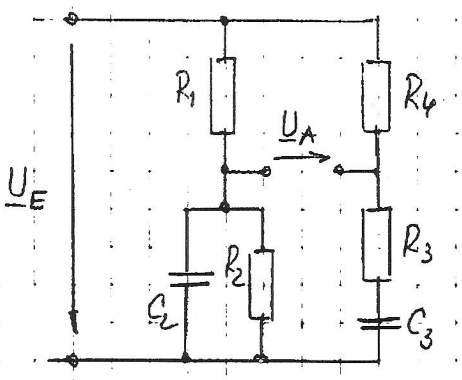
G2



Ermitteln Sie die reellen Abgleichbedingungen für die angegebene Wechselstrombrücke (Maxwell-Wien-Brücke).

Aus der Spannungsteilerregel folgt sofort

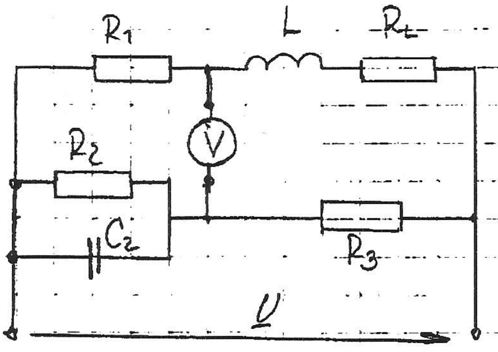
(2) $\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3}$, d.h. $\underline{Y}_2 \cdot \underline{Z}_3 = \frac{R_4}{R_1}$

~~U_A = ...~~

$\underline{Z}_2$ = (2)
$\underline{Z}_3$ = (2)

oder $\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right)\left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right) = \frac{R_3}{R_2} + \frac{C_2}{C_3} + j\left(\omega R_3 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_3}\right) = \frac{R_4}{R_1}$

$\Rightarrow \underline{\frac{R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3} = 1 + \frac{R_2 C_2}{R_3 C_3}}$ (2) , $\underline{\omega^2 R_2 C_2 \cdot R_3 C_3 = 1}$ (2)

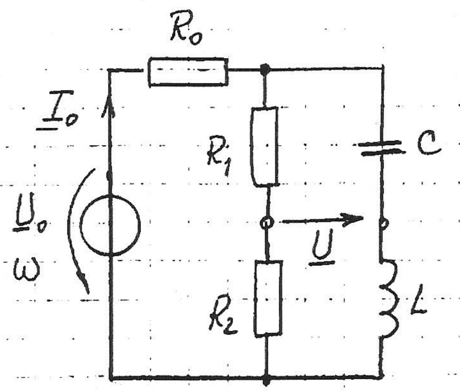


Die skizzierte Wechselstrombrücke dient zur Messung der Ersatzparameter L und R_L einer Spule. Drücken Sie diese Parameter für den abgeglichenen Zustand durch die anderen Bestimmungsgrößen aus.

Aus der Spannungsteilerregel folgt die Abgleichbedingung

$$R_1 R_3 = \frac{R_L + j\omega L}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} \quad , \quad \text{d.h.} \quad R_L + j\omega L = R_1 R_3 \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right)$$

und somit $\underline{R_L = R_1 R_3 / R_2}$, $\underline{L = R_1 R_3 C_2}$. □



Die Skizze zeigt eine Wechselstrombrücke.

(i) Für welchen Wert der Kreisfrequenz ω ist die Brücke abgeglichen?

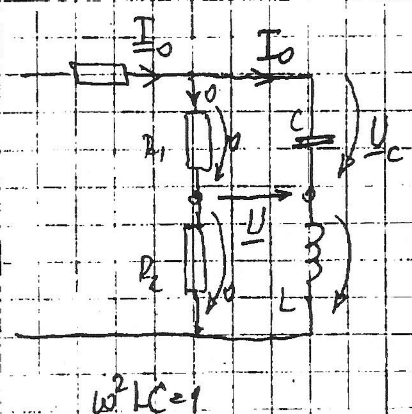
(ii) Die Brücke wird mit der Kreisfrequenz $\boxed{\omega = 1/\sqrt{LC}}$ betrieben. Berechnen Sie dafür allgemein die komplexen Effektivwert $\underline{I}_0$ und $\underline{U}$ des Gesamtstroms bzw. der Spannung am leerlaufenden Querzweig.

