3. 任意一个整数除以 n 的余数最多只可能有 n 种情况：0，1，2…$n-1$。所以 $n+1$ 个整数除以 n，必有至少两个数的余数相同，那么它们的差是 n 的倍数。

4. (1)令 b_1，b_2，…，b_{77} 分别为这 11 周期间他每天下棋的次数，并作部分和

$$a_1 = b_1,$$
$$a_2 = b_1 + b_2,$$
$$\cdots,$$
$$a_{77} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{77}.$$

依题意，$b_i \geq 1(1 \leq i \leq 77)$，且$b_i + b_{i+1} + \cdots + b_{i+6} \leq 12(1 \leq i \leq 71)$，故有$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$。

当$1 \leq k \leq 21$时，考虑数列$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k$，它们都在 1 与$132 + k(133 \leq 132 + k \leq 153)$之间，共有 154 项。由鸽巢原理，其中必有两项相等。由于$a_1, a_2, \cdots, a_{77}$这 77 项互不相等，所以$a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k$这 77 项也互不相等，所以一定存在$1 \leq i < j \leq 77$，使得$a_j = a_i + k$。所以$k = a_j - a_i$。即存在连续的一些天，棋手恰好下了$k(k = 1,2, \cdots 21)$盘棋。

(2)考虑数列$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$，

(i)如果这 154 项中有两项相等，则存在$1 \leq i < j \leq 77$，使得$a_j = a_i + 22$，则从第 i 天到第 j 天棋手恰好下了 22 盘棋。

(ii)如果这 154 项中任意两项都不相等，则数列$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$是 1 到 154 的一个全排列。然而这种全排列其实是不存在的，数列中最小的数为a_1，所以$a_1 = 1$，$a_1 + 22 = 23$；除去a_1，最小的数为a_2，所以$a_2 = 2$，$a_2 + 22 = 24$等等，具体结果如下：

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_{22} = 22,$$
$$a_1 + 22 = 23, a_2 + 22 = 24, \cdots, a_{22} + 22 = 44,$$
$$a_{23} = 45, a_{24} = 46, \cdots, a_{44} = 66,$$
$$a_{23} + 22 = 67, a_{24} + 22 = 68, \cdots, a_{44} + 22 = 88,$$
$$a_{45} = 89, a_{46} = 90, \cdots, a_{66} = 110,$$
$$a_{45} + 22 = 111, a_{46} + 22 = 112, \cdots, a_{66} + 22 = 132,$$

此时a_{67}最小，$a_{67} = 133$，而$a_{67} + 22 = 155$，所以这种全排列是不存在的。

综上所述，这 154 项中存在连续的一些天，棋手恰好下了 22 盘棋。

6. 任意一个整数可以表示为$2^{p_n} \cdot r_n$，p_n为非负整数，r_n为奇数，按照r_n将 1 到 200 这 200 个数划分成 100 个集合：

$$A_1 = \{2^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 1, \dots, 2^7 \cdot 1\};$$
$$A_3 = \{2^0 \cdot 3, 2^1 \cdot 3, \dots, 2^6 \cdot 3\};$$
$$\cdots$$

$$A_{2k+1} = \{2^0 \cdot k, 2^1 \cdot k, \dots\};$$
$$\cdots$$
$$A_{199} = \{2^0 \cdot 199\}.$$

每个集合内的任意两个元素，一个都可以被另一个整除，因此取 100 个数时要分别从这 100 个集合里各取一个，设取的 100 个数为：

$$b_1 = 2^{p_1} \cdot 1$$
$$b_3 = 2^{p_3} \cdot 3$$
$$\cdots$$
$$b_{199} = 2^{p_{199}} \cdot 199$$

因为存在$b_i < 16$，则 $b_i = 2^{p_i} \cdot i < 16$。因为$b_{3\mathrm{i}} = 2^{p_{3i}} \cdot 3$，则$\frac{b_{3i}}{b_i} = 3 \cdot 2^{p_{3i}-p_i}$。因为存在$b_i$与$b_{3i}$互不整除，所以$p_{3\mathrm{i}} < p_{\mathrm{i}}$，所以$p_{3i} \leq p_i - 1$。

所以，$b_{3i} = 2^{p_{3i}} \cdot 3i \leq 2^{p_{i-1}} \cdot 3i = 3/2b_i$，因为$b_i < 16$，所以$b_{3i} < 24, b_{9i} < 36, \cdots, b_{81i} < 81$，又因为$b_{81i} = 2^{p_{81i}} \cdot 81i \geq 81$，矛盾！所以，原命题得证！

7. 取出 101 到 200 即可。

10. 根据横坐标对 3 取余将这 9 个整点分成 3 类：

$$x_0 = \{(x,y)|x = 0(mod\ 3)\};$$
$$x_1 = \{(x,y)|x = 1(mod\ 3)\};$$
$$x_2 = \{(x,y)|x = 2(mod\ 3)\}.$$

同理，根据纵坐标对 3 取余也可以将这 9 个整点分成 3 类：

$$y_0 = \{(x,y)|y = 0(mod\ 3)\};$$
$$y_1 = \{(x,y)|y = 1(mod\ 3)\};$$
$$y_2 = \{(x,y)|y = 2(mod\ 3)\}.$$

所以，可以将这 9 个整点分成 9 类：

(x_0, y_0)	(x_0, y_1)	(x_0, y_2)
(x_1, y_0)	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)
(x_2, y_0)	(x_2, y_1)	$(x_2, 2)$

(1)若存在某一类的元素个数不小于 3，则从该类中选取 3 个点就满足要求；

(2)若所有类的元素个数均小于 3，则这 9 个整点至少分成 5 类，这 5 类至少满足以下一个条件：

(i)某一行的三类元素个数均非零，此时从这三类中个取一个元素就满足要求；

(ii)某一列的三类元素个数均非零，此时从这三类中个取一个元素就满足要求；

(iii)某一对角线（包括(x_0, y_1),(x_1, y_2),(x_2, y_0)这种）的三类元素均非零，此时从这三类中个取一个元素就满足要求。

假设 9 个整点分成的 5 类上述三个条件均不满足，则每行最多有两类不空且每行至少有一类不空，不妨设第一行和第二行各有两类不空，则第三行无论是哪类不空均满足上述三个条件之一，矛盾。故这与 5 类必满足上述三个条件之一。

综上所述，这 9 个整点中必有 3 个整点满足要求。

11. 有理数的分子跟分母都是整数，并且分母不等于零，十进制数展开式相当于一个整数除以另外一个整数 n，所得余数所有可能值有$n-1$个，也就是说最多除$n-1$次余数就会有重复，当余数重复时，就会产生循环。

15. $1,2,\cdots,2n$中至多有 n 个整数互不相邻，有鸽巢原理知，从这 $2n$ 个整数中任选$n+1$个整数，至少有 2 个整数相邻，则这 2 个整数的最大公因子为 1.

