第一节　单因素试验的方差分析

一、单因素试验

二、平方和的分解

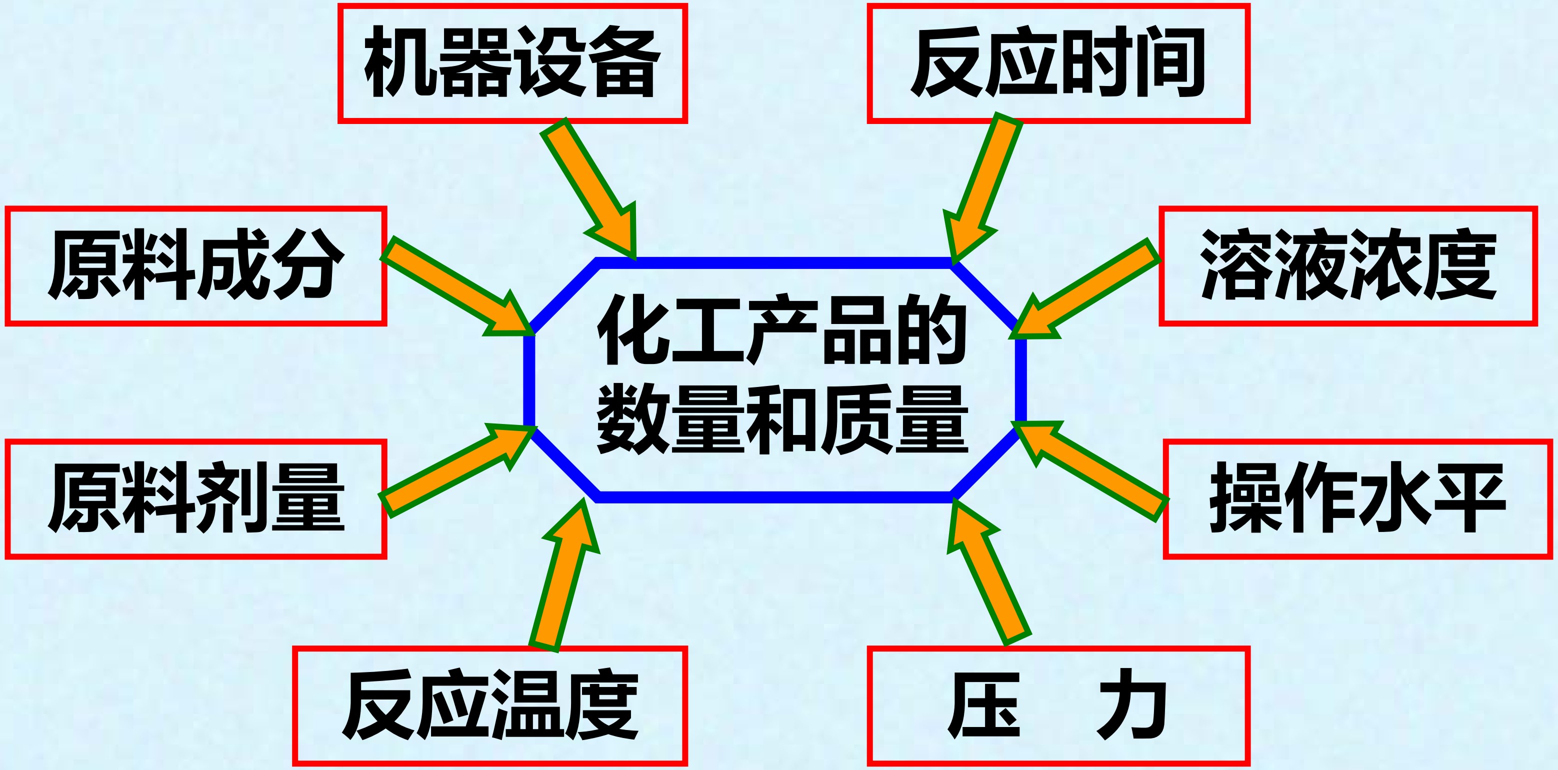
三、S_A, S_E的统计特性

四、假设检验问题的拒绝域

五、未知参数的估计

六、小结

一、单因素试验



方差分析——根据试验的结果进行分析,鉴别各个有关因素对试验结果影响的有效方法.

试验指标——试验中要考察的指标.

因素——影响试验指标的条件.

因素　　可控因素　　不可控因素

水平——因素所处的状态.

