Chapitre : Théorie de graphes

Définitions et représentations des graphes

Pr. Aissam Hadri

2023-2024

Plan

- *Définitions des concepts utilisés dans toute la suite du cours*
- *Définition d’un graphe*
- *Diverses représentations d’un graphe soient graphiques, matricielles ou par listes.*
- *le concept de degré d'un sommet.*
- *Une étude des différents types de parcours que l'on peut emprunter dans un graphe*

Graphes non orientés

- La définition d'un graphe non orienté correspond tout à fait à l'idée que l'on s'en fait intuitivement : un ensemble de points, dont certains sont reliés par des lignes parcourables dans les deux sens.

Définition

Un **graphe non orienté** G=(V,E) est la donnée :

1- D'un ensemble V dont les éléments sont appelés les **sommets** du graphe.

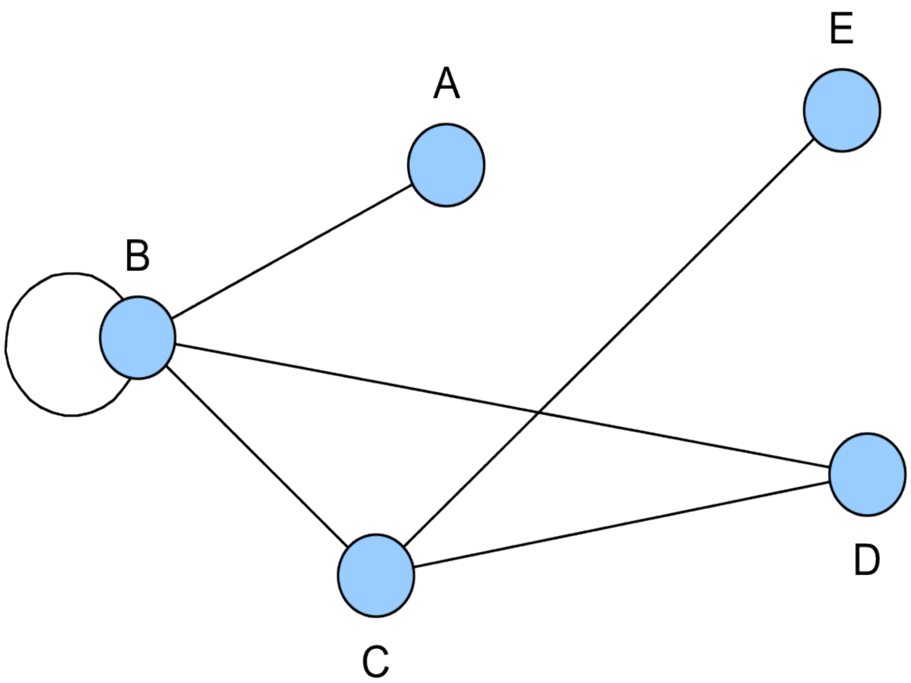
2- D'un ensemble E dont les éléments sont des **parties** à un ou deux éléments de V, et sont appelés les **arêtes** du graphe.

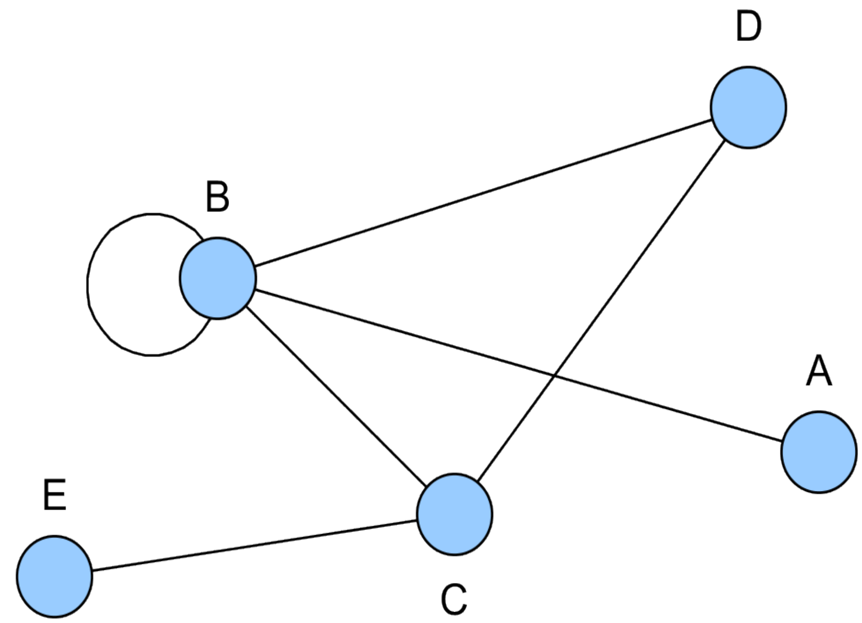
Exemple : Un graphe non orienté

- Pour définir un graphe non orienté, il faut donc commencer par décrire l'ensemble de ses sommets :
  - ✓ V={A,B,C,D,E}
  - ✓ On peut alors donner l'ensemble de ses arêtes E={{A,B},{B},{B,C},{B,D},{C,D},{E,C}}

- Remarques :
  - ✓ L'ordre des éléments n'a pas d'importance. Ainsi {A,B}={B,A}. On définit donc bien un graphe non orienté, dans la mesure où les arêtes n'ont pas de sens de parcours.

Représentation graphique : Représentation sagittale





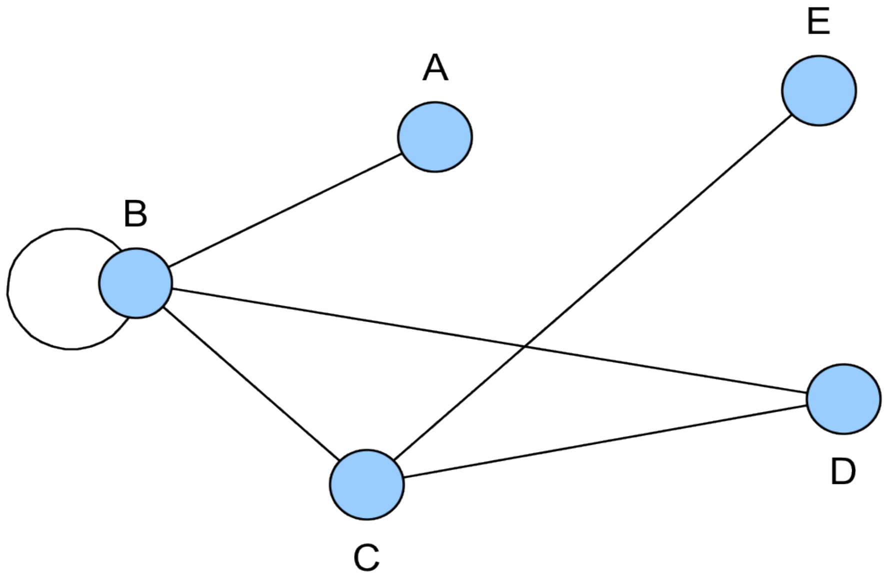
Deux représentations équivalentes

vocabulaire complémentaire

Définitions:

- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
- Une **boucle** est une arête ne possédante qu'un seul élément.
- Un graphe ne comportant pas de boucles est un graphe **simple**.

Exemple: soit G le graphe suivant



- Les sommets D et C sont **adjacents** car le graphe G comporte l'arête {C,D}.
- **L'ordre** du graphe G est égal à **5**.
- Le graphe G n'est pas un **graphe simple** car il comporte une boucle, l'arête {B}.

Graphes orientés

- Ce qui va différer avec les **graphes orientés** est que l'on va imposer une direction sur les liaisons entre sommets.

Définition :

Un **graphe orienté** G=(V,E) est la donnée :

1- D'un ensemble V dont les éléments sont appelés les **sommets** du graphe.

2- D'un ensemble E dont les éléments sont des **couples** d'éléments de V, et sont appelés les **arcs** du graphe.

Exemple : Un graphe orienté

- Pour définir un graphe orienté, il faut donc commencer par décrire l'ensemble de ses **sommets** :

$$V=\{A,B,C,D,E\}$$

- On peut alors donner l'ensemble de ses **arcs** :

$$E=\{(A,A),(A,B),(B,D),(C,B),(C,D),(D,C),(E,A)\}$$

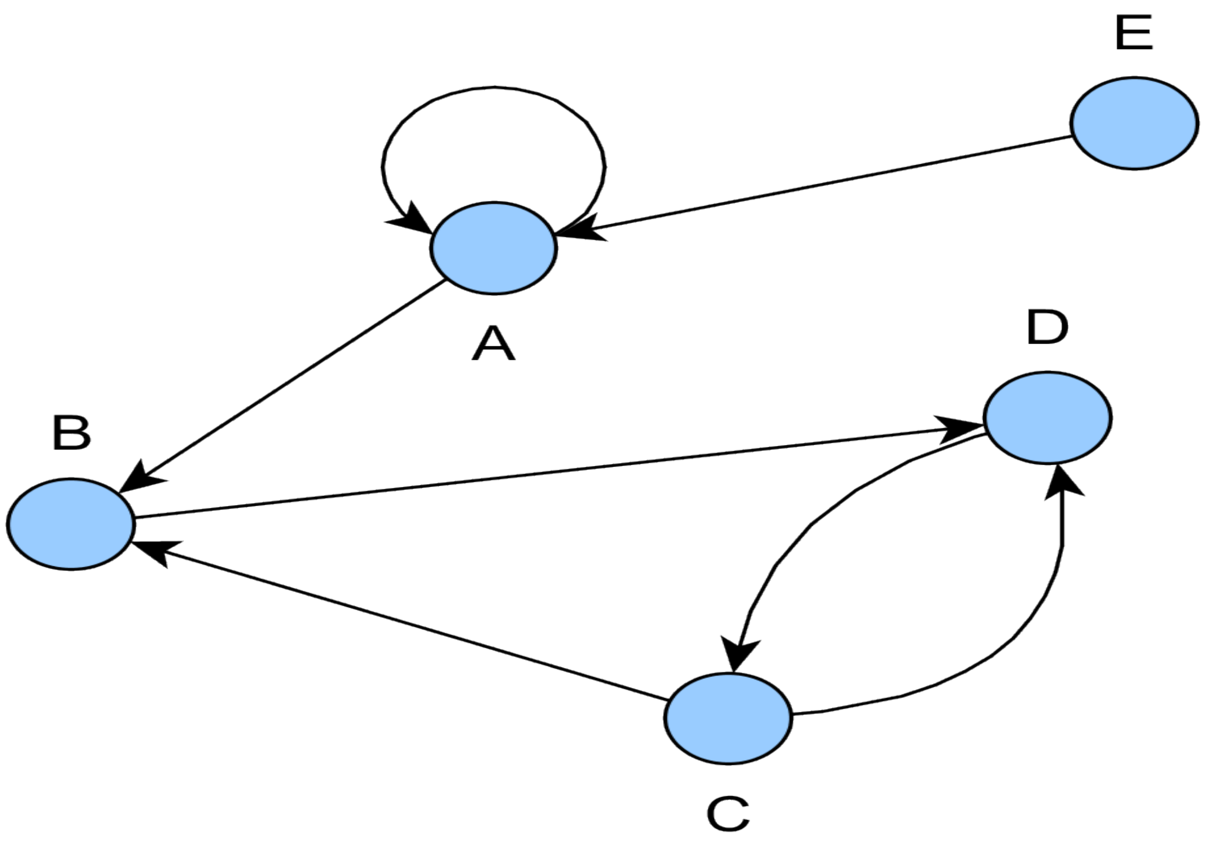
Remarque:

✓ l'ordre des éléments importe dans un couple.

Ainsi $(A,B)\neq(B,A)$.

✓ On définit ainsi une **orientation** dans le graphe, puisque les arcs possèdent un sens de parcours.

Représentation graphique permettra une meilleure appréhension.



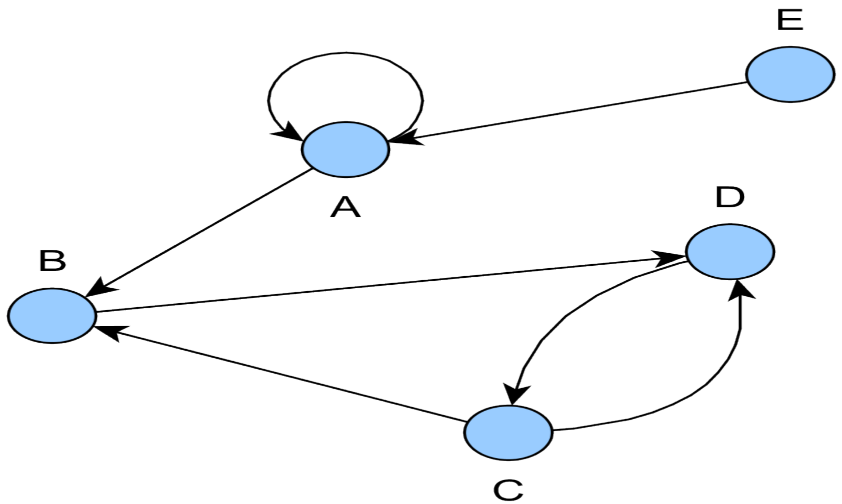
- On définit les notions de **boucle**, de **graphe simple** et d’**ordre** comme dans le cas des graphes non orientés.
- Par contre la notion de sommets adjacents n'a plus lieu d'être, il faut la substituer par un concept prenant en compte l'orientation.

Définition:

En présence d'un arc de la forme (x,y)

- On dit que y est un **successeur** de x et que x est un **prédécesseur** de y.
- On dit également que x est l’**origine** de l’arc (x,y) et que y est son **extrémité**.

Soit G le graphe orienté suivant :



- *Le graphe G possède l'arc (B,D) donc B est un prédécesseur de D et D un successeur de B.*
- *Le sommet E est l'origine de l'arc (E,A) et A son extrémité.*
- *L'ordre du graphe G est égal à 5.*
- *Le graphe G n'est pas un graphe simple car il comporte une boucle, l'arc (A,A).*

Graphes complets

- Dans un **graphe complet** tous les sommets sont reliés entre eux.

