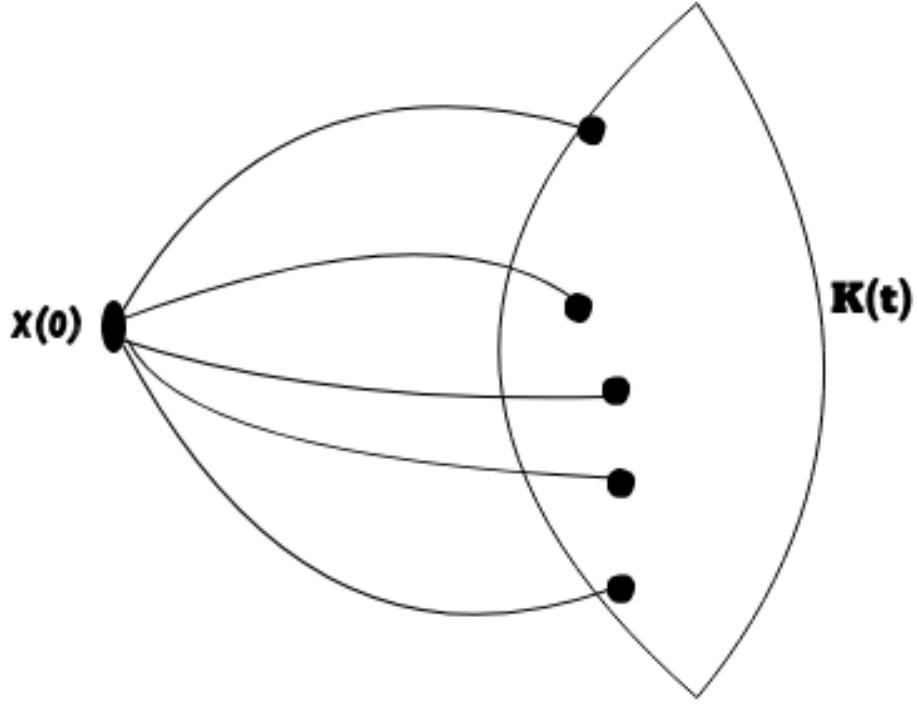


FIGURE 4 – Ensemble Accessible

Or,

$$\begin{aligned}
 \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 &= \lambda x_1(t) + (1 - \lambda)x_2(t) \\
 &= M(t)x_0 + (1 - \lambda)M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}b(s)(\lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)) ds \\
 &= x(t)
 \end{aligned}$$

donc $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K(t)$, ce qui prouve la convexité de $K(t)$.

Pour montrer **la continuité** par rapport à t de $K(t)$, soit $\epsilon > 0$. Nous cherchons $\delta > 0$ tel que

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \delta \implies d(K(t_1), K(t_2)) \leq \epsilon,$$

où nous notons pour simplifier

$$d(K(t_1), K(t_2)) = \max \left(\sup_{y \in K(t_2)} d(y, K(t_1)), \sup_{y \in K(t_1)} d(y, K(t_2)) \right).$$

Ensuite, supposons $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Il suffit de montrer que :

1. $\forall y \in K(t_2), d(y, K(t_1)) \leq \epsilon,$
2. $\forall y \in K(t_1), d(y, K(t_2)) \leq \epsilon.$

Montrons juste le premier point (le second étant similaire). Soit $y \in K(t_2)$. Il suffit de montrer que

$$\exists z \in K(t_1) \text{ tel que } d(y, z) \leq \epsilon.$$

Par définition de $K(t_2)$, comme Ω est compact, il existe un contrôle $u \in L^2([0, T], \Omega)$ tel que la trajectoire associée à u , partant de x_0 , vérifie $x(t_2) = y$. Nous allons montrer que $z = x(t_1)$ convient. En effet, on a

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= M(t_2)x_0 + \int_0^{t_2} M(t_2)M(s)^{-1}b(s)u(s) ds - \left(M(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} M(t_1)M(s)^{-1}b(s)u(s) ds \right) \\ &= M(t_2)x_0 + \int_{t_1}^{t_2} M(s)^{-1}B(s)u(s) ds + (M(t_2) - M(t_1)) \left(x_0 + \int_0^{t_1} M(s)^{-1}b(s)u(s) ds \right) \end{aligned}$$

Si $|t_1 - t_2|$ est petit, le premier terme de cette somme est petit par continuité de $M(t)$, le deuxième terme est petit par continuité de l'intégrale et le troisième terme est petit car l'intégration est sur un intervalle de longueur $|t_1 - t_2|$. D'où le résultat.

Pour établir que l'ensemble accessible $K(t)$ est **compact** (c'est-à-dire fermé et borné), il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $K(t)$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K(t)$.
Pour plus de détail. Voir [3]

□

Définition 4.4. Le système contrôlé $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ est dit *contrôlable en temps T* si $K(T) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T .

Remarque 4.5. La définition ci-dessus constitue un cas particulier de la définition précédente du problème de contrôlabilité, dans la mesure où elle s'applique spécifiquement quand $K(T) = \mathbb{R}^n$.

4.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

4.2.1 Cas sans contrainte sur le contrôle : critère de Kalman

Le théorème suivant énonce une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité d'un système linéaire autonome.

Théorème 4.6. Le processus de contrôle linéaire

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

où A est une matrice réelle constante $n \times n$ et b une matrice réelle constante $n \times m$, est contrôlable si et seulement si la matrice $n \times nm$

$$C = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

est de rang n .

La matrice C est appelée *matrice de Kalman*, et la condition $\text{rg } C = n$ est appelée *condition de Kalman*.

Démonstration. Voir [1] □

Remarque 4.7. La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Exemple 4.8. Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + u(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) - u(t). \end{cases} \quad (4)$$

Nous visons à analyser la contrôlabilité de ce système à l'aide du critère de Kalman. on pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{Alors} \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

En notation matricielle, ce système peut s'écrire :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) \quad (S1)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de Kalman

$$C = [b \quad Ab] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes, ce qui implique que $\text{rang}(C) = 2$. Ainsi, d'après le critère de Kalman, le système est contrôlable.

4.2.2 Cas avec contrainte sur le contrôle : critère de Kalman

Dans le cas où le contrôle u est soumis à une contrainte, on a le résultat plus précis suivant que nous admettons :

Théorème 4.9. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

avec $u(t) \in \Omega$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, b) vérifie la condition de Kalman et si la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

Exemple 4.10. Considérons un processus de contrôle décrit par $\dot{x} + bx = u$ pour une constante réelle b , avec la contrainte $|u(t)| \leq 1$. Vérifions que la réponse $x(t)$ avec $x(0) = x_0$ à un contrôleur $u(t)$ est

$$x(t) = e^{-bt}x_0 + e^{-bt} \int_0^t e^{bs}u(s) ds.$$

on multiplie les deux côtés de l'équation par un facteur intégrant $\mu(t)$

$$\mu(t) = e^{bt}.$$

$$e^{bt}\dot{x} + e^{bt}bx = e^{bt}u.$$

Le côté gauche de cette équation est la dérivée d'un produit :

$$\frac{d}{dt} \left(e^{bt}x \right) = e^{bt}u.$$

intégration des deux côtés de l'équation par rapport à t :

$$\int \frac{d}{dt} \left(e^{bt}x \right) dt = \int e^{bt}u dt, \iff e^{bt}x = \int_0^t e^{bs}u(s) ds + C,$$

où C est une constante à déterminer

grâce à la condition initiale $x(0) = x_0$, on a :

$$e^{b \cdot 0}x(0) = \int_0^0 e^{bs}u(s) ds + C \implies x_0 = C.$$

donc finalement, on obtient :

$$x(t) = e^{-bt}x_0 + e^{-bt} \int_0^t e^{bs}u(s) ds.$$

Ainsi, la solution $x(t)$ vérifie bien l'équation différentielle $\dot{x} + bx = u$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$.

