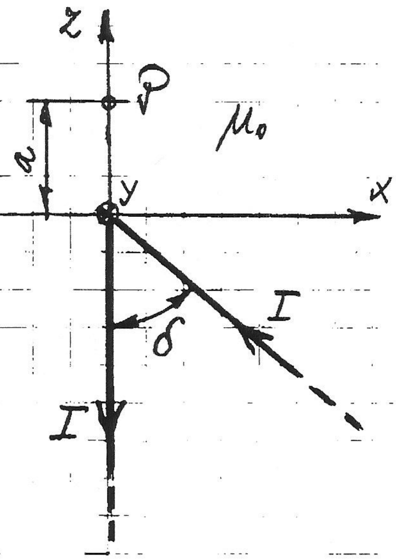
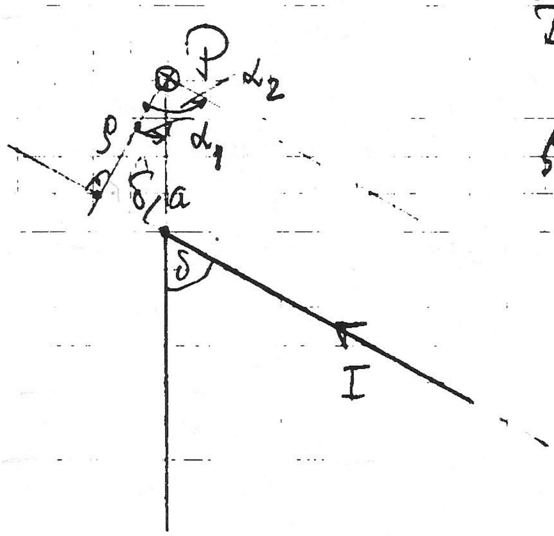
A3



In bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem liegt in der (x,z)-Ebene eine geknickte Linienstromführung. Berechnen Sie allgemein die zugehörige magnetische Flußdichte (Vektor!) im Punkt P.



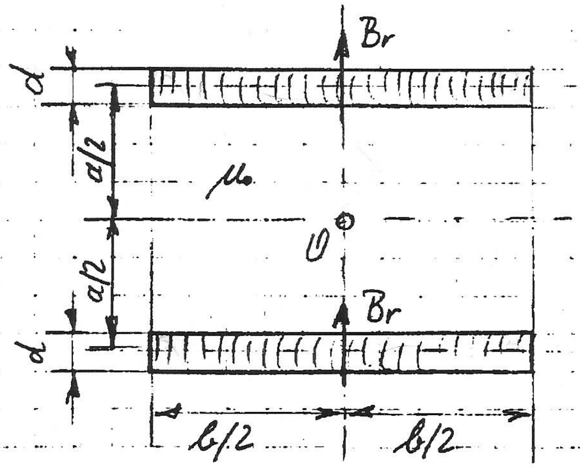
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\right]\vec{e}_B$$

$$\rho = a\sin(\delta)\ , \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \delta,\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\ ,\ \vec{e}_B = \vec{e}_y$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos(\delta),\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

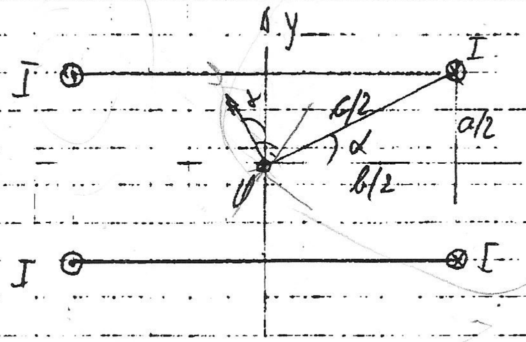
$$\underline{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\underbrace{\frac{1-\cos(\delta)}{\sin(\delta)}}_{\tan(\delta/2)}\vec{e}_y}$$

□



In der skizzierten Anordnung verlaufen zwei starr transversal magnetisierte, dünne Dauermagnetschienen (Remanenzflussdichte B_r, $d \ll b$) senkrecht zur Zeichenebene.
Berechnen Sie die magnetische Flussdichte an der Achse durch O.

Hinweis: Starr transversal magnetisierte Dauermagnetplatten der Remanenzflussdichte B_r und der Dicke d lassen sich in ihrer felderzeugenden Wirkung nach außen bekanntlich näherungsweise durch einen Linienstrom der Stärke $B_r d/\mu_0$ entlang des Umfangs beschreiben.