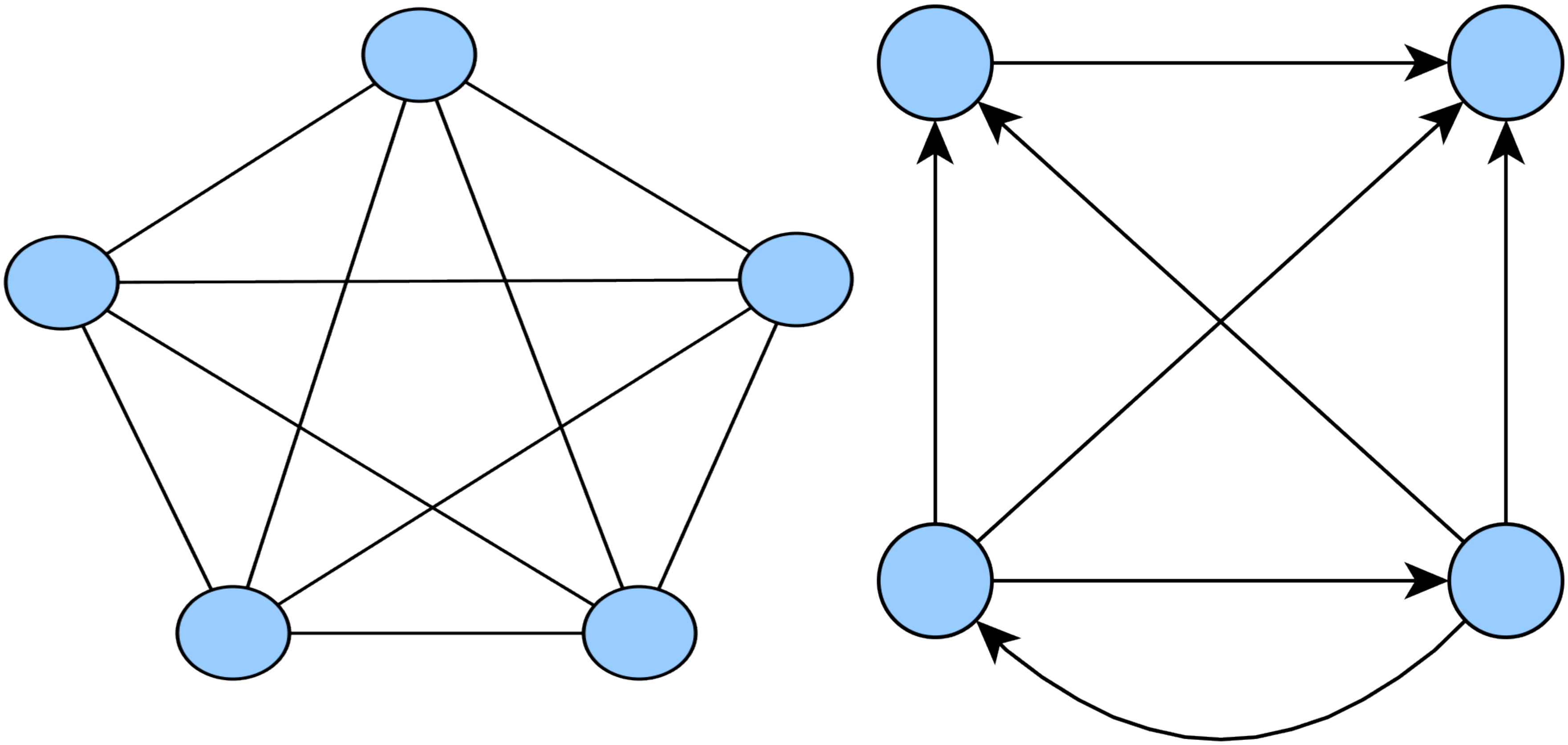
Définition

✓ Un graphe non orienté est **complet** s'il est simple et si deux sommets quelconques sont reliés par une arête.

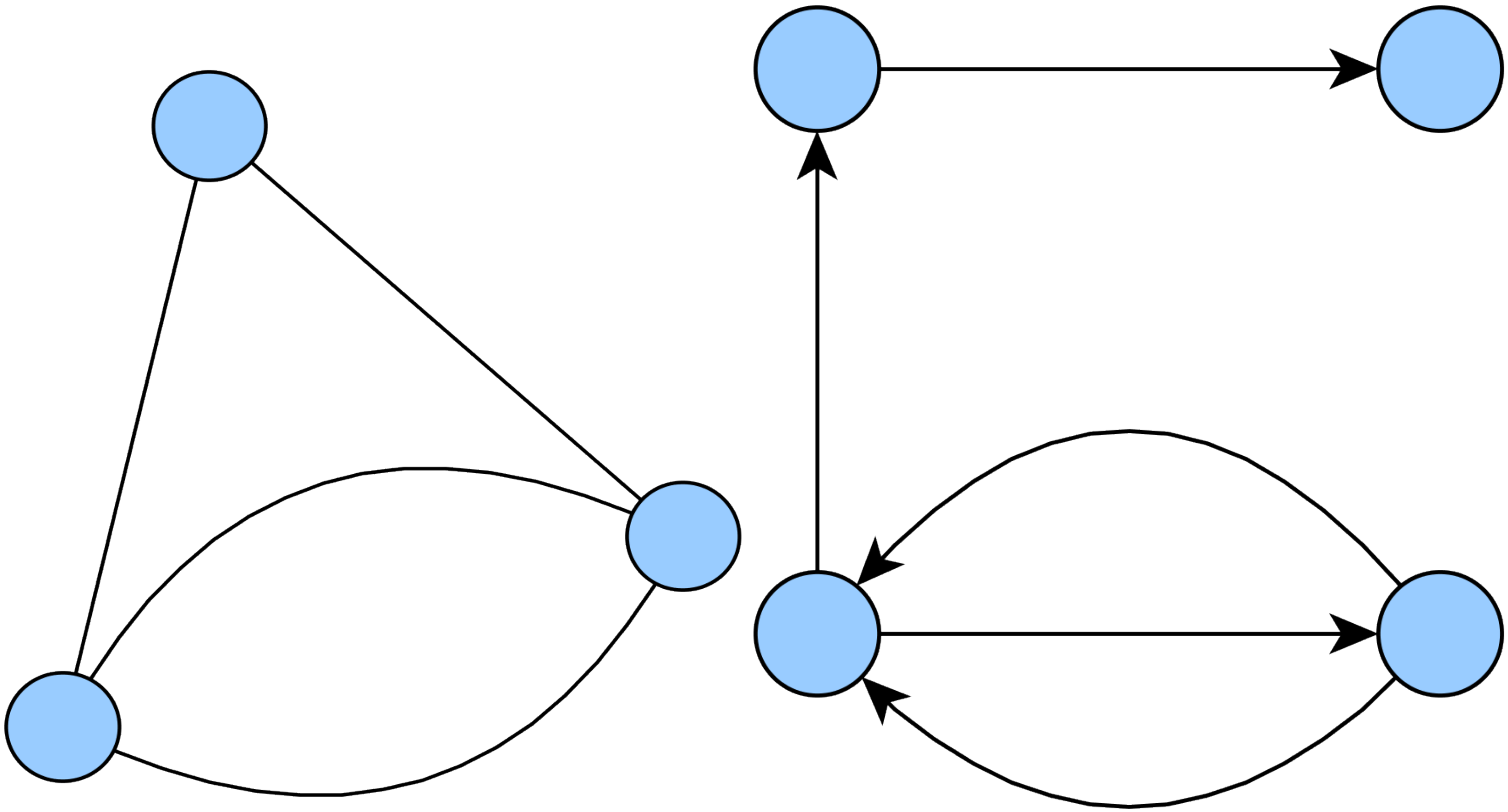
✓ Un graphe orienté est **complet** s'il est simple et si pour toute paire de sommets {x,y}, il existe au moins un des deux arcs (x,y) ou (y,x).

- La notion de graphe complet ne fait donc pas intervenir l'éventuelle orientation du graphe, même si usuellement elle est utilisée pour des graphes non orientés.

Graphe complet orienté et non orienté



Multigraphes



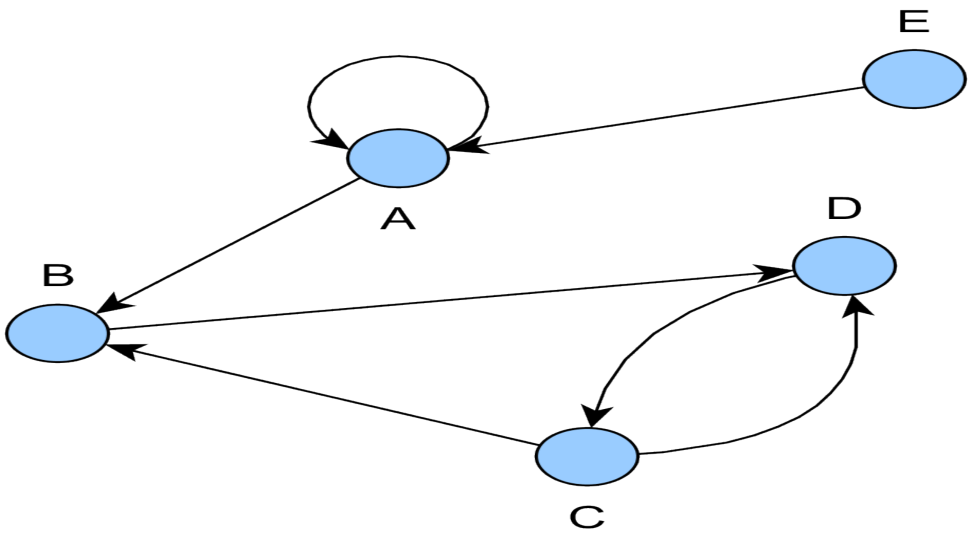
sous-parties d'un graphe existant

Définitions

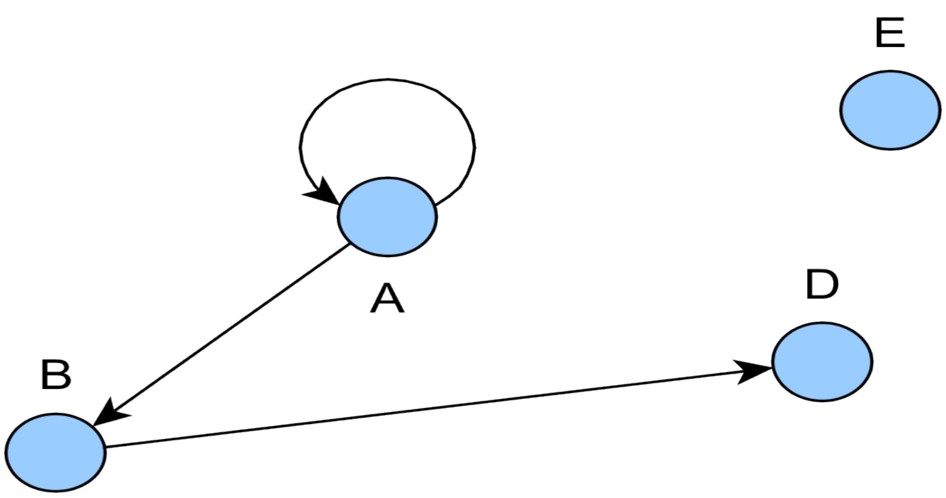
Soit G=(V,E) un graphe orienté ou non.

- Un graphe G′=(V′,E′) est un **sous-graphe** de G si V′⊆V et E′⊆E.
- Un **sous-graphe recouvrant** de G est un sous-graphe de la forme G′=(V,E′), *i.e.* un sous-graphe de G possédant tous les sommets de G.
- Un **sous-graphe induit** de G est un sous graphe G′=(V′,E′) dont les arêtes ou arcs sont toutes celles de G ayant leurs extrémités dans V′.

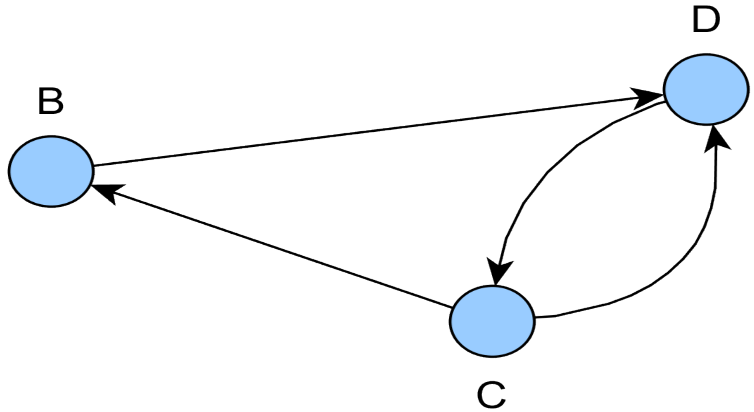
Soit G le graphe suivant



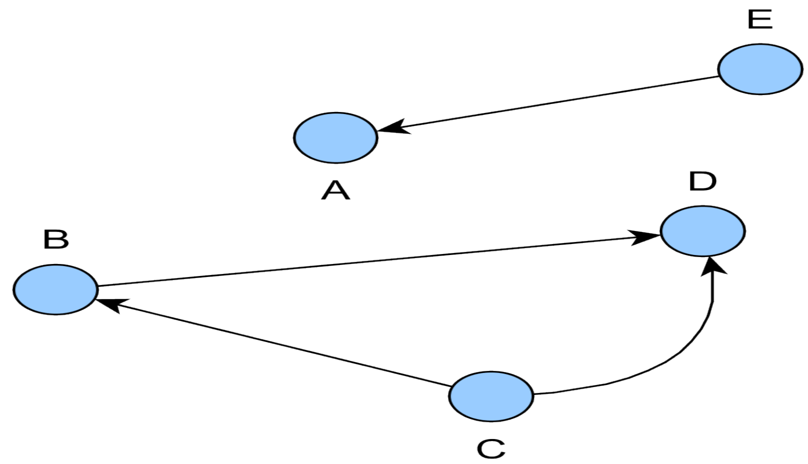
un **sous-graphe** de G, constitué donc de certains sommets et arcs de G



sous-graphe, suivant, de G ne comporte que trois sommets B,C,D. Il est **induit**, car il contient tous les arcs de G ayant B,C ou D pour extrémités :



Le **sous-graphe,** ci-dessous, de G est **recouvrant** car il possède tous les sommets de G



Définition :

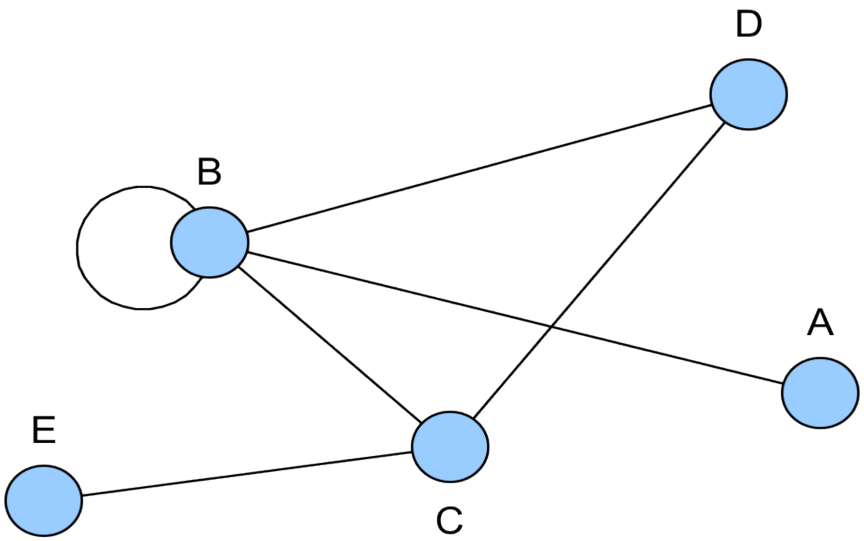
Soit G un graphe orienté ou non.

