1

Die additive Überlagerung (Superposition) zweier Sinusschwingungen gleicher Amplituden aber leicht unterschiedlicher Frequenzen,

$$s_1(t) = \hat{s}\cos(2\pi f_1 t), \qquad s_2(t) = \hat{s}\cos[2\pi(f_1+\Delta f)t],$$

lässt sich mit Hilfe der Beziehung

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

in der Form

$$s(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

einer Sinusschwingung mit relativ langsam veränderlicher Amplitude $a(t)$ darstellen. Bestimmen Sie die Frequenz f_0 und die Funktion $a(t)$.

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \hat{s}\,\{\cos(2\pi f_1 t) + \cos[2\pi(f_1+\Delta f)t]\}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha-\beta &= 2\pi f_1 t \\ \alpha+\beta &= 2\pi(f_1+\Delta f)t \end{aligned}\right\} \quad \alpha = 2\pi\left(f_1 + \frac{\Delta f}{2}\right)t, \quad \beta = 2\pi\frac{\Delta f}{2}t$$

$$s(t) = 2\hat{s}\cos\left(2\pi\frac{\Delta f}{2}t\right)\cos\left[2\pi\left(f_1+\frac{\Delta f}{2}\right)t\right], \qquad \text{(„Schwebung")}$$

d.h. $\underline{f_0 = f_1 + \Delta f/2}$, $\underline{a(t) = 2\hat{s}\cos\left(2\pi\frac{\Delta f}{2}t\right)}$

$\square$

G1 5

Von einer sinusförmigen 50 Hz – Stromschwingung ist der komplexe Effektivwert

$$\boxed{\underline{I} = 4{,}2A - j\,7{,}3A}$$

bekannt. Geben Sie die Schwingung in der reellen Standardform an.

$$\underline{I} = 4{,}2A - j\,7{,}3A = \underset{(2)}{8{,}422} \cdot e^{\overset{}{-j\,1{,}0487}}_{(2)},$$

+299,910

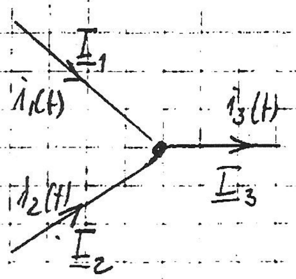
−60,090

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{I}\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\right] = 11{,}91\,A \cdot \cos(\omega t - 1{,}05)\ , \quad \omega = 100\pi \cdot s$$

+5,23

(2) (2) (2) (7)

22



Die Skizze zeigt einen Knoten einer Schaltung, die sich im eingeschwungenen Zustand mit Sinusgrößen der Kreisfrequenz $\boxed{\omega}$ befindet. Bestimmen Sie aus den beiden komplexen Effektivwerten

$$\underline{I}_1 = (3,6 - j\,9,2)\,A, \quad \underline{I}_2 = (4,1 + j\,6,6)\,A$$

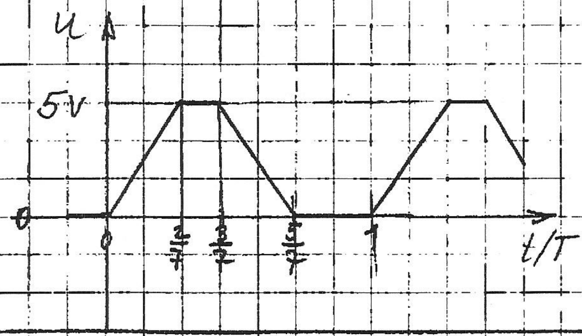
den Zeitverlauf des Stromes $\boxed{i_3}$ in der reellen Standardform.

Aus dem komplexen Effektivwert

2 $$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (7,7 - j\,2,6)\,A = \underbrace{8,127}_{1}\,\overset{1}{e^{-j\,18,7^\circ}}\,\underset{\text{Eff}}{A}$$

folgt sofort die reelle Standardform

$$i_3(t) = \mathrm{Re}\left[\underset{2}{\sqrt{2}}\,\underline{I}_3\, e^{j\omega t}\right] = \underset{\hat{i}_3}{11,49}\,\underbrace{\cos(\omega t - \overset{0,326}{18,7^\circ})\,A}_{2}.$$



Berechnen Sie den Durchschnittswert des angegebenen periodischen Spannungsverlaufs.