20. 由鸽巢原理知，P_1,P_2,P_3,P_4中至少有一个有$\left\lceil\frac{67}{4}\right\rceil=17$个整数，不妨设为$P_1$，并设这 17 个元素$a_1<a_2<\cdots<a_{17}$，令$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{17}\}$，若 A 中存在一个元素是某两个元素之差，则满足题目要求，否则，令

$$b_1=a_2-a_1,b_2=a_3-a_1,\cdots,b_{16}=a_{17}-a_1.$$

令$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{16}\}$，显然$1\le b_i\le 67$，根据前面的假定，$b_1,b_2,\cdots,b_{16}$中无一属于$P_1$，否则与假设 A 中不存在一个元素是某两个元素之差相矛盾，所以 B 中元素属于P_2,P_3,P_4。

由鸽巢原理知，P_2,P_3,P_4中至少有一个至少包含$b_1,b_2,\cdots,b_{16}$中的$\left\lceil\frac{16}{3}\right\rceil=6$个整数，不妨设为$P_2$，且$b_{i_1}<b_{i_2}<\cdots<b_{i_6},1\le i_1<i_2<\cdots<i_6\le 16$。令$B'=\{b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_6}\}$，$B'\subseteq P_2$。根据假定，$B'$中没有一个元素是某两个元素之差。令

$$c_1=b_{i_2}-b_{i_1},c_2=b_{i_3}-b_{i_1},\cdots,c_5=b_{i_6}-b_{i_1}.$$

显然$c_i\notin P_1,c_i\notin P_2,i=1,2,3,4,5$。令$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_5\}$,所以 C 中元素属于P_3,P_4。

由鸽巢原理知，P_3,P_4中至少有一个至少包含$c_1,c_2,\cdots,c_5$中的$\left\lceil\frac{5}{2}\right\rceil=3$个整数，不妨设为$P_3$，且$c_{i_1}<c_{i_2}<b_{i_3},1\le i_1<i_2<i_3\le 5$。令$C'=\{c_{i_1},c_{i_2},c_{i_3}\}$，$C'\subseteq P_3$。根据假定，$C'$中没有一个元素是某两个元素之差。令

$$d_1=c_{i_2}-c_{i_1},d_2=c_{i_3}-c_{i_1}.$$

显然$d_i\notin P_1,d_i\notin P_2,d_i\notin P_3,i=1,2$。令$D=\{d_1,d_2\}$，所以 D 中元素属于P_4。而$1\le d_1<d_2<67$，由假定有$d_2-d_1\notin P_1,P_2,P_3,P_4$，这和将 1 到 67 之间的整数分成四部分的前提矛盾，故原命题成立。

22. 把每个三角形的最短边染成红色，剩下的所有边染成白色，则由 Ramsey 定理可知，必出现同色三角形。又每个三角形都有最短边，即每个三角形都有红色边。于是上述同色三角形是红色的，则它的最长边也是红色的，所以原命题得证。

1. 求 50!的尾部有多少个零，即求 50!中有 2×5 的因子个数。由于 2 的因子个数比 5 多，所以问题转换为求 5 的因子个数。其中 5，10，15，20，30，35，40，45 各含有 1 个 5 的因子，共 8 个；25，50 各含有 2 个 5 的因子，共 4 个。所以共有 12 个 5 的因子，即 50!的尾部有 12 个零。

（注：$50! = 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000$）

2. (1)千位数字为 5，

(i)百位数字为 4，满足要求的整数有$6\times 5 = 30$个；

(ii)百位数字大于 4，满足要求的整数有$3\times 6\times 5 = 90$个；

(2)千位数字大于 5，满足要求的整数有$3\times 7\times 6\times 5 = 630$个；

综上所述，满足要求的整数有$30 + 90 + 630 = 750$个。

3. 将不相邻的两人其中一人与其他十个人先进行圆排列，有$11!/11 = 10!$种安排方法。然后将剩下的那个人插入到十一个人之间，其中有 2 个位置不能安排，所以有 9 个位置，共有$9\times 10!$种安排方法。

4. (1)有$P(4,4) = 24$种信号。

(2)使用一盏灯，有 4 种信号；使用两盏灯，有$P(4,2) = 12$种信号；使用三盏灯，有$P(4,4) = 24$种信号；使用四盏灯，有$P(4,4) = 24$种信号；共有$4 + 12 + 24 + 24 = 64$种信号。

(3)使用一、二、三、四盏灯，各有$\binom{4}{1}$、$\binom{4}{2}$、$\binom{4}{3}$、$\binom{4}{4}$种信号，共有 15 种信号。

5. (1) $\binom{100}{3}$.　　(2) $1-\binom{98}{3}/\binom{100}{3}$.　　(3) $\binom{2}{1}\binom{98}{2}/\binom{100}{3}$.

7. 选取 8 行，每行放一个，有$\binom{8}{8}$种取法；每行取一列放棋子，有 $P(8,8)$种取法；把 5 个红和 3 个蓝棋子放在这 8 个位置上，有$\frac{8!}{5!\cdot 3!}$种放法。

综上所述，有$\binom{8}{8}\cdot P(8,8)\cdot\frac{8!}{5!\cdot 3!}$种放法。

放在 12×12 的棋盘上，有$\binom{12}{8}\cdot P(12,8)\cdot\frac{8!}{5!\cdot 3!}$种放法。

8. $\binom{10}{4}$(或$\binom{10}{6}$).

10. 记$y_i = x_i - i$，则原问题转化为求方程$y_1 + y_2 + \cdots + y_8 = 4$的非负整数解

的个数，共$\binom{4+8-1}{4}=330$个。

13. 将向右走记为 1，向上走记为 0，则$(0,0)$到(n,n)的非降路径数为一个 01 序列，将满足条件的序列分为两类：

(1)任何时刻，1 的数量 ≥ 0 的数量（一直在对角线的下方走）；

(2)任何时刻，0 的数量 ≥ 1 的数量（一直在对角线的上方走）。

两类序列的数量相等，下面仅求第一类序列的数量。

定义三个集合：

(1)集合 A：n 个 0，n 个 1 组成的序列，集合大小为$\binom{2n}{n}$；

(2)集合 B：n 个 0，n 个 1 组成的序列，且在某个时刻，0 的数量大于 1 的数量，$|A|-|B|$即为第一类序列的数量；

(3)集合 C：$n+1$个 0，$n-1$个 1 组成的序列，集合大小为$\binom{2n}{n-1}$。

下面证明集合 B 和集合 C 大小相等。

任取 B 中的一个元素，将第一次出现 0 的数量大于 1 的数量的位置及以前的序列保持不变，后面的序列 0 和 1 进行反转。例如 B 中的元素$b=1010001\cdots011$，第五位及以前的序列保持不变，后面的序列 0 和 1 反转，变为序列$c=1010010\cdots100$。可以证明变换后的序列中有$n+1$个 0，$n-1$个 1，所以 B 中元素都可以唯一的映射到 C 中。反过来，C 中元素必然存在某一时刻 0 的数量大于 1 的数量，将第一次出现 0 的数量大于 1 的数量的位置之后的 0 和 1 进行反转，得到的序列必然属于 B，所以 C 中元素都可以唯一映射到 B 中。所以集合 B 和集合 C 的大小相等。

所以第一类路径的数量为$|A|-|B|=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n}/(n+1)$，总的路径数量为

$$2\cdot(|A|-|B|)=2\cdot\binom{2n}{n}/(n+1).$$

物理含义：第一次出现 0 的数量 >1 的数量，表示从对角线下方走的时候第一次穿过对角线，将后面的 0 和 1 反转，表示将第一次穿过对角线后面的路径沿着对角线对折，集合 C 表示从$(0,0)$到$(n-1,n+1)$的非降路径数。