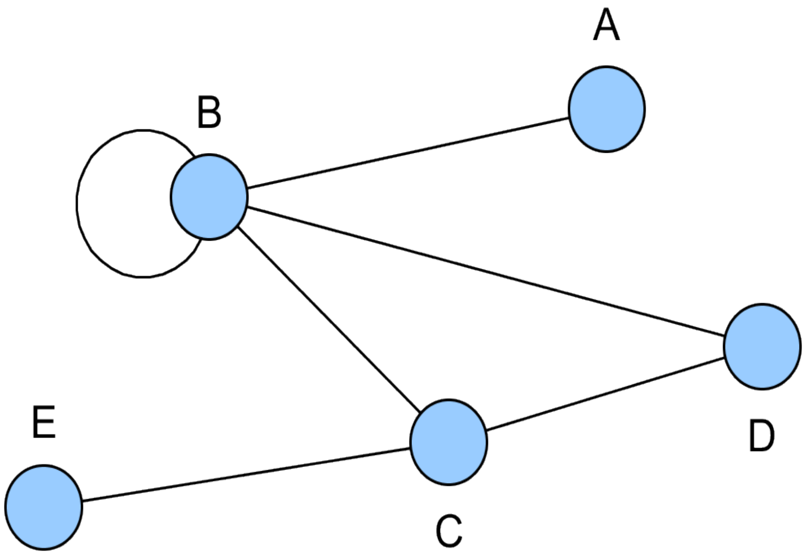
On dira que G est **planaire** s'il admet une représentation sagittale où ses arêtes (ou arcs) ne se coupent pas.

Remarque :

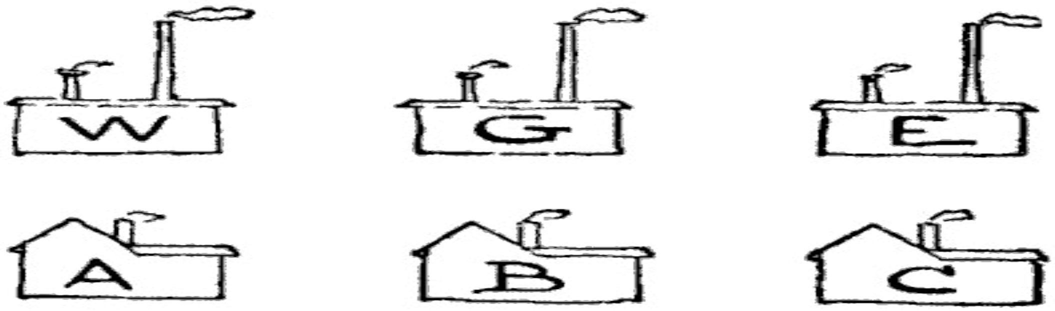
- « ne se coupent pas » on sous-entend bien sûr en dehors des sommets
- On n'étudiera pas de façon exhaustive les graphes planaires dans ce cours. C'est une q**uestion assez difficile**. On se contentera donc principalement d'exemples.

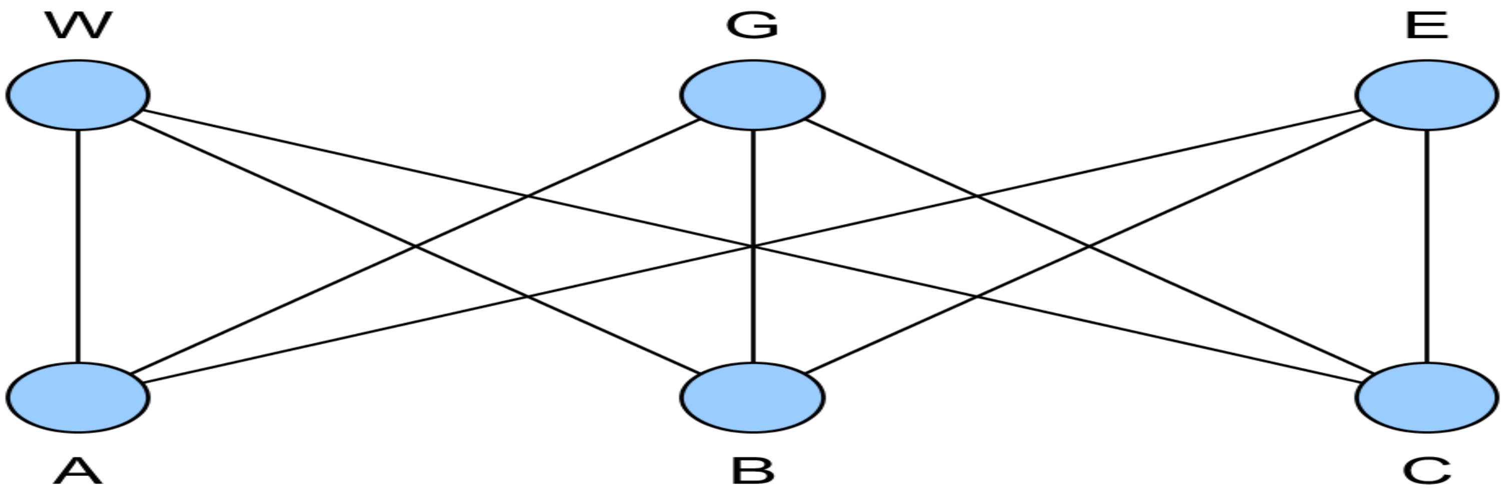
Ce graphe est planaire





Un petit **casse-tête** très célèbre, proposé par l'américain **Henry Dudeney** en 1917 dans son livre *Amusements in mathematics*.

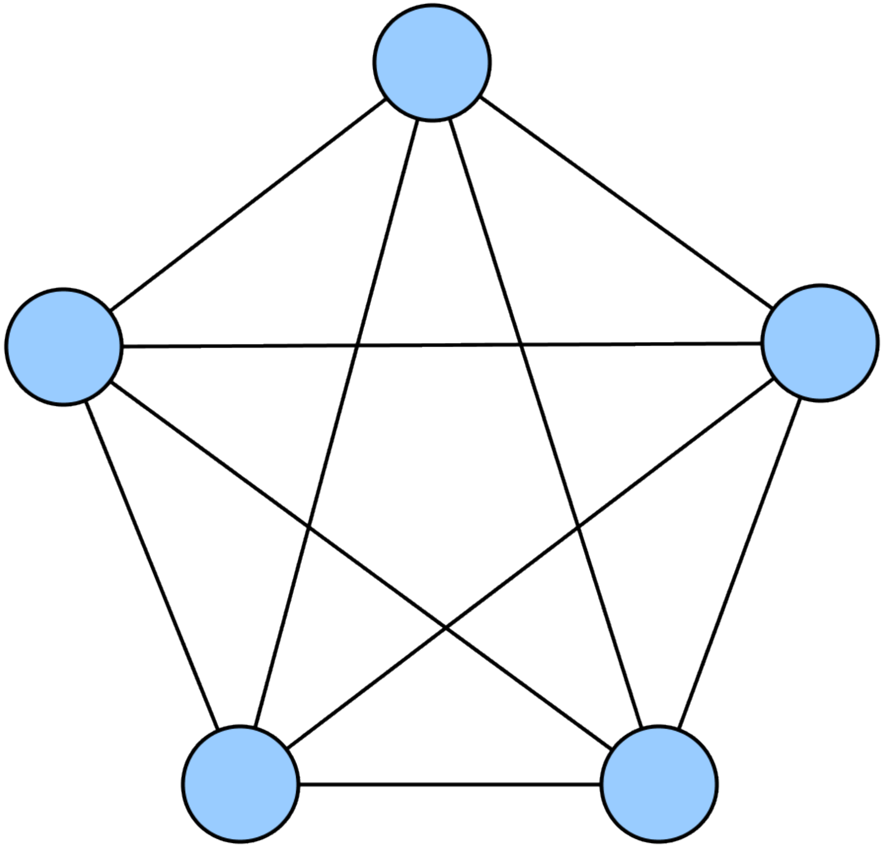




- La question peut alors se reformuler comme suit : le graphe précédent est-il planaire ?
- Non

- Dans le même genre d'idées, se demander si un graphe est planaire ou non est un problème intéressant lors de la conception de circuits imprimés.

Le graphe suivant est-il planaire ?



non

Autres représentations

- La seule représentation d'un graphe que nous connaissons pour le moment est sa représentation sagittale.
- Elle est certes intéressante pour l'humain mais bien sûr inexploitable par un ordinateur.
- L'enjeu de cette seconde partie va donc être de proposer des modélisations utilisables lors du développement d'**algorithmes**.

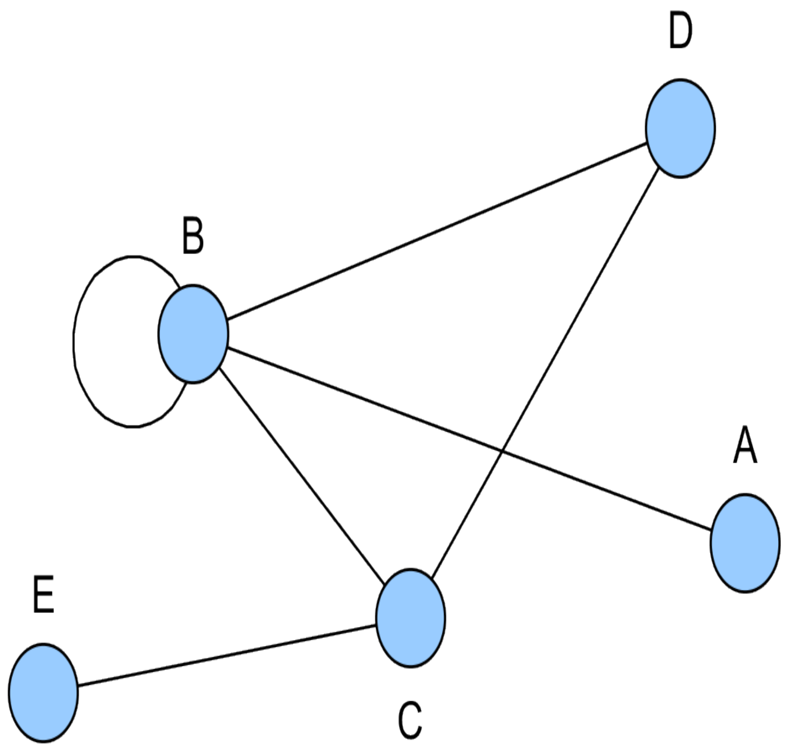
Listes d’adjacence

- **Définition**

Considérons un graphe orienté ou non.

- On peut le représenter par ses **listes d'adjacences**.
- Il s'agit pour chacun des sommets du graphe de donner la liste de ses sommets adjacents (cas non orienté) ou la liste de ses sommets successeurs (cas orienté).

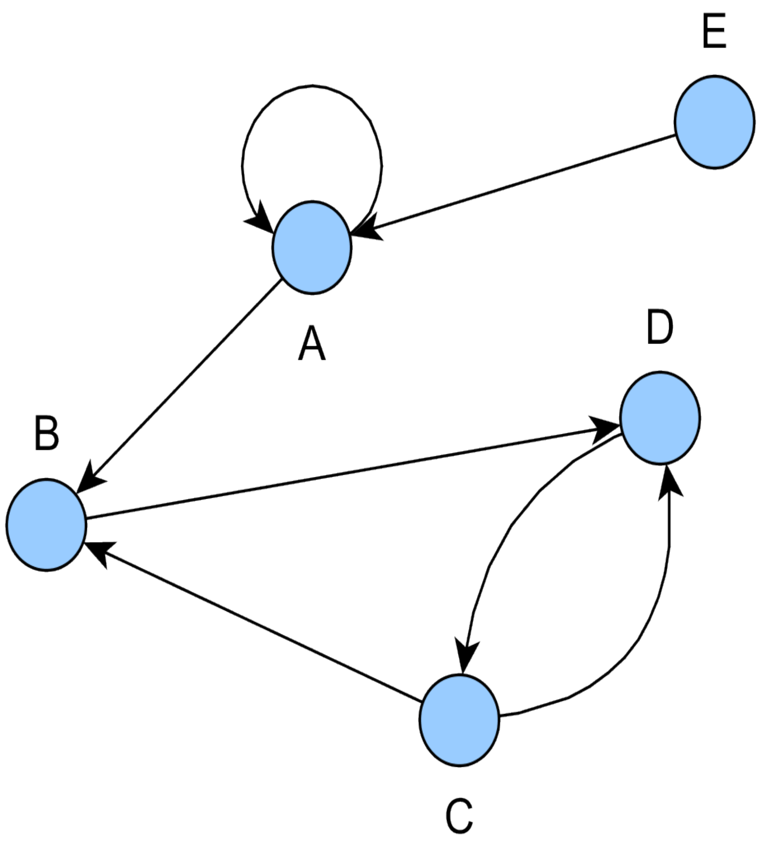
Listes d’adjacences d’un graphe non orienté



Sa représentation par **listes d'adjacences**

A:[B]
B:[A,B,C,D]
C:[B,D,E]
D:[B,C]
E:[C]

Listes d’adjacences d’un graphe orienté



sa représentation par **listes d'adjacences**

A:[A,B]
B:[D]
C:[B,D]
D:[C]
E:[A]

Matrice d’adjacence

- Considérons un graphe orienté ou non d’ordre n dont on a numéroté les n sommets.