Aus der Definition des Durchschnittswerts

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = \int_0^1 u\,d\tau \quad \text{mit } \tau = t/T$$ 5

ergibt sich

$$\overline{u} = \left(2{,}5\cdot\frac{2}{7} + 5\cdot\frac{1}{7} + 2{,}5\cdot\frac{2}{7}\right)V = \frac{3}{7}\,5\,V = 2{,}14\,V$$ 5

Bestimmen Sie den komplexen Effektivwert des Sinusstroms

$$i(t) = \hat{\imath}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{\imath}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

mit

$$\hat{\imath}_1 = 2{,}3\,\mathrm{A}, \quad \varphi_1 = 14^\circ,$$
$$\hat{\imath}_2 = 1{,}8\,\mathrm{A}, \quad \varphi_2 = -60^\circ.$$

Addition der komplexen Amplituden liefert die komplexe Amplitude

$$\underline{\hat{\imath}} = \hat{\imath}_1 e^{j\varphi_1} + \hat{\imath}_2 e^{j\varphi_2} = \left[2{,}3\, e^{j14^\circ} + 1{,}8\, e^{-j60^\circ}\right]\mathrm{A} = 3{,}29\, e^{-j17{,}7^\circ}\,\mathrm{A},$$

also den komplexen Effektivwert

$$\underline{I} = \hat{\underline{\imath}}/\sqrt{2} = \underline{2{,}33\, e^{-j17{,}7^\circ}\,\mathrm{A}} = 2{,}33\, e^{-j0{,}31}\,\mathrm{A}$$

$$= (2{,}214 - j0{,}709)\,\mathrm{A}. \qquad \square$$

Eine Sinusschwingung setzt sich additiv aus zwei phasenverschobenen Sinusschwingungen gemäß

$$u(t) = \hat{u}_1 \underline{\cos}(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \underline{\sin}(\omega t + \varphi_2)$$

zusammen. Berechnen Sie allgemein den <u>komplexen Effektivwert</u> der resultierenden Sinusschwingung.

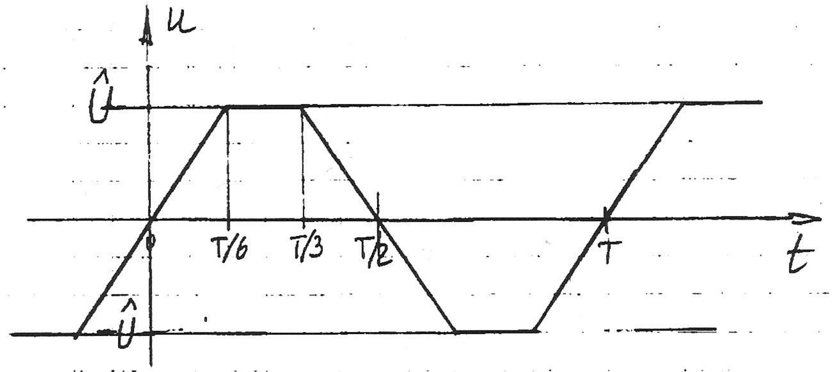
$$u(t) = Re[\hat{u}_1 e^{j(\omega t+\varphi_1)}] + Re[\hat{u}_2 e^{j(\omega t+\varphi_2-\pi/2)}]$$

$$= Re\{[\hat{u}_1 e^{j\varphi_1} + \hat{u}_2 e^{j(\varphi_2-\pi/2)}] e^{j\omega t}\} \stackrel{!}{=} Re\{\underline{U}\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{u}_1 e^{j\varphi_1} + \hat{u}_2 e^{j(\varphi_2-\pi/2)}] \quad \square$$

$$\left(= \frac{1}{\sqrt{2}}\{[\hat{u}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \sin(\varphi_2)] + j[\hat{u}_1 \sin(\varphi_1) - \hat{u}_2 \cos(\varphi_2)]\} \right)$$