(a) montrons que tout point initial x_0 peut être contrôlé jusqu'à $x_1 = 0$. On sait que la solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = e^{-bt}x_0 + e^{-bt} \int_0^t e^{bs}u(s) ds.$$

Pour que $x(t) = 0$ à un certain temps fini t_1 , on a

$$x(t_1) = 0 \iff e^{-bt_1}x_0 + e^{-bt_1} \int_0^{t_1} e^{bs}u(s) ds = 0. \iff x_0 + \int_0^{t_1} e^{bs}u(s) ds = 0.$$

alors

$$\int_0^{t_1} e^{bs}u(s) ds = -x_0.$$

Pour satisfaire cette équation, nous choisissons une fonction de contrôle $u(t)$ telle que l'intégrale soit égale à $-x_0$. Considérons le contrôle constant $u(t) = -\text{sgn}(x_0)$ pendant une durée appropriée t_1

En choisissant $u(t) = -\text{sgn}(x_0)$, nous avons $|u(t)| = 1$, respectant ainsi la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

Intégrons pour trouver t_1 . Si $u(t) = -\text{sgn}(x_0)$, nous avons :

$$\int_0^{t_1} e^{bs}(-\text{sgn}(x_0)) ds = -x_0. \iff -\text{sgn}(x_0) \left[\frac{e^{bs}}{b} \right]_0^{t_1} = -x_0. \iff \text{sgn}(x_0) \left(\frac{e^{bt_1} - 1}{b} \right) = x_0.$$

Si $x_0 > 0$, $\text{sgn}(x_0) = 1$, alors :

$$e^{bt_1} - 1 = bx_0.$$

Ainsi :

$$t_1 = \frac{\ln(1 + bx_0)}{b}.$$

Si $x_0 < 0$, $\text{sgn}(x_0) = -1$, alors :

$$-(e^{bt_1} - 1) = bx_0.$$

donc :

$$t_1 = \frac{\ln(1 - bx_0)}{b}.$$

En conclusion, nous avons montré qu'en choisissant un contrôle $u(t) = -\text{sgn}(x_0)$, nous pouvons amener $x(t)$ à 0 en un temps fini t_1 donné par les expressions ci-dessus. Pour $b \geq 0$, tout point initial x_0 peut donc être contrôlé jusqu'à $x_1 = 0$ en un temps t_1 approprié.

(b) Considérons le processus de contrôle décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} + bx = u,$$

où b est une constante réelle avec $b < 0$, et avec la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

Nous devons déterminer les points initiaux x_0 qui peuvent être dirigés vers $x_1 = 0$. La solution de l'équation différentielle avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est donnée par

$$x(t) = e^{-bt}x_0 + e^{-bt} \int_0^t e^{bs}u(s) ds.$$

Pour atteindre $x_1 = 0$ à un temps fini t_1 , nous devons avoir :

$$x(t_1) = e^{-bt_1}x_0 + e^{-bt_1} \int_0^{t_1} e^{bs}u(s) ds = 0.$$

on avait obtenu en (a) :

$$\int_0^{t_1} e^{bs}u(s) ds = -x_0.$$

Pour simplifier l'analyse, considérons le cas où $u(t)$ est constant. Supposons que $u(t) = k$ où $|k| \leq 1$. L'intégrale devient :

$$k \int_0^{t_1} e^{bs} ds = -x_0.$$

après calcul, on obtient :

$$k = \frac{-x_0 b}{e^{bt_1} - 1}.$$

$$|k| \leq 1 \iff \left| \frac{-x_0 b}{e^{bt_1} - 1} \right| \leq 1.$$

Déterminons les points x_0 dirigibles vers $x_1 = 0$

Si $x_0 > 0$, alors $\frac{-x_0 b}{e^{bt_1} - 1}$ doit être compris entre -1 et 1 .

$$\left| \frac{-x_0 b}{e^{bt_1} - 1} \right| = \frac{x_0 |b|}{|e^{bt_1} - 1|} \leq 1.$$

Puisque $b < 0$, $e^{bt_1} - 1$ est négatif pour $t_1 > 0$. Nous obtenons alors :

$$\frac{x_0 |b|}{1 - e^{bt_1}} \leq 1.$$

Cela implique :

$$x_0 \leq \frac{1 - e^{bt_1}}{|b|}.$$

avec

$$\frac{1 - e^{bt_1}}{|b|} \in \left] 0, \frac{1}{|b|} \right[$$

Si $x_0 < 0$, alors $\frac{-x_0 b}{e^{bt_1} - 1}$ doit être compris entre -1 et 1 .

$$\left| \frac{-x_0 b}{1 - e^{bt_1}} \right| = \frac{-x_0 b}{1 - e^{bt_1}} \leq 1.$$

Puisque $b < 0$, $e^{bt_1} - 1$ est négatif pour $t_1 > 0$. Nous obtenons alors :

$$\frac{-x_0 b}{1 - e^{bt_1}} \leq 1.$$

Cela implique :

$$-x_0 b \leq 1 - e^{bt_1}.$$

Comme $b < 0$, e^{bt_1} tend vers 0 pour t_1 tendant vers l'infini. Pour tout $x_0 < 0$, il existe un contrôle permettant d'atteindre $x_1 = 0$ en un temps suffisamment grand.

4.3 Temps Optimal

Pour formaliser la notion de temps minimal à l'aide de $K(t)$, considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t),$$

où les contrôles u prennent des valeurs dans un compact à intérieur non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient x_0 et x_1 deux points de \mathbb{R}^n . Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0 , c'est-à-dire qu'il

existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_1 . Parmi toutes ces trajectoires, nous souhaitons identifier celles qui atteignent x_1 en un temps minimal t^* . Si t^* est ce temps minimal, alors pour tout $t < t^*$, $x_1 \notin K(t)$, car sinon x_1 serait accessible depuis x_0 en un temps inférieur à t^* . Ainsi,

$$t^* = \inf\{t > 0 \mid x_1 \in K(t)\}.$$

Ce temps t^* est bien défini car, selon le théorème (4.3), $K(t)$ varie continûment avec t , ce qui implique que l'ensemble $\{t > 0 \mid x_1 \in K(t)\}$ est fermé dans \mathbb{R} . En conséquence, cette borne inférieure est atteinte.

Le temps $t = t^*$ est donc le premier instant pour lequel $K(t)$ contient x_1 . En particulier, cela prouve le théorème d'existence suivant.