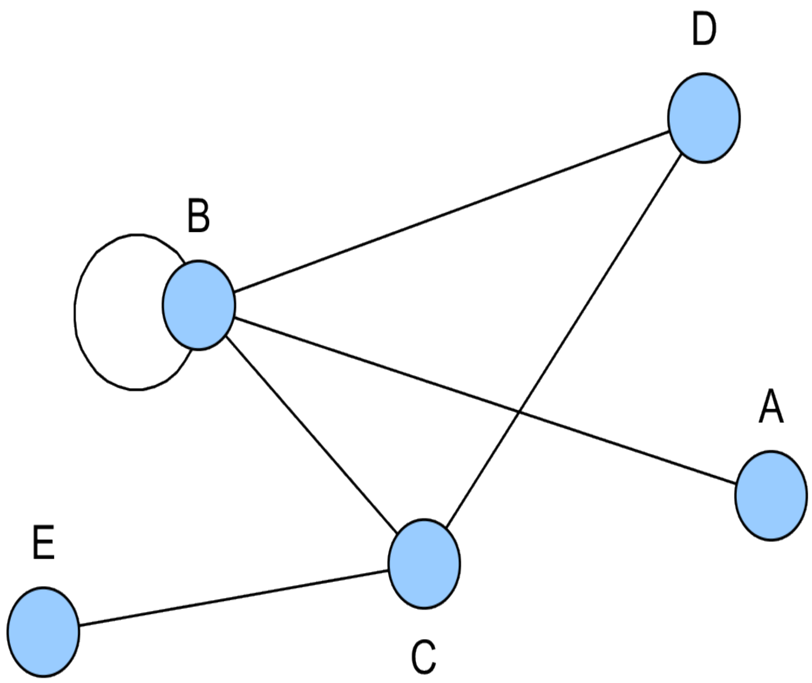
- On peut le représenter par sa **matrice d’adjacence**, qui est une matrice carrée d'ordre n , *i.e.* une matrice comportant n lignes et n colonnes.

Matrice d’adjacence

- Cas **non orienté**
- le coefficient de cette matrice situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j-ème colonne vaut

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ les\ i\ eme\ \ et\ j\ eme\ sommets\ sont\ adjacents \\ 0\ \ sinon & \end{cases}$$

Matrice d'adjacence d'un graphe non orienté



Sa matrice adjacence

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ici les sommets ne sont pas numérotés mais classés par ordre alphabétique, ce qui est la même chose.
- Par exemple, la valeur 1, située à l'intersection de la quatrième ligne et de la troisième colonne signifie que les sommets D et C sont adjacents.

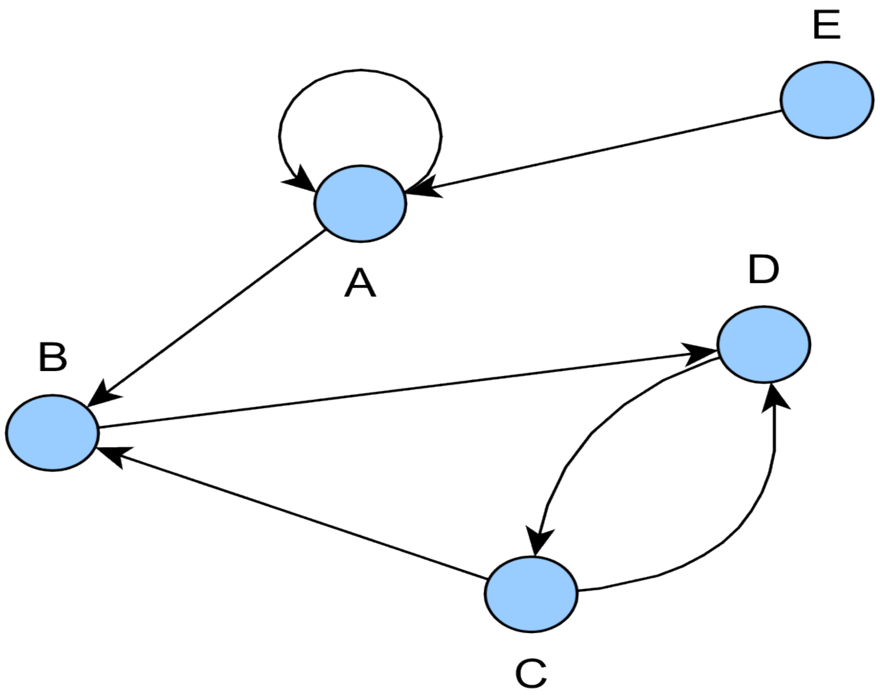
- On remarquera que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est nécessairement **symétrique**.

Matrice d’adjacence

- Cas **orienté**
- le coefficient de cette matrice situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j-ème colonne vaut

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \quad s'il\ existe\ un\ arc\ dont\ le\ ieme\ \ sommet\ \ est\ l'origine \\ et\ \ le\ jieme\ sommet\ est\ l'extremité \\ 0\ \ sinon \end{cases}$$

Matrice d’adjacence d’un graphe orienté



sa **matrice d'adjacence**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Là encore les sommets sont classés par ordre alphabétique.
- Par exemple la valeur 1, située à l’intersection de la cinquième ligne et de la première colonne signifie qu'il existe un arc d'origine E et d'extrémité A.
- Dans le cas d'un graphe orienté, la matrice d'adjacence n'a bien sûr plus de raison d'être symétrique.

Matrice d’incidence

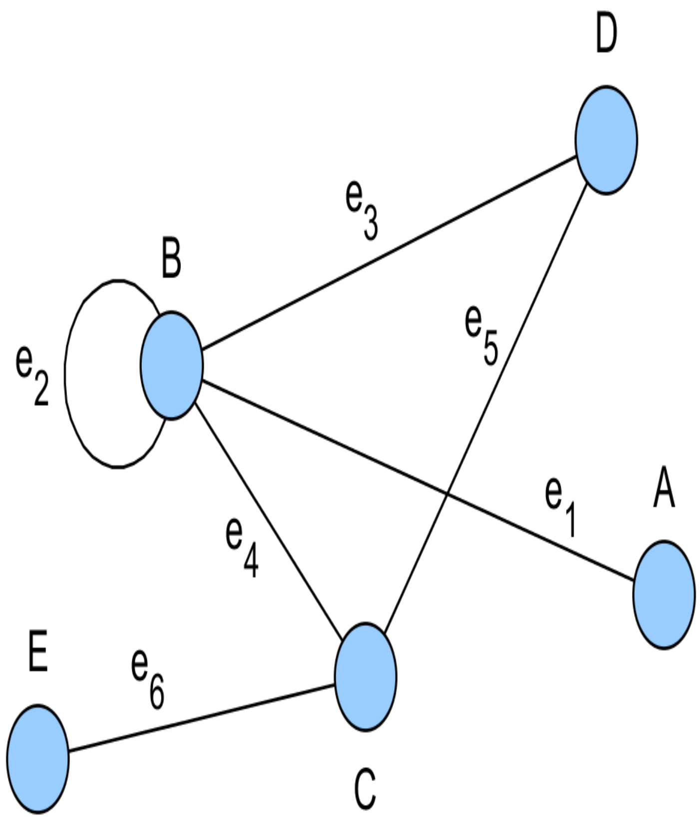
- **Définition**
- Considérons un graphe non orienté (*resp*. orienté) d’ordre n possédant m arêtes (*resp*. arcs), dont on a numéroté les n sommets et les m arêtes (*resp*. arcs).
- On peut le représenter par sa **matrice d’incidence**, qui est une matrice comportant n lignes et m colonnes.
- Dans le cas **non orienté**, le coefficient de cette matrice situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ le\ i\ eme\ sommet\ est\ une\ extremité\ de\ la\ j\ eme\ arête \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Remarques

- Dans une matrice d'incidence, le rôle des lignes et des colonnes n’est donc pas similaire, une ligne y représente un sommet et une colonne une arête ou arc.
- Cette définition s'applique tout à fait aux multigraphes.

Matrice d'incidence d'un graphe non orienté



sa **matrice d'incidence**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

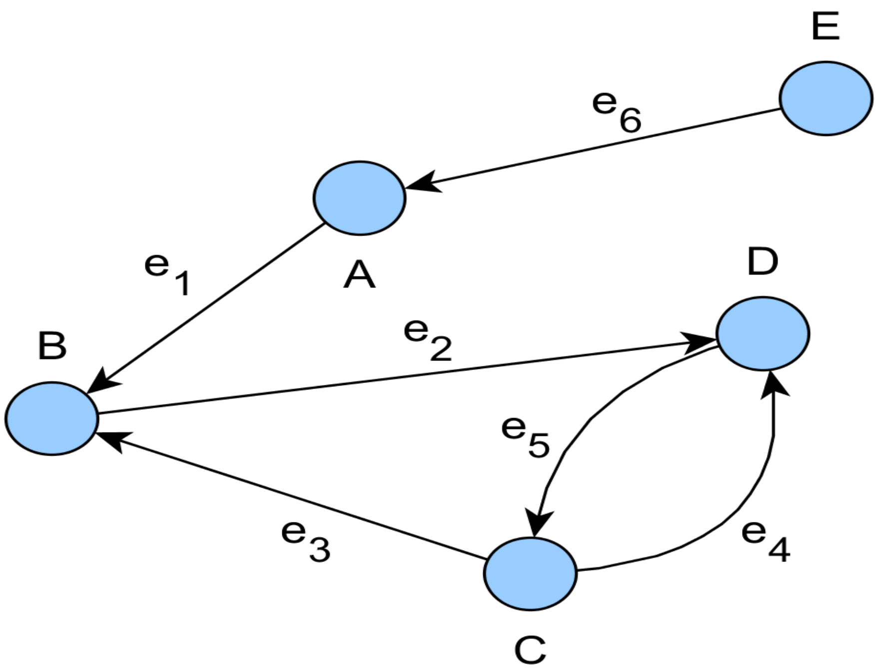
- les sommets ne sont pas numérotés mais classés par ordre alphabétique, ce qui est la même chose.
- Par exemple, la valeur 1, située à l’intersection de la quatrième ligne et de la cinquième colonne signifie que le sommet D est une des extrémités de la cinquième arête, notée e5.

Matrice d’incidence

- **Définition**
- Considérons un graphe non orienté (*resp*. orienté) d’ordre n possédant m arêtes (*resp*. arcs), dont on a numéroté les n sommets et les m arêtes (*resp*. arcs).
- On peut le représenter par sa **matrice d’incidence**, qui est une matrice comportant n lignes et m colonnes.
- Dans le cas **orienté**, le coefficient de cette matrice situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j-ème colonne vaut

$$a_{i,j=}\begin{cases} 1 \quad si\ le\ i\ eme\ sommet\ est\ l'origine\ du\ \ j\ eme\ arc \\ -1 \quad si\ le\ i\ eme\ sommet\ est\ l'extremité\ du\ \ j\ eme\ arc \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

Matrice d’incidence d’un graphe orienté

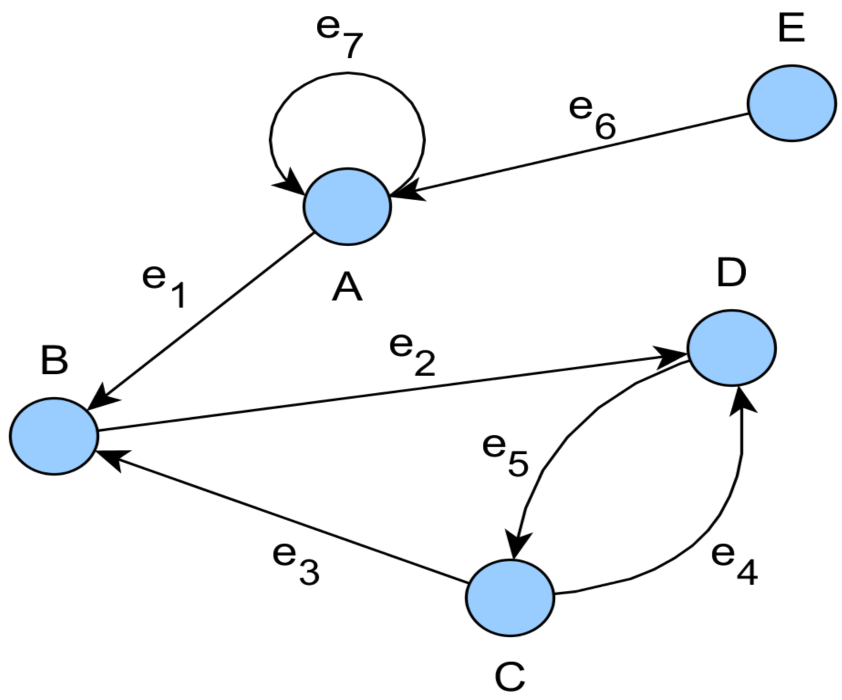


sa **matrice d'incidence**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- encore les sommets sont classés par ordre alphabétique.
- Par exemple, la valeur 1, située à l’intersection de la cinquième ligne et de la sixième colonne signifie que le sommet E est l'origine du sixième arc, noté e6.