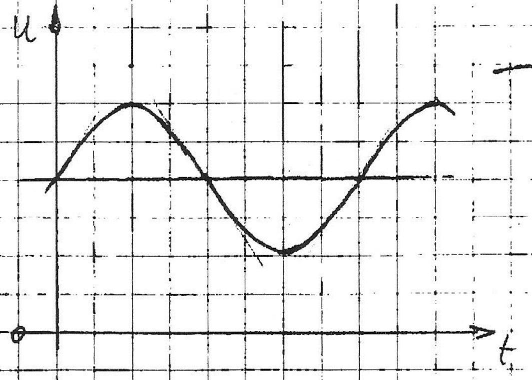
Berechnen Sie den Effektivwert der angegebenen, trapezförmigen Wechselspannung.

Setzen $\tau = t/T$: $\left.\begin{aligned} u &= \hat{U}\cdot 6\tau \quad \text{für } 0 \le \tau \le \tfrac{1}{6}, \\ &= \hat{U} \quad \text{für } \tfrac{1}{6} \le \tau \le \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\}$

$$\frac{U^2}{\hat{U}^2} = 4\left[\int_0^{1/6} (6\tau)^2 d\tau + \int_{1/6}^{1/4} d\tau\right] = 4\left(6^2 \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{6^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{9}$$

$$\underline{U = \frac{\sqrt{5}}{3}\hat{U} = 0{,}745\,\hat{U}}\ .$$

$\square$



Berechnen Sie den Effektivwert der angegebenen Mischspannung

$u(t) = [11{,}2 + 7{,}8\sin(\omega t)]\,V$

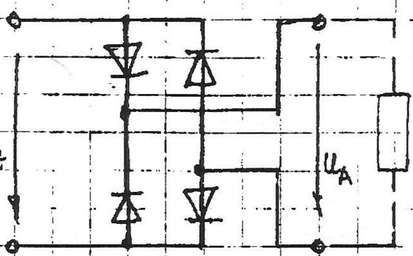
Ausgehend von $u(t) = u_0 + \hat{u}_1 \sin(\varphi)$ erhalten wir

$$U^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^2\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u_0^2 + 2u_0\hat{u}_1\sin(\varphi) + \hat{u}_1^2\sin^2(\varphi)\right]d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\underbrace{\int_0^{2\pi} u_0^2\,d\varphi}_{u_0^2\cdot 2\pi} + 2u_0\hat{u}_1\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(\varphi)\,d\varphi}_{0} + \hat{u}_1^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)\,d\varphi}_{\pi}\Big]$$

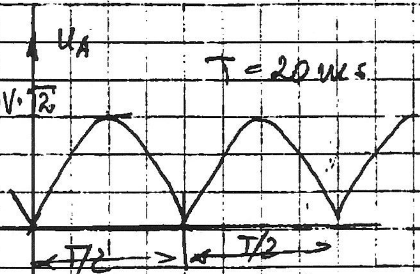
also

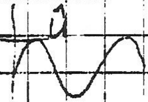
$$U = \sqrt{u_0^2 + \tfrac{1}{2}\hat{u}_1^2} = \sqrt{(11{,}2)^2 + \tfrac{1}{2}(7{,}8)^2}\,V = \underline{12{,}5\,V}\,. \qquad \square$$



Der Eingang der dargestellten Gleichrichterschaltung liegt an einem 50Hz-Sinusnetz mit 230V (Effektivwert). Skizzieren Sie den Zeitverlauf der Ausgangsspannung u_A und berechnen Sie dafür den Wert des Verhältnisses Effektivwert durch Durchschnittswert (den „Formfaktor" F).