单因素试验 ——在一项试验中只有一个因素改变.

多因素试验 ——在一项试验中有多个因素在改变.

例1 设有三台机器，用来生产规格相同的铝合金薄板. 取样， 测量薄板的厚度精确至千分之一厘米. 得结果如下表所示.

表9.1 铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

试验指标: 薄板的厚度　　因素: 机器

水平:不同的三台机器是因素的三个不同的水平.
假定除机器这一因素外, 其他条件相同,
属于单因素试验.

试验目的: 考察各台机器所生产的薄板的厚度有无显著的差异. 即考察机器这一因素对厚度有无显著的影响.

结论: 如果厚度有显著差异,
表明机器这一因素对厚度的影响是显著的.

例2 下表列出了随机选取的、用于计算器的四种类型的电路的响应时间（以毫秒计）

表9.2 电路的响应时间

类型I	类型II	类型Ⅲ	机器IV
19 15	20 40	16 17	18
22	21	15	22
20	33	18	19
18	27	26	

试验指标: 电路的响应时间

因素: 电路类型

水平: 四种电路类型为因素的四个不同的水平

单因素试验

试验目的:

考察电路类型这一因素对响应时间有无显著的影响.

例3 一火箭用四种燃料，三种推进器作射程试验．每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭两次，射程如下．

表9.3 火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
	A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
	A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
	A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

试验指标: 射程

因素: 推进器和燃料

水平 :推进器有3个， 燃料有4个

双因素试验

试验目的:

考察推进器和燃料两因素对射程有无显著的影响.

本节仅考虑单因素情况。

关于例1的讨论

设总体均值分别为μ_1, μ_2, μ_3.

检验假设 H_0： $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$,

H_1： μ_1, μ_2, μ_3不全相等.

进一步假设各总体均为正态变量，且各总体的方差相等，但参数均未知.

问题 **检验同方差的多个正态总体均值是否相等.**

解决方法 **方差分析法(一种统计方法)**

该方法由英国统计学家Fisher所创，早先用于生物学和农业试验。

数学模型

设因素A有s个水平$A_1, A_2, \cdots, A_s$, 在水平$A_j(j=1,2,\cdots,s)$下,进行$n_j(n_j \geq 2)$次独立试验, 得到如下表的结果 .

表9.4

观察结果 \ 水平	A_1	A_2	$\cdots$	A_s
	X_{11} X_{21} $\vdots$ $X_{n_1 1}$	X_{12} X_{22} $\vdots$ $X_{n_2 2}$	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	X_{1s} X_{2s} $\vdots$ $X_{n_s s}$
样本总和	$T_{\bullet 1}$	$T_{\bullet 2}$	$\cdots$	$T_{\bullet s}$
样本均值	$\overline{X}_{\bullet 1}$	$\overline{X}_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\overline{X}_{\bullet s}$
总体均值	μ_1	μ_2	$\cdots$	μ_s

假设

1.各个水平$A_j(j=1,2,\cdots,s)$下的样本 $X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{n_j j}$ 来自具有相同方差σ^2,均值分别为$\mu_j(j=1,2,\cdots,s)$的正态总体$N(\mu_j,\sigma^2)$，μ_j与σ^2均未知；

2.不同水平A_j下的样本之间相互独立 .

即 $X_{ij} \sim N(\mu_j,\sigma^2)$, **且相互独立。**

因为$X_{ij}\sim N(\mu_j,\sigma^2)$，所以$X_{ij}-\mu_j\sim N(0,\sigma^2)$.

记$X_{ij}-\mu_j=\varepsilon_{ij}$表示随机误差，

那么X_{ij}可写成

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2),\text{ 各 }\varepsilon_{ij}\text{ 独立}, \\ i=1,2,\cdots,n_j,\ j=1,2,\cdots,s, \\ \mu_j\text{ 与 }\sigma^2\text{ 均未知}. \end{array}\right\}$$

单因素试验方差分析的数学模型

需要解决的问题

1.检验假设 H_0： $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s$,

H_1： $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$不全相等.

2.估计未知参数$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s, \sigma^2$.