On ne pourra par contre pas représenter par une matrice d'incidence un graphe orienté possédant une boucle

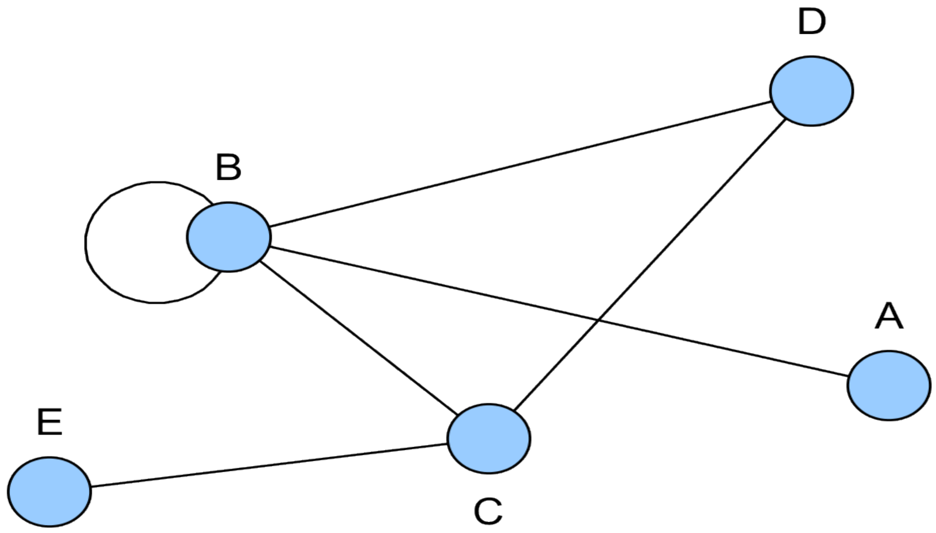


En effet, le sommet A est ici origine et extrémité de l'arc e7, on devrait donc affecter au coefficient situé sur la première ligne et la septième colonne à la fois les valeurs 1 et −1, ce qui est bien sûr impossible

Degré d'un sommet

- **Cas des graphes non orientés**
- **Définition**
- Soit G=(V,E) un graphe **non orienté** et x∈V l'un de ses sommets.
- On appelle **degré** de x, noté d(x), le nombre d’arêtes ayant x pour extrémité, une boucle étant comptée deux fois.

Calculs de degrés dans un graphe non orienté



d(A)=1, d(B)=5, d(C)=3, d(D)=2, d(E)=1

- On retrouve également très facilement les valeurs de ces degrés grâce à la **matrice d'adjacence** du graphe

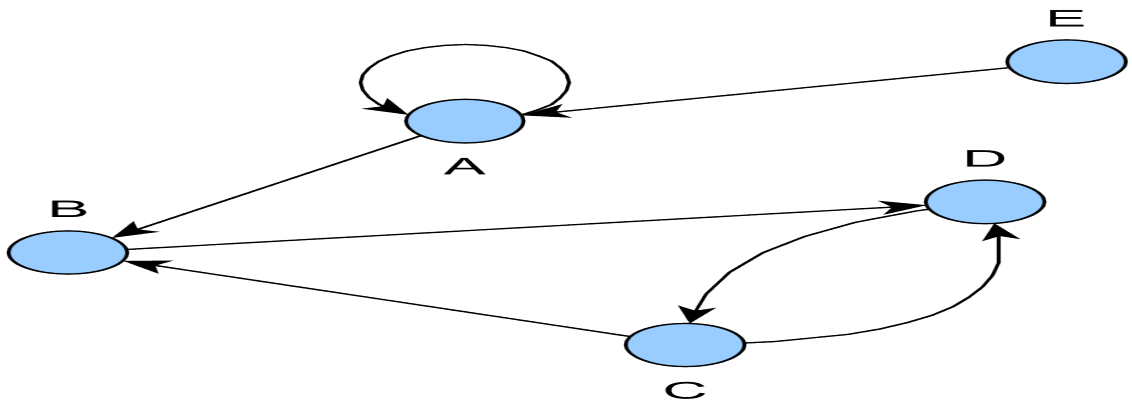
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour calculer le degré du i-ème sommet, il suffit de faire la somme des coefficients de la i-ème ligne (ou i-ème colonne puisque la matrice est symétrique), en doublant les coefficients diagonaux puisqu'ils correspondent aux boucles.

Cas des graphes orientés

- **Définition**
- Soit G=(V,E) un graphe **orienté** et $x \in V$ l'un de ses sommets.
- On appelle **degré sortant** de x, noté $d^+(x)$
- le nombre d’arcs ayant x pour **origine**.
- On appelle **degré entrant** de x, noté $d^-(x)$, le nombre d’arcs ayant x pour **extrémité**.
- On appelle **degré** de x, noté $d(x)$, le nombre d’arcs ayant x pour origine ou extrémité. On a naturellement $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$

Calculs de degrés dans un graphe orienté



d^+**(A)=2,**d^+**(B)=1,**d^+**(C)=2,**d^+**(D)=1,**d^+**(E)=1**

d^-**(A)=2,**d^-**(B)=2,**d^-**(C)=1,**d^-**(D)=2,**d^-**(E)=0**

On retrouve très facilement les valeurs de ces degrés grâce à la **matrice d'adjacence** du graphe

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer le degré sortant (*resp.* entrant) du i-ème sommet, il suffit de faire la somme des coefficients de la i-ème ligne (*resp.* i-ème colonne).

Lemme des poignées de main

- Les résultats suivants sont assez **intuitifs**, ils relient le nombre d'arêtes ou arcs d'un graphe avec les degrés de ses sommets. Là aussi, distinguons les cas.
- **Cas des graphes non orientés**
- **Propriété**

Soit G=(V,E) un graphe **non orienté**.

On a $$\sum_{x \in V} d(x) = 2 * |E|$$

La notation $|E|$ désigne le cardinal de E , c'est-à-dire son nombre d'éléments.

- Autrement dit, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

Cas des graphes orientés

- **Propriété**

Soit G=(V,E) un graphe **orienté**.

On a $$\sum_{x \in V} d^+(x) = \sum_{x \in V} d^-(x) = |E|$$

- Cela signifie que le nombre d'arcs est à la fois égal à la somme des degrés entrants des sommets et à la somme des degrés sortants.
- A noter que dans le cas des graphes orientés, on a toujours l'égalité

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2 * |E|$$

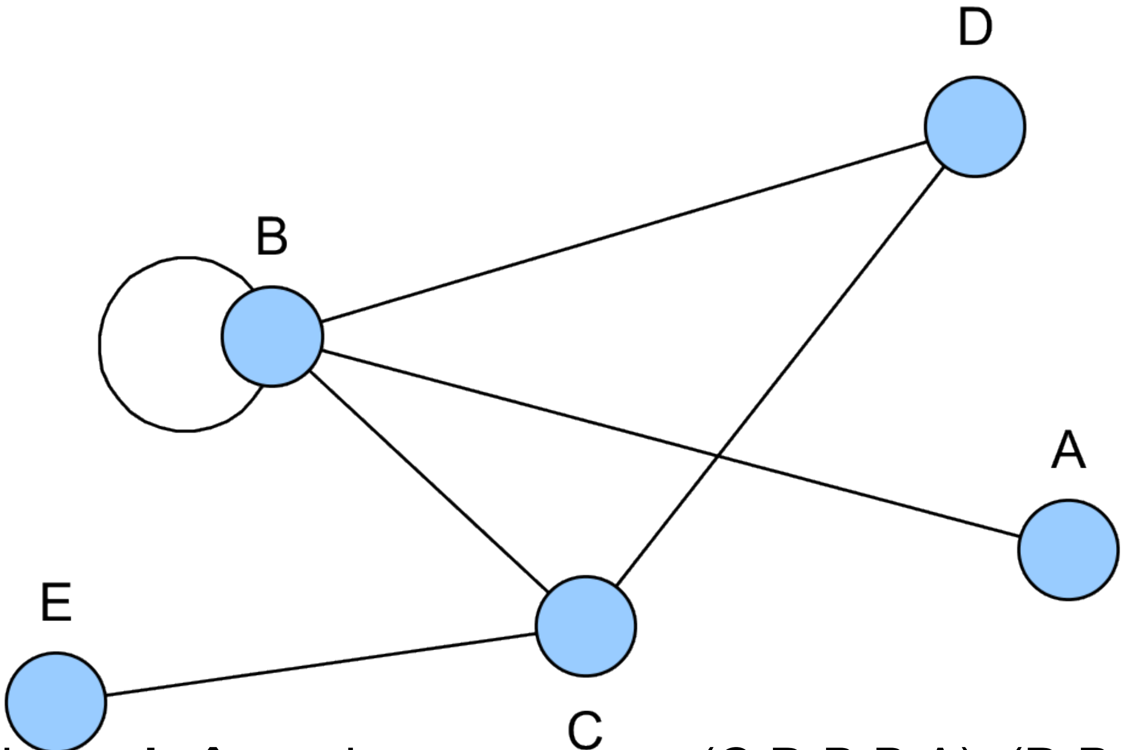
Applications : voir TD

Chaînes - Cycles

- Les notions de **chaînes** et **cycles** ne tiennent pas compte de l'orientation des graphes
- **Définitions**

  Soit G=(V,E) un graphe **non orienté**.
- Une **chaîne** de G est une suite $\left(x_0, x_1, \ldots, \ x_n\right)$ de sommets de G, où deux sommets consécutifs quelconques sont adjacents. Autrement dit : $\forall\, i,\ 0 \leq i \leq n-1\ ,\ \left(x_i, x_{i+1}\right) \in E$
- Les sommets x_0 et x_n sont respectivement l'**origine** et l'**extrémité** de la **chaîne**.
- On appelle **longueur de la chaîne** le nombre d'arêtes la constituant, c'est-à-dire n dans la description précédente.
- Un **cycle** est une chaîne de longueur non nulle dont l'origine et l'extrémité coïncident.

Chaînes et cycles dans un graphe non orienté



➢Voici certaines **chaînes** de ce graphe : (C,D,B,B,A), (D,B,C,E), (E,C,D,B,C,D,B,A).

➢Elles sont respectivement de longueurs 4, 3 et 7.

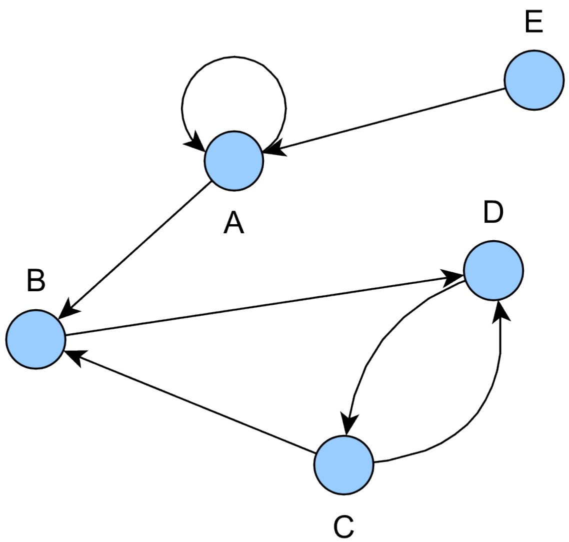
➢ Par contre (C,B,D,A) et (B,E) ne sont pas des chaînes.

➢ Voici certains **cycles** de ce graphe : (C,D,B,B,C), (D,B,A,B,C,E,C,D).

➢ Par contre (D,B,A,D) et (B,C,E,B) ne sont pas des cycles.

Graphe orienté

- On peut définir de même les notions de chaîne et cycle dans un graphe orienté G=(V,E) en « oubliant » son orientation. Une chaîne sera ainsi une suite de sommets de G, où deux sommets consécutifs sont reliés par un arc, sans condition de direction sur ce dernier. Un cycle sera comme précédemment une chaîne ayant une origine et une extrémité confondues.



Les parcours (B,A,E), (A,B,D,C) et (A,B,C,D,B) sont des chaînes, (B,C,D,B) est un cycle.

Chemins. Circuits

Les concepts de **chemins** et **circuits** vont eux être spécifiques aux graphes orientés.

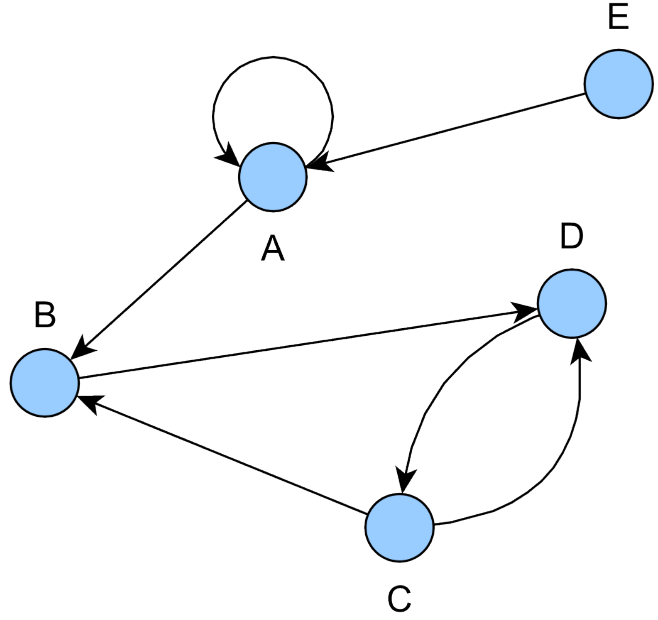
- **Définitions**

  Soit G=(V,E) un graphe **orienté**.
- Un **chemin** de G est une suite $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ de sommets de G, où deux sommets consécutifs quelconques sont reliés par un arc dirigé du premier vers le second. Autrement dit

$$\forall\, i,\ 0 \le i \le n-1\ ,\ \left(x_i, x_{i+1}\right) \in E$$

- Les sommets x_0 et x_n sont respectivement l'**origine** et l'**extrémité** du **chemin**.
- On appelle **longueur du chemin** le nombre d'arcs le constituant, c'est-à-dire n dans la description précédente.
- Un **circuit** est un chemin de longueur non nulle dont l'origine et l'extrémité coïncident.

Chemins et circuits dans un graphe orienté



- Voici certains **chemins** de ce graphe : (A,B,D,C,B), (E,A,A,B), (D,C,D,C,B).

  Ils sont respectivement de longueurs 4, 3 et 4.
- Par contre (A,B,C,D,B) et (D,C,B,A)ne sont pas des chemins.
- Voici certains **circuits** de ce graphe : (B,D,C,B) , (D,C,B,D,C,D).
- Par contre (B,C,D,B) et (A,B,D,C,B,A) ne sont pas des circuits.

