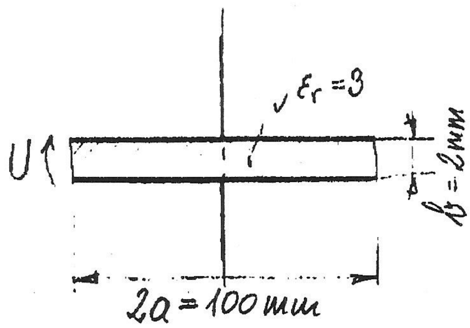



Zwischen den kreisförmigen Elektroden eines Plattenkondensators liegt eine elektrische Spannung, deren Wert sich zum betrachteten Zeitpunkt mit der Rate $\boxed{\dot{U} = 3kV/s}$ ändert. Berechnen Sie ohne Berücksichtigung der Randstörung

(i) die Verschiebungsstromdichte im verlustfreien Dielektrikum,

(ii) die magnetische Feldstärke am Umfang des Kondensators.

---

↑D,E

(i) Aus $E = \frac{U}{b}$ und $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ ergibt sich sofort die Verschiebungsstromdichte

$$\underline{\dot{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\dot{U}}{b} = \underline{39{,}84\,\mu A/m^2}\,.$$

(ii) Damit ist der gesamte Verschiebungsstrom

$$\dot{\Psi} = \dot{D} A = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{b} \dot{U} a^2 \pi\,,$$

und der Ampere-Maxwellsatz liefert

$$H \cdot 2\pi a = \dot{\Psi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{b} a^2 \pi \dot{U}\,, \quad \text{also}$$

$$\underline{H} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \frac{a}{b} \dot{U} = \underline{0{,}996\,\mu A/m}\,.$$

□

Eine elektromagnetische Sinuswelle, die sich im leeren Raum ausbreitet, besitze die Wellenlänge 1,5 m. Berechnen Sie die zugehörige Kreisfrequenz.

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c_0}{\lambda} = 6{,}28 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{1{,}5 \, m}$

$= 12{,}56 \cdot 10^8 \, s^{-1} = \underline{1{,}256 \cdot 10^9 \, s^{-1}}$.

2

Zeigen Sie, daß ~~mit~~ für eine hinlaufende Welle auf einer verlustfreien Leitung der Zusammenhang

$$I = c\,Q'$$

besteht, wobei $I$ die Stromstärke, $Q'$ den Ladungsbelag und $c$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit bedeutet. Dies legt die Interpretation nahe, daß Ladungsträger mit der Geschwindigkeit $c$ entlang der Leitung transportiert werden. Ist diese Interpretation treffend? (Erklärung!)

---

$$Q' \overset{1}{=} C'U, \quad U \overset{1}{=} Z_W I, \quad Z_W \overset{1}{=} \sqrt{L'/C'}, \quad c \overset{1}{=} 1/\sqrt{L'C'} \quad \rightarrow$$

2 $$Q' = C' Z_W I = C'\sqrt{L'/C'}\,I = \sqrt{L'C'}\,I = \frac{1}{c} I, \quad \text{also } \underline{I = c\,Q'}$$

Die genannte Interpretation ist nicht treffend. Nicht
4 die Ladungsträger, sondern Störungen der Ladungsneutralität breiten sich mit $c$ aus.

□

Die Phasengeschwindigkeit einer ebenen elektromagnetischen Sinuswelle, die sich in einem dispersiven Material ausbreitet, lässt sich im betrachteten Bereich durch

$$\boxed{v_{ph} = const \cdot \sqrt{\lambda}}$$

als Funktion der Wellenlänge $\boxed{\lambda}$ approximieren. Stellen Sie dafür einen Zusammenhang der Phasengeschwindigkeit mit der Gruppengeschwindigkeit her.