(i) Die Abgleichbedingung $R_1 \cdot j\omega L \overset{!}{=} \frac{R_2}{j\omega C}$, d.h. $\omega^2 LC \overset{!}{=} -R_2/R_1$

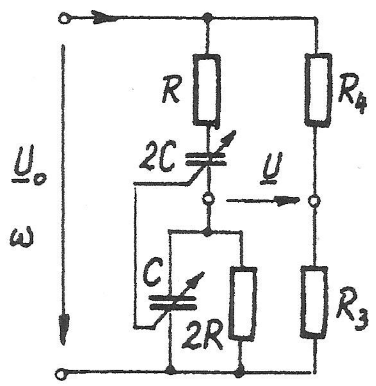
ist für positive Werte R_1, R_2, L, C nicht erfüllbar. Die Brücke ist nicht abgleichbar.

(ii) Für $\omega^2 LC = 1$ verschwindet die Impedanz des LC-Zweiges (Reihenresonanz). Damit gilt

$$\underline{I}_0 = \underline{U}_0/R_0 \qquad \underline{U} = \underline{U}_C = \frac{\underline{I}_0}{j\omega C} = -j\frac{\underline{U}_0}{\omega R_0 C}$$



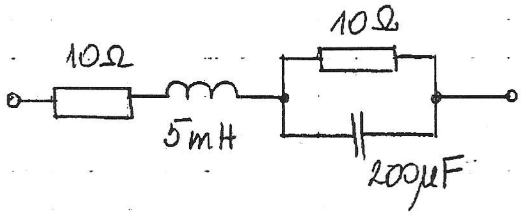
$\omega^2 LC = 1$



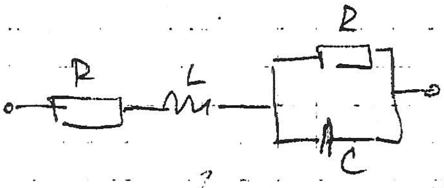
Dargestellt ist eine Wien-Robinson-Brücke, die zur Frequenzmessung dienen kann. Dabei werden die beiden Kondensatoren gemeinsam passend für einen Abgleich eingestellt.

(i) Welche Bedingung müssen die beiden Widerstandswerte R_3 und R_4 erfüllen, damit die Brücke abgleichbar ist?

(ii) Für welche Frequenz ist die Brücke dann abgeglichen?



Geben Sie die Frequenzbereiche an, in denen sich die Schaltung
(i) ohmisch-induktiv
(ii) ohmisch-kapazitiv
verhält.



$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = R + j\omega L + \frac{R(1 - j\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\underline{Z} = R\left[1 + \frac{1}{1+(\omega RC)^2}\right] + \underbrace{j\omega\left[L - \frac{R^2 C}{1+(\omega RC)^2}\right]}_{X}$$

$X = 0$ für $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}$, vorausgesetzt $\frac{R^2 C}{L} > 1$

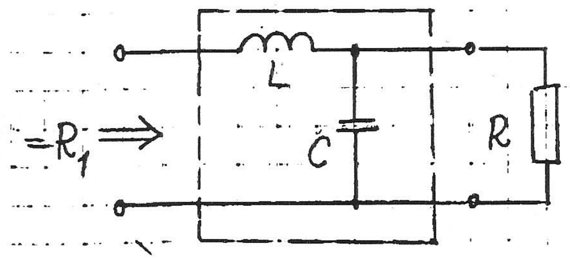
(i) ohmisch-induktiv für

$$\underline{f} > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}} = \underline{137{,}8\ \text{Hz}}$$

(ii) ohmisch kapazitiv für

$$\underline{0 < f < 137{,}8\ \text{Hz}}.$$

G2



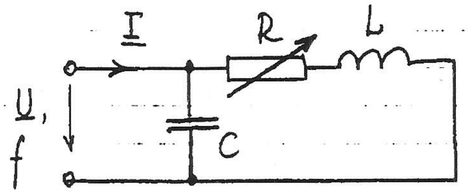
Zur Anpassung eines Widerstandes R an den Ausgang eines Verstärkers soll für die feste Kreisfrequenz ω ein (näherungsweise ideales) LC-Glied verwendet werden. R ist dabei in $R_1 < R$ umzusetzen. Bestimmen Sie allgemein L und C für gegebene Werte R, R_1 und ω.