Parcours élémentaires et simples

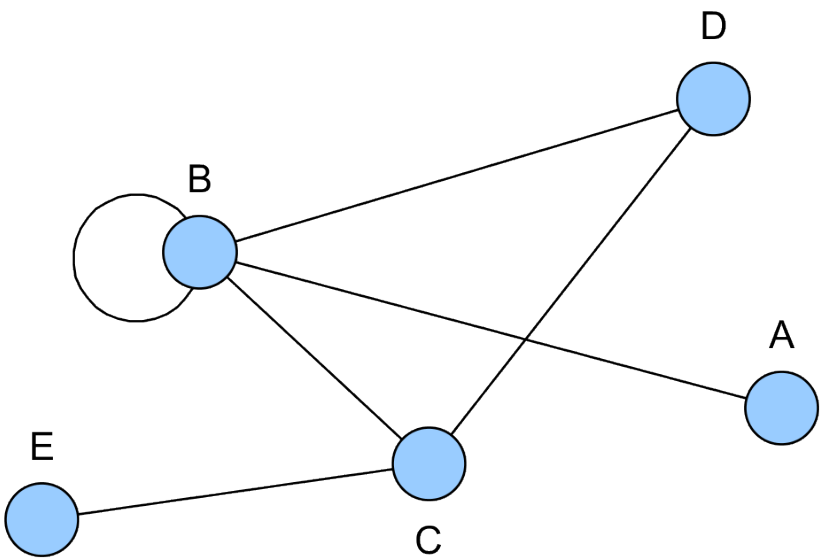
Définition

- Dans un graphe non orienté (*resp.* orienté), une chaîne (*resp.* un chemin) est dite **simple** si elle ne passe pas deux fois par la même arête (*resp.* arc).
- Dans un graphe non orienté (*resp.* orienté), une chaîne (*resp.* un chemin) est dite **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

✓ Ces définitions à propos des chaînes et chemins s'appliquent bien sûr aux cas particuliers des cycles et circuits. Le fait que leurs origines et extrémités soient confondues n'impactera pas par contre leur éventuel caractère élémentaire.

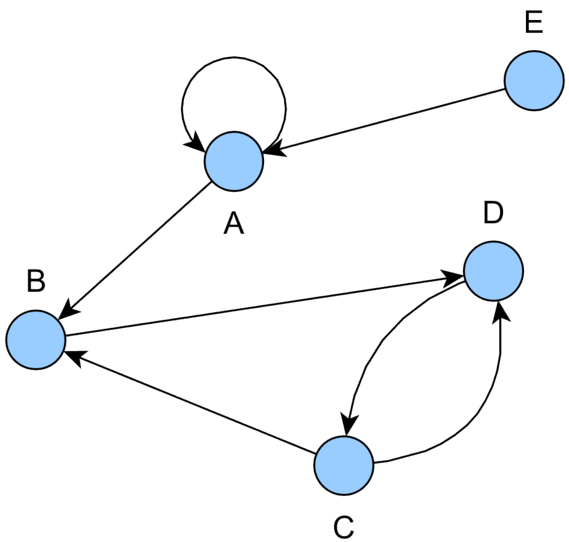
✓ Il est clair qu'une chaîne ou un chemin élémentaire est nécessairement simple. En effet, si un parcours ne passe pas deux fois par un même sommet il ne pourra pas passer deux fois par une même arête ou un même arc.

Exemple : Chaînes simples et élémentaires



- (E,C,D,B,C) est une **chaîne simple**, et (C,D,B,B,C) est un **cycle simple**.
- (A,B,D,C,E) est une **chaîne élémentaire**, et (B,D,C,B) est un **cycle élémentaire**.

Exemple: Chemins simples et élémentaires



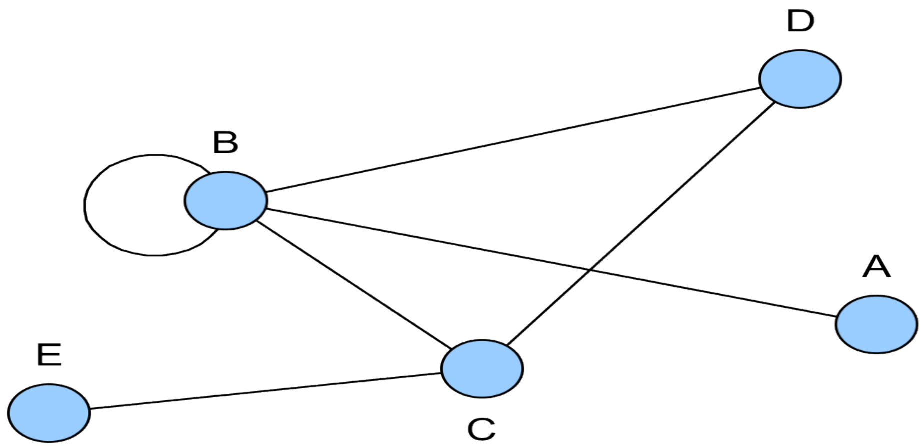
- (E,A,B,D,C,B) est un **chemin simple**, et (B,D,C,B)est un **circuit simple**.
- (E,A,B,D,C) est un **chemin élémentaire**, et (D,C,D) est un **circuit élémentaire**.

Nombre de chaînes ou de chemins de longueur donnée

- Le résultat suivant permet de déterminer le **nombre de chaînes ou chemins d'une certaine longueur** à l'aide des **puissances** de la matrice d'adjacence.
- **Propriété**

  Soit G=(V,E) un graphe non orienté (*resp.* orienté) et A sa matrice d'adjacence. Soit p un entier naturel non nul. Alors, le coefficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de A^p est égal au nombre de chaînes (*resp.* chemins) de longueur p, ayant pour origine le i-ème sommet et pour extrémité le j-ème.
- Ce résultat donne le nombre de chaînes ou chemins d'une longueur donnée mais pas leur description. En cas de besoin, il faudra les déterminer « à la main ».

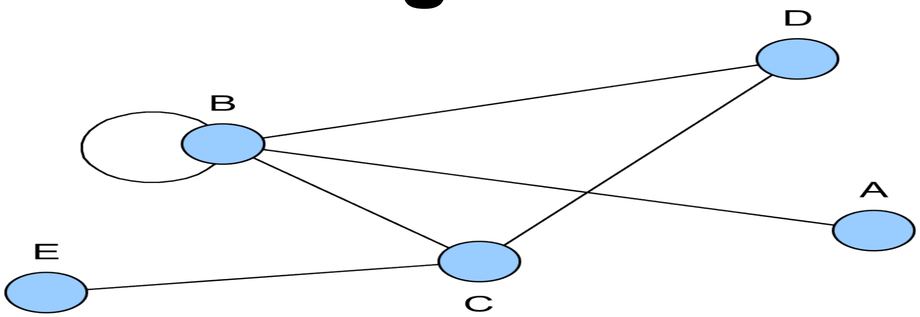
Nombre de chaînes de longueur donnée



- Sa **matrice d'adjacence** est

$$Ma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nombre de chaînes de longueur donnée



On montre facilement que

$$Ma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Ma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il y a ainsi par exemple 4 chaînes de longueur 3 de B vers A : (B,A,B,A), (B,C,B,A), (B,D,B,A) et (B,B,B,A).
- Il y a également 3 cycles de longueur 3 de D vers D : (D,B,C,D), (D,C,B,D) et (D,B,B,D).

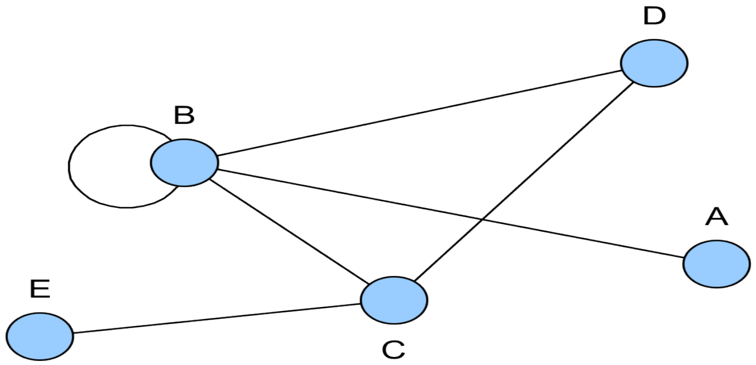
Graphes connexes

- La notion de **connexité** formalise le fait pour un graphe d'être d'**un seul tenant**.
- **Définition**

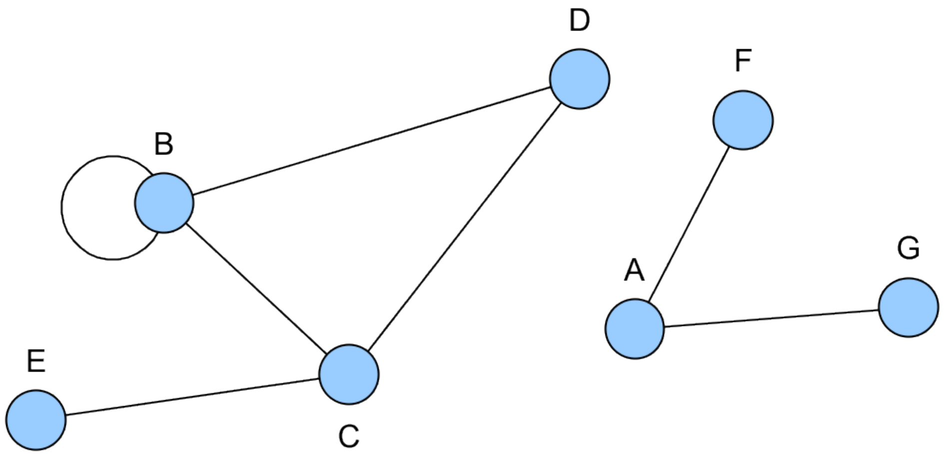
  Soit G=(V,E) un graphe orienté ou non.
- On dit que G est **connexe** si pour toute paire {x,y} de sommets de G il existe une chaîne reliant x et y.
- Le fait qu'un graphe soit connexe ou non ne dépend donc pas de son éventuelle orientation.

Des graphes connexes et non connexes

- Le graphe suivant est **connexe** :



- Le graphe suivant n'est **pas connexe** :



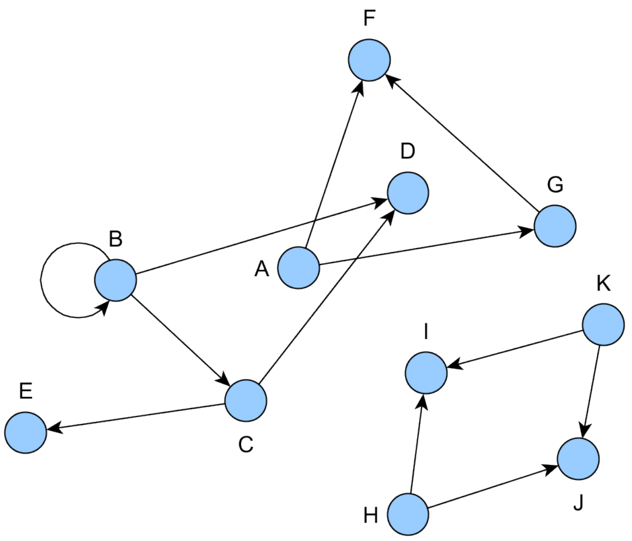
- En effet, il n'y par exemple pas de chaîne reliant les sommets B et G.

- Comme on vient de le voir sur cet exemple, tous les graphes ne sont pas connexes. Mais ceux qui ne le sont pas peuvent toujours apparaître comme une **réunion de sous-graphes connexes**.

Définition
Soit G=(V,E) un graphe orienté ou non.
On peut décomposer G en **sous-graphes induits** dont chacun sera connexe.
Ces sous-graphes s’appellent les **composantes connexes** de G.

Décomposition en composantes connexes

- Le graphe suivant n'est **pas connexe** :



- Mais on peut le décomposer en trois **composantes connexes** : {B,C,D,E}, {I,J,K,H} et {A,F,G}.

Graphes fortement connexes

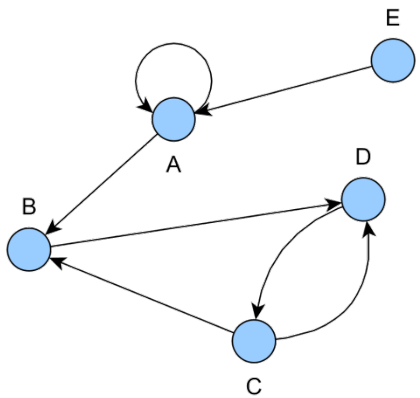
La définition suivante ne concerne que les graphes orientés et est **plus contraignante** que celle de connexité.

Définition

- Soit G=(V,E) un graphe orienté.
- On dit que G est **fortement connexe** si pour tout couple (x,y) de sommets de G il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y.

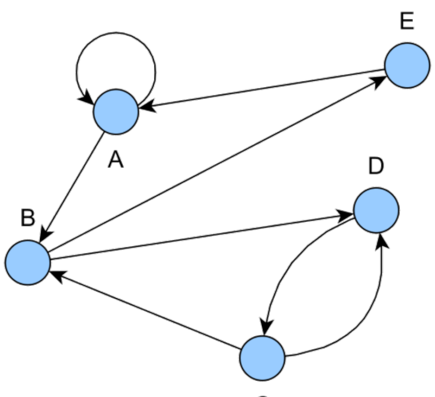
Des graphes fortement connexes ou non

- Le graphe suivant n'est pas **fortement connexe** :



En effet, il n'y a par exemple pas de chemin d'origine B et d'extrémité E.