Théorème 3.1.1. Si le point x_1 est accessible depuis x_0 , alors il existe une trajectoire temps-minimal reliant x_0 à x_1 .

Remarque 4.11. On peut envisager une extension du problème de contrôle optimal en considérant des cibles plus complexes qu'un simple point. Supposons que l'on ait une famille $\{G(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ de sous-ensembles compacts de \mathbb{R}^n qui varient continûment par rapport à t . Comme précédemment discuté pour le problème de temps minimal classique, on peut voir que :

- S'il existe un contrôle u , à valeurs dans un ensemble admissible Ω , qui permet de joindre un point initial x_0 à l'ensemble $G(T)$ à un temps final T , alors il existe également un contrôle temps-minimal.
- Ce contrôle temps-minimal est défini sur un certain intervalle $[0, t^*]$ et permet de joindre le point initial x_0 à l'un des ensembles $G(t^*)$ à un temps optimal t^* .

Cette remarque offre une perspective géométrique de la notion de temps minimal et nous amène à la définition suivante.

Définition 4.12. Un contrôle u est dit **extrémal** sur un intervalle $[0, t]$ si la trajectoire du système (définie par l'équation (2) associée à ce contrôle) vérifie la condition suivante :

$$x(t) \in \partial K(t)$$

où $\partial K(t)$ désigne la frontière de l'ensemble des points atteignables à partir de x_0 en temps t .

4.4 Exemple : Contrôle d'un mécanisme sur une piste lisse

Considérons un mécanisme, tel qu'un chariot de masse m , se déplaçant sur une piste horizontale où les frottements sont négligeables.

La coordonnée $x(t)$ décrivant la position du chariot au cours du temps est régie par la loi fondamentale du mouvement de Newton, exprimée par l'équation

$$m\ddot{x}(t) = u(t)$$

Avec $u(t)$ représentant la force de commande externe appliquée au chariot, mesurée dans les bonnes coordonnées et unités, nous considérons un problème visant à arrêter le chariot à une position cible, par exemple $x = 0$, en un temps minimum. Cela signifie que nous cherchons à contrôler la force $u(t)$ mais on le fait ici tout en respectant la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

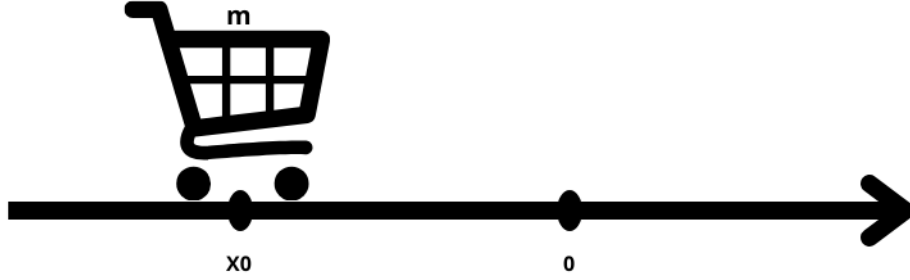


FIGURE 5 – Chariot sur un plan horizontal

Dans cette démarche, la synthèse d'un contrôleur optimal n'est pas immédiatement évidente et les résultats finaux peuvent être inattendus. Cette complexité conduit à un traitement assez détaillé, visant à illustrer une approche théorique générale.

Pour simplifier l'analyse, nous fixons arbitrairement la masse du chariot à $m = 1$ et introduisons la vitesse $y = \dot{x}$. Cette formulation nous permet de réécrire l'équation du mouvement de Newton sous forme d'un système différentiel du premier ordre.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= u(t) \end{cases} \quad (\text{S1})$$

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{Alors} \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Notation matricielle du système (S1) est :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) \quad (\text{S1})$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Certaines formules de cet exemple seront présentées en notation matricielle.

On fixe $t_1 > 0$ et on considère toutes les variations possibles de $u(t)$ sur $0 \leq t \leq t_1$ avec $|u(t)| \leq 1$. Chacun de ces contrôleurs détermine une réponse correspondante $X(t)$ initiée au point de données X_0 .

Pour obtenir la formule de la solution, nous allons résoudre le système différentiel (S1). On commence par l'équation $\dot{y}(t) = u(t)$ avec l'état initial $y(0) = y_0$, nous pouvons procéder comme suit :

$$\dot{y}(t) = u(t) \iff \frac{dy}{dt} = u(t) \iff dy = u(t) dt$$

Intégrons des deux côtés entre $[0, t]$:

$$\int_0^t \dot{y}(\sigma) d\sigma = \int_0^t u(\sigma) d\sigma \iff y(t) - y(0) = \int_0^t u(\sigma) d\sigma$$

La solution générale est donc :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t u(\sigma) d\sigma$$

Cette équation donne la solution $y(t)$ du système différentiel en fonction du contrôleur $u(t)$ et de l'état initial y_0 .

Pour résoudre l'équation différentielle $\dot{x}(t) = y(t)$ avec l'état initial $x(0) = x_0$, nous utilisons la solution pour $y(t)$ que nous avons déjà trouvée :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t u(\sigma) d\sigma$$

Nous remplaçons $y(t)$ par $y_0 + \int_0^t u(\sigma) d\sigma$ dans l'équation différentielle pour x dans (S) :

$$\dot{x}(t) = y_0 + \int_0^t u(\sigma) d\sigma$$

La résolution se fait de la même façon,

$$\int_0^t \dot{x}(s) ds = \int_0^t \left(y_0 + \int_0^s u(\sigma) d\sigma \right) ds \iff x(t) - x(0) = \int_0^t \left(y_0 + \int_0^s u(\sigma) d\sigma \right) ds$$

Et enfin, nous obtenons la solution pour $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + y_0 t + \int_0^t \left(\int_0^s u(\sigma) d\sigma \right) ds$$

donc, la solution du système (S1) est :

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + y_0 t + \int_0^t \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t u(\sigma) d\sigma \end{cases} \quad (6)$$

En notation matricielle, On rappelle le système (S1),

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) \quad (S1)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et l'état initial $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

La solution générale du système (S1) associée au contrôle u est donnée par :

$$X(t) = e^{At}X_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As}bu(s) ds$$

avec

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$e^{-As} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

car, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et toutes les puissances supérieures de A sont nulles.

Soit $K(t_1)$ l'ensemble accessible dans le plan de phase. Cet ensemble représente tous les points atteignables au temps t_1 en partant de X_0 à $t = 0$, en utilisant un contrôleur soumis à des contraintes.

D'après le théorème (4.3), $K(t_1)$ est un ensemble compact, c'est-à-dire fermé et borné, convexe, et varie continûment avec t_1 .

Le temps minimal optimal $t = t^*$ est déterminé comme le premier instant où la cible $(0, 0)$ est contenue dans $K(t)$. La cible $(0, 0)$ se trouve sur la frontière de l'ensemble $K(t^*)$. Pour montrer cela sachant nous devons prouver que :

1. $(0, 0) \in K(t^*)$.
2. $(0, 0) \notin \mathring{K}(t^*)$, où $\mathring{K}(t^*)$ est l'intérieur de $K(t^*)$.

1. Par définition de t^* , $(0, 0) \in K(t^*)$ puisque t^* est le plus petit temps tel que $(0, 0)$ soit atteignable et que l'inf est un min.