„Zweiweg" gleichrichtung



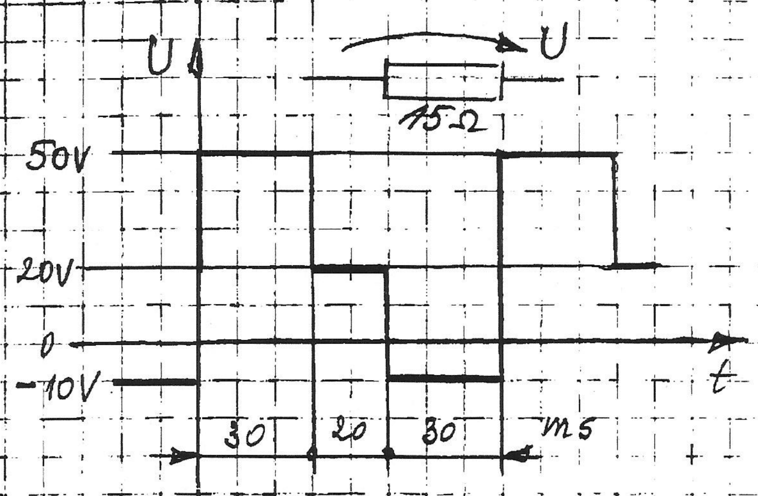
Effektivwert von  = Effwert von  = U = 230V

$$\overline{u_A} = \frac{\hat{u}}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{\pi}\hat{u} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}U$$

$$F = \frac{U}{\overline{u_A}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

1

4c



An einem 15 Ω – Widerstand liegt die angegebene periodische Spannung. Berechnen Sie die elektrische Leistung, die der Widerstand im Mittel aufzunehmen hat.

Periodendauer $T = 80\,ms$

Mittlere Leistung

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\sum_i U_i I_i \Delta t_i = \frac{1}{R}\sum_i U_i^2 \frac{\Delta t_i}{T} \quad \text{mit} \sum_i \Delta t_i = T,$$

$$\overline{P} = \frac{1}{15\,\Omega}\left[(50V)^2\cdot\frac{3}{8} + (20V)^2\frac{2}{8} + (-10V)^2\cdot\frac{3}{8}\right] = \underline{71{,}7\,W}.$$

□

An einem $\underline{5\,k\Omega}$ - Widerstand liegt eine Sinusspannung der Frequenz $\underline{60\,Hz}$. Wie groß ist der Scheitelwert der Spannung, wenn der Widerstand im zeitlichen Mittel die Leistung $\underline{10\,mW}$ aufnimmt?

Momentanleistung $P = \frac{U^2}{R} = \frac{\hat{U}^2}{R}\sin^2(\omega t)$

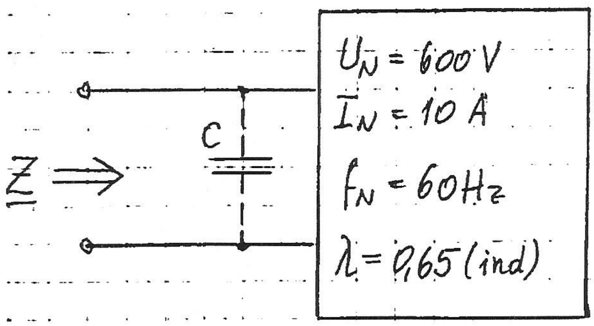
im zeitl. Mittel $\overline{P} = \frac{\hat{U}^2}{R}\underbrace{\overline{\sin^2(\omega t)}}_{1/2} = \frac{\hat{U}^2}{2R}$

Scheitelwert der Spannung

$$\underline{\hat{U}} = \sqrt{2R\overline{P}} = \sqrt{2\cdot 5\cdot 10^3\frac{V}{A}\cdot 10^{-2}\,VA} = \underline{10\,V}.$$

$\square$

G2



Eine Last besitzt die angegebenen Nenndaten.

(i) Berechnen Sie, zunächst ohne den Kondensator, den Realteil der Impedanz $\underline{Z}$.

(ii) Durch die Parallelschaltung des Kondensators soll die insgesamt aufgenommene Scheinleistung minimiert werden. Berechnen Sie auch für diesen Fall den Realteil von $\underline{Z}$.

