PROJET D'ALGORITHMIQUE

Complexes simpliciaux pour l'analyse topologique des données : Annexes

Décembre 2024 - Février 2024

Ousema Bouaneni, Pierre Sara

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

ANNEXES

1
CORRECTION DE L'ALGORITHME DE WELZL

1.1 - Caractère bien posé du problème

Théorème

La boule minimale englobant P existe et est unique ssi $P \neq \emptyset$ et est borné.

Démonstration

Il est trivial que, que, si P n'est pas borné, alors il ne peut pas exister de sphère minimale englobante.

Existence et unicité : Notons M un majorant la norme des points de P. Posons $f(x) = \sup_{p \in P} \|x - p\|$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$. Soit $\|x - p\| \leq \|x - y\| + \|y - p\| \leq \|x - y\| + f(y)$. Donc $f(x) - f(y) \leq \|x - y\|$. Par symétrie des hypothèses, $f(y) - f(x) \leq \|x - y\|$ donc $|f(y) - f(x)| \leq \|y - x\|$.
Ainsi, f est $1-$lipschitzienne donc continue. On remarque de plus que $B(x, r)$ est une sphère englobante ssi r minimise f et x un point en lequel il est atteint.
On remarque de plus aisément que, si $x \notin B(0, 2M + 1)$, x ne peut minimiser f car, la distance à tout point de P étant supérieure à $M + 1$, $f(x) > M \geq f(0)$.
f étant continue sur le compact $B(0, 2M + 1)$, on a existence et unicité du minimum sur ce compact qui est global avec la remarque précédente.

Autre argument pour l'unicité : Supposons qu'il existe deux boules $B(x, r)$ et $B(x', r')$ de rayon minimal englobant P. Alors, d'une part, $r = r'$ et on a $P \subset B(x, r) \cap B(x', r)$.

Alors on peut fixer $z^* = \frac{1}{2}(x + x')$ et $k = \|z - z^*\| > 0$. Posons $r^* = \sqrt{r^2 - k^2} < r$. Montrons que $B(z^*, r^*)$ englobe P, ce qui contredirait la minimalité des boules précédentes.

Soit $p \in P$. On a alors, avec l'identité du parallélogramme,

$$\begin{aligned}
\|p - z^*\|^2 + \|z - z^*\|^2 &= \frac{\|p + z - 2z^*\| + \|p - z\|}{2} \\
&= \frac{\|p + z'\|^2 + \|p - z\|^2}{2} \text{ en utilisant l'expresion de } z^* \\
&\leq \frac{2r^2}{2} \\
&\leq r^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|p - z^*\|^2 \leq r^2 - \|z - z^*\|^2 = r^2 - k^2$ et donc $p \in B(z^*, r^*)$ d'où l'inclusion.

1.2 - Propriétés sur les combinaisons convexes de boules

Ces résultats ont été démontrés par [1]

Théorème

Si $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$ alors $\lambda B_0 + (1 - \lambda) B_1$ est bien une boule.

Démonstration

Montrons que l'ensemble donné est bien une boule. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On a, en développant les normes et en posant $\alpha = \frac{\lambda}{r_0^1}$ et $\beta = \frac{1-\lambda}{r_1^2}$,

$$\begin{aligned}
\lambda f_0(x) + (1 - \lambda) f_1(x) &= (\alpha + \beta) \|x\|^2 - 2 < x, \alpha x_0 + \beta x_1 > + \alpha \|x_0\|^2 + \beta \|x_1\|^2 \\
&= (\alpha + \beta) \left\|x - \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} x_0 + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta} x_1\right)\right\|^2 + \delta
\end{aligned}$$

avec $\delta = \alpha \|x_0\|^2 + \beta \|x_1\|^2 - \frac{1}{\alpha+\beta} \|\alpha x_0 + \beta x_1\|^2$

Alors, en posant $c = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} x_0 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} x_1$,
$\lambda f_0(x) + (1 - \lambda) f_1(x) \leq 1$ ssi $(\alpha + \beta) \|x - c\|^2 \leq 1 - \delta$

On remarque enfin que, l'intersection étant non vide, il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $f_0(x) \leq 1$ et $f_1(x) \leq 1$ donc $0 < f_{\lambda(x)} \leq 1$ (car soit $f_0(x) > 0$ soit $f_1(x) > 0$ car $x \neq x_0$ ou $x \neq x_1$) ie $0 < \frac{\alpha+\beta}{1-\delta}\|x-c\|^2 \leq 1$ donc $0 < (\alpha+\beta)\|x-c\|^2 \leq 1-\delta$.

