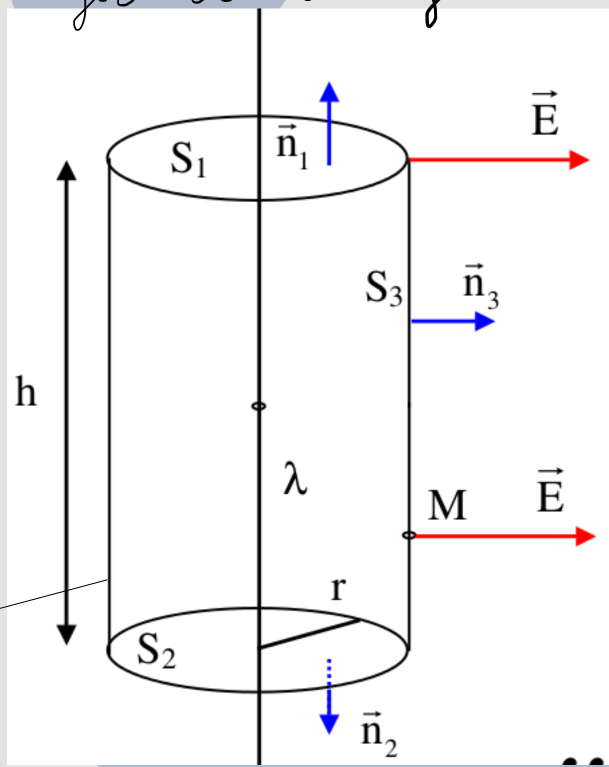
Électromagnétisme

Chapitre 4 – Théorème de Gauss

fil ∞ chargé



surface de Gauss

Physique - 2025-2026

Présentation rédigée par Émilie Dupont (Cergy) : emilie.dupont@cyu.fr, CY308

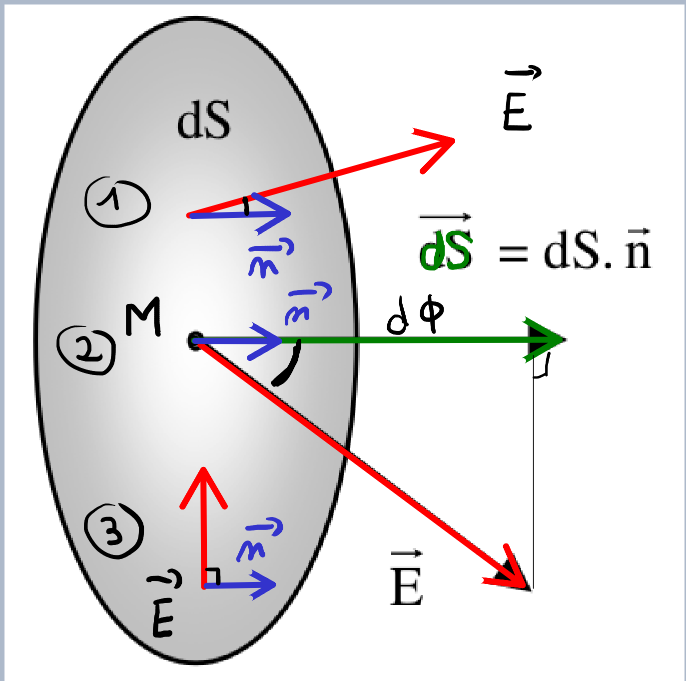
Programme d'électrostatique

- Chapitre 1 – Force entre deux charges
- Chapitre 2 – Champ électrostatique
- Chapitre 3 – Théorème de superposition et symétries
- **Chapitre 4 – Théorème de Gauss**
- Chapitre 5 – Potentiel électrostatique
- Chapitre 6 – Conducteurs en équilibre électrostatique

1.4 Théorème de Gauss

1.4.1 Flux du champ d'une charge à travers une surface

Flux élémentaire : champ électrostatique $\vec{E}$



dS : surface élementaire

$\vec{dS}$ vecteur surface (porté par $\vec{n}$, normale)