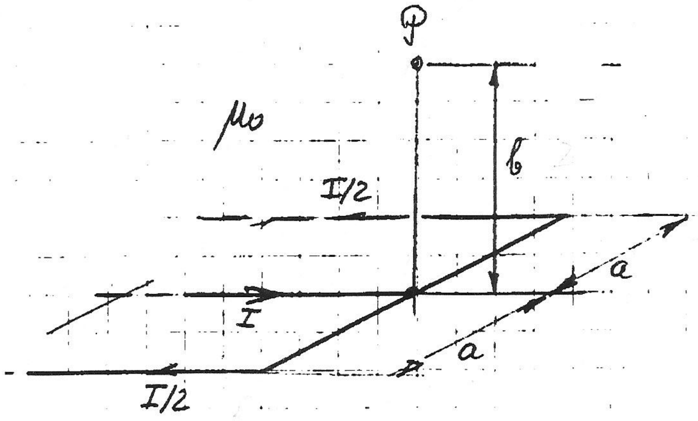


$\vec{B}(O) = B_y \vec{e}_y$, $I = B_r d/\mu_0$,

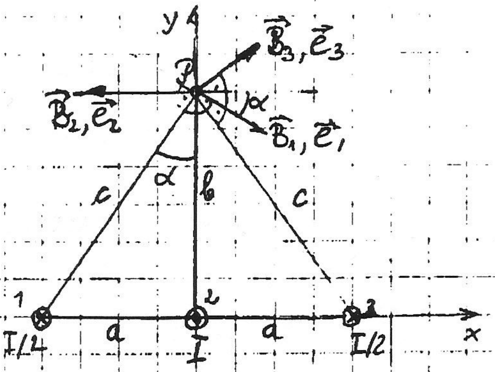
$c = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\alpha) = b/c$

$$B_y = 4\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi c/2}\cos(\alpha) = 4\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\underline{\vec{B}(O) = \frac{4}{\pi}\frac{bd}{a^2+b^2} B_r \vec{e}_y}.$$



Berechnen Sie für eine Abschätzung der Beeinflussung durch niedrigfrequente Magnetfelder die magnetische Flußdichte im Punkt $\boxed{P}$ der skizzierten Anordnung.



Aus der für Geradenstücke spezialisierten Biot-Savart-Formel folgt für die Beiträge der langen Leiterstücke

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I/2}{4\pi c}\vec{e}_1, \quad \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I/2}{4\pi c}\vec{e}_3,$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\vec{e}_2,$$

während sich die Beiträge der kurzen Leiterstücke offensichtlich aufheben. Somit gilt

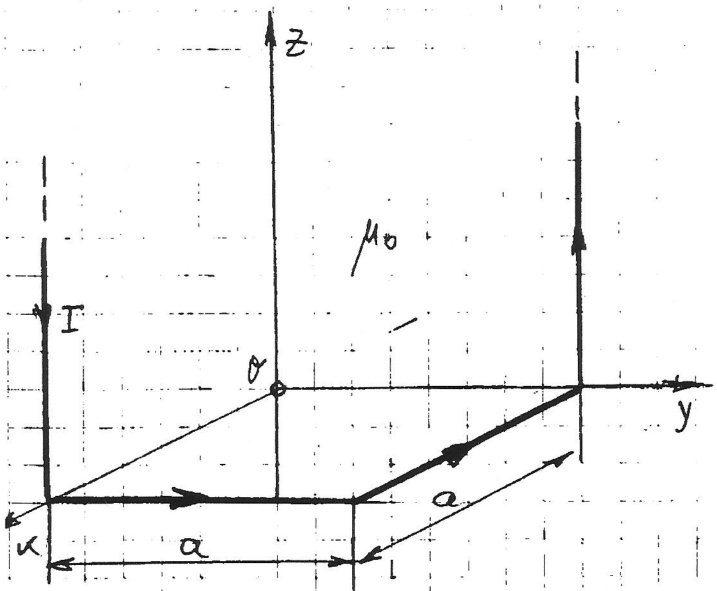
$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{8\pi c}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_3 + \frac{2c}{b}\vec{e}_2\right)$$

und, wegen $\vec{e}_2 = -\vec{e}_x$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = 2\cos(\alpha)\vec{e}_x = \frac{2b}{c}\vec{e}_x$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$

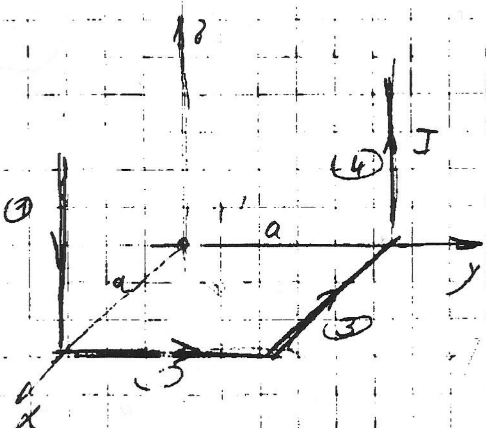
$$\underline{\vec{B}(P)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi c}\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right)\vec{e}_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right)\vec{e}_x = \underline{-\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\frac{a^2}{a^2+b^2}\vec{e}_x}$$