Donc $1-\delta > 0$ et $(\alpha+\beta)\|x-c\|^2 \leq 1-\delta$ équivaut à $\frac{\alpha+\beta}{1-\delta}\|x-c\|^2 \leq 1$.
On reconnaît la fonction caractéristique d'une boule de centre c et de rayon $\sqrt{\frac{1-\delta}{\alpha+\beta}} > 0$.
La combinaison convexe est donc bien définie et vérifie bien la propriété voulue par définition de c.

Lemme : Propriétés classiques de la combinaison convexe

En conservant les notations de la définition 2:

i) $B_0 \cap B_1 \subset B_\lambda$
ii) $\partial B_0 \cap \partial B_1 \subset \partial B_\lambda$ où ∂ dénote la frontière.
iii) si B_0 et B_1 sont distincts et $\lambda \in]0,1[$ alors le rayon de B_λ est strictement inférieur au maximum des rayons de B_0 et B_1.

Démonstration

i) Si $x \in B_0 \cap B_1$ alors $f_0(x) \leq 1$ et $f_1(x) \leq 1$ et alors $\lambda f_0(x) + (1-\lambda) f_1(x) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$
ii) Si $x \in \partial B_0 \cap \partial B_1$ alors $f_0(x) = f_1(x) = 1$ et $f_\lambda(x) = 1$. On a donc égalité dans les inégalités obtenues dans la démonstration et donc $\frac{\alpha+\beta}{1-\delta}\|x-c\|^2 = 1$ donc $\|x-c\|$ est égal au rayon donc $x \in \partial B_\lambda$.
iii)

- Si $\partial B_0 \cap \partial B_1 = \emptyset$:

Alors un cercle est inclus dans l'intérieur de l'autre. Par symétrie, supposons que $B_0 \subset \text{Int } B_1$.
Alors, pour tout $x \notin \text{Int } B_1$ alors $f_1(x) \geq 1$ (car $f(x) > 1$ si $x \notin B_1$ et $f(x) = 1$ si $x \in \partial B_1$) et $f_0(x) > 1$ car $x \notin B_0$ et $f_\lambda(x) > \lambda + (1-\lambda) = 1$ donc $x \notin B_\lambda$. Donc, par contraposée, $B_\lambda \subset \text{Int } B_1$. Donc le rayon de B_λ est plus petit que celui que B_1.
- Sinon:

Il existe un point $x \in B_0 \cap B_1$. Pour tout λ, notons r_λ le rayon et $c_\lambda = A x_0 + (1-A) x_A$ avec $A = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ le centre de B_λ. Alors, pour tout λ, $x \in B_\lambda$ et $r_\lambda = \|x - c_\lambda\|$. Or, $\lambda \to c_\lambda$ est une fonction déplaçant le point le long du segment entre x_0 et x_1 comme une combinaison convexe donc $\lambda \to \|x - c_\lambda\|$ est strictement convexe, ce qui donne l'inégalité stricte avec le maximum entre r_0 et r_1.