数学模型的等价形式

记$n=\sum_{j=1}^{s} n_j$， $\boxed{\mu=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} n_j \mu_j.}$ 总平均

水平A_j的效应,表示水平A_j下的总体平均值与总平均的差异.

$$\boxed{\delta_j=\mu_j-\mu,}\ j=1,2,\cdots,s.$$

$$n_1\delta_1+n_2\delta_2+\cdots+n_s\delta_s=0.$$

原数学模型

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2),\ \text{各}\ \varepsilon_{ij}\ \text{独立}, \\ i=1,2,\cdots,n_j,\ j=1,2,\cdots,s, \\ \mu_j\ \text{与}\ \sigma^2\ \text{均未知}. \end{array}\right\}$$

改写为

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij}=\mu+\delta_j+\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2),\ \text{各}\ \varepsilon_{ij}\ \text{独立}, \\ i=1,2,\cdots,n_j,\ j=1,2,\cdots,s, \\ \sum_{j=1}^{s} n_j\delta_j=0. \end{array}\right\}$$

原检验假设 H_0： $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s$,

H_1： $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$不全相等.

等价于检验假设

H_1： $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0$,

H_0： $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零 .

二、平方和的分解

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}$$

数据的总平均

$$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

总偏差平方和（总变差）

$$\overline{X}_{\bullet j}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}$$

水平A_j下的样本平均值

$$\overline{X}_{.j} \sim N(\mu_j, \frac{\sigma^2}{n_j})$$

又因为 $\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} n_j \mu_j$,

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}, X_{ij}$ 相互独立，

所以 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

下面求S_T的分布。首先对其进行平方和分解。

$$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}[(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})+(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})]^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})^2+\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})^2+$$

$$+2\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})$$

其中 $$2\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})$$

$$=2\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})[\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})]$$

$$=2\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})[\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}-n_j\overline{X}_{\bullet j}]$$

$$=0$$

于是S_T可分解为 $S_T=S_E+S_A,$

其中 $$S_E=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})^2$$

$$S_A=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})^2=\sum_{j=1}^{s}n_j(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}n_j\overline{X}_{\bullet j}{}^2-n\overline{X}^2$$

$S_T=S_E+S_A$ 称为平方和分解式.

误差平方和

效应平方和

三、S_E，S_A 的统计特性

$$S_E=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}(X_{i1}-\overline{X}_{\bullet 1})^2+\cdots+\sum_{i=1}^{n_s}(X_{is}-\overline{X}_{\bullet s})^2,$$

$\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})^2$是$N(\mu_j,\sigma^2)$的样本方差的 n_j-1倍,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_j-1).$$

又由于各 X_{ij} 独立，所以由 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(\sum_{j=1}^{s}(n_j - 1)\right),$$

即 $$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-s),$$ 其中 $n = \sum_{j=1}^{s} n_j$.

根据 χ^2 分布的性质可以得到，

S_E 的自由度为 $n-s$； $E(S_E) = (n-s)\sigma^2$.

则 $\frac{S_E}{n-s}$ 是 σ^2 的无偏估计。

$$S_A=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})^2=\sum_{j=1}^{s}[\sqrt{n_j}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})]^2$$

因为 $\sum_{j=1}^{s}\sqrt{n_j}[\sqrt{n_j}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})]=\sum_{j=1}^{s}n_j(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}-n\overline{X}=0$$

所以 S_A 的自由度为 $s-1$.

可证明如下结论： (1) H_0为真时，$\frac{S_A}{\sigma^2}\sim\chi^2(s-1)$.

(2) S_A与S_E独立.

$$E(S_A)=E[\sum_{j=1}^{s}n_j\overline{X}_{\bullet j}^2-n\overline{X}^2]=\sum_{j=1}^{s}n_jE(\overline{X}_{\bullet j}^2)-nE(\overline{X}^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{s}n_j\left[\frac{\sigma^2}{n_j}+(\mu+\delta_j)^2\right]-n\left[\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right]$$

$$=(s-1)\sigma^2+2\mu\sum_{j=1}^{s}n_j\delta_j+n\mu^2+\sum_{j=1}^{s}n_j\delta_j^2-n\mu^2$$

$$=(s-1)\sigma^2+\sum_{j=1}^{s}n_j\delta_j^2 \quad \geq (s-1)\sigma^2$$

四、假设检验问题的拒绝域

检验假设 $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$

$H_1: \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零.