- Le graphe suivant est par contre **fortement connexe** :



Graphes Eulériens et Hamiltoniens

Pr. Lekbir Afraites

2022-2023

Plan

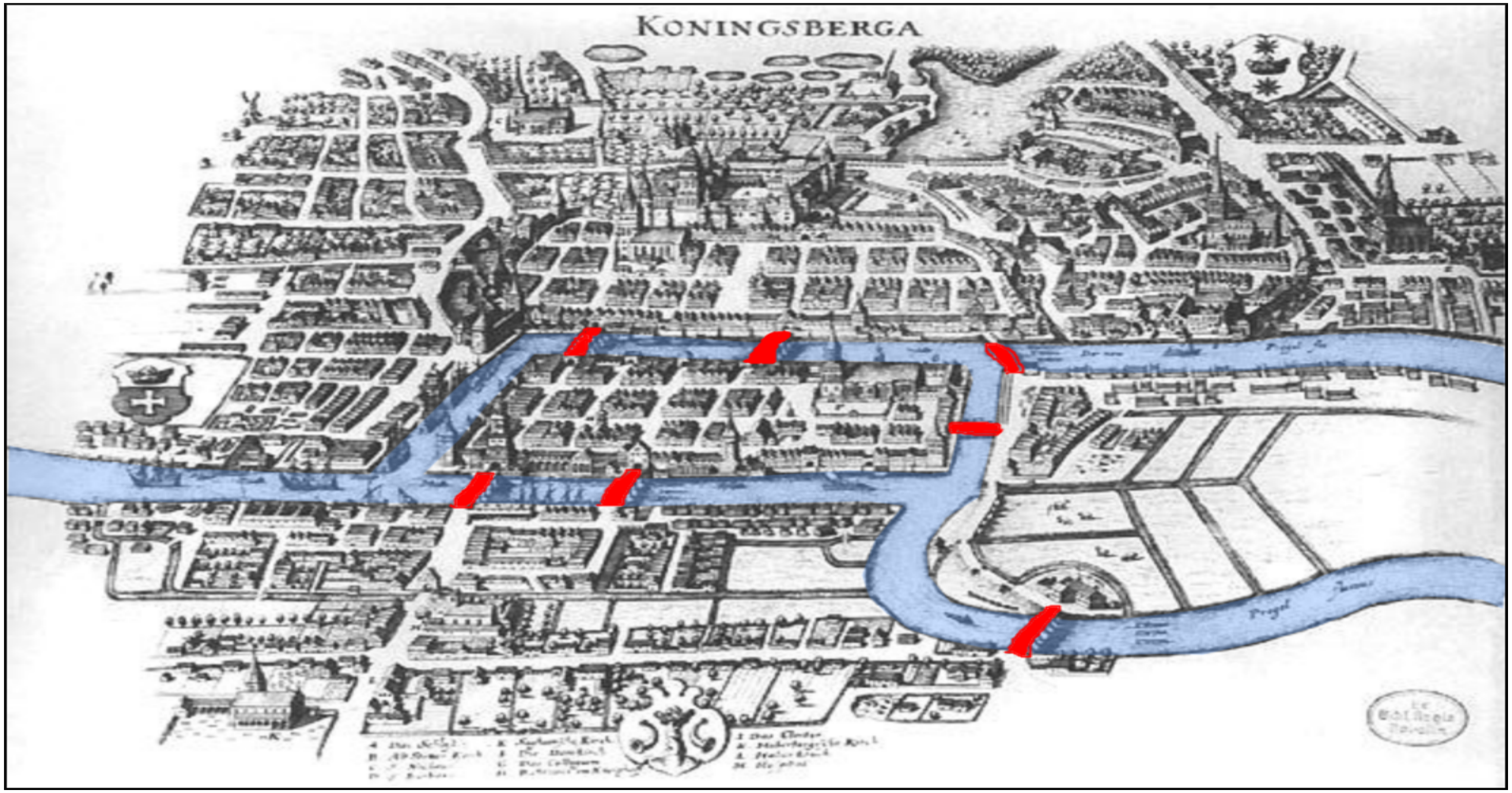
- ✓ **Graphes eulériens**
- ✓ **Graphes hamiltoniens**

- Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord effectuer des **parcours** dans un graphe en imposant des **contraintes**
- Cela nous conduira à l'étude des graphes **eulériens** et **hamiltoniens**
- Toutes ces thématiques ont pour point commun de reposer sur des propriétés des **degrés des sommets** du graphe.

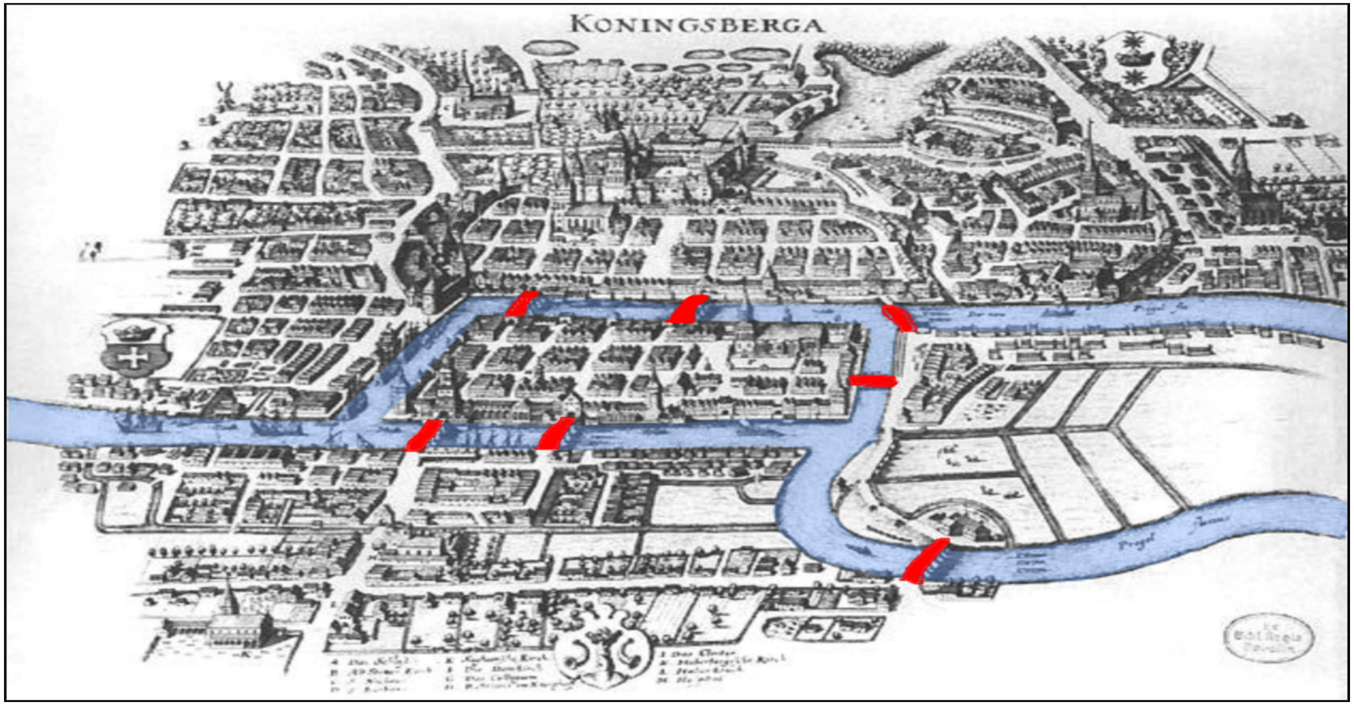
Graphes Eulériens

Graphes non orientés

- Un peu d'histoire sur le **problème fondateur de la théorie des graphes**
- **Sept ponts de Konisgberg**



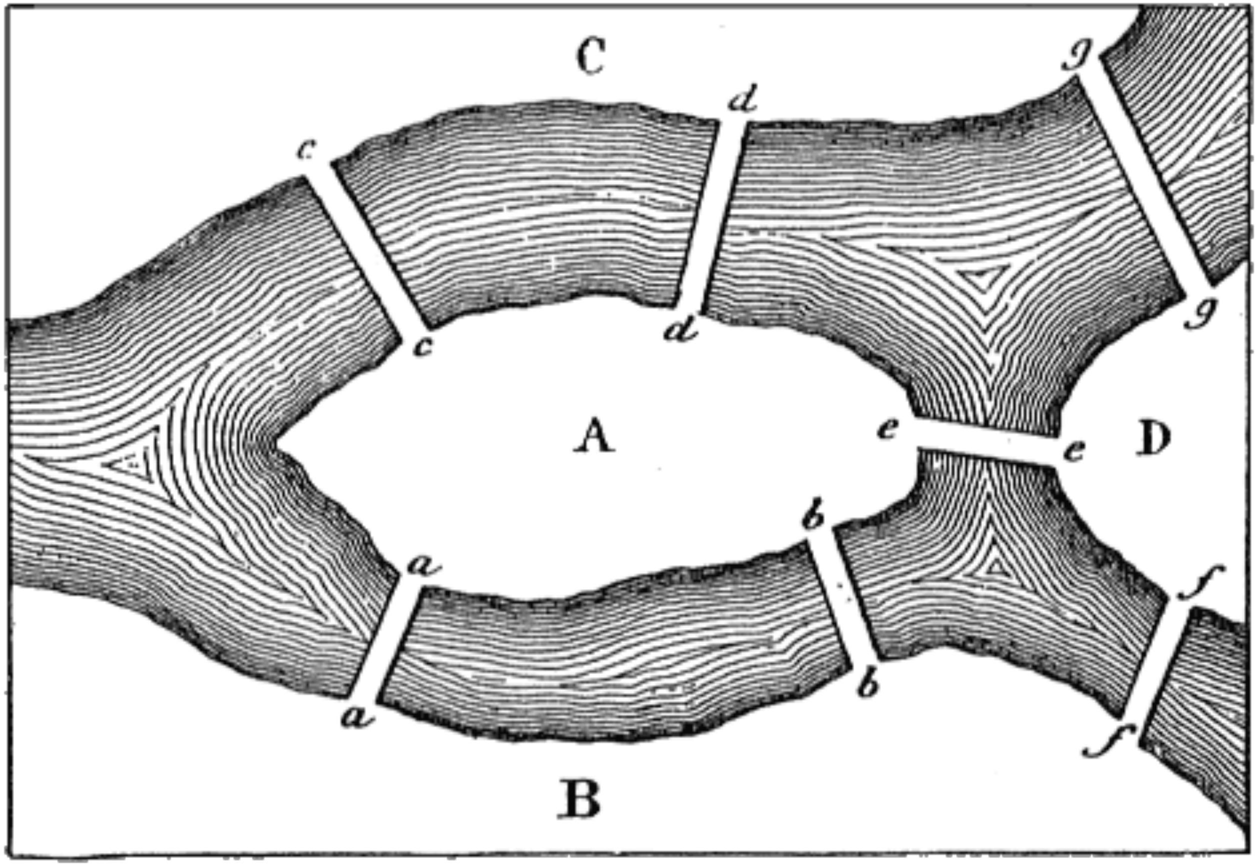
Graphes non orientés



- Q : peut-on effectuer un parcours dans la ville de Königsberg en empruntant ces sept ponts **une et une seule fois** ?

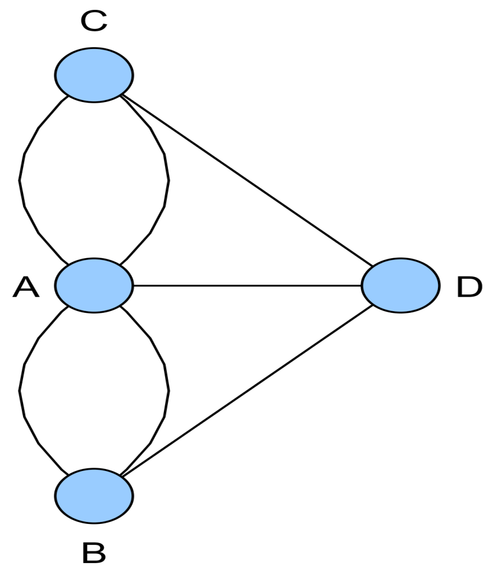
Graphes non orientés

- Le mathématicien Lucas Edouard a illustré le problème précèdent sous :

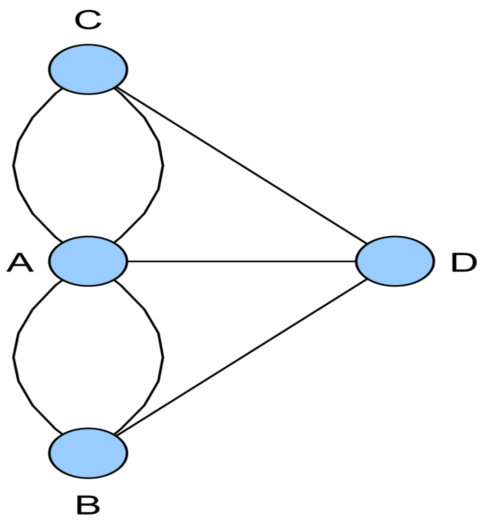


Graphes non orientés

- Ce problème est modélisé par un graphe non orienté dont les sommets A,B,C et D sont les rives
- Et les arêtes sont les sept ponts.



Graphes non orientés



- Reformulons la question : peut-on trouver une **chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes** de ce graphe ?

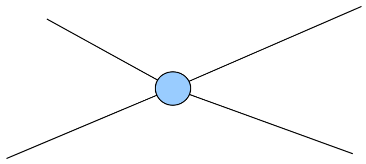
Graphes non orientés

- Nous allons d'abord **généraliser** à n'importe quel graphe non orienté.

- **Définitions**
- Soit G=(V,E) un graphe **non orienté**.
- Une **chaîne eulérienne** de G est une chaîne simple passant par toutes les arêtes de G, c’est-à-dire une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de G.
- Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne ayant les mêmes extrémités.
- Un **graphe eulérien** est un graphe possédant un cycle eulérien.