(i) $\underline{Z} = \frac{\underline{U}_N}{\underline{I}_N} = \frac{U_N}{I_N} e^{j\varphi} = \frac{1}{\underline{Y}}$

$$Re(\underline{Z}) = \frac{U_N}{I_N}\cos(\varphi) = \lambda \frac{U_N}{I_N} = \frac{600\,V}{10\,A}\cdot 0{,}65 = 39\,\Omega$$

(ii) $\underline{Z}' = \frac{1}{\underline{Y}'}$, $\underline{Y}' = j\omega C + \underline{Y}$, $Re(\underline{Y}') = Re(\underline{Y}) = \frac{I_N}{U_N}\cdot\lambda$

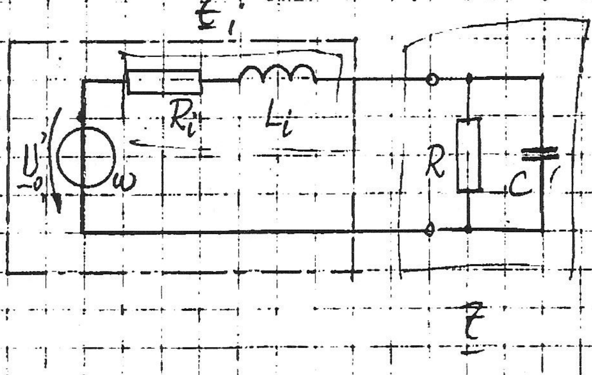
$\underline{S} = U_N^2 \underline{Y}'^*$, $Q = U_N^2\, Im(\underline{Y}'^*) \overset{!}{=} 0$ $\Rightarrow$ $\underline{Y}'$ und damit $\underline{Z}'$ reell

$$Re(\underline{Z}') = \underline{Z}' = \frac{1}{\underline{Y}'} = \frac{1}{Re(\underline{Y}')} = \frac{1}{Re(\underline{Y})}$$

d.h.

$$Re(\underline{Z}') = \frac{1}{\lambda}\frac{U_N}{I_N} = \frac{1}{0{,}65}\cdot\frac{600\,V}{10\,A} = 92{,}3\,\Omega \quad (\neq Re(\underline{Z})\,!)$$

□



Eine Sinusspannungsquelle, dargestellt durch eine ideale Quelle mit Reihenwiderstand und Reiheninduktivität, speist einen (Ersatz-)Widerstand. Um die vom Widerstand aufgenommene Leistung zu erhöhen, wird ein Kondensator parallel geschaltet. Wie groß ist dessen Kapazität $\boxed{C}$ zu wählen, damit die vom Widerstand $\boxed{R}$ aufgenommene Leistung maximal wird?

$\underline{Z}_i = R_i + j\omega L_i, \qquad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + j\omega C$

Scheinleistung der RC-Parallelschaltung

$$\underline{S} = \underline{Z}\,\underline{I}\,\underline{I}^* = \frac{U_0^2\,\underline{Z}}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}|^2} = \frac{U_0^2\,\underline{Z}}{\underline{Z}\,\underline{Z}^*\,|1+\underline{Z}_i\underline{Y}|^2} = \frac{U_0^2\,\underline{Y}^*}{|1+\underline{Z}_i\underline{Y}|^2}$$

Die zu maximierende Wirkleistung ist

$$P = \mathrm{Re}(\underline{S}) = \frac{U_0^2}{R\,|1+\underline{Z}_i\underline{Y}|^2} \qquad 3$$

Es ist also C für ein Minimum der Funktion

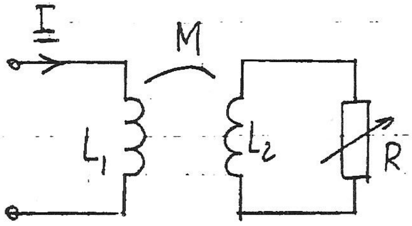
$$f(C) = |1+\underline{Z}_i\underline{Y}|^2 = \left|1+(R_i+j\omega L_i)\left(\tfrac{1}{R}+j\omega C\right)\right|^2 = \left|1+\tfrac{R_i}{R} - \omega^2 L_i C + j(\omega L_i/R + \omega R_i C)\right|^2$$

$$= (1+R_i/R - \omega^2 L_i C)^2 + \omega^2 (L_i/R + R_i C)^2 \qquad 2$$

$$f'(C) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{L_i}{R_i^2 + (\omega L_i)^2}.$$