1.3 - Correction du cas récursif

Les preuves viennent ici de [2] et de [3]

Théorème

Fixons P et R deux ensembles finis de $\mathbb{R}^d$ et $p \in P$. On notera, pour de tels ensembles, $\mathrm{MB}(P, R)$ la boule minimale englobant P avec les points de R de la frontière.

i) S'il existe une boule minimale englobant P avec les points de R sur sa frontière, alors cette boule est unique et donc $\mathrm{MB}(P, R)$ est bien définie.

ii) Si $p \notin \mathrm{MB}(P \setminus \{p\}, R)$ n'est pas dans la boule minimale englobant $P \setminus \{p\}$ avec les points de R sur sa bordure, alors, si $\mathrm{MB}(P, R)$ existe, $\mathrm{MB}(P, R) = \mathrm{MB}(P \setminus \{p\}, R \cup \{p\})$.

iii) Si $\mathrm{MB}(P, R)$ existe, alors il y a un sous-ensemble S de P de cardinal au plus $\max\{0, d + 1 - \#R\}$ tel que $\mathrm{MB}(P, R) = \mathrm{MB}(S, R)$

Démonstration

Le lemme s'applique dans toutes les situations ici car l'intersection des boules en question est non vide car elle inclut P ou R (sauf dans les cas particuliers traités en particulier).

i) Si B_0 et B_1 sont deux boules réalisant ce minimum, alors, pour B_λ la combinaison convexe des deux boules avec $\lambda = \frac{1}{12}$, on a $P \subset B_0 \cap B_1 \subset B_\lambda$ et $R \subset \partial B_0 \cap \partial B_1 \subset \partial B_\lambda$ avec le lemme 2 donc B_λ englobe P avec les points de R sur sa frontière et pourtant a un rayon plus petit que celui de B_0 ou de B_1, ce qui est absurde.
On pouvait également réutiliser la preuve alternative de l'unicité de la boule minimale englobante en remarquant que, pour les points sur la frontière, l'inégalité devient une égalité

ii) Si $R = \emptyset$ et $P = \{p\}$, alors $\mathrm{MB}(P, R) = \mathrm{MB}(P \setminus \{p\}, R \cup \{p\}) = B(p, \emptyset)$. Supposons donc dans la suite ne pas se trouver dans ce cas, ce qui permet d'appliquer le lemme 2. Posons $B_0 = \mathrm{MB}(P \setminus \{p\}, R)$ et $B_1 = \mathrm{MB}(P, R)$. Supposons que $p \neq \partial B_1$. Alors, puisque $f : \lambda \to \partial B_\lambda$ est une déformation continue du cercle ∂B_0 vers ∂B_1, que p est dans l'anneau délimité par ces deux cercles car $p \notin B_0$ et $p \in \mathrm{Int}\ B_1$ par hypothèse, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $p \in \partial B_\lambda$. Alors, comme pour le raisonnement précédent, on a $P \subset B_\lambda$ (p aussi) et $R \subset \partial B_\lambda$ donc $R \cup \{p\} \subset \partial B_\lambda$ mais B_λ a un rayon strictement plus petit que B_0 ou B_1, ce qui est absurde dans les deux cas.

iii) On peut reprendre la preuve de Welzl : si les points sont affinement indépendants, on peut prendre S l'ensemble des points sur la frontière de $\mathrm{MB2}(P, R)$ sinon on perturbe légèrement les points et on prend les antécédents d'un certain nombre de points.

La preuve vient par induction structurelle: Le résultat à montrer étant que « Pour tout ensembles P de cardinal n et R issus d'un appel de la fonction principale, $\mathrm{mb}(P, R)$ existe et est le résultat renvoyé in fine par $\mathrm{meb\_acc}(P, R)$ ».

- Si $n = 0$, alors le résultat est trivialement vrai et assuré par une fonction hors de l'algorithme de Welzl
- Pour $n \geq 0$, si $\#R = d + 1$, c'est à nouveau trivial. Sinon, si on note p le point choisi par l'appel $\mathrm{meb\_acc}(P, R)$, l'hypothèse de récurrence montre l'existence de $\mathrm{meb\_acc}(P \setminus \{p\}, R)$ et de $\mathrm{meb\_acc}(P \setminus \{p\}, R \cup \{p\})$, et le point ii) du lemme 2 justifie la rigueur de la disjonction de cas qui y est faite.

1.4 - Correction du cas de base

On reprend les notations du rapport.