3 $\vec{E} \perp \vec{n}$: $d\varphi = 0$ ($\vec{E}$ sort pas de la surface)

Le flux élémentaire $d\phi$ du champ $\vec{E}$ à travers dS est défini par :

$$\boxed{d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}} = \vec{E}.\vec{n}\ dS \text{ avec} \quad dS \text{ en } m^2,\ d\phi \text{ en V.m et } \vec{E} \text{ en } V.m^{-1}$$

1.4 Théorème de Gauss

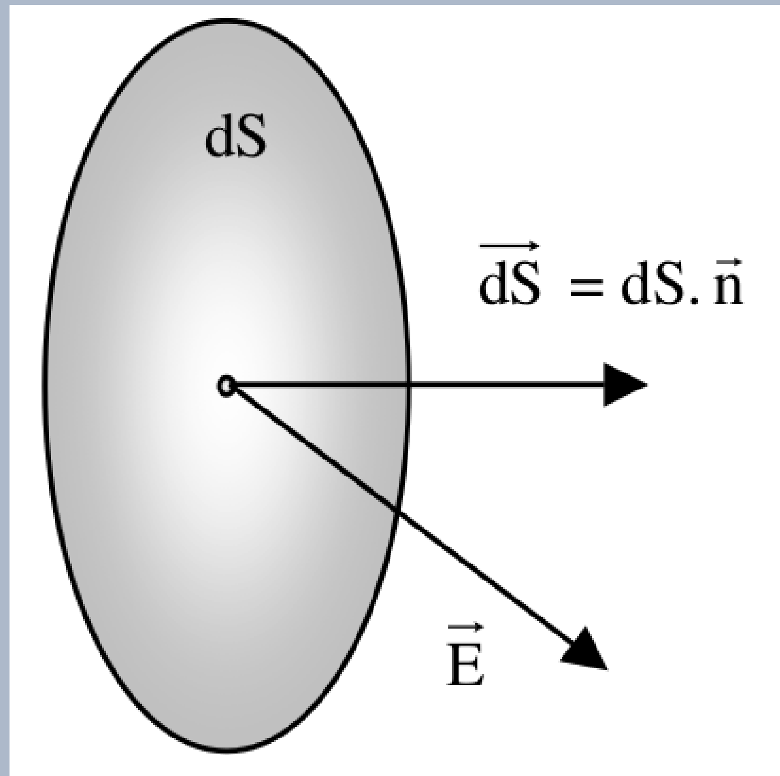
1.4.1 Flux du champ d'une charge à travers une surface

Flux total à travers une surface

→ somme continue des $d\phi$

$$\boxed{\Phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E}.\vec{dS} = \iint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS}$$

produit scalaire



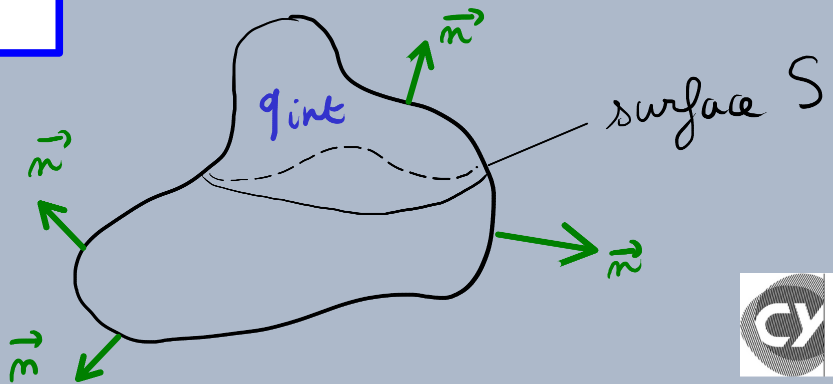
1.4.2 Théorème de Gauss

Théorème : Le flux Φ du champ $\vec{E}$ à travers une surface fermée S est proportionnel à la charge q_{int} contenue dans le volume V délimité par la surface S