14. 设第一组数有 a 个，第二组数有 b 个，要求第一组里的最小数大于第二组里的最大数，即只要取出$m(m=a+b,m\leq n)$个数，按从大到小的顺序排列，把前 a 个作为第一组，剩下 b 个作为第二组。对于给定的 m，第一组的取法有$m-1$种，所以总的方案数为

$$\sum_{m=2}^{n}(m-1)\binom{n}{m}=\sum_{m=2}^{n}m\binom{n}{m}-\sum_{m=2}^{n}\binom{n}{m}=n2^{n-1}-2^{n}+1.$$

16. 每四个顶点构成一个凸四边形，一个凸四边形的一组对角线有一个交点，且任意 3 条对角线不共点，所以该凸 10 边形的对角线交于$\binom{10}{4} = 210$个点。

每组对角线交点关联的段数为 4，每个顶点关联的段数为 7，这样每段重复计算了一次，故把所有的对角线分成$\frac{1}{2}(210 \times 4 + 10 \times 7) = 455$段。

20. (1)因为最大元素是j，所以其他元素是从比j小的$j-1$个元素中选取，这$j-1$个元素每个都有被选取和不被选取两种情况，故最大元素恰好是j的子集数为2^{j-1}。

(2)等式左边表示最大元素$1,2,\cdots,n+1$的子集数之和，等式右边表示集合$1,2,\cdots,n+1$的非空子集数，显然两边相等。

23. 确定 5 封信的传送顺序有$5! = 120$种，将 15 个空格插入到 4 个间隔中，即方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \quad (x_i \geq 3，i = 1,2,3,4)$$

的非负整数解的个数$\binom{3+4-1}{3} = 20$，综上所述，共有 2400 种方法。

25. 因为 x 与 y 的乘积不能被 3 整除，则 x 和 y 均不能被 3 整除。1 到 100 之间不能被 3 整除的数有 67 个，故所求有序对的数量为$P(67,2)$。

28. (2)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+2)!}{(k+2)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(2^{n+2} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1}\right) = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

2. x^5y^{13}的系数是$\binom{18}{13}\cdot 3^5\cdot(-2)^{13}=-\binom{18}{13}\cdot 3^5\cdot 2^{13}$.

x^8y^{10}的系数是$\binom{18}{10}\cdot 3^8\cdot(-2)^{10}=\binom{18}{10}\cdot 3^8\cdot 2^{10}$.

3. (2)等式左边

$$=\frac{1}{n+1}\left[(n+1)\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}\right]$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\right]$$
$$=\tfrac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

4. 等式右边相当于从$(0,0)$到$(m,n-m+r+1)$点的非降路径数，可以将这些路径分为如下$m+1$类：第$i(i=1,2,\cdots,m)$类路径是从$(0,0)$点到$(m-i,n-m)$点，然后到$(m-i,n-m+1)$点，最后到$(m,n-m+r+1)$点，路径数为$\binom{n-i}{m-i}\binom{r+i}{i}$。由加法原则，得等式成立。

8. $a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}$

$$=\frac{a}{6}m(m-1)(m-2)+\frac{b}{2}m(m-1)+cm$$
$$=\frac{a}{6}m^3+\frac{b-a}{2}m^2+\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)m$$
$$\therefore\frac{a}{6}=1,\ \frac{b-a}{2}=0,\ \left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)=0.$$
$$\therefore a=6,\ b=6,\ c=1.$$

$1^3+2^3+\cdots+n^3$

$$=6\left(\binom{1}{3}+\cdots+\binom{n}{3}\right)+6\left(\binom{1}{2}+\cdots+\binom{n}{2}\right)+\left(\binom{1}{1}+\cdots+\binom{n}{1}\right)$$
$$=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$
$$=6\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

9. $\binom{m_1+m_2}{n}$表示m_1+m_2元集合 A 的 n 组合数。将集合 A 分成两个集合 A_1 和 A_2，使得$|A_1|=m_1,|A_2|=m_2$。则 A 的 n 元子集可以分成如下$n+1$类：从 A_1 中选取$k(k=0,1,\cdots,n)$个元素，从 A_2 选取$n-k$个元素合并到一起构成 A 的第 k

类 n 元子集，而第 k 类子集的个数为$\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}$。由加法原则，原等式得证。

10. (1)设 0 出现偶数次的字符串有$f(n)$个，出现奇数次的字符串有$g(n)$个，则$f(1)=2$，对$f(n)$，可以分成以下两种情况：

(i)最后一位为 0，则$f(n)=g(n-1)$；

(ii)最后一位为 1 或 2，则$f(n)=f(n-1)$；

所以$f(n)=g(n-1)+2f(n-1)$，而$g(n)=3^n-f(n)$，则

$$f(n)=3^{n-1}-f(n-1)+2f(n-1)=3^{n-1}+f(n-1).$$

所以

$$f(n)=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^1+f(1)=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)+2=\frac{3^n+1}{2}.$$

(2)等式左边可以理解为长度为 n 字符串中，0 出现偶数次的字符串总和，由(1)知，该等式成立。

11. 等式右边$=\binom{2n}{n+1}$表示 $2n$ 元集合 A 的$n+1$组合数。将集合 A 分成两个集合 A_1 和 A_2，使得$|A_1|=n,|A_2|=n$。则 A 的$n+1$元子集可以分成如下 n 类：从 A_1 中选取$k(k=1,2,\cdots,n)$个元素，从 A_2 选取$n+1-k$个元素合并到一起构成 A 的第 k 类$n+1$元子集，而第 k 类子集的个数为$\binom{n}{k}\binom{n}{n+1-k}=\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$。由加法原则，原等式得证。

15. $\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}$

$$\begin{aligned}
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}-\binom{n-3}{k}\\
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}-\binom{n-3}{k}\\
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}-\binom{n-3}{k}\\
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}
\end{aligned}$$

16.

$$\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}}\binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}=\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}}\binom{m_1}{n-s-t}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}$$

$$=\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}}\binom{m_1+m_2}{n-t}\binom{m_3}{t}=\binom{m_1+m_2+m_1}{n}$$

2. 设 A, B 分别为 1 到 500 之间能被 15，7 整除的整数集合，则所求为

$$|A| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{15 \times 7} \right\rfloor = 29.$$

3. 设 S, A, B 分别为 1 到 1000 之间整数集合，平方数和立方数的整数集合，则所求为

$$|\bar{A} + \bar{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$= 1000 - \sqrt{1000} - \sqrt[3]{1000} + \sqrt[6]{1000}$$

$$= 1000 - 31 - 10 + 3 = 962$$

4. 令$S_\infty = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c, \infty \cdot d\}$，则$S_\infty$的 10 组合数为$\binom{4+10-1}{10} = 286$。设集合 A 是S_∞的 10 组合数全体，则$|A| = 286$。定义性质集合$P = \{P_1, P_2, P_3\}$，其中

P_1：10 组合中 b 的个数大于或等于 4；
P_2：10 组合中 c 的个数大于或等于 6；
P_3：10 组合中 d 的个数大于或等于 8。

将满足性质P_i的 10 组合全体记为$A_i(1 \leq \mathrm{i} \leq 3)$，则

$$|A_1| = \binom{10-4+4-1}{10-4} = 84，$$
$$|A_2| = \binom{10-6+4-1}{10-6} = 35，$$
$$|A_3| = \binom{10-8+4-1}{10-8} = 10，$$
$$|A_1 \cap A_2| = 1，$$
$$|A_1 \cap A_3| = 0，$$
$$|A_2 \cap A_3| = 0，$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0。$$

由容斥原理知所求为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 286 - (84 + 35 + 10) + (1 + 0 + 0) - 0 \\ &= 158.\end{aligned}$$