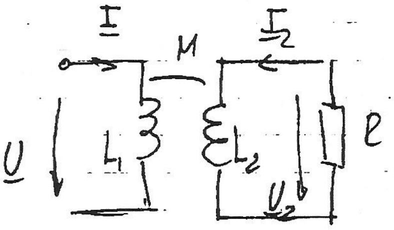
2

23



Die skizzierte Ersatzschaltung dient als grobes Modell für ein System, das mit eingeprägtem Strom $\boxed{\underline{I}}$ (Effektivwert $\boxed{I}$, Kreisfrequenz $\boxed{\omega}$) und langsam veränderlichem Widerstand $\boxed{R}$ betrieben wird.

Berechnen Sie die aufgenommene Wirkleistung und stellen Sie diese graphisch als Funktion von $\boxed{r = R/(\omega L_2)}$ dar.



$$\underline{U}_2 - j\omega(L_2\underline{I}_2 + M\underline{I}) = -R\underline{I}_2\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_2 = -\frac{j\omega M}{R + j\omega L_2}\underline{I}\ ,$$

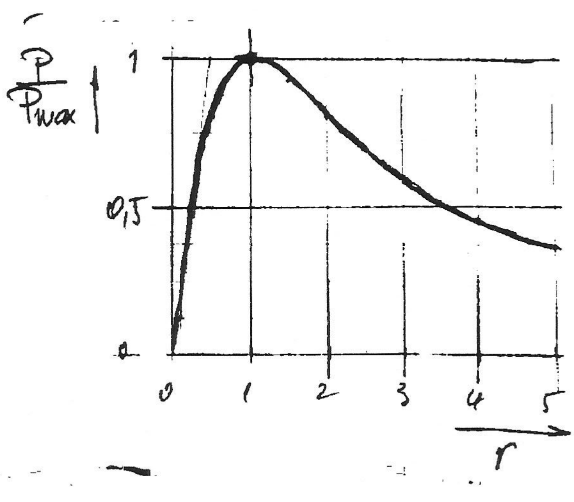
$$\underline{U} = j\omega L_1\underline{I} + j\omega M\underline{I}_2 = \left[j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{R + j\omega L_2}\right]\underline{I}$$

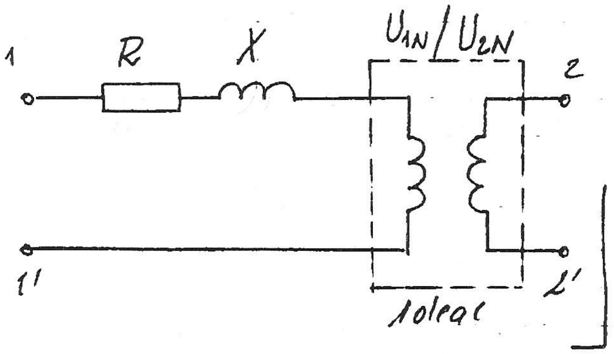
Damit ist

$$P = \mathrm{Re}(\underline{U}\,\underline{I}^*) = I^2\,\mathrm{Re}\left[j\omega L + \frac{(\omega M)^2}{R + j\omega L_2}\right] = \frac{(\omega M)^2 R}{R^2 + (\omega L_2)^2}\,I^2\ ,$$

also

$$\underline{P = P_{max}\frac{2r}{1+r^2}} \quad \text{mit } r = \frac{R}{\omega L_2}\ , \quad \underline{P_{max} = \frac{(\omega M)^2}{\omega L_2}\,\frac{I^2}{2}}$$