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

surface fermée

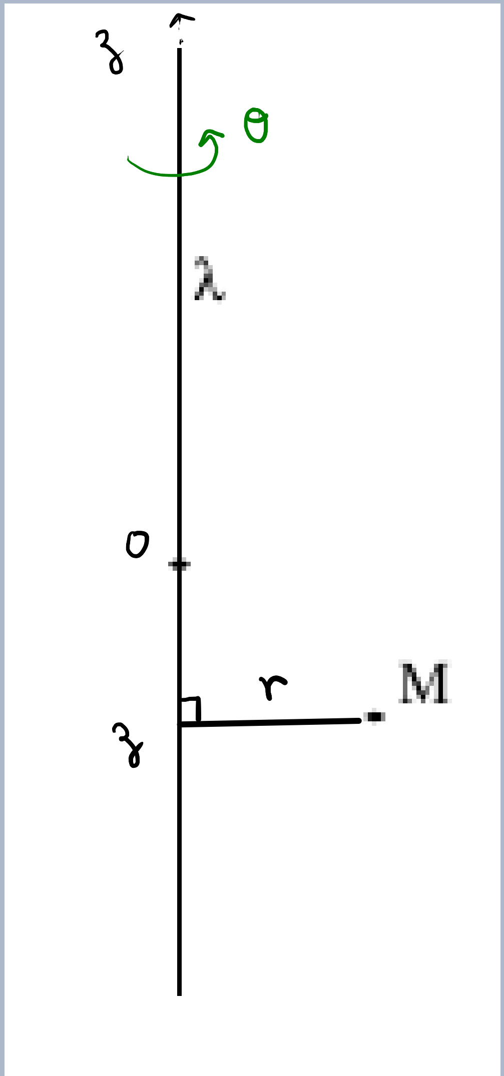
Φ	flux	[V.m]
q_{int}	charge	[C]
ε_0	permittivité absolue du vide [SI]	



1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une distribution linéique uniformément chargée



Il existe des symétries cylindriques et invariance de translation, par conséquent, le champ $\vec{E}$ en M s'exprime en coordonnées cylindriques : $\Rightarrow \vec{E}(r) = E(r).\vec{u}_r$

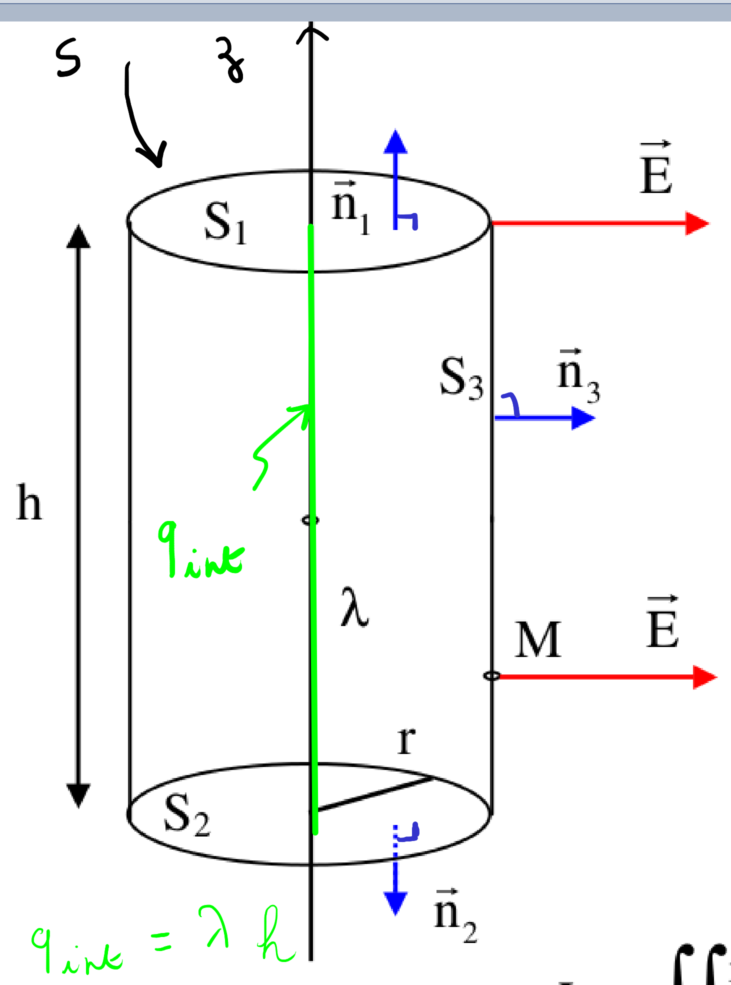
- ⓪ continuité et définition : $\vec{E}$ c et déf. partout sauf sur le fil.
- fil infini chargé :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{dq}{dz}$$