2. Supposons par l'absurde que $(0, 0) \in \mathring{K}(t^*)$. Alors,

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \in [t^* - \epsilon, t^*], (0, 0) \in K(t).$$

Cela contredit la minimalité de t^* puisque si $(0, 0)$ est dans l'intérieur de $K(t^*)$, il devrait être atteignable à un temps strictement inférieur à t^* . Donc, $(0, 0) \notin \mathring{K}(t^*)$.

Puisque $(0, 0) \in K(t^*)$ et $(0, 0) \notin \mathring{K}(t^*)$, il s'ensuit que $(0, 0)$ doit être sur la frontière de $K(t^*)$. Cela illustre un cas particulier de la section (4.3) où $x_1 = (0, 0)$.

La réponse optimale $X^*(t) = \begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix}$ conduit à l'origine en un temps $t = t^*$, et le contrôleur optimal $u^*(t)$ sur $0 \leq t \leq t^*$ est celui qui produit la réponse optimale $X^*(t)$.

Soit $\eta(t^*) = (\eta_1(t^*), \eta_2(t^*))$ un vecteur unitaire constant à l'origine qui est une normale sortante pour l'ensemble convexe $K(t^*)$. Il est perpendiculaire à la frontière de $K(t^*)$ et pointe vers l'extérieur. Pour chaque réponse $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ qui conduit au point $X(t^*)$ dans $K(t^*)$, on doit avoir

$$\eta_1(t^*)x(t^*) + \eta_2(t^*)y(t^*) \leq 0.$$

En d'autres termes,

$$\eta(t^*) \cdot X(t^*) \leq 0.$$

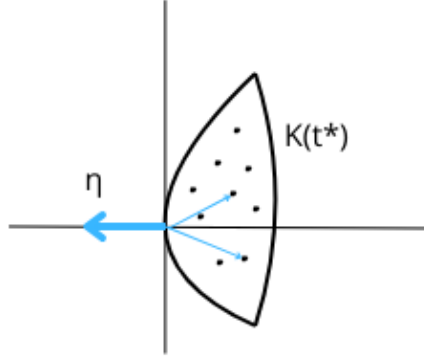


FIGURE 6 – Vecteur normal extérieur et Ensemble accessible

Cela signifie que le vecteur $X(t^*)$, qui part de l'origine au point $X(t^*)$ au temps t^* , n'a pas de composante positive le long de la direction désignée par $\eta(t^*)$. Autrement dit cela indique que le point $X(t^*)$ se trouve du côté opposé à la direction du vecteur unitaire $\eta(t^*)$ par rapport à l'origine. On peut écrire cette condition arithmétique, qui équivaut à l'observation géométrique que $\eta(t^*)$ est une normale extérieure à $K(t^*)$ au point limite $X^*(t^*) = 0$, de la manière suivante :

$$\eta_1(t^*)x^*(t^*) + \eta_2(t^*)y^*(t^*) = \max_{(x,y) \in K(t^*)} [\eta_1(t^*)x + \eta_2(t^*)y]$$

ou encore

$$\eta(t^*) \cdot X^*(t^*) = \max_{X \in K(t^*)} \eta(t^*) \cdot X(t^*).$$

C'est le principe du maximum. Parmi toutes les trajectoires qui conduisent au point $X(t^*)$ dans $K(t^*)$, le maximum est pris. À partir du principe du maximum, on peut déduire certaines propriétés d'extrémum du contrôleur optimal $u^*(t)$ et ainsi construire la fonction de synthèse désirée $\phi(x, y)$.

Pour appliquer efficacement le principe du maximum, il est important de reconnaître que le temps optimal t^* et la valeur du vecteur normal $\eta(t^*)$, qui ne sont pas toujours connus a priori. En conséquence, l'application directe du principe du maximum peut s'avérer complexe. Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons l'expression intégrale explicite obtenue pour la réponse $X(t)$. Ensuite, nous considérons le principe du maximum dans ce contexte pour optimiser notre approche. Cette méthode nous permet de contourner l'incertitude initiale liée à t^* et $\eta(t^*)$, en fournissant une stratégie plus directe et praticable pour atteindre l'optimisation souhaitée.

Nous utilisons les expressions intégrales explicites trouvées pour la réponse $X(t)$:

$$\begin{aligned}
\eta_1(t^*)x^*(t^*) + \eta_2(t^*)y^*(t^*) &= \max_{(x,y) \in K(t^*)} [\eta_1(t^*)x + \eta_2(t^*)y] \\
&\iff \\
\eta_1(t^*)x^*(t^*) + \eta_2(t^*)y^*(t^*) &= \max_{u \in L^\infty([0,t^*], \Omega)} \left[\eta_1(t^*) \left(x_0 + y_0 t^* + \int_0^{t^*} \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds \right) \right. \\
&\quad \left. + \eta_2(t^*) \left(y_0 + \int_0^{t^*} u(\sigma) d\sigma \right) \right] \\
&\iff \\
\eta_1(t^*)x^*(t^*) + \eta_2(t^*)y^*(t^*) &= \max_{u \in L^\infty([0,t^*], \Omega)} \left[\eta_1(t^*) \int_0^{t^*} \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds + \eta_2(t^*) \int_0^{t^*} u(\sigma) d\sigma \right]
\end{aligned}$$

Car nous cherchons à maximiser la fonction objectif par rapport à $u(t)$, les termes constants (qui n'impliquent pas $u(t)$) ne changent pas en fonction de $u(t)$. Par conséquent, ils ne contribuent pas à la détermination du contrôle optimal $u^*(t)$. Seuls les termes qui varient avec $u(t)$ affectent le choix optimal de $u(t)$. Ainsi, maximiser

$$\eta_1(t^*) \left(x_0 + y_0 t^* + \int_0^{t^*} \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds \right) + \eta_2(t^*) \left(y_0 + \int_0^{t^*} u(\sigma) d\sigma \right)$$

revient à maximiser

$$\eta_1(t^*) \int_0^{t^*} \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds + \eta_2(t^*) \int_0^{t^*} u(\sigma) d\sigma.$$

Posons

$$I(u) = \int_0^{t^*} \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds$$

et

$$J(u) = \eta_1(t^*)I(u) + \eta_2(t^*) \int_0^{t^*} u(\sigma) d\sigma.$$

Considérons

$$I(u) = \int_0^t \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds.$$

Pour changer l'ordre d'intégration, observons la région d'intégration dans le plan (s, σ) . L'intervalle de σ va de 0 à s , et s va de 0 à t .

Nous pouvons réécrire cette intégrale en intégrant d'abord par rapport à σ , puis par rapport à s ce qui nous donne alors :

$$I(u) = \int_0^t \left(\int_\sigma^t u(\sigma) ds \right) d\sigma.$$

Maintenant, intégrons par rapport à s :

$$\int_{\sigma}^t u(\sigma) ds = u(\sigma) \int_{\sigma}^t ds = u(\sigma) \cdot (t - \sigma).$$

Ainsi,

$$I(u) = \int_0^t \left(\int_{\sigma}^t u(\sigma) ds \right) d\sigma = \int_0^t u(\sigma)(t - \sigma) d\sigma.$$

Cela démontre que

$$I(u) = \int_0^t (t - \sigma)u(\sigma) d\sigma.$$

Ce changement d'ordre d'intégration est valide car les intégrales sont prises sur des ensembles simples (rectangles dans ce cas), et le théorème de Fubini assure que l'ordre d'intégration peut être interchangé sans affecter la valeur de l'intégrale.