Zur Bestimmung der Größen R und X der „einphasigen“ Ersatzschaltung eines Großtransformators, der für die Spannungen

$$U_{1N}/U_{2N} = 420\,kV/27\,kV$$

und die zu übertragende Scheinleistung

$$S_N = 750\,MVA$$

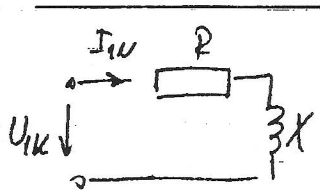
bemessen ist, wird ein sogenannter Kurzschlussversuch durchgeführt. Die Sekundärseite (2,2') wird dazu kurzgeschlossen und an der Primärseite wird eine Spannung U_{1K} so eingestellt, daß der Bemessungsstrom $I_{1N} = S_N/U_{1N}$ fließt. Dabei wird auch die aufgenommene Wirkleistung P_V gemessen.

Im vorliegenden Fall liefert dieser Kurzschlussversuch

$$U_{1K} = 68{,}5\,kV, \quad P_V = 1864\,kW.$$

Berechnen Sie daraus die bezogenen Kenngrößen

$$r = R\,\frac{I_{1N}}{U_{1N}} \quad \text{und} \quad x = X\,\frac{I_{1N}}{U_{1N}}.$$

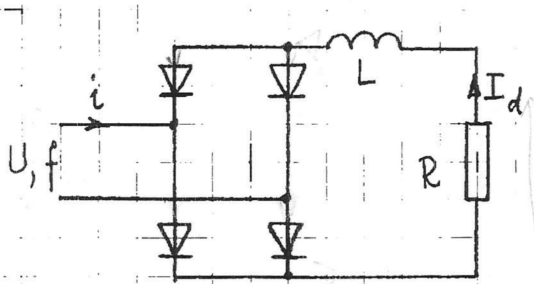


$$P_V = R I_{1N}^2, \quad \underline{r} = \frac{P_V}{I_{1N}^2}\cdot\frac{I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{P_V}{S_N} = \underline{0{,}246\,\%}$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2}, \quad Z = U_{1K}/I_{1N},$$

$$\underline{x} = \frac{I_{1N}}{U_{1N}}\sqrt{\left(\frac{U_{1K}}{I_{1N}}\right)^2 - r^2\left(\frac{U_{1N}}{I_{1N}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{U_{1K}}{U_{1N}}\right)^2 - r^2} = \underline{16{,}308\,\%}$$

T1)



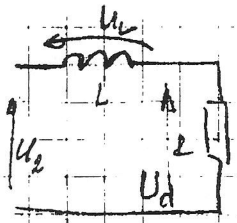
Am Eingang der idealen Gleichrichterbrücke liegt eine Sinusspannung mit der Frequenz f und dem Effektivwert U. Die Glättungsinduktivität L ist so groß, daß näherungsweise mit einem idealen Gleichstrom I_d gerechnet werden kann.

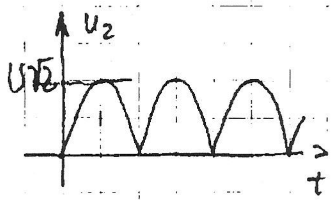
(i) Berechnen Sie I_d.

(ii) Zeichnen Sie die Eingangsspannung und den Eingangsstrom in ein Diagramm.

(iii) Berechnen Sie die insgesamt aufgenommene Wirkleistung, Scheinleistung und den Leistungsfaktor.