$\square$

G2



Berechnen Sie die zur skizzierten Leiterführung gehörende magnetische Flussdichte im Punkt O nach Betrag und Richtung.



$$\vec{B}_1 = +\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_y \,,\quad \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$$

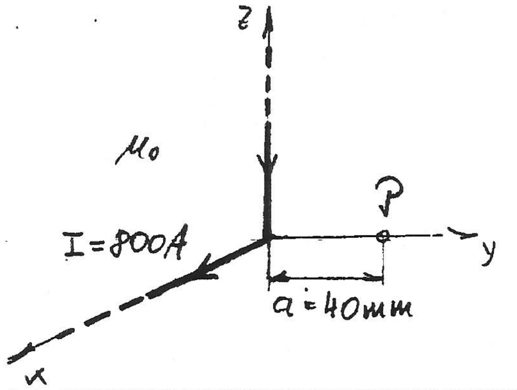
$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \sqrt{2}\,\vec{e}_z\right)$$

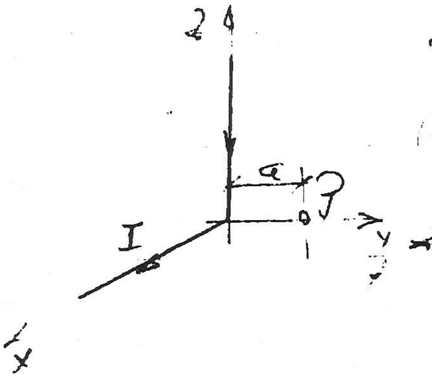
$\underline{\vec{B} = B\,\vec{e}_B}$ mit

$$\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}} \,,\quad \underline{\vec{e}_B = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \sqrt{2}\,\vec{e}_z\right)}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left[\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right]$$



Berechnen Sie für den geknickten Linienleiter die magnetische Flußdichte (Vektor) am Ort P.



Biot-Savart-Formel für polygonale Linienleiter

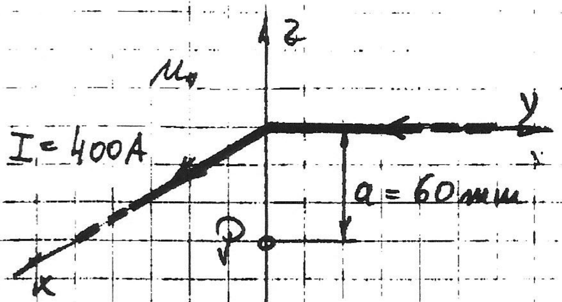
$\Rightarrow$

$$\underline{\vec{B}(P)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\vec{e}_x + \vec{e}_z) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800}{4\pi \cdot 0{,}04}\,T\,(\vec{e}_x$$

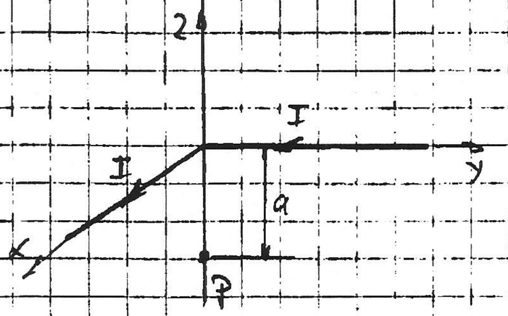
$$= \underline{2\,mT\,(\vec{e}_x + \vec{e}_z)} = \underline{2{,}828\,mT\,\vec{e}_s}$$

mit $\vec{e}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x$

2



Berechnen Sie für den geknickten Linienleiter die magnetische Flußdichte (Vektor!) am Ort P.



Biot-Savart-Formel für polygonale Linienleiter $\Longrightarrow$

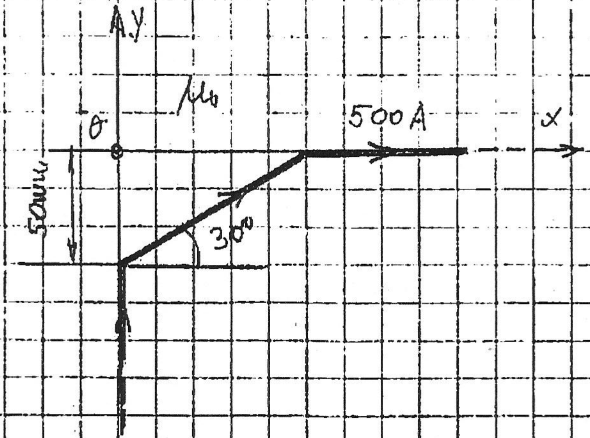
$$\underline{\vec{B}(P)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_x\right)$$

$$= \frac{\cancel{4\pi}\cdot 10^{-7}\cdot 400}{\cancel{4\pi}\cdot 0{,}06}\,T\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$$