En Appliquant cette identité à notre expression J, Nous avons l'expression totale :

$$J(u) = \eta_1(t^*) \int_0^{t^*} (t^* - \sigma)u(\sigma) d\sigma + \eta_2(t^*) \int_0^{t^*} u(\sigma) d\sigma$$

alors

$$J(u) = \int_0^{t^*} [\eta_1(t^*)(t^* - \sigma) + \eta_2(t^*)] u(\sigma) d\sigma$$

On définit maintenant $\tilde{\eta}(s) = (\tilde{\eta}_1(s), \tilde{\eta}_2(s))$ de telle sorte que $\tilde{\eta}_2(s) = \eta_1(t^*)(t^* - s) + \eta_2(t^*)$ et $\tilde{\eta}_1(s) = \eta_1(t^*)$. Nous avons alors :

$$\tilde{\eta}_1(\sigma) = \eta_1(t^*), \quad \tilde{\eta}_2(\sigma) = \eta_1(t^*)(t^* - \sigma) + \eta_2(t^*)$$

Ainsi, l'expression devient :

$$J(u) = \int_0^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma)u(\sigma) d\sigma$$

Notre objectif sera à présent de maximiser cette intégrale J(u) trouvé par rapport à $u(t)$.

Nous devons utiliser les propriétés de la fonction $\tilde{\eta}_2(\sigma)$ et l'ensemble des valeurs possibles pour $u(t)$ pour montrer que le contrôle $u^*(t)$ maximise l'intégrale

Considérons l'intégrale suivante à maximiser :

$$J(u) = \int_0^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma)u(\sigma) d\sigma,$$

où $\tilde{\eta}_2(\sigma) = \eta_1(t^*)(t^* - \sigma) + \eta_2(t^*)$ est une fonction linéaire de σ .

La fonction $\tilde{\eta}_2(\sigma)$ peut être positive, négative ou changer de signe dans l'intervalle $[0, t^*]$. Nous savons que $u(\sigma)$ peut prendre les valeurs ± 1 . Donc

1. Si $\tilde{\eta}_2(\sigma) > 0$, alors pour maximiser $\tilde{\eta}_2(\sigma)u(\sigma)$, on choisit $u(\sigma) = 1$.
2. Si $\tilde{\eta}_2(\sigma) < 0$, alors pour maximiser $\tilde{\eta}_2(\sigma)u(\sigma)$, on choisit $u(\sigma) = -1$.

Autrement dit, pour chaque instant σ , l'expression $\tilde{\eta}_2(\sigma)u(\sigma)$ est maximisée en choisissant $u(\sigma)$ de manière à ce que le produit soit toujours non négatif et aussi grand que possible en valeur absolue.

Ainsi, le choix optimal de $u(\sigma)$ est :

$$u^*(\sigma) = \text{sgn}(\tilde{\eta}_2(\sigma)).$$

Pour valider que $u^*(t) = \text{sgn}(\tilde{\eta}_2(t))$ maximise effectivement l'intégrale, considérons l'intégrale sur deux intervalles où $\tilde{\eta}_2(\sigma)$ garde un signe constant :

Soit $t_1 \in [0, t^*]$ tel que $\tilde{\eta}_2(\sigma) \geq 0$ pour $0 \leq \sigma \leq t_1$ et $\tilde{\eta}_2(\sigma) < 0$ pour $t_1 < \sigma \leq t^*$

- *Cas où $\tilde{\eta}_2(\sigma) \geq 0$:

$$\int_0^{t_1} \tilde{\eta}_2(\sigma)u^*(\sigma) d\sigma = \int_0^{t_1} \tilde{\eta}_2(\sigma) \cdot 1 d\sigma = \int_0^{t_1} \tilde{\eta}_2(\sigma) d\sigma.$$

- *Cas où $\tilde{\eta}_2(\sigma) < 0$:

$$\int_{t_1}^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma)u^*(\sigma) d\sigma = \int_{t_1}^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma) \cdot (-1) d\sigma = - \int_{t_1}^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma) d\sigma.$$

Ainsi, l'intégrale totale devient :

$$\int_0^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma)u^*(\sigma) d\sigma = \int_0^{t_1} \tilde{\eta}_2(\sigma) d\sigma - \int_{t_1}^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma) d\sigma.$$

Si nous avons choisi $u(\sigma)$ différemment (par exemple, $u(\sigma) = -\text{sgn}(\tilde{\eta}_2(\sigma))$), nous aurions eu des termes négatifs là où $\tilde{\eta}_2(\sigma)$ est positif et vice versa, ce qui donnerait une intégrale totale plus petite en valeur absolue.

Le contrôleur $u^*(t) = \text{sgn}(\tilde{\eta}_2(t))$ sur $0 \leq t \leq t^*$ maximise l'intégrale $\int_0^{t^*} \tilde{\eta}_2(\sigma)u(\sigma) d\sigma$ car il choisit toujours $u(t)$ de manière à aligner le signe de $u(t)$ avec celui de $\tilde{\eta}_2(\sigma)$, maximisant ainsi la contribution positive à chaque instant t . C'est la façon optimale de maximiser l'intégrale en respectant les contraintes sur $u(t)$.

Par conséquent, le régulateur optimal $u^*(t)$ est un régulateur à relais en ce sens qu'il ne prend que les valeurs $+1$ et -1 , sauf lorsqu'il passe de l'une à l'autre, précisément aux zéros de la fonction inconnue $\eta_2(t)$.

Cependant, la définition de $\tilde{\eta}(t)$ qui est

$$\tilde{\eta}_1(t) = \eta_1(t^*), \quad \tilde{\eta}_2(t) = \eta_1(t^*)(t^* - t) + \eta_2(t^*) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t^*$$

indique que

$$\dot{\tilde{\eta}}_1(t) = 0 \quad \dot{\tilde{\eta}}_2(t) = -\eta_1(t^*)$$

Donc

$$\ddot{\tilde{\eta}}_2(t) = 0$$

et $\tilde{\eta}_2(t)$ est une fonction affine en t . Donc, $u^*(t)$, peut avoir au plus un zéro. Nous constatons donc que le contrôle optimal $u^*(t)$ est un contrôle de relais avec des valeurs $+1$ et -1 et qu'il possède au plus un interrupteur ou une discontinuité.

Grâce à ces informations, nous allons construire la fonction de synthèse $\phi(x, y)$ pour notre problème.