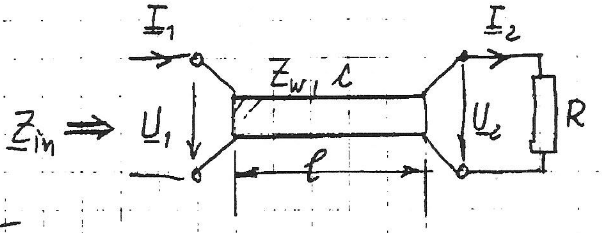
---

$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$, $v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ => 3

$\omega = v_{ph}\beta = const \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\,\beta = const \cdot \sqrt{2\pi}\,\sqrt{\beta}$ 2

$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta} = const \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2} const \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} = \frac{1}{2} \underbrace{const \cdot \sqrt{\lambda}}_{v_{ph}}$, d.h. 3

$\underline{v_{gr} = \frac{1}{2} v_{ph}}$. 2 □




$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \cos(\beta\ell)\,\underline{U}_2 + j\,Z_W \sin(\beta\ell)\,\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \dfrac{j}{Z_W} \sin(\beta\ell)\,\underline{U}_2 + \cos(\beta\ell)\,\underline{I}_2 \end{cases}$$

Die komplexen Effektivwerte von Spannungen und Strömen am Eingang bzw. am Ausgang einer angenähert verlustfreien Leitung hängen über die angegebenen Zweitorgleichungen zusammen. Dabei ist $\boxed{Z_W}$ die Wellenimpedanz und $\boxed{\beta = \omega/c}$ der Phasenkoeffizient.

Angenommen, die Leitung wird mit solch einer Frequenz betrieben, daß die Leitungslänge $\boxed{\ell}$ gerade einem Viertel der zugehörigen Wellenlänge entspricht. Wie groß ist dann die Eingangsimpedanz $\boxed{\underline{Z}_{in}}$ bei Abschluß mit einem Widerstand $\boxed{R\ ?}$

---

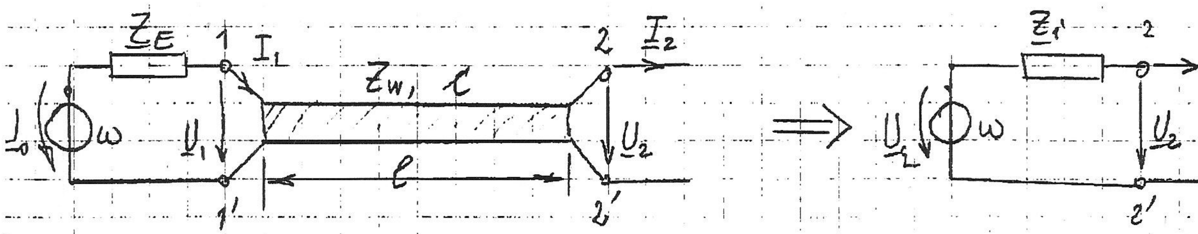
Für $\beta\ell = 2\pi \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)_{1/4} = \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j Z_W \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{j}{Z_W} \underline{U}_2 \end{aligned}\right\} \quad \underline{Z}_{in} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = Z_W^2 \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2},$$

mit $\underline{U}_2/\underline{I}_2 = R$ also

$$\underline{\underline{Z}_{in} = Z_W^2/R}$$

(„Impedanzwandler").




$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \cos(\beta l)\,\underline{U}_2 + j\,\underline{Z}_W \sin(\beta l)\,\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{j}{\underline{Z}_W}\sin(\beta l)\,\underline{U}_2 + \cos(\beta l)\,\underline{I}_2 \end{aligned}\right\}$$

Eine angenähert verlustfreie Leitung mit der Wellenimpedanz $\boxed{\underline{Z}_W}$ der Länge $\boxed{l}$ und dem Phasenkoeffizienten $\boxed{\beta = \omega/c}$ wird von einer Sinusspannungsquelle mit der Innenimpedanz $\boxed{\underline{Z}_E}$ und der Quellenspannung $\boxed{\underline{U}_0}$ gespeist.

Geben Sie für die ganze Anordnung eine Ersatzspannungsquelle an, d.h. bestimmen Sie allgemein deren Parameter $\boxed{\underline{U}_q}$ und $\boxed{\underline{Z}_i}$.