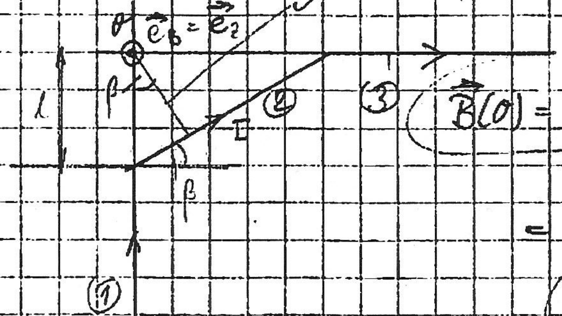
$$= \underline{0{,}667\,mT\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)}$$

$$= \underline{0{,}943\,mT\,\vec{e}_B} \quad \text{mit } \vec{e}_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$$

$\square$



Berechnen Sie die magnetische Flußdichte $\vec{B}(0)$, die der Linienstrom in 0 erzeugt.



$\rho = l\cos(\beta)$, $\alpha_1 = -\beta$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \beta$,

① und ③ liefern keinen Beitrag zu 0

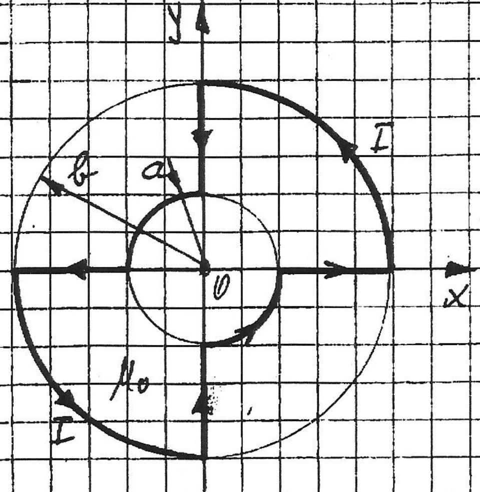
$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi l}\,\frac{\cos(\beta) + \sin(\beta)}{\cos(\beta)}\,\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}\left[1 + \tan(\beta)\right]\vec{e}_z$$

$$= 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot\frac{500A}{0{,}05m}\left[1 + \tan(30^\circ)\right]\vec{e}_z ,$$

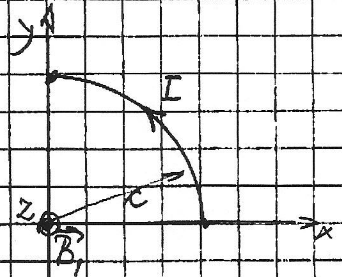
$$\underline{\vec{B}(0) = 1{,}577\ mT\ \vec{e}_z}$$

II



Die Skizze zeigt als Teil einer Stoßmagnetisiereinrichtung eine ebene Linienstromführung. Bestimmen Sie einen Ausdruck für die magnetische Flußdichte $\boxed{\vec{B}(0)}$ im Ursprung.

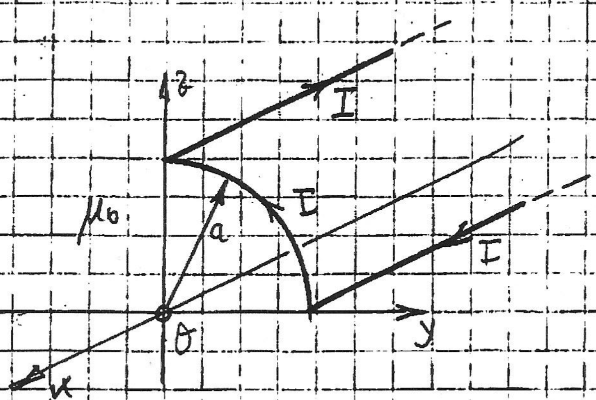
Die radialen Teile tragen nichts zur Flußdichte im Ursprung bei, können daher unberücksichtigt bleiben. Ein Viertelkreisbogen mit dem Radius c erzeugt im Zentrum (folgt direkt aus Biot-Savart-Formel)



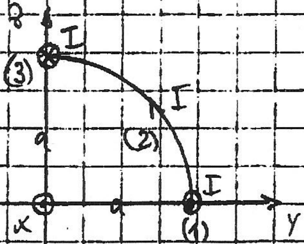
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{8c}\vec{e}_z$$

Zusammen ergibt sich demnach

$$\underline{\vec{B}(0)} = \frac{\mu_0 I}{8}\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right)\vec{e}_z = \underline{\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\vec{e}_z}\,.$$



Berechnen Sie für die skizzierte Linienstromführung allgemein die magnetische Flussdichte (Vektor) im Ursprung 0.



