第十三次课后作业

1、令 $R=\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in Z\}$ $(R,+,\times)$ 构成环

证明：即证 $(R,+)$ 为交换群，$(R,\times)$ 为半群，及满足分配律

①证 $(R,+)$ 为交换群：$\forall a,b,c,d,e,f\in Z$

封闭性：$(a+b\sqrt{5})+(c+d\sqrt{5})=a+c+(b+d)\sqrt{5}\in R$ 成立

结合律 $[(a+b\sqrt{5})+(c+d\sqrt{5})]+(e+f\sqrt{5})=(a+b\sqrt{5})+[(c+d\sqrt{5})+(e+f\sqrt{5})]$ 成立

加法单位元：$1+0\times\sqrt{5}=1$

逆元：对 $\forall(a+b\sqrt{5})$ 有 $(a+b\sqrt{5})+[(1-a)+(-b)\sqrt{5}]=1$

交换律：$(a+b\sqrt{5})+(c+d\sqrt{5})=(c+d\sqrt{5})+(a+b\sqrt{5})$

②证 $(R,\times)$ 为半群

封闭性：$(a+b\sqrt{5})\times(c+d\sqrt{5})=(ac+5bd)+(ad+bc)\sqrt{5}\in R$ 成立

结合律：$[(a+b\sqrt{5})\times(c+d\sqrt{5})]\times(e+f\sqrt{5})=(a+b\sqrt{5})\times[(c+d\sqrt{5})\times(e+f\sqrt{5})]$ 成立

③分配律

$(a+b\sqrt{5})[(c+d\sqrt{5})+(e+f\sqrt{5})]=(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})+\cancel{a+b\sqrt{5}+}(a+b\sqrt{5})(e+f\sqrt{5})$

$[(a+b\sqrt{5})+(c+d\sqrt{5})](e+f\sqrt{5})=(a+b\sqrt{5})(e+f\sqrt{5})+(c+d\sqrt{5})(e+f\sqrt{5})$ 成立

即 R 为环 成立

2、证明：设 $\forall a,b$ 不为零元(加法单位元 θ)

设 $ab=\theta$ 则同时左乘 a^{-1} 得 $a^{-1}ab=a^{-1}\theta$

$eb=\theta$

$b=\theta$ 矛盾

即 $\forall a,b\in R$，a 不为零因子，得证

3. 证明(1) 对$\forall z\in Z$，$\exists \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\in S$ $x,y,z\in Z$ 使 $\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\longmapsto z$.

即为φ满日映射

又$\because$ $\forall A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} u, & v \\ 0 & w \end{pmatrix}\in S$

$$\varphi(A+B)=\varphi\begin{pmatrix} x+u, & y+v \\ 0, & z+w \end{pmatrix}=z+w=\varphi(A)+\varphi(B)$$

$$\varphi(A\cdot B)=\varphi\begin{pmatrix} xu & , xv+yw \\ 0, & zw \end{pmatrix}=zw=\varphi(A)\cdot\varphi(B)$$

即φ为S到Z的同态

则φ为S到Z的满同态.

(2) Z中加法单位元为0. 即φ的核 $\ker\varphi=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & a \end{pmatrix}\middle|\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & a \end{pmatrix}=0, x,y,a\in Z\right\}$

则 $\ker\varphi=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\middle| x,y\in Z\right\}$

设f为 $S/\ker\varphi$到Z的一个同构映射

$S/k=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}+\ker\varphi\middle| z\in Z\right\}$

则 $f:\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}+\ker\varphi\longmapsto z$.

4. 即证明 $\forall r\in R$，$a\in J$，有$ar\in J$，且J为R的子集.

① 由$J=\{r\in R\mid \exists n\in N$ 使$r^n\in I\}$ 得J为R的子集

② 对$\forall r\in R$，$a\in J$，证$ar\in J$

若$ar\in J$，则$\exists n\in N$使$(ar)^n\in I$

$\because$ R为交换环，$\therefore (ar)^n=a^nr^n$

又$\because a\in J$ $\therefore a^n\in I$. 又$\because$ R为环 满足封闭性 $\therefore r^n\in R$

由理想的定义：$\forall a\in I$ $r\in R$有 $ar\in I$

则$a^n\in I$，$r^n\in R$，有$a^nr^n\in I$

即$ar\in J$

则对$\forall a\in J$，$r\in R$，有$ar\in J$ 即J也是R的理想