La réponse optimale de X_0 , à l'origine doit suivre un arc d'une solution du système différentiel extrémal ($u(t) = -1$)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -1 \end{cases} \quad (S_-)$$

dans l'autre sens un arc d'une solution du système extrémal ($u = +1$)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 1 \end{cases} \quad (S_+)$$

Puisque les systèmes différentiels extrémaux (S_-) et (S_+) sont autonomes (les coefficients ne dépendent pas du temps t), nous pouvons construire des réponses extrémales qui se terminent à l'origine par un processus de recul de l'origine au fur et à mesure que $-t$ augmente. En d'autres termes, nous commençons la réponse extrême à $t = 0$ à l'origine et suivons les courbes solutions appropriées de (S_-) et (S_+) vers l'arrière dans le temps pour atteindre le point X_0 à une certaine valeur négative de $t = -t^*$. Nous inversons ensuite le sens du temps et partons de X_0 , à $t = 0$, pour arriver à l'origine à $t = t^*$, obtenant ainsi la réponse optimale $X^*(t)$, le temps optimal t^* et la commande optimale $u^*(t)$.

Construisons toutes les réponses extrémales possibles à partir de tous les points initiaux possibles vers l'origine. Choisissez un vecteur unitaire $\eta(0) = (\eta_1(0), \eta_2(0))$ et utilisez-le comme données initiales pour déterminer une solution de

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\eta}}_1(t) = 0 \\ \dot{\tilde{\eta}}_2(t) = -\eta_1(t) \end{cases} \quad (7)$$

Ensuite, on utilise

$$u^*(t) = \text{sgn}(\tilde{\eta}_2(t))$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = \text{sgn}(\tilde{\eta}_2(t)) \end{cases} \quad (8)$$

avec $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, pour construire une réponse extrémale $x(t)$ se terminant à l'origine à $t = 0$. De cette manière, nous pouvons construire toutes les réponses extrémales possibles qui mènent à l'origine lorsque t augmente, et l'une d'entre elles orientera x_0 vers l'origine.

Par exemple, si nous prenons $\eta_1(0) = 0$, $\eta_2(0) = +1$, alors $\tilde{\eta}_2(t) = +1$ pour $t \leq 0$. Dans ce cas, la commande optimale est $u^*(t) = 1$, Nous traçons la réponse le long de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Nous résolvons ce système avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

$$y(t) = t + y(0) = t$$

$$\dot{x}(t) = t \implies x(t) = \frac{t^2}{2} + x(0) = \frac{t^2}{2}$$

La courbe solution dans le plan (x, y) est donc :

$$y(t) = \sqrt{2x(t)}$$

La courbe passant par l'origine est donnée par

$$\Gamma^+ : 2x(t) = y^2(t) \quad \text{pour } y(t) \geq 0$$

De même, si nous prenons $\eta_1(0) = 0$, $\eta_2(0) = -1$, nous traçons la réponse le long de

$$\Gamma^- : -2x(t) = y^2(t) \quad \text{pour } y(t) \leq 0$$

Pour toute autre valeur de $\eta_1(0)$, $\eta_2(0)$ avec $\eta_2(0) > 0$, nous traçons une réponse le long de Γ^+ jusqu'à ce que $\tilde{\eta}_2(t) = 0$, puis nous remontons le long de la solution appropriée de Γ^- . Un processus similaire se produit pour $\eta_2(0) < 0$. Une étude simple de la géométrie des familles de courbes solutions de Γ^- et Γ^+ montre qu'il y a une et une seule réponse extrême qui mène de n'importe quel point initial x_0 à l'origine. Cette réponse extrême doit donc être la réponse optimale, dont on sait qu'elle existe en vertu de la théorie générale développée plus loin.

La courbe composée de Γ^- et Γ^+ est appelée le lieu de commutation W . Dans cet exemple, le lieu de commutation a la forme explicite suivante :

$$y = W(x) = \begin{cases} -\sqrt{2x} & \text{pour } x \geq 0 \\ +\sqrt{-2x} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Nous définissons le synthétiseur par

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{si } y > W(x) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \\ 1 & \text{si } y < W(x) \end{cases}$$

La réponse optimale à partir de n'importe quel état initial (x_0, y_0) jusqu'à l'origine est alors la solution de

$$\ddot{x} = \phi(x, \dot{x})$$

commençant à $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. La géométrie du plan de phase montre clairement que les solutions de

$$\ddot{x} = \phi(x, \dot{x})$$

sont bien définies même si $\phi(x, y)$ est discontinue sur $y = W(x)$. La fonction de synthèse $\phi(x, y)$ pour ce problème peut être stockée de manière efficace dans la structure électronique de la boucle de rétroaction. La figure(à faire) est une reproduction des réponses optimales du processus

$$\ddot{x} = u(t), \quad |u(t)| \leq 1$$

avec le contrôleur optimal synthétisé

$$u^*(t) = \phi(x(t), \dot{x}(t))$$

La commande optimale $u^*(t)$ pour le chariot mécanique peut être interprétée comme suit : une force d'accélération maximale suivie d'une décélération de freinage maximale, jusqu'à ce que le mécanisme s'arrête juste à la position requise $x = 0$. Le temps critique pour le passage de l'accélération à la décélération (ou vice versa) est calculé à partir de notre analyse graphique.

4.5 Exemple : Contrôle d'un oscillateur harmonique

Le contrôle des oscillateurs harmoniques est crucial dans de nombreux domaines, de la mécanique à l'ingénierie électrique. Dans cet exemple, nous étudions le contrôle d'une particule soumise à une force de rappel linéaire, avec pour objectif de ramener cette particule vers l'origine en un temps minimal. Pour cela, nous appliquons le principe du maximum pour déterminer le contrôle optimal.

Présentation du problème

Considérons une particule de masse m qui peut se déplacer uniquement le long de l'axe Ox , attachée à un ressort (voir Figure 7). Sa position au temps t est donnée par la coordonnée x . La particule est attirée vers l'origine par une force de rappel linéaire, supposée égale à $-k^2x$, c'est **la loi de Hooke** pour les ressorts, où $k^2 > 0$ est la constante de rappel du ressort, également appelée coefficient de raideur.

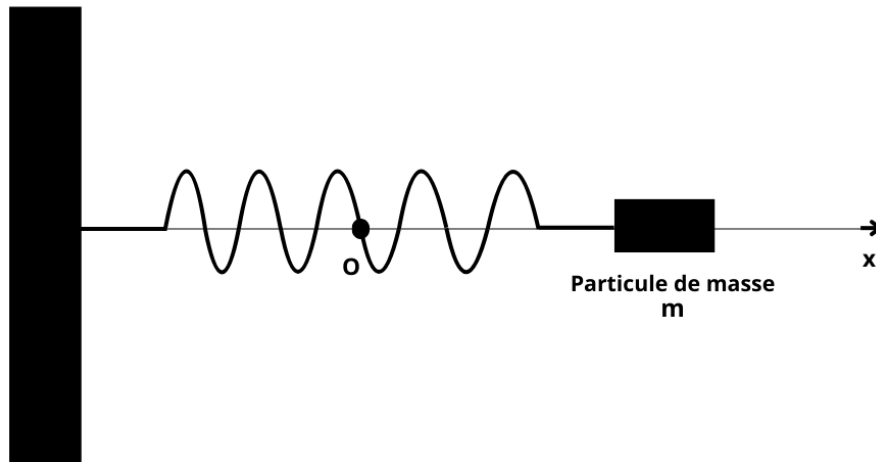


FIGURE 7 – Particule attachée à un ressort

L'équation du mouvement de Newton pour cette particule attachée à un ressort est donnée par :

$$m\ddot{x}(t) + k^2x(t) = u(t),$$

où $u(t)$ est la force de contrôle extérieur appliquée à la particule. On impose une limite d'amplitude pour cette force extérieure, plus précisément $|u(t)| \leq 1$. Cela signifie que la force extérieure appliquée à la particule ne peut pas dépasser une certaine valeur absolue : le module de cette force est borné. Cette contrainte reflète les limitations techniques de l'expérience, indiquant que notre capacité à agir sur le système est restreinte.