(i)



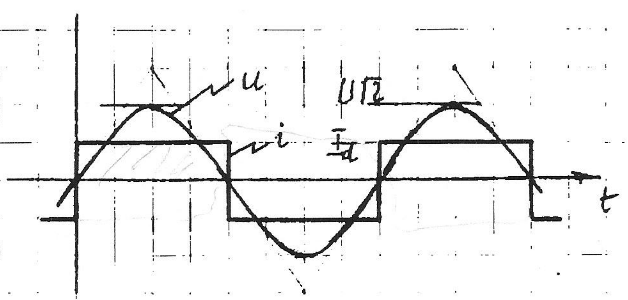


u_L notwendig mittelwertfrei, damit

$$U_d = \overline{u}_2 = \frac{2}{\pi} U\sqrt{2}$$

$$\underline{I_d} = \frac{U_d}{R} = \underline{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{U}{R} = 0{,}900\, U/R}$$

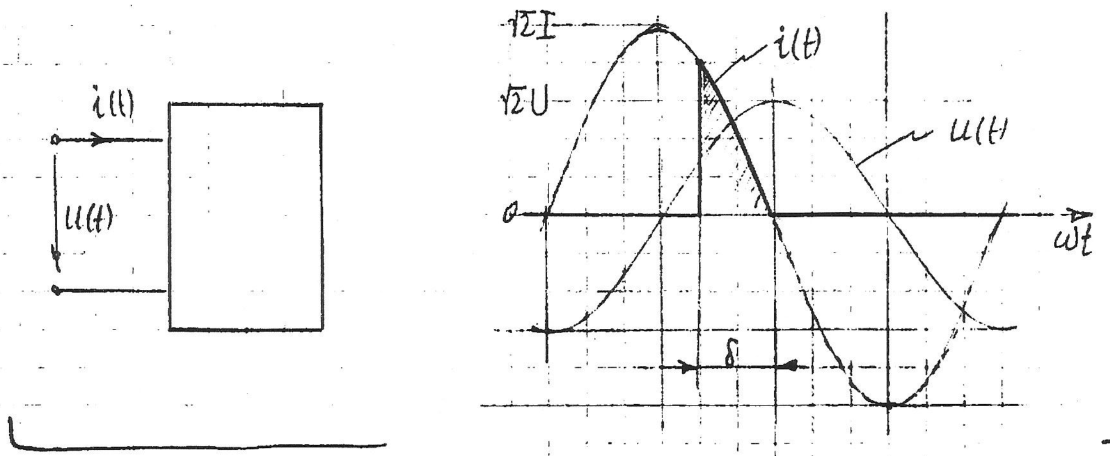
(ii)



(iii) $\underline{P} = R I_d^2 = \frac{8}{\pi^2}\frac{U^2}{R} = 0{,}811\, U^2/R$,

$I = I_d$, $\underline{S} = UI = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{U^2}{R} = 0{,}900\, U^2/R$,

$\underline{\lambda} = P/S = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}900$. □



Eine Stromrichterschaltung nimmt an einer Sinusspannung näherungsweise den dargestellten Strom $\boxed{i(t)}$ auf. Berechnen Sie allgemein die zugehörige aufgenommene Wirkleistung.

Die Wirkleistung ist der Durchschnittswert der Momentanleistung, also

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,i(t)\,dt = -\,UI\,\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0} \cos(\tau)\sin(\tau)\,d\tau$$

$$= -\,\frac{UI}{2\pi}\,\sin^2(\tau)\Big|_{-\delta}^{0} \quad ,$$

$$\underline{P = UI\,\frac{\sin^2(\delta)}{2\pi}} \; .$$

□

In einer 50Hz-Wechselstromschaltung tritt an einem Zweipol die komplexe Scheinleistung

$$\boxed{\underline{S} = (2{,}4 + j1{,}9)\,\text{kVA}}$$

auf. Berechnen und zeichnen Sie den Zeitverlauf $\underline{p(t)}$ der zugehörigen Momentanleistung (Zeitnullpunkt passend gewählt). Beachten Sie

$$\boxed{2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}\ .$$

$u(t) = \sqrt{2}\,U\cos(\omega t + \varphi_u)$, $\quad i(t) = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t + \varphi_i)$

$p(t) = 2UI\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i)$, $\quad S = UI = |\underline{S}|$

$\qquad P = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i)$

$\quad = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$

$\underline{p(t) = P + S\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}$, $\quad \underline{P = 2{,}4\,\text{kW}}$, $\quad \underline{S = |\underline{S}| = 3{,}06\,\text{kVA}}$