H_0为真时, $E\left(\frac{S_A}{s-1}\right) = \sigma^2,$

H_1为真时, $\sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2 > 0,$

$$E\left(\frac{S_A}{s-1}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{s-1}\sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2 > \sigma^2.$$

不管 H_0 是否为真，$S_E/(n-s)$ 都是 σ^2 的无偏估计.

$$F=\frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}.$$

1. 分子和分母相互独立；

2. 分母 $S_E/(n-s)$ 的数学期望始终是 σ^2;

3. H_0 为真时,分子的期望为 σ^2, H_0 不真时，分子取值有偏大的趋势.

拒绝域的形式为 $F=\dfrac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}\geq k.$

其中 k 由预先给定的显著水平 α 确定.

因为H_0为真时,

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-s), \qquad \frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(s-1),$$

$$\frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} = \frac{S_A/\sigma^2}{(s-1)} \bigg/ \frac{S_E/\sigma^2}{(n-s)} \sim F_\alpha(s-1, n-s).$$

检验假设 $H_0: \ \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$

$H_1: \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零.

拒绝域为 $F = \dfrac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} \geq F_\alpha(s-1, n-s).$

9.5 单因素试验方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	S_A	$s-1$	$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{s-1}$	$F=\bar{S}_A/\bar{S}_E$
误差	S_E	$n-s$	$\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{n-s}$	
总和	S_T	$n-1$		

表中$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{s-1}$和$\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{n-s}$称为$S_A$和$S_E$的均方.

S_T、S_A和S_E的简便计算公式：

记$T_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij},\ j=1,\cdots,s,\quad T_{\bullet\bullet}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij},$

$$\left.\begin{aligned}
S_T &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-n\overline{X}^2=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n},\\
S_A &= \sum_{j=1}^{s}n_j\overline{X}_{\bullet j}^2-n\overline{X}^2=\sum_{j=1}^{s}\frac{T_{\bullet j}^2}{n_j}-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n},\\
S_E &= S_T-S_A.
\end{aligned}\right\}$$

例4 设有三台机器, 用来生产规格相同的铝合金薄板. 取样, 测量薄板的厚度精确至千分之一厘米. 得结果如下表所示.取（$\alpha = 0.05$）：

表9.1 铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$，$H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3$不全相等

解 $s=3,\ n_1=n_2=n_3=5,\ n=15$

$$S_T=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}X_{ij}^2-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{15}$$

$$=0.963912-\frac{3.8^2}{15}=0.00124533,$$

$$S_A=\sum_{j=1}^{3}\frac{T_{\bullet j}^2}{n_j}-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n}$$

$$=\frac{1}{5}(1.21^2+1.28^2+1.31^2)-\frac{3.8^2}{15}=0.00105333,$$

$$S_E=S_T-S_A=0.000192.$$

例4的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素	0.00105333	2	0.00052667	32.92
误差	0.000192	12	0.000016	
总和	0.00124533	14		

$F=32.92>F_{0.05}(2,12)=3.89.$ 在水平0.05下拒绝 H_0

各机器生产的薄板厚度有显著差异.

在*MATLAB*中的求解

函数:*anova1*

格式:*p=anova1(x)*

说明:对样本*X*中的多列数据进行单因素方差分析,比较各列的均值,返回“零假设”成立的概率值,如果概率值接近于零,则零假设值得怀疑,表明各列的均值事实上是不同的.

源程序:
```
x=[0.236,0.238,0.248,0.245,0.243;
   0.257,0.253,0.255,0.254,0.261;
   0.258,0.264,0.259,0.267,0.262];
p=anova1(x')
```

程序运行结果 方差分析表 Box 图检验 帮 助

五、未知参数的估计

不论H_0是否为真，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{S_E}{n-s}$是$\sigma^2$的无偏估计．

$$E(\overline{X})=\mu,\quad E(\overline{X}_{\bullet j})=\mu_j,\ j=1,2,\cdots,s$$

故$\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\mu}_j=\overline{X}_{\bullet j}$分别是$\mu$和$\mu_j$的无偏估计．

若拒绝 H_0，意味着效应δ_1，$\delta_2,\cdots$，δ_s不全为零，

$$\delta_j=\mu_j-\mu,\quad j=1,2,\cdots,s$$

于是$\hat{\delta}_j=\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}$是$\delta_j$的无偏估计.