5. 设集合A是该方程的所有正整数解全体，则$|A| = \binom{11+3-1}{11} = 78$。定义性质集合$P_i(i = 1,2,3)$：$x_i$的值大于或等于 9，将满足性质$P_i$的全体记为$A_i$，则

$$|A_1| = |A_2| = |A_2| = \binom{14-11+1}{14-11} = 10,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

由容斥原理知所求为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 78 - (10 + 10 + 10) + (0 + 0 + 0) - 0 \\ &= 48.\end{aligned}$$

7. 先选 k 个整数排在它们的自然位置上，有$\binom{n}{k}$种选法。再将剩下的$n-k$个整数错排，有D_{n-k}种排法，所以所求排列数为$\binom{n}{k}D_{n-k}$。

8. 设集合 A 是 S 的全排列数全体，则$|A| = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$。定义性质集合$P = \{P_1, P_2, P_3\}$，其中

P_1：全排列中所有 a 相邻；

P_2：全排列中所有 b 相邻；

P_3：全排列中所有 c 相邻。

将满足性质P_i的排列全体记为$A_i(1 \le \mathrm{i} \le 3)$，则

$$|A_1| = \frac{7!}{1!\,4!\,2!} = 105,$$

$$|A_2| = \frac{6!}{3!\,1!\,2!} = 60,$$

$$|A_3| = \frac{8!}{3!\,4!\,1!} = 280,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12,$$

$$|A_1 \cap A_3| = \frac{6!}{1!\,4!\,1!} = 30,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6.$$

由容斥原理知所求为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1260 - (105 + 60 + 280) + (12 + 30 + 20) - 6 \\ &= 871.\end{aligned}$$

13. (1)计算不包含数字 1,2,3,4 的整数：

一位数：5 个；

两位数：$5\times 6=30$个；

三位数：$5\times 6^2=180$个；

四位数：$5\times 6^3=1080$个；

五位数：$5\times 6^4=6480$个；

则 1 和 100000 之间包含数字 1,2,3,4 的整数的个数为

$$100000-5-30-180-1080-6480=92225.$$

(2) 一位数：4 个；

两位数：$4^2=16$个；

三位数：$4^3=64$个；

四位数：$4^4=256$个；

五位数：$4^5=1024$个；

则 1 和 100000 之间包含数字 1,2,3,4 的整数的个数为

$$4+16+64+256+1024=1364.$$

15. 设集合 A 是 n 对字母的全排列全体，则$|A|=\frac{(2n)!}{2^n}$。定义性质集合$P_i(i=1,2,\cdots,n)$：一对a_i相邻，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i|=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}},$$

$$\left|A_i\cap A_j\right|=\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}(i<j;i,j=1,2,\cdots n),$$

$$\cdots$$

$$\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}(i_1<i_2<\cdots<i_k;i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots n).$$

由容斥原理得，相同的一对字母不相邻的字的个数为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|&=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|-\cdots\\&\quad+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=\frac{(2n)!}{2^n}-\binom{n}{1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}+\binom{n}{2}\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}-\cdots+(-1)^n n!.\end{aligned}$$

16. (1)$\frac{(2n)!}{2n}=\big(2n-1\big)!.$

(2)设集合 A 是 $2n$ 个代表的全排列全体，则$|A|=(2n-1)!$。定义性质集合$P_i(i=1,2,\cdots,n)$：第 i 个单位的两个代表相邻，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i|=2\cdot\frac{(2n-1)!}{2n-1}=2\cdot(2n-2)!,$$

$$\left|A_i \cap A_j\right| = 2^2 \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} = 2^2 \cdot (2n-3)!\,(i<j;i,j=1,2,\cdots n),$$

$\cdots$

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = 2^k \cdot (2n-k-1)!\,(i_1<i_2<\cdots<i_k;i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots n).$$

由容斥原理得，各单位的两位代表不相邻的方案数为

$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| \\
&= |A| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| - \cdots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= (2n-1)! - \binom{n}{1} 2 \cdot (2n-2)! + \binom{n}{2} 2^2 \cdot (2n-3)! - \cdots + (-1)^n (n-1)!.
\end{aligned}$$

17. (1)m 层的错排数为

$$D_m = m!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m!}\right).$$

每层图书的全排列数为$n!$，有 m 层，共$(n!)^m$。故 m 类图书全不在原来层次上的方案数为

$$(n!)^m D_m.$$

(2)先在 m 层中取$k(k=2,3,\cdots,m)$层进行错排，对这 k 层的书进行全排列；剩下的$m-k$层中，对每层数进行错排，故每层的 n 本书都不在原来位置上的方案数为

$$\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}(n!)^k D_k (D_n)^{m-k}.$$

23.

$$\because \varphi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d},$$

$$\therefore \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}} = \frac{1}{n}\sum_{d|n} d\sum_{d'|d}\frac{\mu(d')}{d'}m^{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n}\sum_{d'|d} m^{\frac{n}{d}}\frac{d}{nd'}\mu(d').$$

令$d''=\frac{nd'}{d}$，则d''与 d 在取值上一一对应，所以$\frac{nd'}{d''}$与d''也一一对应，所以

$$上式 = \sum_{\frac{nd'}{d''}\middle|n}\ \sum_{d'\left|\frac{nd'}{d''}\right.}\frac{m^{\frac{d''}{d'}}}{d''}\mu(d') = \sum_{d''|n}\frac{1}{d''}\sum_{d'|d''}\sum_{d'|d''}\mu(d')m^{\frac{d''}{d'}}.$$

记d''为 d，则上式 ＝ 左边。

25. 本题棋盘B如图 1 所示，将其变换后如图 2 所示。

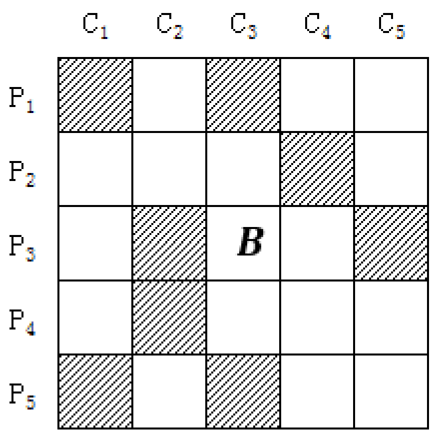

图1

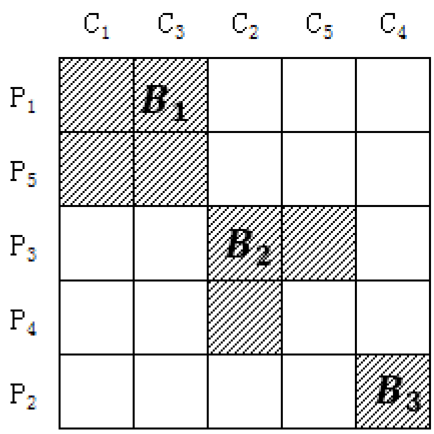

图2

则

$$R(x,B_1)=1+4x+2x^2, R(x,B_2)=1+3x+2x^2, R(x,B_3)=1+x.$$

$$R(x,B)=R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)\cdot R(x,B_3)$$
$$=1+8x+22x^2+25x^3+12x^4+2x^5.$$

所以 5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N(0)=5!-8\cdot 4!+22\cdot 3!-25\cdot 2!+12\cdot 1!+2\cdot 0!=20.$$