$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_z,$$

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_y$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2a}\,\frac{\overset{\pi/2}{\alpha}}{2\pi}\,\vec{e}_x = \frac{\mu_0 I}{8a}\vec{e}_x;$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{\pi}{2}\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z\right).$$

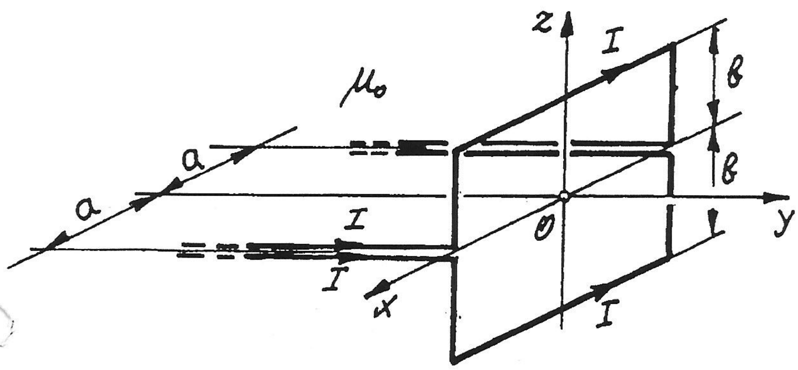
allg $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right]\vec{e}_B$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{8a}\vec{e}_x - \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_y - \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_z$$

Kennzahl	Matrikelnummer	Familienname	Vorname

2

10 X

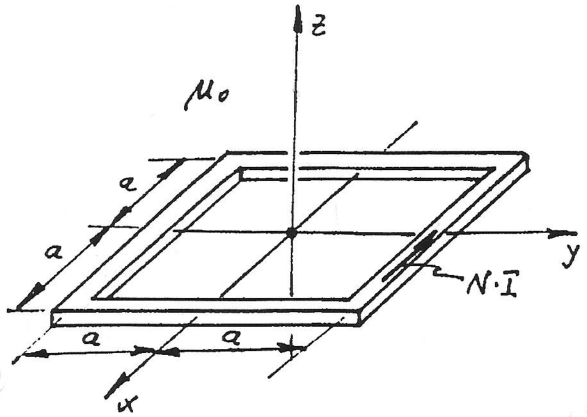


Die Skizze zeigt das Linienstrommodell des Endbereiches eines Magnetsystems. Berechnen Sie die magnetische Flußdichte im Punkt $\mathcal{O}$.

Kennzahl	Matrikelnummer	Familienname	Vorname

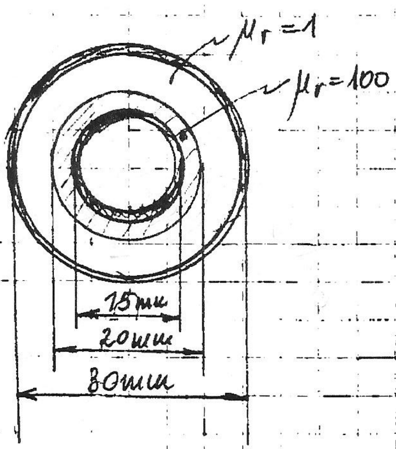
2

11 X



Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}(z)$ entlang der $z-$Achse.

G 2.



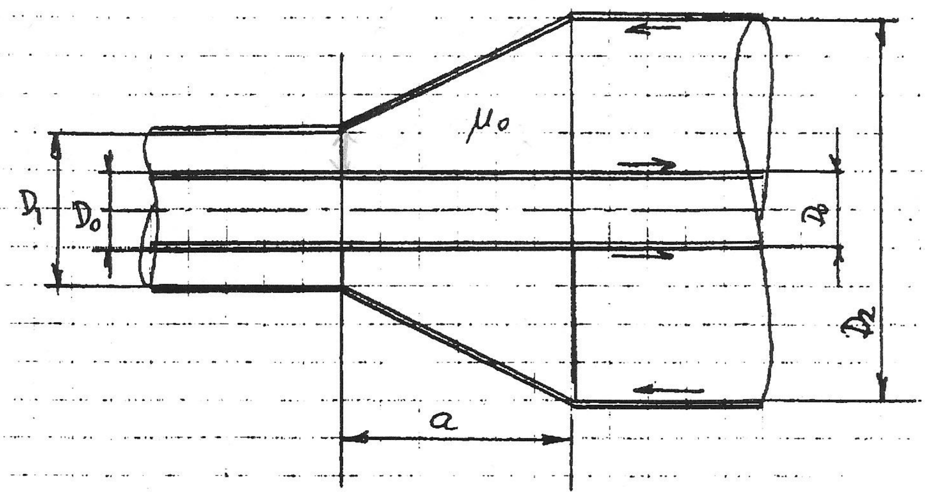
Der rohrförmige Innenleiter eines Koaxialkabels ist mit einer nichtleitenden Schicht erhöhter Permeabilität umgeben. Berechnen Sie den Induktivitätsbelag des Kabels.