Lemme

Le centre de $\mathrm{MB}(\emptyset, R)$, s'il existe, est nécessairement dans le sous-espace affine engendré par les points de R.

Démonstration

Notons $B(x, r) = \mathrm{MB}(\emptyset, R)$. Notons $\mathcal{P}$ le sous-espace affine engendré par les points de R et $d = d(x, \mathcal{P})$ ainsi que x^* le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{P}$.
Alors, pour tout $p \in R$, $r = d(p, x) = d(p, x^*) + d(x, \mathcal{P})$ donc $p \in \partial B(x^*, r - d(x, \mathcal{P}))$.
Cette boule vérifie donc les conditions souhaitées mais avec un rayon strictement inférieur car $d(x, \mathcal{P}) > 0$, ce qui est absurde.

Lemme

A est inversible ssi $(p_0, \ldots, p_n)$ est affinement indépendante

Démonstration

- Par contraposée, supposons A non inversible. Il existe donc $\mu_0, \ldots, \mu_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=0}^{n} C_j = \mu_{n+1} C_{n+1}$ où les C_j sont les colonnes de A.

Ainsi, pour tout $0 \leq i \leq n$, $2 \sum_{j=0}^{n} \mu_j \left(\overrightarrow{Op_i}, \overrightarrow{Op_j}\right) = \mu_{n+1}$ et, avec la dernière ligne, $\sum_{i=0}^{n} \mu_j = 0$.

Si tous les μ_j étaient nuls pour $0 \leq j \leq n$ alors, en prenant la condition pour $i = 0$, $\mu_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 0 = 0$ ce qui contredirait le fait qu'ils sont non tous nuls.

D'autre part, en soustrayant à toutes les équations l'équation pour $i = 0$ et en utilisant la relation de Chasles, il vient, pour tout $0 \leq i \leq n$, $2 \sum_{j=0}^{n} \mu_j \left(\overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{0 p_j}\right) = 0$. En remarquant que $\left(\overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{0 p_j}\right) = \left(\overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{0 p_0}\right) + \left(\overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{p_0 p_j}\right)$ et en utilisant le fait que $\sum_{j=0}^{n} \mu_j = 0$, il vient $\sum_{j=0}^{n} \mu_j \left(\overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{p_0 p_j}\right) = 0$. Donc $\| \sum_{j=0}^{n} \mu_j \overrightarrow{p_0 p_j} \|^2 = \sum_{i,j} \left(\overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{p_0 p_j}\right) = 0$ donc $\sum_{j=0}^{n} \mu_j \overrightarrow{p_0 p_j} = \vec{0}$ avec $\mu_0, \ldots, m_n$ non tous nuls.

Lemme

Lors des appels récursifs réalisés par la fonction principale, l'ensemble des points sur la frontière est toujours affinement libre.

Démonstration

Si, par l'absurde, ce n'était pas le cas, alors, à un des appels, $R = \{p_0, \ldots, p_n\}$ est libre mais on y ajoute p_{n+1} qui ne l'est pas. S'il y a cet ajout, c'est donc que p_{n+1} était à l'extérieur strict de $\mathrm{MB}(P \setminus (R \cup \{p\}), R)$ où P est l'ensemble des points de départ.
Donc $R' = R \cup \{p_{n+1}\}$ forme un espace affine de dimension n donc, d'après le théorème de Carathéodory, on peut prendre $n + 1$ points comme sommets de l'enveloppe convexe dont l'un d'eux sera p_{n+1} (car sinon il aurait été à l'intérieur de la sphère formée précédemment). On peut donc exprimer un des points $p_0, \ldots, p_n$, ici par exemple p_0, comme combinaison convexe des autres : $p_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i$. En notant c le centre de la sphère et r son rayon, on obtient alors $r = \|\overrightarrow{cp_0}\| \leq r \sum \lambda_i = r$ par inégalité triangulaire. Puisqu'on a égalité dans l'inégalité, cela impliquerait que les $\overrightarrow{cp_i}$ sont tous colinéaires, ce qui est absurde par indépendance affine de R.