如果P_1去C_5，原棋盘变为B'，如图 3 所示，将其变换后如图 4 所示。

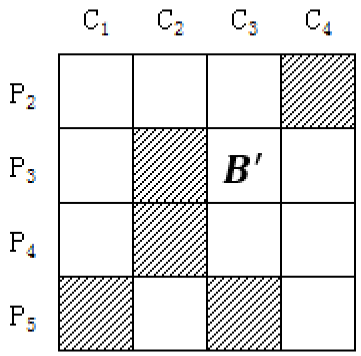

图3

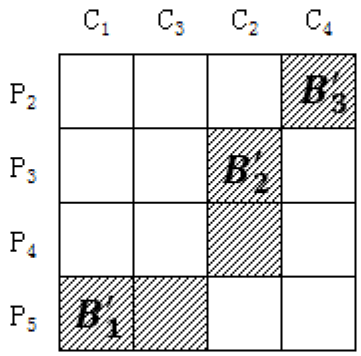

图4

则

$$R(x,B_1')=1+2x, R(x,B_2')=1+2x, R(x,B_3')=1+x.$$

$$R(x,B')=R(x,B_1')\cdot R(x,B_2')\cdot R(x,B_3')$$
$$=1+5x+8x^2+4x^3.$$

所以已知P_1去C_5，5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N'(0)=4!-5\cdot 3!+8\cdot 2!-4\cdot 1!+0\cdot 0!=6.$$

综上所述，P_1去C_5的概率为$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$。

28. 从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+m-1}\}$这$n+m-1$个元素中取 n 个元素，其中这 n 个元素包括$a_1,a_2,\cdots,a_m$，方法数为$\binom{n-1}{n-m}=\binom{n-1}{n-m}$。

接下来使用容斥原理计算。设集合 A 是从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+m-1}\}$中取 n 个元

素的全体取法，则$|A|=\binom{n+m-1}{n}$。定义性质集合$P_i(i=1,2,\cdots,m)$：取出的元素不包括a_i，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i|=\binom{n+m-1-1}{n},$$

$$\left|A_i\cap A_j\right|=\binom{n+m-1-2}{n}(i<j;i,j=1,2,\cdots m),$$

$\cdots$

$$\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=\binom{n+m-1-k}{n}(i_1<i_2<\cdots<i_k;i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots m).$$

由容斥原理得，从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+m-1}\}$中取 n 个元素，其中这 n 个元素包括$a_1,a_2,\cdots,a_m$的方法数为

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|\\&=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|-\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=\binom{n+m-1-1}{n}-\binom{m}{1}\binom{n+m-1-2}{n}-\cdots+(-1)^n\binom{m}{m}\binom{n+m-1-2}{n}\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n+m-1-k}{n}.\end{aligned}$$

原等式得证。(注：等式右边也可以看做从多重集合$\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$中取 n 个元素，其中每个元素至少取一次的方法数。）

29. (1)6^n。

(2)设集合 A 为 n 个乘客离开电梯的方法全体，则$|A|=6^n$。定义性质集合$P_i(i=1,2,\cdots,6)$：没有人在第$4+i$层离开电梯，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i|=5^n,$$

$$\left|A_i\cap A_j\right|=4^n(i<j;i,j=1,2,\cdots 6),$$

$\cdots$

$$\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=(6-k)^n(i_1<i_2<\cdots<i_k;i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots 6).$$

由容斥原理得，n 个乘客离开电梯的方法数为

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|\\&=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|-\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=6^n-\binom{6}{1}5^n+\binom{6}{2}4^n-\binom{6}{3}3^n+\binom{6}{4}2^n-\binom{6}{5}1^n+\binom{6}{6}0^n.\end{aligned}$$

1. (3) $G\{n(n+2)\}=G\{n(n+1)\}+G\{n\}=\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$

2. (2)由 1(3)知$G\{n(n+2)\}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$，设

$$G\{n(n+2)\}=A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

其中$b_n=\sum_1^n a_k$，又$a_0=0$，所以$b_n=\sum_0^n a_k$，则

$$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^4}=\left(3x-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k.$$

其中x^n的系数即为所求和

$$\begin{aligned}&3\cdot\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{3}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.\end{aligned}$$

(3)设数列$\{n\,(n+1)\}$的生成函数为

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

其中$b_n=\sum_1^n a_k$，又$a_0=0$，所以$b_n=\sum_0^n a_k$，则

$$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^4}=2x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k.$$

其中x^n的系数即为所求和

$$2\cdot\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(n=2)}{3}.$$

3. (1)设序列$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$的指数型生成函数为$A(x)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots$，则

$$A^2(x)=A(x)\cdot A(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)!\,(n-i+1)!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i+1)!} \cdot \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{x^2} [e(x)-1]^2.
\end{aligned}
$$

原命题得证。

(2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2} [e(x)-1]^2 \\
&= \frac{1}{x^2} [e(2x)-2e(x)+1] \\
&= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^k-2) \frac{x^k}{k!} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{\infty} (2^k-2) \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} (2^k-2) \frac{x^{k-2}}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}-2}{(n+2)!\,(n+1)!} \cdot \frac{x^n}{n!} \ (n=k-2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i+1)!} \cdot \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i+1)!} = \frac{2^{n+2}-2}{(n+2)!\,(n+1)!}.
$$

5. 这样的字有两种，a 与 b 的个数均为奇数和 a 与 b 的个数均为偶数，所以该排列数的指数型生成函数为

$$
\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2 \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2 \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3
$$

$$
= \frac{\big(e(x)-e(-x)\big)^2}{2} \cdot e(3x) + \frac{\big(e(x)+e(-x)\big)^2}{2} \cdot e(3x) = \frac{1}{2}\big(e(5x)+e(x)\big).
$$

所以$\frac{x^n}{n!}$的系数$\frac{1}{2}(5^n+1)$即为所求。

7. (1)生成函数为

$$(x+x^3+x^5+\cdots)^4=\frac{x^4}{(1-x^2)^4}.$$

(2)生成函数为

$$(1+x^3+x^6+\cdots)^4=\frac{1}{(1-x^3)^4}.$$

(3)生成函数为

$$(1+x)(1+x+x^2+\cdots)^2=\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

(4)生成函数为

$$\begin{aligned}&(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)(1+x+x^2+\cdots)^2\\=&\frac{x^3(1+x^2+x^{10})(1+x^2+x^3)}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

(5)生成函数为

$$(x^{10}+x^{11}+x^{12}+\cdots)^4=\frac{x^{40}}{(1-x^2)^4}.$$

9. 1 到10^n之间各位数字之和等于 5 的整数的个数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=5$$

的非负整数解的个数$\binom{n+5-1}{5}=\binom{n+4}{5}$。故$10^2$和$10^6$之间各位数字之和等于 5 的整数个数为$\binom{6+4}{5}-\binom{2+4}{5}=246$。

10. (2)等式左边的生成函数为

$$(1+x)^{n+2}-2(1+x)^{n+1}+(1+x)^n=x^2(1+x)^n.$$

设$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=x^2(1+x)^n$，则$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k-2}=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$.比较对应项系数得$a_k=\binom{n}{k-2}$，而$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$为等式右边的生成函数，故原等式得证。

11. (1)生成函数为

$$\left(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^k=\left(\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right)^k.$$

(2)生成函数为

$$\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^k=\left(e(x)-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\right)^k.$$

(3)生成函数为

$$(e(x)-1)(e(x)-1-x)\left(e(x)-1-x-\frac{x^2}{2!}\right)\dots\left(e(x)-1-x-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