$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} \stackrel{!}{=} R_1$$

Daraus folgt $\dfrac{R}{1+(\omega RC)^2} = R_1$, $\quad L = \dfrac{R^2 C}{1+(\omega RC)^2}$,

d.h. $\quad \underline{C = \frac{1}{\omega R}\sqrt{\frac{R}{R_1} - 1}} \qquad \underline{L = R R_1 C = \frac{R_1}{\omega}\sqrt{\frac{R}{R_1} - 1}}$.

□



Die Schaltung liegt an einer Sinus-spannung konstanter Amplitude und Frequenz. Wie ist die Kapazität zu wählen, damit sich der Effektwert I des aufgenommenen Stroms unabhängig vom Widerstand R einstellt?

$$\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U},$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C,$$

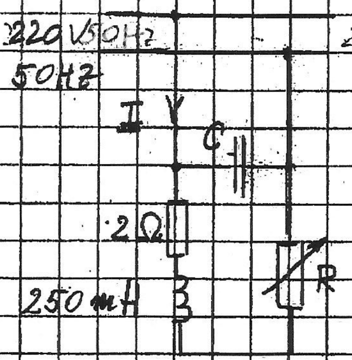
$$Y^2 = \underline{Y}\,\underline{Y}^* = \left(\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C\right)\left(\frac{1}{R - j\omega L} - j\omega C\right) =$$

$$= \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C \underbrace{\left(\frac{1}{R - j\omega L} - \frac{1}{R + j\omega L}\right)}_{\frac{j2\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}} + (\omega C)^2 = \frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + (\omega L)^2} + (\omega C)^2$$

Y und damit I ist unabhängig von R, falls $1 - 2\omega^2 LC = 0$, d.h.

$$C = \frac{1}{2\omega^2 L} \qquad \left(\text{Dann ist } I = \omega C U = \frac{U}{2\omega L}\right)$$

$\square$



Wie groß ist für die am Sinusnetz betriebene Schaltung die Kapazität C zu wählen, damit der Effektivwertbetrag I des aufgenommenen Stroms unabhängig vom Widerstandswert R wird? Wie groß ist dann I?

$R + 2\Omega = R_1$, $I = YU$, $\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}$

$$Y^2 = \underline{Y}\,\underline{Y}^* = \left(j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right)\left(-j\omega C + \frac{1}{R_1 - j\omega L}\right)$$

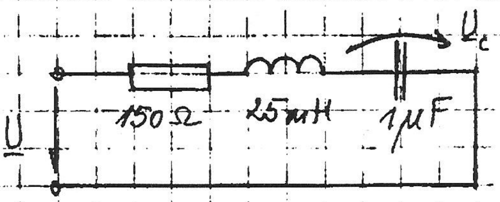
$$= (\omega C)^2 + j\omega C\left(\frac{1}{R_1 - j\omega L} - \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right) + \frac{1}{R_1^2 + (\omega L)^2} = (\omega C)^2 + \frac{1 - 2\omega^2 LC}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

Y und damit I ist unabhängig von R_1, falls $1 - 2\omega^2 LC = 0$

$$\Rightarrow \underline{C = \frac{1}{2\omega^2 L} = 20{,}26\,\mu F}\ .$$

$Y = \omega C$, $\underline{I} = \omega C U = \underline{1{,}40\,A}$.

□



An der RLC-Reihenschaltung liegt eine Sinusspannung fester Amplitude. Berechnen Sie die Frequenz f, bei der die Kondensatorspannung U_c ihren Größtwert annimmt.