- coordonnées cylindriques $\Rightarrow$ surface de Gauss = cylindrique d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon r.

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples



On applique le théorème de Gauss sur S_1, S_2 et S_3.

$S = S_1 + S_2 + S_3$: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$

Le flux du champ $\vec{E}$ pour S_1 et S_2 est nul car :

$$\vec{E} \perp \vec{n}_1 \text{ et } \vec{E} \perp \vec{n}_2$$

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E}\vec{n}_1 dS = 0$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{E}\vec{n}_2 dS = 0$$

Calcul du flux à travers la surface S_3 latérale :

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} \vec{E}\vec{n}_3 dS = \iint_{S_3} E(r).dS = E(r)\iint_{S_3} dS = E(r)\, 2\pi rh$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_3 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad E(r).2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}}$$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

$$\vec{dS_3} = dS \, \vec{u_r}$$

$$dS = dl_z \, dl_\theta = r \, d\theta \, dz$$

constants

$$\Phi = \Phi_3 = \iint_{S_3} E(r) \vec{u_r} \cdot dS \vec{u_r} = \iint_{\theta \; z} E(r) \, r \, d\theta \, dz$$

$$\Phi = E(r) \, r \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz = 2\pi r h E(r)$$

$$q_{int} = \lambda h \Rightarrow 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}}$$

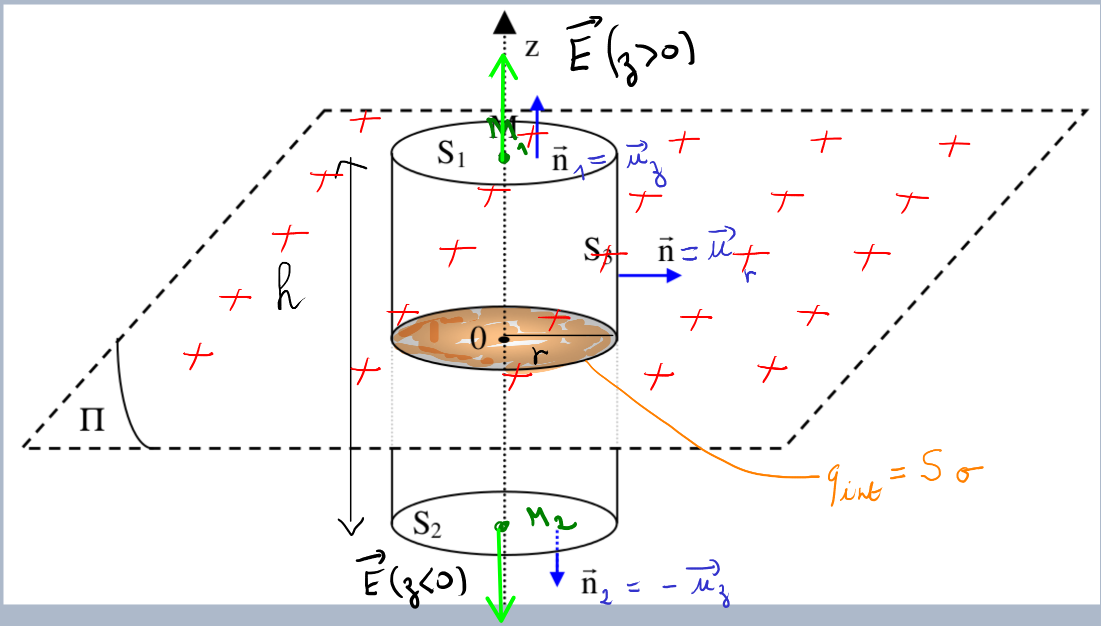
vérification : $[E] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0] L^2}$

$$[\lambda] = [q] L^{-1} \Rightarrow [E(r)] = [q] L^{-1} L^{-1} \frac{1}{[\varepsilon_0]} \quad \text{ok}$$

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

plan infini Π portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface.