由于 $\delta_j = \mu_j - \mu$， $j = 1,2,\cdots,s.$

$$\hat{\delta}_j = \overline{X}_{\bullet j} - \overline{X}$$

$$\sum_{j=1}^{s} n_j \hat{\delta}_j = \sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j} - n\overline{X} = 0$$

$$E(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X}_{\bullet k}) = \mu_j - \mu_k,$$

$$D(\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X}_{\bullet k}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}\right),$$

$\overline{X}_{\bullet j} - \overline{X}_{\bullet k}$ 与 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{S_E}{n-s}$ 独立，

于是 $$\frac{(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}_{\bullet k})-(\mu_j-\mu_k)}{\sqrt{\overline{S}_E\left(\dfrac{1}{n_j}+\dfrac{1}{n_k}\right)}}$$

$$=\frac{(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}_{\bullet k})-(\mu_j-\mu_k)}{\sigma\sqrt{1/n_j+1/n_k}}\Bigg/\sqrt{\frac{S_E}{\sigma^2}\Big/(n-s)}\quad\sim t(n-s).$$

均值差 $\mu_j-\mu_k=\delta_j-\delta_k$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}_{\bullet k}\pm t_{\alpha/2}(n-s)\sqrt{\overline{S}_E\left(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k}\right)}\right).$$

例5 求例4中的未知参数 $\sigma^2, \mu_j, \delta_j\ (j=1,2,3)$ 的点估计及均值差的置信水 平为0.95的置信区间 .

解 $\hat{\sigma}^2 = S_E / (n-s) = 0.000016,$

$\hat{\mu}_1 = \bar{x}_{\bullet 1} = 0.242,\qquad \hat{\mu}_2 = \bar{x}_{\bullet 2} = 0.256\,,$

$\hat{\mu}_3 = \bar{x}_{\bullet 3} = 0.262.\qquad \hat{\delta}_1 = \bar{x}_{\bullet 1} - \bar{x} = -0.011,$

$\hat{\mu} = \bar{x} = 0.253,\qquad \hat{\delta}_2 = \bar{x}_{\bullet 2} - \bar{x} = 0.003,$

$\hat{\delta}_3 = \bar{x}_{\bullet 3} - \bar{x} = 0.009.$

因为 $t_{0.025}(n-s) = t_{0.025}(12) = 2.1788,$

$$t_{0.025}(12)\sqrt{\overline{S}_E\left(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k}\right)} = 0.006,$$

所以$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 0.95的置信区间为

$$(0.242-0.256\pm0.006)=(-0.020,-0.008),$$

$\mu_1-\mu_3$ 的置信水平为 0.95的置信区间为

$$(0.242-0.262\pm0.006) = (-0.026,-0.014),$$

$\mu_2-\mu_3$ 的置信水平为 0.95的置信区间为

$$(0.256-0.262\pm0.006)=(-0.012,0).$$

例6 设在例2的四种类型电路的响应时间的总体均为正态，且各总体的方差相同，但参数均未知. 又设各样本相互独立，试取水平 $\alpha = 0.05$ 检验各类型电路的响应时间是否有显著差异.

解 分别以μ_1,μ_2,μ_3,μ_4记类型 **I、II、III、IV** 四种电路响应时间的总 体的平均值 . 检验$(\alpha = 0.05)$

$$H_0: \quad \mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4,$$

$$H_1: \quad \mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4 \text{不全相等}.$$

$$n=18,\quad s=4,\quad n_1=n_2=n_3=5,\quad n_4=3$$

$$S_T=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}^2-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{18}=8992-\frac{386^2}{18}=714.44$$

$$S_A=\sum_{j=1}^{4}\frac{T_{\bullet j}^2}{n_j}-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{18}$$

$$=\left[\frac{1}{5}\left(94^2+141^2-92^2\right)+\frac{59^2}{3}\right]-\frac{386^2}{18}$$

$$=318.98,$$

$$S_E = S_T - S_A = 395.46$$

S_T, S_A, S_E的自由度依次为17,13,14, 结果载于下表

例6的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素	318.98	3	106.33	3.76
误差	395.46	14	28.25	
总和	714.44	17		

$F_{0.05}(3,14) = 3.34 < 3.76$，故在水平0.05下拒绝 H_0，

认为各类型电路的响应时间有显著差异.

在*MATLAB*中求解

```
x=[19,22,20,18,15,20,40,21,33,27,16,17,15,18,26,18,
   22,19];
y=[1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4];
p=anova1(x,y)
```

程序运行结果 方差分析表 Box 图检验 帮 助

六、小结

1. 随机试验: 单因素试验、多因素试验

2. 单因素试验方差分析步骤

(1) 建立数学模型;

(2) 分解平方和;

(3) 研究统计特性;

(4) 进行假设检验;

(5) 估计未知参数.