$$H_\alpha = \frac{I}{2\pi\varrho} \quad , \quad \phi' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\int_{d_1/2}^{d_2/2} \frac{\mu_r d\varrho}{\varrho} + \int_{d_2/2}^{d_3/2} \frac{d\varrho}{\varrho}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\mu_r \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)\right]$$

$$= L' I$$

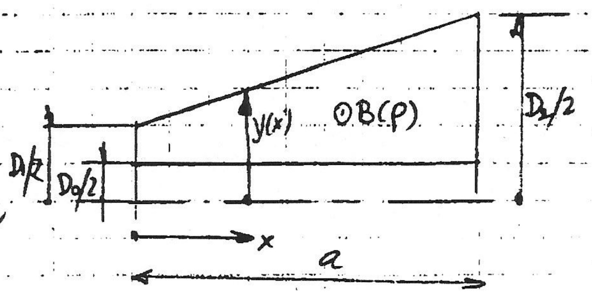
$$\underline{L'} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\mu_r \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)\right] = 2 \cdot 10^{-7}\frac{H}{m}\left[100 \ln\left(\frac{20}{15}\right) + \ln\left(\frac{30}{20}\right)\right] = \underline{5{,}83\,\mu H/m}.$$

$\square$



Zwei Koaxialleitungen mit gleichen Durchmessern $\boxed{D_0}$ der Innenleiter aber unterschiedlichen Durchmessern $\boxed{D_1}$ bzw. $\boxed{D_2}$ der Außenleiter werden über ein konisches Zwischenstück der Länge $\boxed{a}$ miteinander verbunden. Berechnen Sie die Induktivität dieses Zwischenstücks.

Hinweis: $\boxed{\int \ln(u)\,du = u\ln(u) - u + \text{const}}$



$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$\Phi = \int_0^a dx \int_{D_0/2}^{y(x)} B(\rho)\,d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a \ln\left[\frac{2y(x)}{D_0}\right]dx \overset{!}{=} LI$$

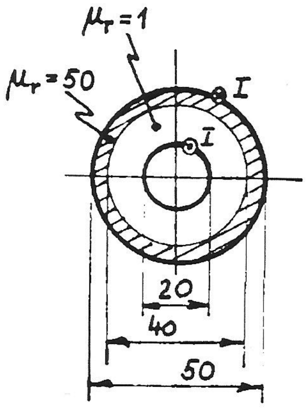
$$y(x) = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2 - D_1}{2a}x$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_0^a \ln\Big[\underbrace{\frac{D_1}{D_0} + \frac{D_2 - D_1}{D_0}\frac{x}{a}}_{u}\Big]dx = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a D_0}{D_2 - D_1}\int_{D_1/D_0}^{D_2/D_0} \ln(u)\,du$$

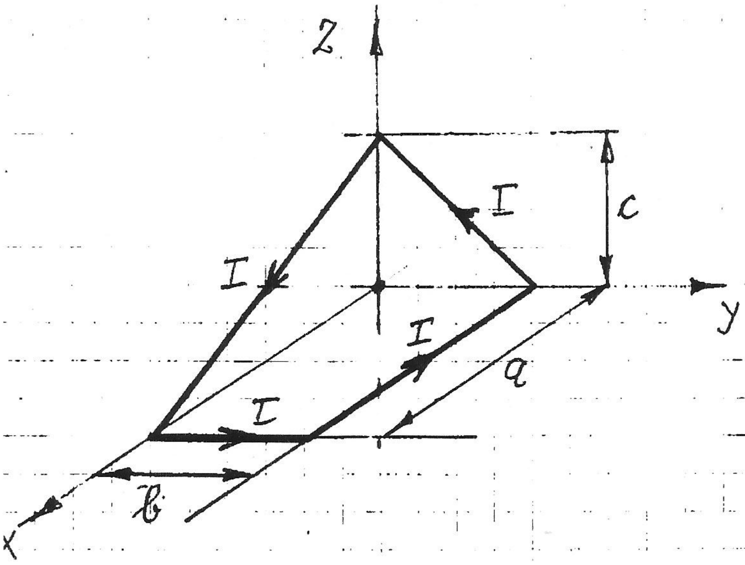
$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a D_0}{D_2 - D_1}\left[\frac{D_2}{D_0}\ln\left(\frac{D_2}{D_0}\right) - \frac{D_1}{D_0}\ln\left(\frac{D_1}{D_0}\right) - \frac{D_2 - D_1}{D_0}\right], \text{ d.h.}$$

$$\underline{L = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left[\frac{D_2\ln(D_2/D_0) - D_1\ln(D_1/D_0)}{D_2 - D_1} - 1\right]}$$

II



Bei dem angegebenen Koaxialkabel (Maße in mm) erfolgt die Hin- und Rückleitung in dünnen Rohren. Dazwischen befinden sich zwei nicht leitfähige Schichten mit den Permeabilitätszahlen 1 bzw. 50. Berechnen Sie den Induktivitätsbelag des Kabels.