(4)生成函数为

$$(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\dots\left(1+x+\cdots+\frac{x^k}{k!}\right).$$

12. 根据题意，有$M_1=\{0,1,2,3\},M_2=\{0,1,2,3,4\},M_4=\{0,1,2\}$。生成函数为

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)\\&=1+x+2x^2+2x^2+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+5x^8+5x^9+5x^{10}+\\&5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}.\end{aligned}$$

故能称出 20 种重量，指数为重量类型，系数为方案数。

14. $B'(N,m)$分为两类，一类是拆分的数中不包括 m，为$B'(N,m-1)$；另一类是拆分的数中至少有一个 m，为$B'(N-m,m)$。原等式得证。

15. 设x^i表示一个分部量取值为$i(i=1,2,\cdots,m)$，则一个分部量的可能取值为

$$x+x^2+\cdots+x^m.$$

n 个分部量之和为

$$(x+x^2+\cdots+x^m)^n.$$

所以，$(x+x^2+\cdots+x^m)^n$对应的展开式中x^N的系数即表示将 N 有序分拆成 n 个分部量小于或等于 m 的分拆数(N,n,m)。

17. $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$, $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}$. 由 $a_{n+1}=(n+1)b_n$，得 $a_n=nb_{n-1}(n\geq 1)$。则

$$A(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}nb_{n-1}\frac{x^n}{n!}=1+xB(x).$$

20. 生成函数为

$$(x+x^2+\cdots+x^{10})^{15}=x^{15}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{15}$$

$$=x^{15}\sum_{i=0}^{15}(-1)^i\binom{15}{i}x^{10i}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{14+i}{i}x^i.$$

其中x^{38}的系数为$\binom{14+23}{23}-\binom{15}{1}\binom{14+13}{13}+\binom{15}{2}\binom{14+3}{3}$。

2. 若左边第一位为 0 或 1，满足条件的序列共有$f(n-1)$个；

若左边第一位为 2，则剩下$n-1$位只能为 0 或 2，满足条件的序列有2^{n-1}个。且$f(1)=3$，故

$$\begin{cases} f(n)=2f(n-1)+2^{n-1} \quad (n\geq 2), \\ f(1)=3. \end{cases}$$

3. 对$f(n)$，若首位不为 0，则满足条件的序列有$3f(n-1)$；

若首位为 0，则在剩下的$n-1$位中任取一位为 0，剩下的$n-2$位中有偶数个 0 的序列有$f(n-2)$，共有$(n-1)f(n-2)$。则

$$\begin{cases} f(n)=3f(n-1)+(n-1)f(n-2) \quad (n\geq 3), \\ f(1)=3, \quad f(2)=10. \end{cases}$$

同理，对$g(n)$，若首位为 0 或 1，则满足条件的序列有$(n-1)g(n-2)$；

若首位为 2 或 3，则满足条件的序列有$g(n-1)$。则

$$\begin{cases} g(n)=2f(n-1)+2(n-1)f(n-2) \quad (n\geq 3), \\ g(1)=2, \quad g(2)=4. \end{cases}$$

5. 最后三位是“010”的 n 位 0，1 序列共有2^{n-3}个，包含以下情况：

$f(n)$，表示在第 n 位第一次出现“010”的序列数；

$f(n-2)$，表示在第$n-4$位到第$n-2$位第一次出现“010”的序列数；

$f(n-3)$，表示在第$n-5$位到第$n-3$位第一次出现“010”的序列数；

$2f(n-4)$，表示在第$n-6$位到第$n-4$位第一次出现“010”的序列数，因为第$n-3$位可取 0 或 1；

当$3\leq i\leq n-3$时，$2^{i-3}f(n-i)$，表示在第$n-i-2$位到第$n-i$位第一次出现“010”的序列数，因为中间第$i-3$位都可取 0 或 1。所以

$$\begin{cases} f(n)=2^{n-3}-f(n-2)-f(n-3)-2f(n-4)-\cdots-2^{n-6}f(3) \quad (n\geq 6), \\ f(3)=1, \quad f(4)=2 \quad f(5)=3. \end{cases}$$

6. (1)特征方程为$x^3-x^2-9x+9=0$，特征根为$x_1=1, x_2=3, x_3=-3$。所以，通解为

$$f(n)=c_1 1^n+c_2 3^n+c_3(-3)^n.$$

代入初值，得

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1+9c_2-9c_3=1, \\ c_1+9c_2+9c_3=2. \end{cases}$$

解得

$$c_1=-\frac{1}{4}, c_2=\frac{1}{3}, c_3=-\frac{1}{12}.$$

所以

$$f(n)=3^{n-1}-\frac{1}{12}(-3)^n-\frac{1}{4}.$$

(2)特征方程为$x^3-3x^2+2=0$，特征根为$x_1=x_2=1, x_3=-2$。所以，通解为

$$f(n)=(c_1+c_2n)1^n+c_3(-2)^n.$$

代入初值，得

$$\begin{cases}c_1+c_3=1,\\ c_1+c_2-2c_3=0,\\ c_1+2c_2+4c_3=0.\end{cases}$$

解得

$$c_1=\frac{8}{9}, c_2=-\frac{2}{3}, c_3=\frac{1}{9}.$$

所以

$$f(n)=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}(-2)^n.$$

(3)特征方程为$x^2-4x+3=0$，特征根为$x_1=1, x_2=3$。因为 3 是特征方程的一重根，所以该递推关系的非齐次特解为$an3^n$。代入递推关系得

$$a=\frac{3}{2}.$$

而相应齐次递推关系的通解为$c_1 1^n+c_2 3^n$。所以非齐次递推关系的通解为

$$f(n)=c_1 1^n+c_2 3^n+\frac{3}{2}n3^n.$$

代入初值解得

$$c_1=\frac{11}{4}, c_2=-\frac{7}{4}.$$

所以

$$f(n)=\frac{11}{4}-\frac{7}{4}3^n+\frac{3}{2}n3^n.$$

7. 令

$$f(n)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot h(n)=\frac{h(n)}{n}\quad(n\geq 1).$$

则$h(n)$的递推关系为

$$h(n)+h(n-1)=2^n\quad(n\geq 1).$$

因为 2 不是特征方程的根，所以该递推关系的非齐次特解为$a2^n$。代入递推关系得

$$a=\frac{2}{3}.$$

相应齐次递推关系的通解为$b(-1)^n$，所以非齐次递推关系的通解为

$$h(n)=b(-1)^n+\frac{2}{3}2^n.$$

由题意可得$f(1)=2$，则$h(1)=2$，代入上式得

$$b=-\frac{2}{3}.$$

所以

$$h(n)=-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}2^n.$$

所以

$$\begin{cases} f(n)=-\dfrac{2}{3n}(-1)^n+\dfrac{2}{3n}2^n \quad (n\geq 1), \\ f(0)=0. \end{cases}$$

8. (1)$f(n)=(n+2)f(n-1)$

$$\begin{aligned} &=(n+2)(n+1)f(n-2) \\ &=\cdots \\ &=(n+2)(n+1)\cdots(1+2)f(0) \\ &=\frac{(n+2)!}{2}. \end{aligned}$$

而$f(0)=1$也满足上式，所以

$$f(n)=\frac{(n+2)!}{2}.$$

(2) $f(n)=f(n-1)+\frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned} &=f(n-1)+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \\ &=f(n-2)+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1} \\ &=\cdots \\ &=f(0)+\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} \\ &=2-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