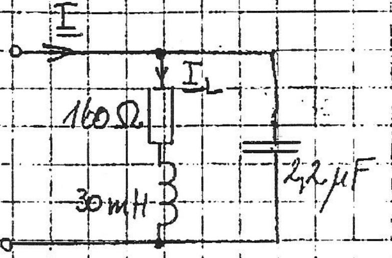
$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad \underline{U}_c = \frac{\underline{U}}{j\omega C \underline{Z}}$$

U_c wird maximal, wenn $|j\omega C \underline{Z}|$ minimal

Sei $$f(\omega) = |j\omega C \underline{Z}|^2 = (\omega C)^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] = (\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2$$

$$f'(\omega) = 2\omega(RC)^2 + 2(\omega^2 LC - 1)\cdot 2\omega LC \doteq 0 \Rightarrow (RC)^2 + 2LC(\omega^2 LC - 1) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}\left[1 - \frac{(RC)^2}{2LC}\right] \Rightarrow \underline{f} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{1}{2}R^2\frac{C}{L}} = \underline{746{,}5\ Hz}.$$



In der skizzierten Schaltung wird ein Sinusstrom $\underline{I}$ fester Amplitude eingeprägt. Berechnen Sie die Frequenz bei der der Effektivwert I_L des Spulenstroms seinen Größtwert annimmt.

Stromteiler: $\frac{\underline{I}_L}{\underline{I}} = \frac{1/(j\omega C)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$

$= \frac{1}{1 - \nu^2 + j\nu d}$ mit $\nu = \omega\sqrt{LC}$, $d = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

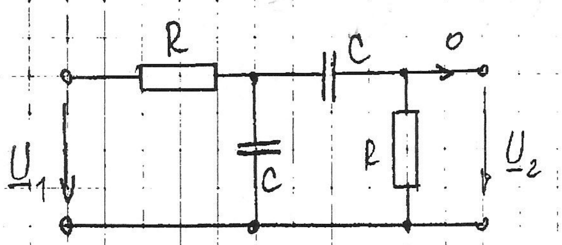
I_L ist maximal, wenn $|1-\nu^2+j\nu d|$ minimal

Sei $g(\nu) = |1-\nu^2 + j\nu d|^2 = (1-\nu^2)^2 + (\nu d)^2$

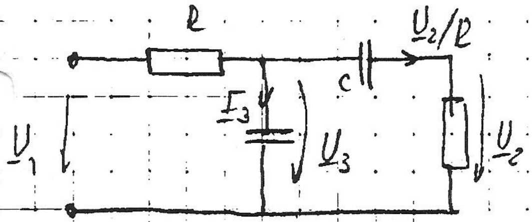
$g'(\nu) = 2\nu\left[-2(1-\nu^2) + d^2\right] = 4\nu\left[\nu^2 - 1 + d^2/2\right] = 0$

$\Rightarrow \nu = \sqrt{1 - d^2/2}$, $\underline{f = f_0\sqrt{1-d^2/2}}$,

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 619{,}5\ \text{Hz}$, $d = 1{,}370$ $\Rightarrow$ $\underline{f = \cancel{30\ \text{Hz}}\ 153{,}4\ \text{Hz}}$



Berechnen Sie für das Übertragungsglied den Spannungsübertragungsfaktor $\boxed{\underline{G} = \underline{U}_2/\underline{U}_1}$ und skizzieren Sie dessen Betrag als Funktion der bezogenen Frequenz $\boxed{\gamma = \omega RC}$.



$$\underline{U}_3 = \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2}{j\omega RC} = \left(1 + \frac{1}{j\omega RC}\right)\underline{U}_2$$