Als Ausgangspunkt für eine Beeinflussungsrechnung wird das magnetische Moment $\boxed{\vec{m}}$ der skizzierten Linienstromverteilung benötigt. Berechnen Sie $\boxed{\vec{m}}$, z. B. durch Projektion auf die Koordinatenebenen.

Projektion auf die Koordinatenebenen liefert

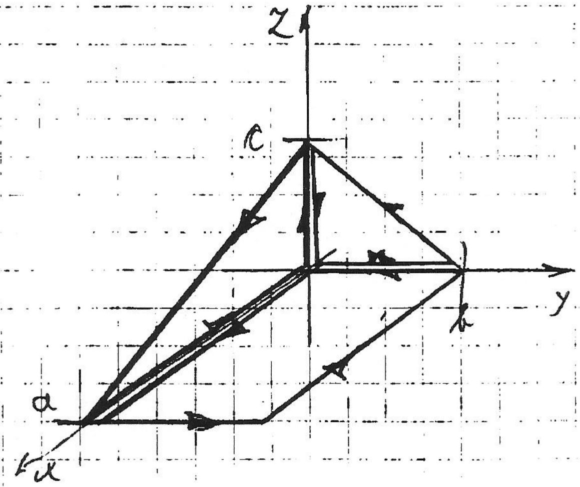
$m_x = \frac{1}{2} bcI$, $m_y = \frac{1}{2} caI$, $m_z = abI$,

also

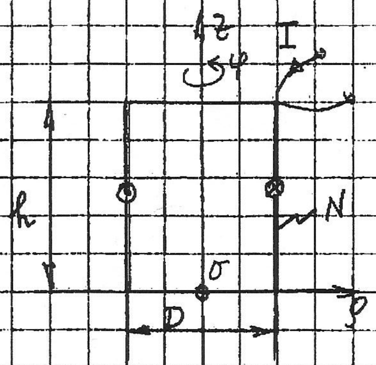
$$\vec{m} = I\left(\tfrac{1}{2} bc\,\vec{e}_x + \tfrac{1}{2} ca\,\vec{e}_y + ab\,\vec{e}_z\right).$$

$\square$

Äquivalent:



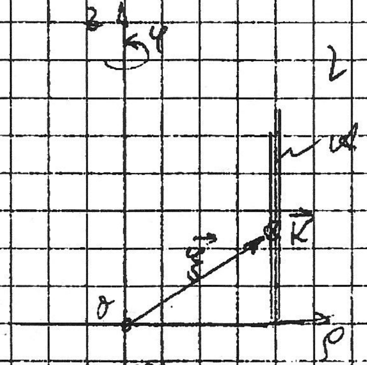
G2



Berechnen Sie das magnetische Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_{V} \vec{\xi} \times \vec{J}\, dV$$

der dünnwandigen Kreiszylinderspule in bezug auf den Ursprung O.



$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_{A} \vec{\xi} \times \vec{K}\, dA, \qquad \vec{\xi} = \frac{D}{2}\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z, \quad 2$$

$$\vec{K} = K\vec{e}_\varphi \text{ mit } K = \frac{NI}{h}$$

$$dA = \frac{D}{2}\, d\varphi\, dz$$

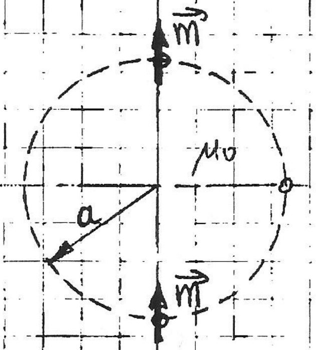
$$\vec{\xi} \times \vec{K} = K\left(\frac{D}{2}\vec{e}_z - z\vec{e}_\rho\right) \quad 2$$

$$\vec{m} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K \left(\frac{D}{2}\vec{e}_z - z\vec{e}_\rho\right) \frac{D}{2}\, d\varphi\, dz = \int_0^h \frac{1}{2} K \frac{D}{2}\vec{e}_z \frac{D}{2} \cdot 2\pi\, dz = K \cdot h \cdot \frac{D^2\pi}{4}\vec{e}_z \quad 2$$