$\sigma = \frac{dq}{dS}$

$\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π.

$\Rightarrow \vec{E} = E_z(x,y,z)\ \vec{k}$ au point M

Il existe une invariance par translation selon x et y :

$\Rightarrow \vec{E} = E_z(z)\ \vec{k}$ au point M

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(z>0) &= -\vec{E}(z<0) \\ E(z)\,\vec{u}_z &= -E(-z)\,\vec{u}_z \end{aligned}\right\} \quad E(z) = -E(-z)$$

$$\Phi = \iint_S \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}.\vec{n}dS + \iint_{S_2} \vec{E}.\vec{n}dS + \iint_{S_3} \vec{E}.\vec{n}dS$$

$$\Phi = E(z).S + E(-z).S + 0$$

$$= 2ES \quad \text{car} \quad \vec{E}(-z) = -\vec{E}(z) \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$$

donc

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

• surface de Gauss : cylindre de hauteur h et de rayon r

⓪ définition et continuité : $\vec{E}$ définie et continue sur tout l'espace sauf à la traversée de la surface et $\vec{E} = E(z)\,\vec{u}_z$ avec

$$\boxed{E(z) = -E(-z)}$$

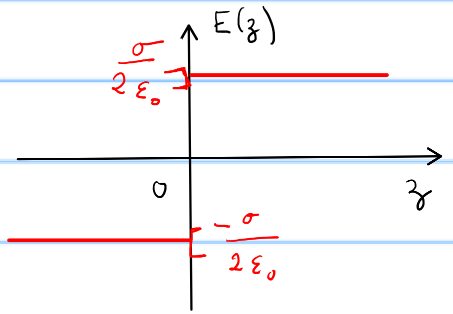
① Théorème de Gauss : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ et $\Phi_3 = 0$ car $\vec{n}_3 = \vec{u}_r \perp \vec{E}$

$$\underline{\Phi} = \Phi_1 + \Phi_2 = \iint_{S_1} E(z)\,\vec{u}_z \cdot dS_1 \underbrace{\vec{n}_1}_{\vec{u}_z} + \iint_{S_2} E(-z)\,\vec{u}_z \cdot dS_2 \underbrace{\vec{n}_2}_{-\vec{u}_z}$$

$$= E(z) \underbrace{\iint_{S_1} dS_1}_{S = \pi r^2} + \underbrace{\left(-E(-z)\right)}_{E(z)} \underbrace{\iint_{S_2} dS_2}_{= S = \pi r^2} = \underline{2\,E(z)\,S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

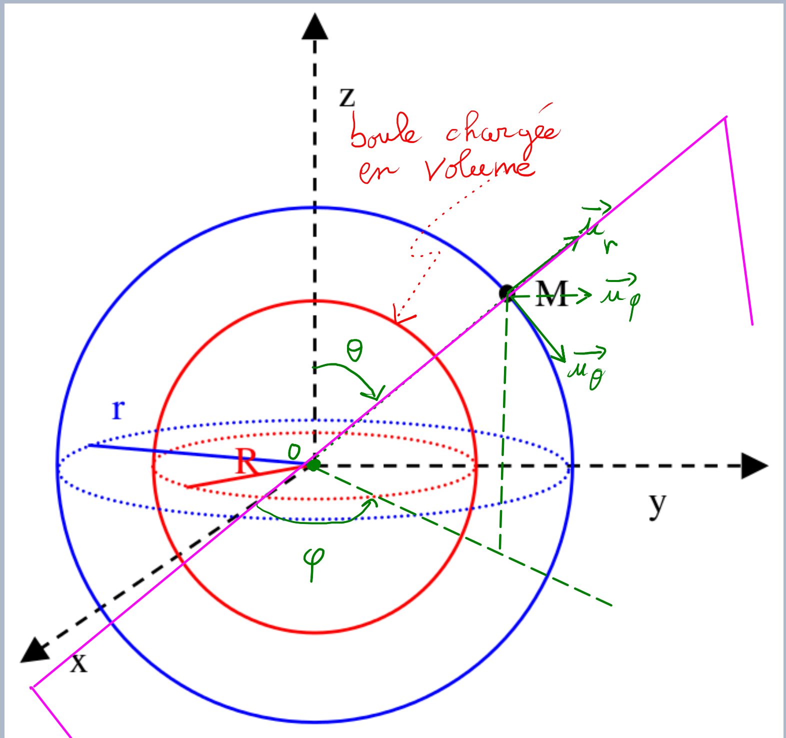
discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée

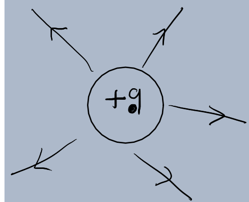


$\rho = \dfrac{dq}{dV} = cst$ ← ρ : charge volumique

symétrie sphérique.

$\vec{E}$ continu et défini dans tout l'espace.

une charge q :



$$\vec{E}(r) = E(r).\vec{u}_r$$

Coordonnées sphériques : $\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$

$\vec{d\ell} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{vmatrix}$ et $\vec{dS} = \begin{vmatrix} \bullet\ r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = dS_r \\ \bullet\ r\,dr\,\sin\theta\,d\varphi = dS_\theta \\ \bullet\ r\,dr\,d\theta = dS_\varphi \end{vmatrix}$

Théorème de Gauss :

à r donné, E(r) constant

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \oiint_S E(r).dS_r = E(r).\underbrace{\oiint_S dS_r}_{\text{surface de la sphère } S} = E(r).4\pi r^2$$

donc

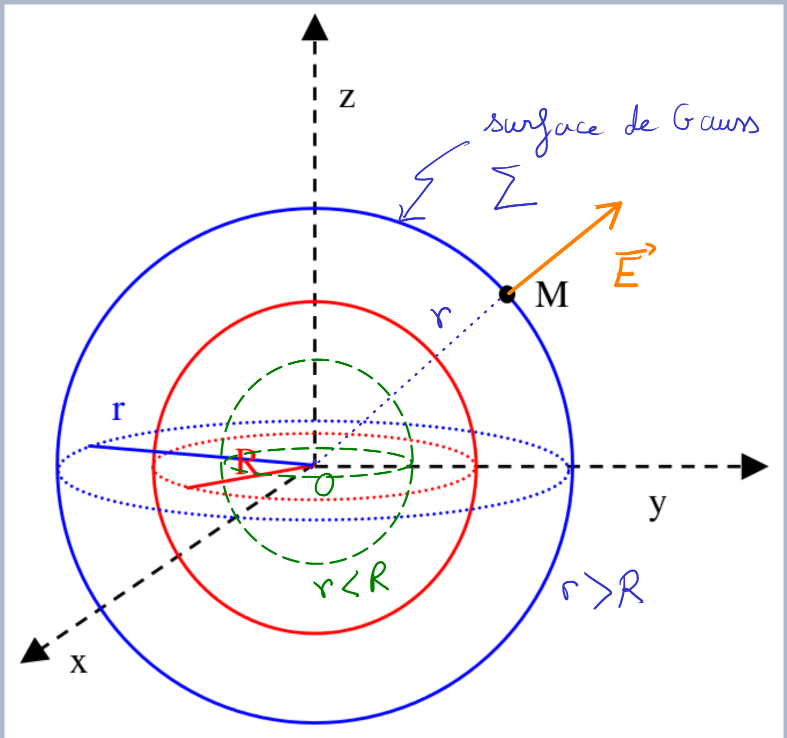
$$\boxed{\Phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = E(r).4\pi r^2}$$

V : volume à l'intérieur de S

$\bullet$: produit scalaire et $\vec{E}\cdot\vec{dS} = E(r)\,\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{dS}}_{dS_r}$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples



Si la sphère de Gauss a un rayon r > R

$q_{int} = Q_{totale}$ de la boule rouge

$\boxed{Q = \rho V} = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$

avec $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Soit $E(r) = \frac{\cancel{4\pi}}{3}\rho R^3 \times \frac{1}{\cancel{4\pi}\,\varepsilon_0 r^2}$

Si la sphère de Gauss a un rayon r < R

$q_{int} = \rho V = \frac{4}{3}\pi \rho r^3$

$\cancel{4\pi}\cancel{r^2}\,E(r) = \cancel{4\pi}\,\frac{\rho}{3}\,\frac{\cancel{r^3}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

- Coordonnées : sphériques $\{O, (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)\}$
- invariances : la distribution de charges est invariante par rotation selon θ et φ

$\Longrightarrow \vec{E}(r)$

- symétries : pour la distribution de charges, tout plan Π passant par O et M est un plan de symétrie :

$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \Pi_1$

$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) = \Pi_2 \quad \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r}$

donc $\vec{E} \in (\Pi_1 \cup \Pi_2) \Rightarrow$ direction commune : $\vec{u}_r$

- Théorème de Gauss : surface de Gauss S = sphère de même centre O et de rayon r (surface fermée)

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

q_{int} : 2 cas

- $r \geq R$: $q_{int} = Q_{totale}$
- $r \leq R$: q_{int} = portion de Q_{totale}

$$\oiint dS_r = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi) = r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2 \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{-(-1)-(-1)=2} \overbrace{\left[\varphi\right]_0^{2\pi}}^{2\pi} = 4\pi r^2$$

$\vec{E}$ $\underline{c}$ et déf. partout

$r > R$:

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}}$$

$r < R$:

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r}$$

Vérification :

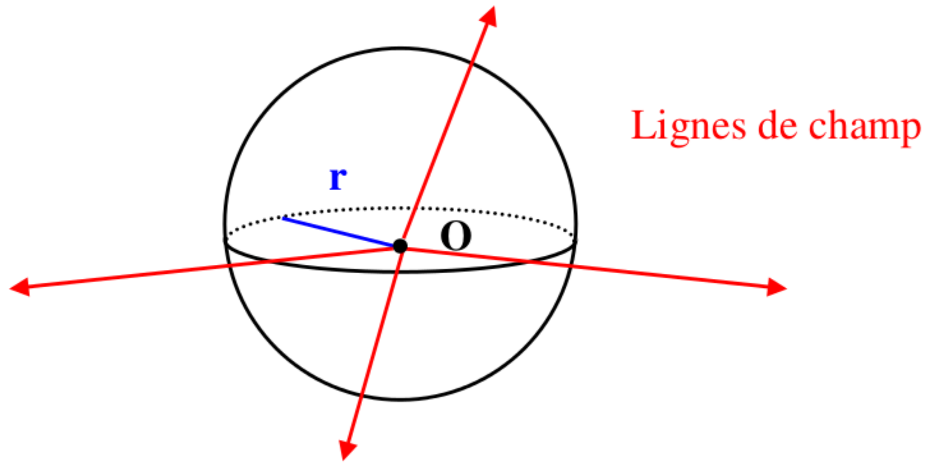
$$[E(r)] = \frac{[\rho]}{[\varepsilon_0]} L = \frac{[Q] L^{-3}}{[\varepsilon_0]} L = \frac{[Q]}{[\varepsilon_0] L^{-2}} \quad \text{ok}$$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Ainsi les lignes de champ produites par une charge ponctuelle placée en O sont des droites passant par O, comme pour la sphère chargée (cf. vidéo)

$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$



Bibliographie

- [1]Polycopié de cours
- [2] CUPGE - CY : Introduction à l'électromagnétisme
- [3] Wikipédia
- [4] Encyclopédie Universalis
- [5] David Sénéchal - « Histoire des sciences » PHQ399 Université de Sherbrooke, QC
- [6] pour la suite : Khan Academy , Unisciel etc…