第10次课后作业

1、证明：封闭性：$\begin{pmatrix}a & b\\0, & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}c, & d\\0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac, & ad+b\\0, & 1\end{pmatrix}$

$\because$ $ac, d, ad\in Q$ 即 $\begin{pmatrix}ac, & ad+b\\0, & 1\end{pmatrix}\in G$. 满足封闭性

结合律：令 $\begin{pmatrix}a & b\\0 & 1\end{pmatrix}=A_1$, $\begin{pmatrix}c & d\\0, & 1\end{pmatrix}=A_2$ $\begin{pmatrix}e, & f\\0, & 1\end{pmatrix}=A_3$

则 $\left(\begin{pmatrix}a & b\\0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}c & d\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\otimes\begin{pmatrix}e & f\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac, & ad+b\\0, & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}e & f\\0 & 1\end{pmatrix}=\cancel{\begin{pmatrix}ace, & acf\\0, & 1\end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix}ace, & acf+ad+b\\0, & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a & b\\0 & 1\end{pmatrix}\otimes\left[\begin{pmatrix}c & d\\0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}e & f\\0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a & b\\0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}ce, & cf+d\\0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ace, & acf+ad+b\\0, & 1\end{pmatrix}$

即 $(A_1\otimes A_2)\otimes A_3=A_1\otimes(A_2\otimes A_3)$ 满足结合律

单位元：$\begin{pmatrix}a & b\\0, & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a & b\\0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a, & b\\0, & 1\end{pmatrix}$

即单位元为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

可逆性：$A=\begin{pmatrix}a & b\\0, & 1\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}1 & -b\\-0 & a\end{pmatrix}$ $|A|=a$

即 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{b}{a}\\0, & 1\end{pmatrix}$ 则 $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot A$.

即G具有"$\otimes$"运算且满足结合律,单位元,可逆性, 则G为一个群.

2、证明：封闭性：$\begin{pmatrix}a & a\\a & a\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}b & b\\b & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab & 2ab\\2ab & 2ab\end{pmatrix}\in G$ 成立

结合律：令 $A_1=\begin{pmatrix}a & a\\a & a\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}b & b\\b & b\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}c & c\\c & c\end{pmatrix}$

则 $(A_1\otimes A_2)\otimes A_3=\begin{pmatrix}2ab & 2ab\\2ab & 2ab\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}c & c\\c & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4abc & 4abc\\4abc & 4abc\end{pmatrix}$

$A_1\otimes(A_2\otimes A_3)=\begin{pmatrix}4abc & 4abc\\4abc & 4abc\end{pmatrix}$ 即 $(A_1\otimes A_2)\otimes A_3=A_1\otimes(A_2\otimes A_3)$ 满足结合律

单位元：$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}$ 即e为$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

可逆性：对$\forall\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}$ $a\neq 0$，$\exists\begin{pmatrix}\frac{1}{4a} & \frac{1}{4a}\\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a}\end{pmatrix}$使$\begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\frac{1}{4a} & \frac{1}{4a}\\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

即G关于乘法运算有封闭性，结合律，单位元，可逆性，为一个乘法构成群

3. 证明：令$a_k=a_1a_2a_3a_4\cdots a_r$.

则∵G是群 ∴$a_k\in G$ 则且$a_k^{-1}\in G$

$a_k^{-1}=(a_1a_2\cdots a_r)^{-1}$ $a_k\cdot a_k^{-1}=a_k^{-1}\cdot a_k=e$

$(a_1a_2\cdots a_r)^{-1}a_k=e$

又∵ $a_r^{-1}a_{r-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}a_k=a_r^{-1}a_{r-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}a_1a_2\cdots a_r$

则$a_1^{-1}a_1=e$ $a_2^{-1}a_2=e\cdots$ $a_r^{-1}a_r=e$

即 $a_r^{-1}a_{r-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}a_k=e$

又∵逆元是唯一的

∴ $(a_1a_2\cdots a_r)^{-1}$与$a_r^{-1}a_{r-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}$都为$a_k$的逆元

即 $(a_1a_2\cdots a_r)^{-1}=a_r^{-1}a_{r-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}$

4. 证明：∵$a,b\in G$，G为群

∴ $ba=eba$ $\cancel{=a^{-1}aba}$

且 $e=a^{-1}a$，则 $ba=eba=a^{-1}aba$

又∵ $ab=e$ ∴$=a^{-1}a=e$.

即$ba=e$得证