Supposons également que la position et la vitesse initiales de la particule soient $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$. Le problème consiste à ramener la particule de masse m à l'origine $x = 0$ en un temps minimal, en contrôlant la force externe $u(t)$ appliquée à cette particule, tout en respectant la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

Notre objectif est de trouver une fonction $u(t)$ qui, connaissant $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = y_0$, permettra de ramener la particule à l'origine en un temps minimal.

Modélisation mathématique

Soit $T > 0$, Pour simplifier, supposons $m = 1$ et $k^2 = 1$ alors dans le plan de phase (x, \dot{x}) , le système différentiel correspondant est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + u(t) \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, T] \quad (S_2)$$

ou, en notation matricielle :

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, T] \quad (10)$$

Il s'agit d'un *système linéaire*.

Contrôlabilité du système

On a facilement $\text{rg}(b, Ab) = 2$; par ailleurs les valeurs propres de A sont de partie réelle nulle. Donc, d'après le théorème (4.9), le système est contrôlable à 0, i.e. il existe des contrôles u vérifiant la contrainte $|u| \leq 1$ tels que les trajectoires associées relient X_0 à 0, ce qui répond à la question de la contrôlabilité.

Solution du système dans le cas où $u(t) = 0$

Dans cette partie, nous introduisons une condition particulière pour l'application de force sur le ressort : $u(t) = 0$. Cela signifie qu'aucune force externe n'est appliquée au ressort. En d'autres termes, le système n'est pas soumis à une force externe contrôlée.

Sous cette condition, l'équation dynamique du système, qui était précédemment exprimée comme :

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

se simplifie à :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \quad (11)$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre qui régit le comportement du système dans cette configuration particulière.

La linéarité de cette équation simplifie considérablement l'analyse mathématique et la compréhension du comportement dynamique du système dans cette condition spécifique.

Dans le plan de phase, où les variables sont x et \dot{x} , les solutions de cette équation linéaire sont des fonctions sinusoïdales, de la forme d'une fonction sinus ou cosinus :

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$$

où α est l'amplitude de l'oscillation et ϕ est la phase. On peut les déterminer en les exprimant en fonction des états initiaux et de la pulsation ω .

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{x}(t) = -\alpha\omega \sin(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (12)$$

En évaluant à $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = \alpha \cos(\phi) = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha\omega \sin(\phi) = y_0 \end{cases} \quad (13)$$

alors, on a :

$$\alpha \cos(\phi) = x_0 \quad (1)$$

$$-\alpha\omega \sin(\phi) = y_0 \quad (2)$$

NB : Il convient de noter qu'il aurait été beaucoup plus simple de calculer e^{At} . Après résolution du système d'équations (1) et (2) pour α et ϕ , on obtient :

$$\phi = \tan^{-1} \left(-\frac{y_0}{\omega x_0} \right)$$

Pour α utilisons $\cos(\phi)$ de l'équation (1) :

$$\alpha = \frac{x_0}{\cos(\phi)}$$

On rappelle que $\cos(\phi)$ peut être trouvé en utilisant l'identité trigonométrique

$$\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi)}}$$

Donc, au final les constantes α et ϕ sont :

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(-\frac{y_0}{\omega x_0} \right)$$

En substituant cette expression dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$-\alpha\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + \alpha \cos(\omega t + \phi) = 0$$

Pour que cette équation soit satisfaite pour tout t , on doit avoir

$$-\alpha\omega^2 + \alpha = 0$$

ce qui implique que $\omega^2 = 1$ et donc $\omega = \pm 1$. Ainsi, les solutions générales sont de la forme :

$$x(t) = \alpha \cos(t + \phi) \quad \text{ou} \quad x(t) = \beta \sin(t + \psi)$$

où α et β sont des constantes d'amplitude et ϕ et ψ sont des constantes de phase.

Cela montre que les solutions de cette équation linéaire sont des fonctions sinusoïdales, ce qui signifie que le mouvement de la particule est périodique. La particule oscille autour de la position d'équilibre avec une amplitude constante et une période de 2π .

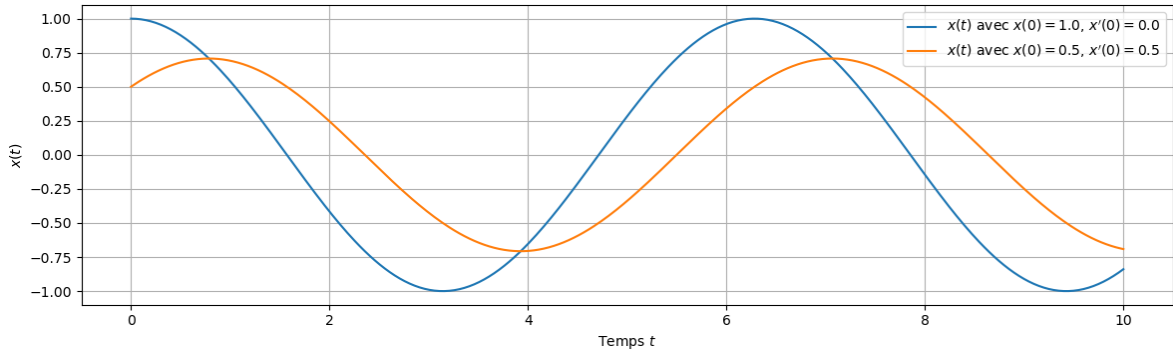


FIGURE 8 – La courbe de x en fonction de t

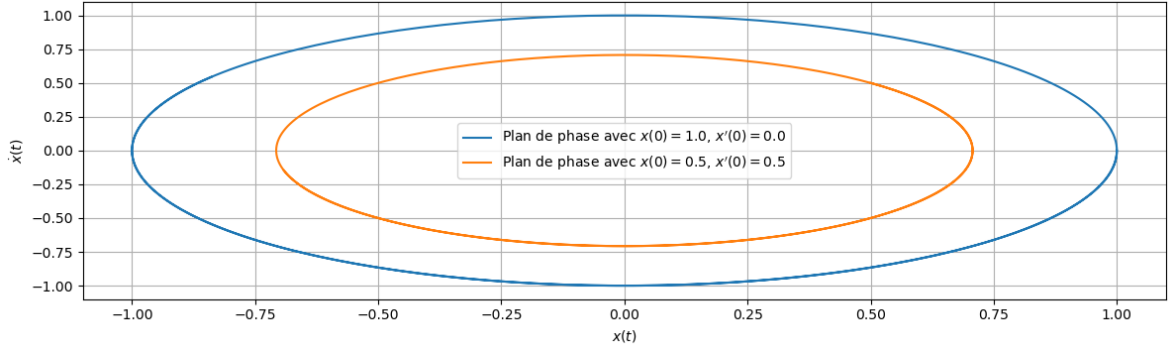


FIGURE 9 – trajectoires du mouvement dans le plan de phase

Retour à notre exemple

Contrôle optimal

La réponse optimale $X^*(t) = \begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix}$ conduit à l'origine en un temps $t = t^*$, et le contrôleur optimal $u^*(t)$ sur $0 \leq t \leq t^*$ est celui qui produit la réponse optimale $X^*(t)$.