而$f(0)=1$也满足上式，所以

$$f(n)=2-\frac{1}{n+1}.$$

11. 若第一格着红色，则第二格只能着白色或蓝色，剩下$n-2$格着色方案数为$f(n-2)$；若第一格着白色或蓝色，剩下$n-1$格着色方案数为$f(n-1)$。则

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+2f(n-2) \quad (n\geq 3), \\ f(1)=3, \quad f(2)=10. \end{cases}$$

特征方程为$x^2-2x-2=0$，特征根为$x_1=1+\sqrt{3}, x_2=1-\sqrt{3}$。解得

$$f(n)=\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

13. (1)若 n 在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 1，2，⋯，$n-2$中选，方案数为$f(n-2,k-1)$；若 n 不在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 1，2，⋯，$n-1$中选，方案数为$f(n-1,k)$。综上所述，$f(n,k)$满足的递推关系为

$$f(n)=f(n-1,k)+f(n-2,k-1).$$

(2)对$n\geq 1$，$f(n,1)=n=\binom{n+1-1}{1}$；

对$n\geq 2$，$f(n,n)=n=\binom{n+1-n}{n}$。

假设对于$i\leq j\leq n$，$f(j,i)=\binom{j+1-i}{i}$成立，则

$$\begin{aligned}f(n+1,k)&=f(n,k)+f(n-1,k-1)\\&=\binom{n+1-k}{k}+\binom{n-1+1-(k-1)}{k-1}\\&=\binom{(n+1)+1-k}{k}.\end{aligned}$$

所以

$$f(n,k)=\binom{n+1-k}{k}.$$

(3) 若 n 在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 2，3，⋯，$n-2$中选，方案数为$f(n-3,k-1)$；若 n 不在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 1，2，⋯，$n-1$中选，方案数为$f(n-1,k)$。则

$$\begin{aligned}g(n)&=f(n-1,k)+f(n-3,k-1)\\&=\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}.\end{aligned}$$

14. (2)令

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n.$$

则

$$A(x)-f(0)-f(1)x-f(2)x^2=\sum_{n=3}^{\infty}f(n)x^n$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\big(f(n-1)+9f(n-2)-9f(n-3)\big)x^n$$

$$= x\sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n + 9x^2\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n - 9x^3\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

$$= x(A(x) - f(0) - f(1)x) + 9x^2\big(A(x) - f(0)\big) - 9x^3A(x).$$

代入初值得

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x + x^2}{1 - x - 9x^2 + 9x^3} \\ &= \frac{1}{3(1-3x)} - \frac{1}{12(1+3x)} - \frac{1}{4(1-x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot 3^n - \frac{1}{12}\cdot(-3)^n - \frac{1}{4}\right)x^n. \end{aligned}$$

所以

$$f(n) = 3^{n-1} + \frac{1}{4}(-3)^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

15. 用归纳法证明，表达式$\sum_{j=1}^{k} d_j\binom{n+j-1}{j-1}$可唯一地表示成一个$k-1$次多项式。

当$k=1$时，$\sum_{j=1}^{k} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = d_1 = d_1n^0$，满足条件。

当$k>1$时，假设结论成立，即存在唯一的一组常数$b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$，使得

$$\sum_{j=1}^{k} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} b_jn^j.$$

则

$$\sum_{j=1}^{k+1} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} b_jn^j + d_{k+1}\binom{n+k}{k}.$$

而

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!}.$$

可唯一地表示成$\sum_{j=0}^{k} c_jn^j$，所以

$$\sum_{j=1}^{k+1} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} b_jn^j + d_{k+1}\sum_{j=0}^{k} c_jn^j = \sum_{j=0}^{k} a_jn^j.$$

其中$a_j = b_j + d_{k+1}c_j$，得证。

4. 设不同的配对方法数为$f(n)$，将这 $2n$ 个点分别用$1,2,\cdots,2n$标记。取点 1，再任取一偶数点 $2k$，连接点 1 与点 $2k$，则该弦将圆分成两部分K_1和K_2。对K_1，有$k-1$对点，故不同的配对方法数为$f(k-1)$；对K_2，有$n-k$对点，故不同的配对方法数为$f(n-k)$。则

$$\begin{cases} f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k) \ (n \geq 1), \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

令$g(n) = f(n-1)$，则

$$g(n+1) = f(n) = \sum_{k=1}^{n} g(k)g(n-k+1) = h(n+1) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

即不同的配对方法数为第$n+1$个 Catalan 数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

5. 设不同的出栈方式有$f(n)$种，这 n 个字符分别为$a_1, a_2, \cdots, a_n$，从栈顶到栈底的位置分别为$1,2,\cdots,n$。

(1)若a_1在位置 1，则不同的出栈方式为$f(n-1)$；

(2)若a_1在位置 2，则不同的出栈方式为$f(1)f(n-2)$；

⋮

(n) 若a_1在位置 n，则不同的出栈方式为$f(n-1)$。

则

$$f(n) = f(n-1) + f(1)f(n-2) + \cdots + f(n-1).$$

令$f(0) = 1$，则

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k) \ (n \geq 1).$$

由习题 4 知

$$f(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

即不同的出栈方式为第$n+1$个 Catalan 数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

10. 对于每个球都有m种放法，故共有m^n种方法，为等式右边。若有$k(k=1,2,\cdots,m)$个非空盒，将 n 个球先分成 k 类，有$S(n,k)$种分法，再将 n 个球放入盒子，有$\binom{m}{k}S(n,k)k!$种放法，故共有$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}S(n,k)k!$种放法，为等式左边。所以原等式成立。

15. 5 人坐前排，有$P(8,5)$种坐法；4 人坐后排，有$P(8,4)$种坐法；剩下的 5 个人坐剩下的 7 个座位，有$P(7,5)$种坐法，故共有$P(8,5)\cdot P(8,4)\cdot P(7,5)$种坐法。

17. 设这种数串的个数为$f(n)$，则$f(1)=2, f(2)=4$。

当$n\geq 3$时，将满足条件的数串分为两类：

(1)最后两位数字相同，这种长度为 n 的数串可以由长度为$n-1$的数串重复最后一位得到，有$f(n-1)$个；

(2)最后两位数字不同，这种长度为 n 的数串可以由长度为$n-2$的数串重复最后一位（设该位为 a），再加上一个与 a 不同的数字得到，有$f(n-2)$个。

可以得到递推关系

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+f(n-2) \quad (n\geq 2), \\ f(1)=2, f(2)=4. \end{cases}$$

通解为

$$f(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

代入初值得

$$c_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}, c_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

所以满足条件长度为 n 的数串的个数为

$$f(n)=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

1. $(123)(234)(5)(14)(23) = (12)(34)(5)$.