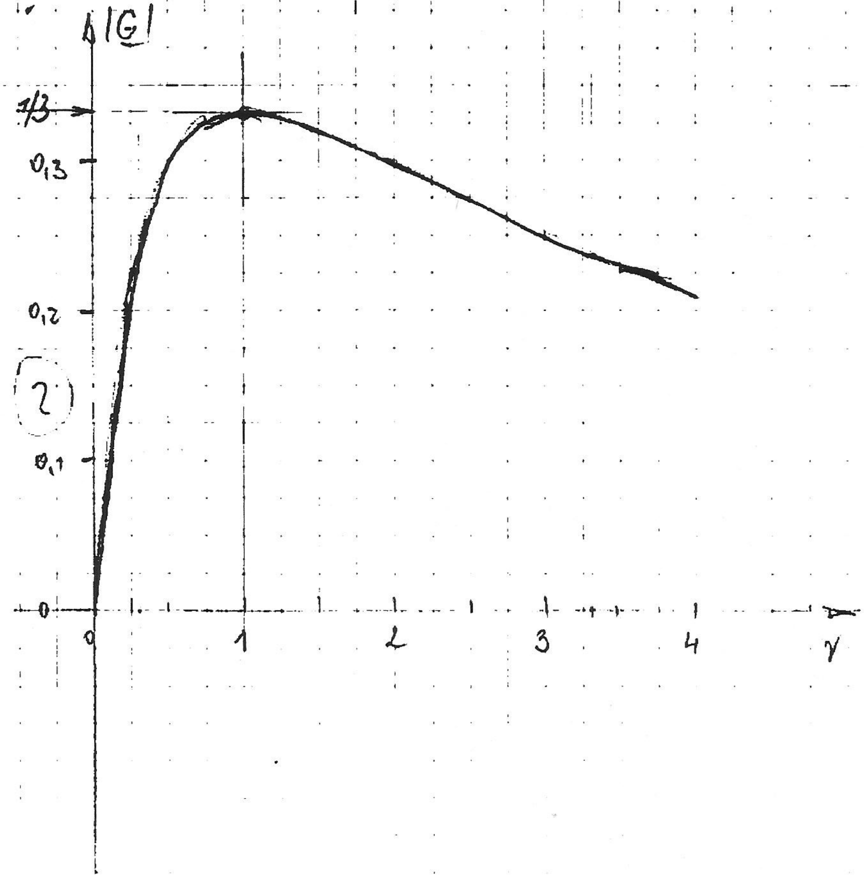
$$\underline{I}_3 = j\omega C \underline{U}_3 = \frac{1}{R}(1 + j\omega RC)\underline{U}_2 ,$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_3 + R\left(\underline{I}_3 + \frac{\underline{U}_2}{R}\right) = \left[1 + \frac{1}{j\omega RC} + 1 + j\omega RC + 1\right]\underline{U}_2$$

$$= \left(3 + j\gamma + \frac{1}{j\gamma}\right)\underline{U}_2 \quad \text{mit } \gamma = \omega RC ,$$

$$\underline{\underline{G}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \underline{\frac{1}{3 + j(\gamma - 1/\gamma)}}$$

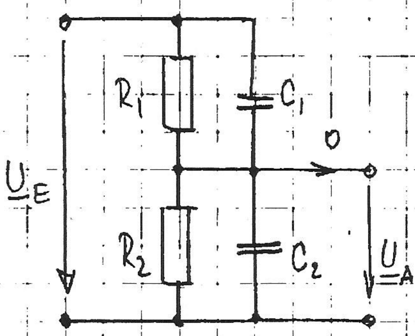
$$|\underline{G}(\gamma)| = \frac{1}{\sqrt{9 + (\gamma - 1/\gamma)^2}}$$



(2)

I

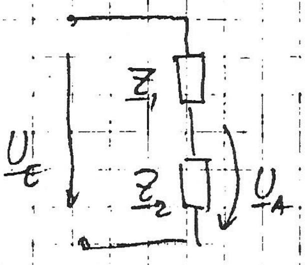
G2



Am Eingang der Teilerschaltung liegt eine Sinusspannung.

(i) Berechnen Sie den Übertragungsfaktor $\underline{G} = \underline{U}_A / \underline{U}_E$.

(ii) Welche Bedingung müssen die Werte R_1, R_2, C_1 und C_2 erfüllen, damit $\underline{G}$ frequenzunabhängig ist?



$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1}{1+j\omega R_1 C_1} = \frac{R_1}{1+j\omega\tau_1}, \quad \tau_1 = R_1 C_1$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C_2} = \frac{R_2}{1+j\omega\tau_2}, \quad \tau_2 = R_2 C_2$$