---

Aus $\underline{U}_1 = \underline{U}_0 - \underline{Z}_E \underline{I}_1$ folgt zusammen mit den angegebenen Zweitorgleichungen

$$\cos(\beta l)\,\underline{U}_2 + j\,\underline{Z}_W \sin(\beta l)\,\underline{I}_2 = \underline{U}_0 - j\frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_W}\sin(\beta l)\,\underline{U}_2 - \underline{Z}_E\cos(\beta l)\,\underline{I}_2\,,$$

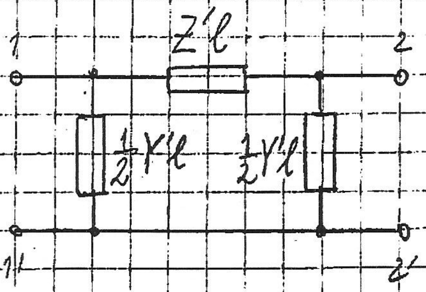
also

$$\left[\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_W}\sin(\beta l)\right]\underline{U}_2 = \underline{U}_0 - \left[\underline{Z}_E\cos(\beta l) + j\,\underline{Z}_W\sin(\beta l)\right]\underline{I}_2\,.$$

Vergleich mit $\underline{U}_2 = \underline{U}_q - \underline{Z}_i \underline{I}_2$ liefert schließlich

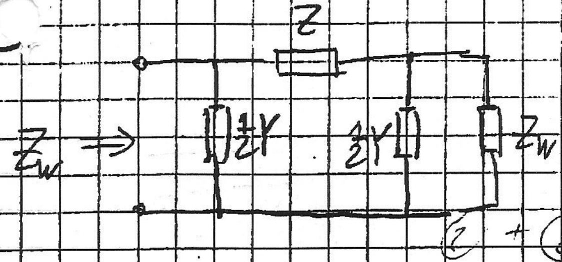
$$\underline{U}_q = \frac{\underline{U}_0}{\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_W}\sin(\beta l)}\,, \qquad \underline{Z}_i = \frac{\underline{Z}_E\cos(\beta l) + j\,\underline{Z}_W\sin(\beta l)}{\underline{Z}_W\cos(\beta l) + j\,\underline{Z}_E\sin(\beta l)}\,\underline{Z}_W\,. \quad \square$$

TE




Ein (relativ kurzes) Stück mit der Länge $l$ einer Leitung, das durch den Längsimpedanzbelag $Z'$ und den Queradmittanzbelag $Y'$ gekennzeichnet ist, soll durch das angegebene Ersatz-Zweitor dargestellt werden. Bestimmen Sie die Wellenimpedanz dieses Ersatz-Zweitors.

---




(2) + (2)

$Y_W = \frac{1}{Z_W}$,

$$Y_W = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{Z + \frac{1}{\frac{1}{2}Y + Y_W}} = \frac{1}{2}Y + \frac{\frac{1}{2}Y + Y_W}{1 + \frac{1}{2}YZ + ZY_W}$$ (4)

$\Rightarrow$

$$\cancel{Y_W} + \cancel{\tfrac{1}{2}YZY_W} + ZY_W^2 = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}Y^2Z + \cancel{\tfrac{1}{2}YZY_W} + \frac{1}{2}Y + \cancel{Y_W}$$

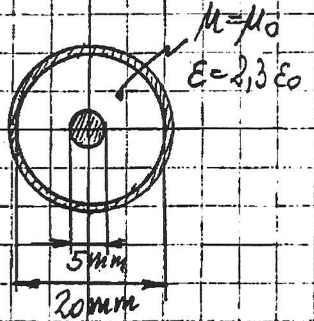
$ZY_W^2 = Y\left(1 + \frac{1}{4}YZ\right)$, d.h.

$$\boxed{Z_W = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}Y'Z'l^2}}}$$ . □

(2)

$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdot \\ - & \cdot \quad \cdot \end{pmatrix}$ $Z_W = \sqrt{Z_1(0)\, Z_{13}(\infty)}$ (4)

$Z_{13}(0)$ $Z_W$




Der Induktivitätsbelag einer Koaxialleitung ist bekanntlich aus

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

zu berechnen, falls die Eindringtiefe hinreichend klein ist. Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung die Wellenimpedanz einer Koaxialleitung mit dem angegebenen Querschnitt.

---

Für TEM-Wellen gilt

$$Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Damit ist

$$\underline{Z_W} = c\,L' = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\ln(D/d)}{2\pi} = Z_0\,\frac{\ln(D/d)}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} = \underline{\underline{54{,}8\ \Omega}}$$

(G2)

Auf einer verlustfreien Koaxialleitung mit der Wellenimpedanz 100 Ω läuft ein rechteckiger Spannungspuls (Scheitelwert 15 V, Dauer 10 ns) mit einer Geschwindigkeit von $2{,}5 \cdot 10^8$ m/s.