1.5 - Lien avec les complexes de Cech

Lemme

Soit $P = \{p_0, ..., p_n\}$ un ensemble de points. Alors le simplexe C formé à partir des points de P est un complexe de Cech de valeur de filtration le rayon de $\mathrm{meb}(P)$.

Démonstration

Soit $r > 0$. P est un complexe de Cech de valeur de filtration $\leq r$ ssi il existe $c \in \bigcap_{p \in P} B(p, r)$ ssi $B(c, r)$ est une boule englobante de P ssi $r \geq r^*$ où r^* est le rayon de $\mathrm{meb}(P)$.

2
Les α −complexes

2.1 - Lien avec un problème de boules minimales

On définit ici $\mathrm{MB2}(P, R)$ comme une boule de rayon minimal possédant les points de R sur sa frontière et aucun point de P dans son intérieur si elle existe.

2.1.1 • Lien avec un autre problème de boule minimale englobante

Lemme

Soit P_0 un ensemble de points, $R \subset P$ et $P = P_0 \setminus R$. Alors le simplexe C formé à partir des points de R est un α −complexe de P_0 ssi MB2(P, R) existe et alors sa valeur de filtration est le rayon de cette boule.

Démonstration

C est un tel α −complexe de valeur de filtration ssi il existe $r > 0$ tel que $c \in \bigcap_{p \in R} B(p, r) \cap V(p)$ où $V(p)$ est la cellule de Voronoï associée à p. Ainsi, C est un α −complexe ssi $c \in \bigcap_{p \in R} V(p)$ ssi c est à équidistance d de tous les points de R et qu'il n'est dans l'intérieur d'aucune cellule de Voronoï de P ssi c est à distance d de tous les points de R est n'est pas plus proche d'un des points de P que d'un des points de R (sinon elle serait dans une telle cellule de Voronoï) ssi $B(c, d)$ englobe tous les points de R à sa frontière et n'a aucun point de P (ou de P_0 de façon équivalente) dans son intérieur strict. On en déduit immédiatement la valeur de filtration en passant au minimum sur d.

2.2 - Correction de l'algorithme modifié

Une autre propriété des combinaisons convexes

En conservant les notations de la définition des boules convexes, $B_\lambda \subset B_0 \cup B_1$

Démonstration

Par contraposée, fixons $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \notin B_0 \cup B_1$.
Notons $B_\lambda = B(c, r)$.
On utilisera les notations du calcul montrant la bonne définition de B_λ. Ce calcul montre que $r^2 = \frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \|x_0\|^2 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \|x_1\|^2 + \|c\|^2$.
Or, $\|x - c\|^2 = \|x\|^2 + \|c\|^2 - 2\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(x, x_0) - 2\frac{\beta}{\alpha+\beta}(x, x_1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\|x\|^2 - 2(x, x_0)) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(\|x\|^2 - 2(x, x_1))$.
Il vient alors $\|x - c\|^2 - r^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\|x - x_0\|^2 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\|x - x_1\|^2 - \frac{1}{\alpha+\beta} > \frac{\alpha}{\alpha+\beta}r_0^2 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}r_1^2 - \frac{1}{\alpha+\beta}$.
En utilisant la définition de α et β, on obtient $\|x - c\|^2 - r^2 > \frac{\lambda r_0^2 + (1-\lambda) r_1^2 r_0^2}{\lambda r_0^2 + (1-\lambda) r_1^2} -$

$\frac{r_0^2+r_1^2r_0^2}{\lambda r_0^2+(1-\lambda)r_1^2} \geq 0.$
Donc $x \notin B_\lambda$.