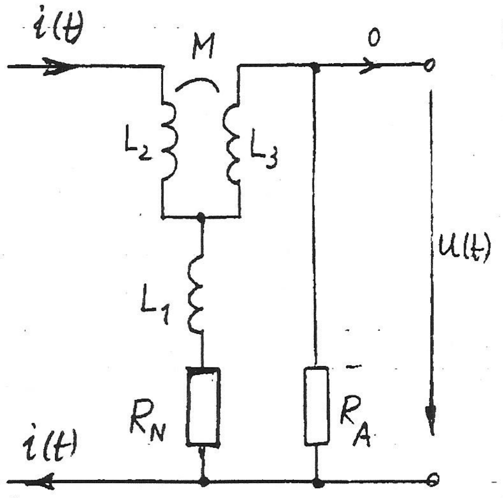
(i) $$\underline{G} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{R_2}{(1+j\omega\tau_2)\left[\frac{R_2}{1+j\omega\tau_2} + \frac{R_1}{1+j\omega\tau_1}\right]}$$

$$\underline{\underline{G} = \frac{R_2}{R_2 + R_1 \frac{1+j\omega\tau_2}{1+j\omega\tau_1}}} = \frac{R_2(1+j\omega\tau_1)}{R_2(1+j\omega\tau_1) + R_1(1+j\omega\tau_2)}$$

(ii) $\underline{G}$ ist (für endl. Werte R_1, R_2) offensichtlich genau dann unabhängig von ω, wenn $\tau_1 = \tau_2$, d.h.

$$\underline{R_1 C_1 = R_2 C_2}.$$

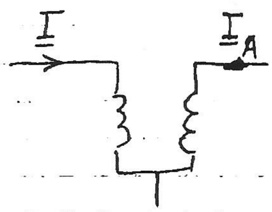
$\square$



Das Bild zeigt die Ersatzschaltung eines Meßwiderstandes („Shunt"), mit dem ein leistungselektronischer Stromverlauf $\boxed{i(t)}$ in ein Spannungssignal $\boxed{u(t)}$ umgewandelt werden soll. $\boxed{R_N}$ ist der eigentliche Meßwiderstand und $\boxed{R_A}$ ist ein Anpaßwiderstand, wobei $\boxed{R_N << R_A}$. L_1, L_2, $\boxed{L_3}$ und $\boxed{M}$ sind unvermeidbare Induktivitäten, deren Größen jedoch durch die konstruktive Gestaltung des Shunts beeinflußt werden können.

Welche allgemeine Beziehung sollte zwischen den Induktivitäten und Widerständen bestehen, damit das Spannungssignal unabhängig von der Signalform möglichst proportional zum darzustellenden Stromsignal verläuft („kompensierter Shunt")?

Hinweis: Wechselstromanalyse, frequenzunabhängiger Übertragungsfaktor.



$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= j\omega\left[L_3\underline{I}_A + M\underline{I} + L_1(\underline{I}+\underline{I}_A)\right] + R_N(\underline{I}+\underline{I}_A), \\ \underline{U} &= -R_A\underline{I}_A \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{U} = \frac{1+j\omega\tau}{1+j\omega\tau_A}\,\frac{R_N}{1+R_N/R_A}\,\underline{I} \quad \text{mit } \tau = \frac{L_1+M}{R_N}, \quad \tau_A = \frac{L_1+L_3}{R_N+R_A}$$

Vollst. Kompensation: $\tau = \tau_A$, d.h. $\underline{\frac{L_1+L_3}{L_1+M} = \frac{R_A+R_N}{R_N}} \approx \frac{R_A}{R_N}$

Dann ist

$$\underline{U} = \frac{R_N}{1+R_N/R_A}\,\underline{I} \approx R_N\underline{I}.$$

$Q = \omega_0 L / R$

$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$

Die Impedanz eines Reihenschwingkreises lässt sich mit dem Gütefaktor Q und der Verstimmung ε der Erregerkreisfrequenz ω gegen die Kennkreisfrequenz ω_0 in der Form

$$\underline{Z} = R(1 + j2Q\varepsilon)$$

schreiben.

Bei welchen endlichen Verstimmungen ε treten Extremwerte des Blindleitwertes $B = \mathrm{Im}(\underline{Y})$ auf? Wie groß sind diese?

$$B = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{R}\,\frac{1}{1+j2Q\varepsilon}\right) = -\frac{1}{R}\,\frac{x}{1+x^2} \quad \text{mit } x = 2Q\varepsilon \; ; \; 2$$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \doteq 0 \Rightarrow x^2 = 1 \qquad 2$$

Extremwerte des Blindleitwertes treten bei den Verstimmungen

$$\varepsilon = \mp \frac{1}{2Q} \text{ auf, und zwar } B = \pm \frac{1}{2R}.$$

2 2

2