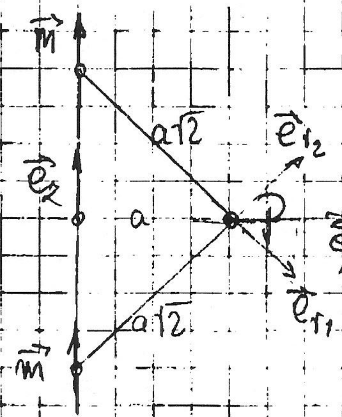
$$\underline{\underline{\vec{m} = NI\,\frac{D^2\pi}{4}\cdot\vec{e}_z}} \quad 2, \quad \text{unabh. vom Bezugspunkt}$$

(wie immer)

□



Im Zuge einer Modelluntersuchung ergibt sich das folgende Problem:
An den beiden Polen einer gedachten Kugel mit dem Radius $\underline{a}$ sitzen axial zwei gleiche magnetische Dipole mit dem Moment $\underline{\vec{m}}$.
Berechnen Sie die zugehörige magnetische Flussdichte am Äquator der Kugel.



Ausgehend von $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{m}_r - \vec{m}}{r^3}$, $\vec{m}_r = (\vec{m}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r$ gilt

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{(a\sqrt{2})^3}\left[3(\vec{m}\cdot\vec{e}_{r_1})\vec{e}_{r_1} - \vec{m} + 3(\vec{m}\cdot\vec{e}_{r_2})\vec{e}_{r_2} - \vec{m}\right]$$

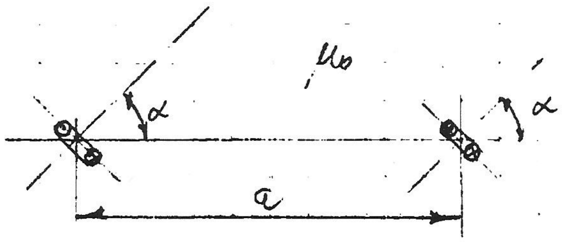
$$\vec{e}_{r_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_z + \vec{e}_\rho),\quad \vec{m}\cdot\vec{e}_{r_1} = -\frac{m}{\sqrt{2}},\quad \vec{m}_{r_1} = \frac{m}{2}(\vec{e}_z - \vec{e}_\rho)$$

$$\vec{e}_{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_z + \vec{e}_\rho),\quad \vec{m}\cdot\vec{e}_{r_2} = \frac{m}{\sqrt{2}},\quad \vec{m}_{r_2} = \frac{m}{2}(\vec{e}_z + \vec{e}_\rho)$$

$$\vec{m}_{r_1} + \vec{m}_{r_2} = \vec{m}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi(a\sqrt{2})^3} = \frac{\mu_0\vec{m}}{8\sqrt{2}\pi a^3}}$$

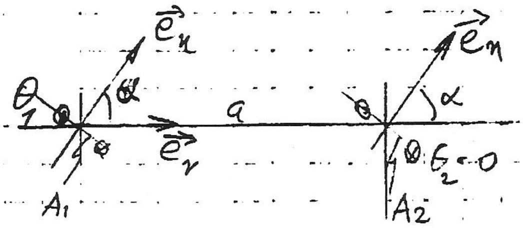
$\square$



Zwei relativ zu ihrem Abstand kleine Spulen sind wie skizziert achsenparallel angeordnet. Zeigen Sie, daß es einen Winkel α gibt, für den die gegenseitige Induktivität der beiden Spulen verschwindet. Bestimmen Sie diesen Winkel. Verwenden Sie dazu die Dipolnäherung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3\vec{m}_r - \vec{m}}{r^3}$$

für die magnetische Flußdichte.



$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3\vec{m}_r - \vec{m}}{a^3}, \qquad \vec{m} = m\vec{e}_n, \quad m = \Theta_1 A_1$$

$$\vec{m}_r = (\vec{m}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r = m(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \Phi_{21} = \vec{B}_2\cdot\vec{e}_n A_2 = \frac{\mu_0 A_2}{4\pi a^3}\underbrace{(3\vec{m}_r - \vec{m})\cdot\vec{e}_n}_{m[3(\vec{e}_r\cdot\vec{e}_n)^2-1]}, \qquad \vec{e}_r\cdot\vec{e}_n = \cos(\alpha)$$

$\Rightarrow \Phi_{21}$ und damit die gegenseitige Induktivität verschwindet für

$$3\cos^2(\alpha) = 1, \quad \text{d.h. für } \alpha = 54{,}7^\circ$$

(und $\alpha = -54{,}7^\circ$, $\alpha = \pm 125{,}3^\circ$) □