S_5中型为$1^1 2^2$的置换共有$\frac{5!}{1!2!1^1 2^2} = 15$，分别为

$$\begin{array}{lll}(12)(34)(5), & (13)(24)(5), & (14)(23)(5), \\ (12)(35)(4), & (13)(25)(4), & (15)(23)(4), \\ (12)(45)(3), & (14)(25)(3), & (15)(24)(3), \\ (13)(45)(2), & (14)(35)(2), & (15)(34)(2), \\ (23)(45)(1), & (24)(35)(1), & (25)(34)(1).\end{array}$$

2. (i)不旋转，对应于恒等变换$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix}$，确定出$1^4$型的置换 1 个；

(ii)以顶点和相对面中心的连线为轴旋转，可旋转 120°和 240°，确定出$1^1 3^1$型的置换 8 个；

(iii)以相对棱中点的连线为轴旋转，可旋转 180°，确定出2^2型的置换 3 个。综上所述，上述 12 个置换构成所求置换群。

3. 令$R = \{0,1\}$，对于 D 的子集 A，定义映射$f_A: D \to R$，其中

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

则 A 与 B 是 G 等价的等同于$f_A(x)$与$f_B(x)$是 G 等价的，则问题转化为求在$F = \{f | f_A: D \to R\}$上的等价类个数。由 Pólya 计数定理得等价类的个数为

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma\text{是}1^{b_1} 2^{b_2} \cdots n^{b_n}\text{型的}}} 2^{b_1 + b_2 + \cdots b_n}.$$

5. 0，1，6，8，9 这五个数字有如下的置换关系：
对于置换群$G = \{\sigma, \tau\}$，不相等的 n 位数的个数即为置换群 G 的等价类个数。其中σ为恒等置换，型为1^n，则$c_1(\sigma) = 5^n$；

对于τ，可以分成两种情况：

(i)当 n 为奇数时，型为$1^1 2^{\frac{n-1}{2}}$，其中正中间的数字必须为 0，1 或 8，才能保证调转后的数与原来相同，则$c_1(\tau) = 3 \cdot 5^{\frac{n-1}{2}}$。

(ii)当 n 为偶数时，型为$2^{\frac{n}{2}}$，$c_1(\tau) = 5^{\frac{n}{2}}$。

所以不相等的 n 位数，即 G 的等价类个数为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^n + 3 \cdot 5^{\frac{n-1}{2}}\right), & n\text{为奇数} \\ \frac{1}{2}\left(5^n + 5^{\frac{n}{2}}\right), & n\text{为偶数} \end{cases}$$

10. $g=(34)\left(或(142)\right)$。

11. $i=1$，$Z_1=\{\sigma_I,(23),(24),(34),(234),(243)\}$；
$i=2$，$Z_2=\{\sigma_I,(13),(14),(34),(134),(143)\}$；
$i=3$，$Z_3=\{\sigma_I,(12),(14),(24),(124),(142)\}$；
$i=4$，$Z_4=\{\sigma_I,(12),(13),(23),(123),(132)\}$。

12. (1)置换群$G=\{\sigma_I,(1234),(13)(24),(1432)\}$，模式表为

$$\frac{1}{16}\left((r+b)^4+(r^2+b^2)^2+2(r^4+b^4)\right).$$

(2)对$w_1=b^4$，$F_1=\{f_{16}\}$，所以$\tilde{G}=\left\{\pi_1^{(1)}\right\}$，其中$\pi_1^{(1)}(f_i)=f_1(1\le i\le 16)$。

对$w_2=r^2b^2$，$F_2=\{f_6,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11}\}$，所以

$$\begin{aligned}\tilde{G}&=\left\{\sigma^{0^{(2)}},\sigma^{1^{(2)}},\sigma^{2^{(2)}},\sigma^{3^{(2)}}\right\}\\&=\{\sigma_I,(f_6f_7f_8f_9)(f_{10}f_{11}),(f_6f_8)(f_7f_9)(f_{10}f_{11}),(f_6f_9f_8f_7)(f_{10}f_{11})\}.\end{aligned}$$

15. 设$D=\{1,2,\cdots,r\}$为圆的 r 个位置，$R=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，G 为旋转的置换群，σ表示绕圆心旋转$\frac{360}{r}$度的置换，则$G=\{\sigma^0,\sigma^1,\cdots,\sigma^r\}$。

分类讨论$\sigma^i(1\le i\le r)$的型：

(i)i 与 r 互素，型为r^1，与 r 互素的 i 的个数有$\varphi(r)$，其中$\varphi(n)$为欧拉函数；

(ii) i 与 r 有最大的因子$d(d\ge 2)$，则型为$\left(\frac{r}{d}\right)^d$，对于给定的 d，与 r 互素的 i 的个数有$\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$。

由 Pólya 计数定理得多重集合的 r 圆排列数为

$$\frac{1}{r+1}\left(n^r+\varphi(r)n+\sum_{\substack{d|r\\d\ge 2}}\varphi\left(\frac{r}{d}\right)n^d\right)=\frac{1}{r+1}\left(n^r+\sum_{\substack{d|r\\d\ge 1}}\varphi\left(\frac{r}{d}\right)n^d\right).$$

19. (1) $G=\{\sigma_I,(18)(27)(36)(45)\}$.

(2)轮换指标为

$$P_G(x_1,x_2,\cdots,x_8)=\frac{1}{2}(x_1^8+x_2^4).$$

设 m 种颜色的权分别为$w_1,w_2,\cdots,w_m$，则全部的模式表为

$$\frac{1}{2}((w_1+w_2+\cdots+w_m)^8+(w_1^2+w_2^2+\cdots+w_m^2)^4).$$

则每尺着不同颜色的方案数为上式展开式中指数均为 1 的项的系数，为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8!}{1!\,1!\cdots 1!}=\frac{8!}{2}.$$

(3)设蓝色、红色和绿色的权分别为w_1, w_2, w_3，则所求方案数为展开式中$w_1^3w_2^3w_3^2$项的系数，为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8!}{3!\,3!\,2!}=280.$$

(4) 设黄色的权分别为w_4，则所求方案数为展开式中$w_1^3w_2w_3^2w_4^2$项的系数，为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8!}{3!\,1!\,2!\,2!}=840.$$

1. 当$k=2$时，

$$\mathcal{B}_2=\{\underbrace{\{s_1,s_2\},\cdots,\{s_1,s_2\}}_{t个},\underbrace{\{s_1,s_2\},\cdots,\{s_1,s_2\}}_{t个},\cdots\underbrace{\{s_1,s_v\},\cdots,\{s_1,s_v\}}_{t个},$$

$$\underbrace{\{s_2,s_3\},\cdots,\{s_2,s_3\}}_{t个},\cdots,\underbrace{\{s_2,s_v\},\cdots,\{s_2,s_v\}}_{t个},$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\{s_{v-1},s_v\},\cdots,\{s_{v-1},s_v\}}_{t个}\}$$

所以$b=\frac{v(v-1)}{2}t$，$v=v$，$r=vt$，$\lambda=t$。

当$k=v-2$时，

$$\mathcal{B}_{v-2}=$$

$$\{\underbrace{S-\{s_1,s_2\},\cdots,S-\{s_1,s_2\}}_{t个},\underbrace{S-\{s_1,s_2\},\cdots,S-\{s_1,s_2\}}_{t个},\cdots\underbrace{S-\{s_1,s_v\},\cdots,S-\{s_1,s_v\}}_{t个},$$

$$\underbrace{S-\{s_2,s_3\},\cdots,S-\{s_2,s_3\}}_{t个},\cdots,\underbrace{S-\{s_2,s_v\},\cdots,S-\{s_2,s_v\}}_{t个},$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{S-\{s_{v-1},s_v\},\cdots,S-\{s_{v-1},s_v\}}_{t个}\}$$

所以$b=\frac{v(v-1)}{2}t$，$v=v$，$r=\frac{(v-1)(v-2)}{2}t$，$\lambda=\frac{(v-2)(v-3)}{2}t$。

10. (3)　(12,9,4,3,1)-BIBD。

11. $A=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix},A^T=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$.

$$AA^T=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{bmatrix}.$$