Théorème

Fixons P et R deux ensembles finis de $\mathbb{R}^d$ et $p \in P$.

i) S'il existe une boule minimale excluant P avec les points de R sur sa frontière, alors cette boule est unique et donc $\mathrm{MB2}(P, R)$ est bien définie.

ii) Supposons que $B = \mathrm{MP2}(P \setminus \{p\}, R)$ existe et que $p \in \mathrm{Int}(B)$. Alors $\mathrm{MP2}(P, R)$ existe ssi $\mathrm{MP2}(P \setminus \{p\}, R \cup \{p\})$ existe et alors les deux boules sont égales.

iii) Si $\mathrm{MB2}(P, R)$ existe, alors il y a un sous-ensemble S de P de cardinal au plus $\max\{0, d + 1 - \#R\}$ tel que $R \subset S$ et $\mathrm{MB2}(P, R) = \mathrm{MB2}(\emptyset, S)$

Démonstration

Le lemme s'applique dans toutes les situations ici car l'intersection des boules en question est non vide car elle inclut R non vide par définition.

i) Si B_0 et B_1 sont deux boules réalisant ce minimum, alors, pour B_λ la combinaison convexe des deux boules avec $\lambda = \frac{1}{12}$, on a $P \subset B_0 \cap B_1 \subset B_\lambda$ et $R \subset \partial B_0 \cap \partial B_1 \subset \partial B_\lambda$ avec les propriétés classiques. La propriété précédente sur les combinaisons convexes montre que $P \not\subset B_\lambda$ puisque $P \not\subset B_0 \cup B_1$. B_λ réalise donc toutes les propriétés voulues mais a un rayon strictement plus petit que celui de B_0 ou de B_1 ce qui est absurde.
On pouvait également réutiliser la preuve alternative de l'unicité de la boule minimale englobante en remarquant que, pour les points sur la frontière, l'inégalité devient une égalité et une inégalité dans l'autre sens pour les points à l'extérieur des deux boules.

ii) Le sens réciproque est trivial. Pour le sens direct, notons $B_2 = \mathrm{MP2}(P, R)$ supposons par l'absurde que $p \notin \partial B_2$. Puisque $p \in B$ et $p \notin B_2$, on peut montrer comme dans le point ii) du lemme 4 qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $p \in \partial(\lambda B + (1 - \lambda)B_2)$. Alors, $B_\lambda = \lambda B + (1 - \lambda)B_2$ a, par propriétés des combinaisons convexes, les points de R sur sa frontière, les points de P à l'extérieur et pourtant son rayon est strictement plus petit ($\lambda \in]0, 1[$) que le plus grand des deux rayons qui est celui de B_2 par définition de B et B_2.
L'égalité découle alors également de la remarque précédente : si les deux boules sont distinctes, on peut en trouver une plus petite de la même façon.

iii) Si $\#P \leq d + 1$ on peut prendre $S = P$. Sinon, soit r le rayon de $\mathrm{MB2}(P, R)$. Notons, pour tout $p \in P$, notons $B_p = B_O(p, r)$. Supposons alors par l'absurde qu'il n'existe aucun tel sous-ensemble P' de cardinal $d + 1$ tel que $\mathrm{MB2}(P', R) = \mathrm{MB2}(P, R)$. Alors le rayon de $\mathrm{meb}(P')$ est strictement inférieur à celui de $\mathrm{meb}(P)$ par unicité de la boule minimale englobante. Alors $\bigcap_{p \in P'} B_p \neq \emptyset$ car le centre de $\mathrm{meb}(P')$ est dans cette intersection et ceci pour tout sous-ensemble de cardinal $d+1$. Donc, puisqu'on a au moins $d+2$ boules B_p trivialement convexes, le théorème de Helly montre qu'il existe $c \in \bigcap_{p \in P} B_p$ mais alors $r' = \min_{p \in P}\{\|p - c\|\} < r$ car P est un ensemble fini et $P \subset B(c, r')$, ce qui contredit la minimalité de r et est donc absurde.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Fischer, « Smallest enclosing balls of balls », Zürich, Switzerland, 2005.

[2] E. Welzl, « Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids) », in *New Results and New Trends in Computer Science*, H. Maurer, Éd., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991, p. 359-370.

[3] M. Hoffmann, « Geometry: Combinatorics & Algorithms ». [En ligne]. Disponible sur: http://geometry.inf.ethz.ch/gca18-g.pdf