Soit $\eta(t^*) = (\eta_1(t^*), \eta_2(t^*))$ un vecteur unitaire constant à l'origine qui est une normale sortante pour l'ensemble convexe $K(t^*)$. On a donc :

$$\eta_1(t^*)x(t^*) + \eta_2(t^*)y(t^*) \leq 0.$$

Le principe du maximum nous donne :

$$\eta_1(t^*)x^*(t^*) + \eta_2(t^*)y^*(t^*) = \max_{(x,y) \in K(t^*)} [\eta_1(t^*)x + \eta_2(t^*)y]$$

À partir du principe du maximum, on peut déduire certaines propriétés d'extrémum du contrôleur optimal $u^*(t)$ et ainsi construire la fonction de synthèse désirée $\phi(x, y)$.

On applique le principe du maximum à l'expression intégrale explicite obtenue pour la réponse $X(t)$. Ensuite, nous considérons le principe du maximum dans ce contexte pour optimiser notre approche. En utilisant un raisonnement presque similaire que celui de l'exercice précédent on obtient :

$$u^*(t) = \text{sgn}(\eta_2(t))$$

où $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ est une solution de :

$$\dot{\eta}_1(t) = \eta_2(t)$$

$$\dot{\eta}_2(t) = -\eta_1(t)$$

ou en notation matricielle :

$$\dot{\eta}(t) = -A\eta(t)$$

Ce qui donne l'équation différentielle harmonique :

$$\ddot{\eta}(t) + \eta(t) = 0$$

Ainsi, $\eta(t)$ est une oscillation harmonique avec une période 2π .

Pour déterminer le lieu de commutation W et le synthétiseur $\phi(x, y)$, nous considérons les courbes solutions extrémales des systèmes différentiels :

$$(S_-) : \dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = -x(t) - 1$$

$$(S_+) : \dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = -x(t) + 1$$

Les courbes solutions de S_- sont des cercles concentriques autour du point $(x, y) = (-1, 0)$ avec une période de 2π . Les solutions de S_+ sont des cercles concentriques autour du point $(x, y) = (1, 0)$ avec une période de 2π .

En prenant $\eta(0)$ tel que $\eta_1(0) = 1$ et $\eta_2(0) = 0$, nous avons $\eta_2(t) = -\sin(t)$. Sur l'intervalle $-\pi < t < 0$, $\text{sgn}(\eta_2(t)) = +1$. La réponse extrémale correspondante suit la courbe solution de S_+ , en passant par l'origine :

$$\begin{aligned} \Gamma_+ : x(t) &= -\cos(t) + 1 \quad \text{pour} \quad -\pi < t < 0 \\ y(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

ou sous forme implicite :

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad y < 0$$

Pour $\eta(0)$ tel que $\eta_1(0) = -1$ et $\eta_2(0) = 0$, nous avons $\eta_2(t) = \sin(t)$. Sur l'intervalle $-\pi < t < 0$, $\text{sgn}(\eta_2(t)) = -1$. La réponse extrémale suit la courbe solution de S_- , passant par l'origine :

$$\begin{aligned} \Gamma_- : x(t) &= \cos(t) - 1 \quad \text{pour} \quad -\pi < t < 0 \\ y(t) &= -\sin(t) \end{aligned}$$

ou sous forme implicite :

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1, \quad y > 0$$

Pour tout autre choix de $\eta(0)$ avec $\eta_2(0) > 0$, la réponse extrémale part de l'origine le long de Γ_+ jusqu'à ce que $\eta_2(t) = 0$. À ce point, la réponse passe à une solution de S_- qu'elle suit pendant une durée de π , avant de passer à nouveau à une solution de S_+ . Un processus similaire se produit pour les données initiales avec $\eta_2(0) < 0$, mais ici la réponse part de l'origine le long de Γ_- .

Le lieu de commutation W se compose des points où les réponses extrémales ci-dessus passent d'une famille de solutions à l'autre (entre S_- et S_+).

Il n'est pas difficile de décrire W dans cet exemple. En effet, W est constitué des arcs Γ_+ et Γ_- et de leurs translations successives le long des familles de solutions appropriées de S_- et S_+ , pour des durées de longueur π . Par exemple, l'arc Γ_+ doit être translaté le long des solutions de S_- pour une durée de π ; cette image de Γ_+ est ensuite translatée le long des solutions de S_+ pour une durée de π , et ainsi de suite. Notez qu'une telle translation le long de la famille de solutions de S_+ ou de S_- pour une durée de π est juste une rotation rigide du plan de phase de π radians autour du centre correspondant $x = 1, y = 0$ ou $x = -1, y = 0$. Ce processus de commutations successives conduit à une construction finale de W comme une collection de demi-cercles de rayon un, comme indiqué dans les Figures 1.4.

Pour le réel $(x, y) \neq (0, 0)$, définir le synthétiseur.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{si si } (x, y) \text{ se trouve en dessous de } W \text{ ou sur } \Gamma_- \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ se trouve sur } W \\ 1 & \text{si si } (x, y) \text{ se trouve au dessus de } W \text{ ou sur } \Gamma_+ \end{cases}$$

Les réponses optimales pour le contrôle de l'oscillateur harmonique sont alors les solutions de la formule

$$\ddot{x} + x = \phi(x, \dot{x})$$

Pour un choix arbitraire du point de phase initial (x_0, y_0) . La figure (à reproduire) est une reproduction réelle des réponses optimales d'un oscillateur harmonique contrôlé tel que décrit ci-dessus. Bien qu'il soit possible de deviner la forme quantitative de W à partir d'une description physique de la commande, le calcul quantitatif de W et du synthétiseur $\phi(x, y)$ nécessite une étude théorique telle que celle présentée ici.

Références

- [1] E. B. Lee et L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, CHAPTER 2. Optimal Control of Linear Systems.
- [2] E. B. Lee et L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, CHAPTER 4. The Maximal Principle and the Existence of Optimal Controllers for Nonlinear Processes.
- [3] Emmanuel Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France, Partie 1 : Contrôle optimal de systèmes linéaires, chapitre 2 : Contrôlabilité.
- [4] E. B. Lee et L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, CHAPTER 3. The Maximal Principle and the Existence of Optimal Controllers for Nonlinear Processes.
- [5] Emmanuel Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France.
- [6] Karima Khaldi,
textitContrôle optimal des systèmes dynamiques, Mémoire de fin d'étude.
- [7] Emmanuel Trélat et Thomas Haberkorn, *Cours d'Automatique Master de Mathématiques, Université d'Orléans, premier trimestre.*