(i) Berechnen Sie den Kapazitätsbelag und den Induktivitätsbelag der Leitung.

(ii) Geben Sie den zugehörigen Strompuls an.

(iii) Wie groß ist die Energie, die von dem Puls transportiert wird?

---

(i) $Z_W = \sqrt{L'/C'}$, $c = 1/\sqrt{L'C'}$ =>

$\underline{C'} = \frac{1}{c Z_W} = \underline{40\,pF/m}$, $\underline{L'} = \frac{Z_W}{c} = \underline{0{,}4\,\mu H/m}$

(ii) Rechteckiger Strompuls, Scheitelwert $\frac{\hat{U}}{Z_W} = \frac{15\,V}{100\,\Omega} = \underline{0{,}15\,A}$

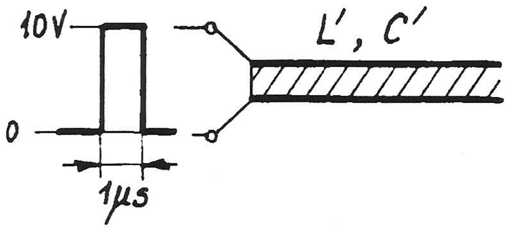
Dauer 10 ns.

(iii) Pulslänge $l = c\,\Delta t = 2{,}5 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 10^{-8} s = 2{,}5\,m$,

$\underline{W} = W_e + W_m = \left(\frac{1}{2}C'U^2 + \frac{1}{2}L'I^2\right)l = C'U^2 l = 40 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 15^2 V^2 \cdot 2{,}5\,m$

$= \underline{2{,}25 \cdot 10^{-8}\,J}$

□



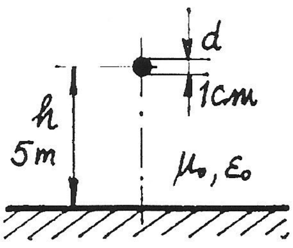

An den Eingang einer langen, verlustfreien Leitung mit den Parameterwerten

$$L' = 0{,}322\,\mathrm{mH/km}, \quad C' = 0{,}138\,\mu\mathrm{F/km}$$

wird ein kurzer Rechteck-Spannungsimpuls gelegt, der dann als Welle entlang der Leitung läuft.

(i) Wie groß ist die elektrische Stromstärke der Welle?

(ii) Wie groß ist die insgesamt transportierte Energie?

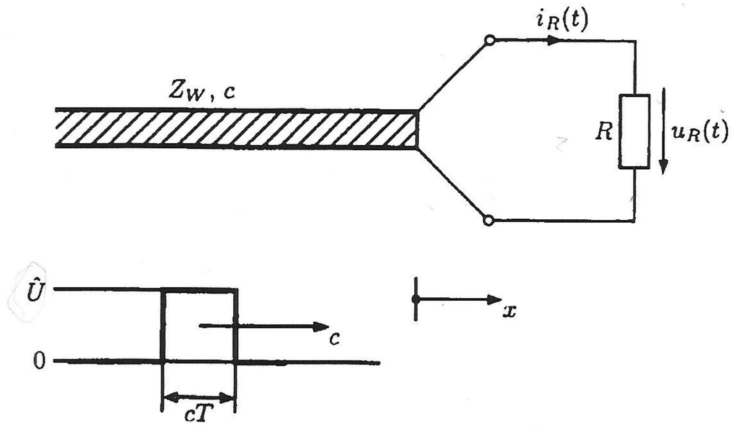



Einem Leiterseil mit dem Durchmesser $d$, das in einer Höhe $h$ parallel zum gut leitfähigen Erdboden verläuft, läßt sich bekanntlich der Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(4h/d)}$$

zuordnen. Schätzen Sie damit unter der Annahme ideal metallischer Randbedingung die TEM-Wellenimpedanz dieser Anordnung ab.

X 11




Auf einer verlustfreien Leitung mit der Wellenimpedanz $Z_W$ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$ läuft die angegebene, rechteckförmige Spannungswelle. Sie trifft zum Zeitpunkt $t = 0$ am Leitungsende ein.
Berechnen Sie allgemein und zeichnen Sie den Zeitverlauf des Stromes $i_R(t)$ im Abschlusswiderstand $R$.