Graphes non orientés

- Remarques :
  - **Condition nécessaire** pour qu'un graphe admette une chaîne ou un cycle eulérien est bien sûr qu'il soit **connexe**
  - **Condition nécessaire** pour qu'un graphe admette un cycle eulérien est que chacun de ses sommets ait un degré pair. En effet, pour constituer un tel cycle on doit pouvoir repartir de chaque sommet autant de fois que l'on y arrive, et ce sans emprunter deux fois la même arête :

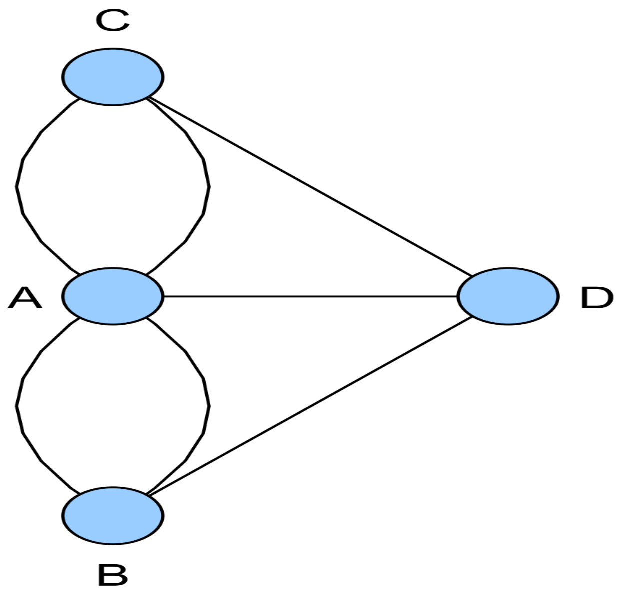


Graphes non orientés

- **Théorème**
   Soit G=(V,E) un graphe **non orienté connexe**.
  - Le graphe G admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.
  - Le graphe G admet une **chaîne eulérienne** qui n'est pas un cycle si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair sauf exactement deux d'entre eux. Ces deux sommets particuliers seront les extrémités de cette chaîne.

Graphes non orientés

- **Résoudre : Problème des sept ponts de Königsberg**

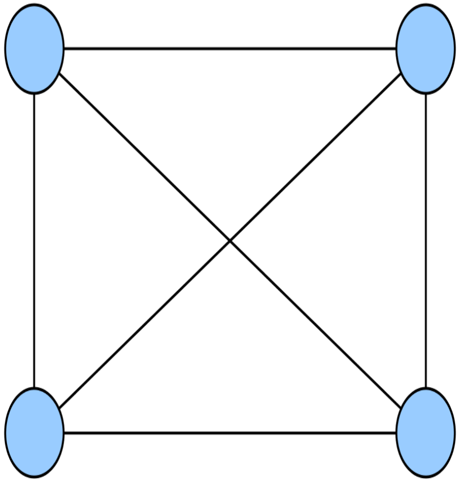


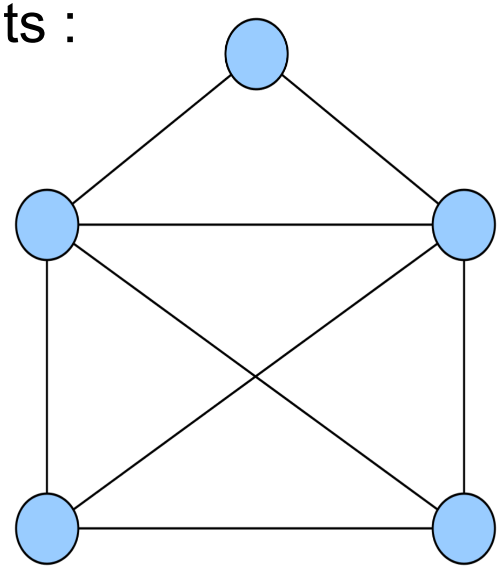
Les 4sommets de ce graphe ont des degrés impairs, il n'existe donc ni cycle eulérien, ni chaîne eulérienne. Le problème des ponts de Königsberg n'a donc pas de solution.

Graphes non orientés

Problème du dessin d'enveloppe

- **Question :** peut-on dessiner une enveloppe ouverte (*resp*. fermée) sans lever le crayon et sans repasser sur une ligne déjà dessinée ? Cela revient à se demander si l'on peut trouver une chaîne eulérienne dans les graphes suivants :





Dans le premier cas la réponse est non car tous les sommets ont un degré impair.
Dans le second cas, deux sommets exactement ont un degré impair,
il existe donc une chaîne eulérienne ayant ces deux sommets pour extrémités.
Nous laissons le lecteur la déterminer "à la main".

Graphes non orientés

Algorithme de détermination Cy.E.

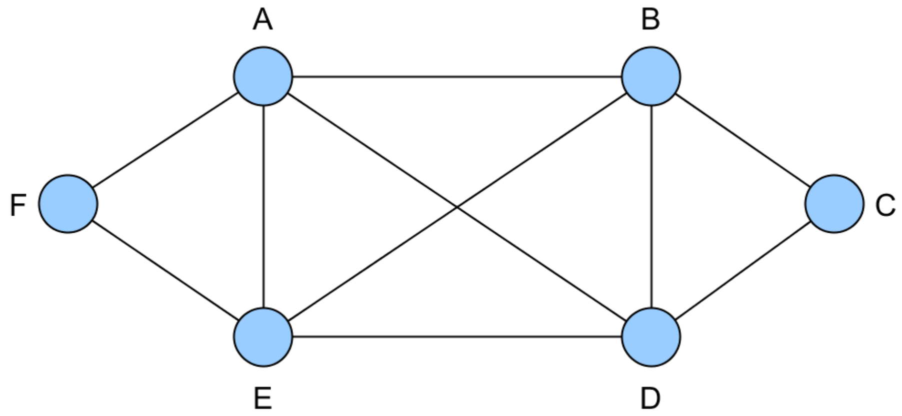
- Soit G=(V,E) un graphe **non orienté connexe** possédant un **cycle eulérien**.

1. Choisir un sommet arbitrairement.
2. Construire un cycle simple (quel qu'il soit) ayant pour origine et extrémité ce sommet (c'est toujours possible).
3. Si ce cycle est eulérien, la recherche est terminée.
4. Sinon, considérer le sous-graphe de G obtenu en supprimant les arêtes du cycle précédent.
5. À partir d'un sommet commun au sous-graphe restant et au cycle, construire de nouveau un cycle simple.
6. Insérer ce second cycle dans le premier.
7. Recommencer à partir de l'étape 3.

- Remarque : cet algorithme fini tjs par trouver un C. E. mais pas d'unicité

Exemple : détermination d'un cycle eulérien

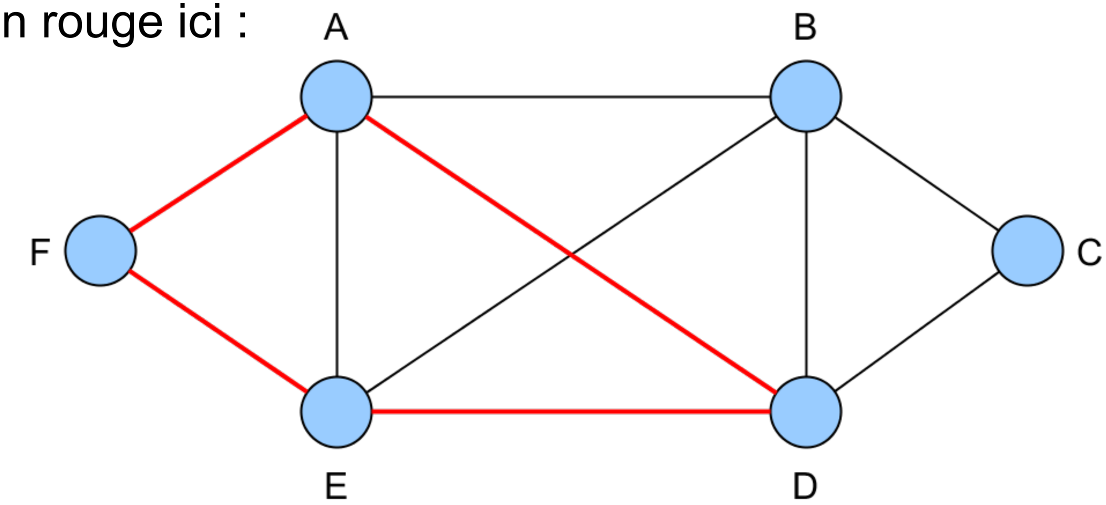
- Considérons le graphe non orienté dont la représentation sagittale est la suivante :



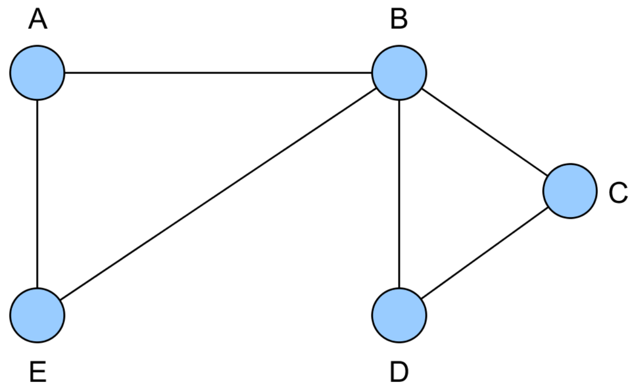
- Ce graphe est **eulérien** car il est connexe, et tous les degrés de ses sommets sont pairs.

Suite

- On commence donc par choisir un sommet, par exemple A. On construit alors un cycle simple d'origine et extrémité A, comme (A,D,E,F,A), représenté en rouge ici :

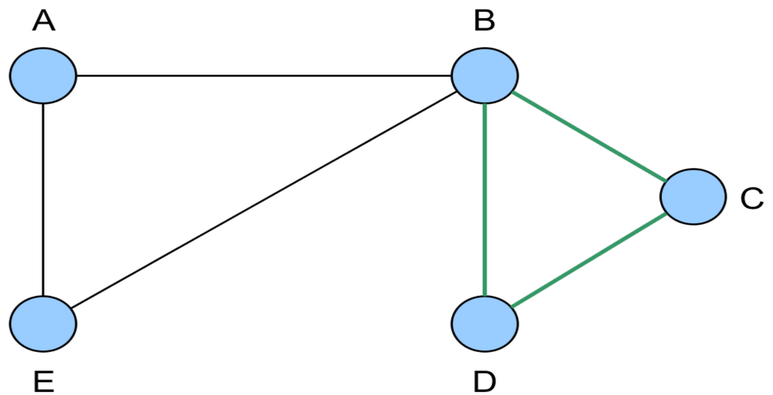


On considère ensuite le sous-graphe de G obtenu en supprimant ce cycle :

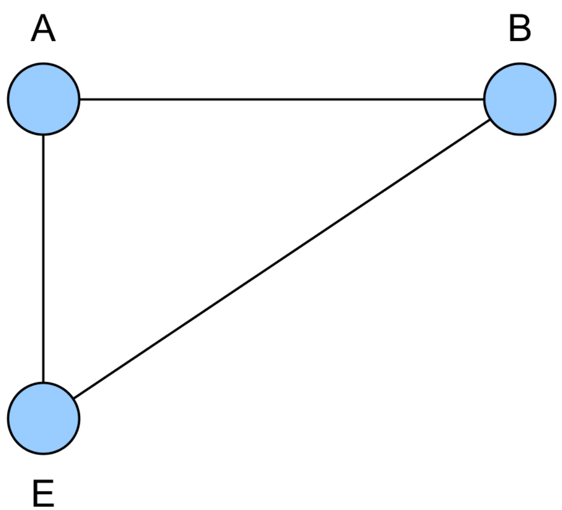


Suite

- A partir du sommet D, on peut construire un second cycle simple, par exemple (D,C,B,D), ici en vert :

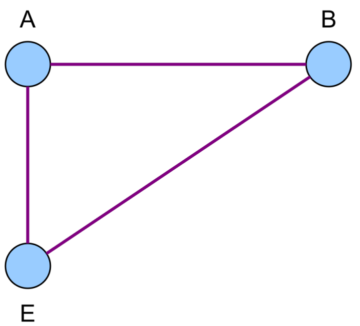


  - On supprime ce nouveau cycle :

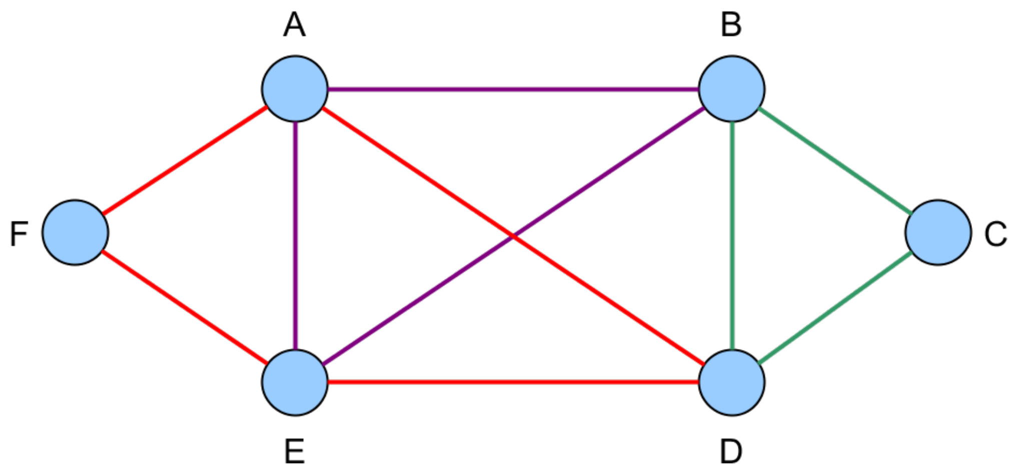


Suite

- La construction du prochain (et dernier) cycle simple est triviale, il s'agit de (E,A,B,E), mis en évidence en mauve :



- Il ne reste plus qu'à insérer les deux derniers cycles dans le premier, il vient (A,D,C,B,D,E,A,B,E,F,A) :



Graphes non orientés

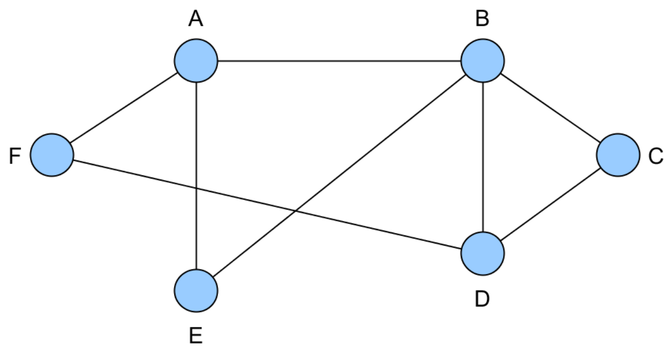
Algorithme de détermination Ch.E.

- Soit G=(V,E) un graphe **non orienté connexe** possédant une **chaîne eulérienne**.

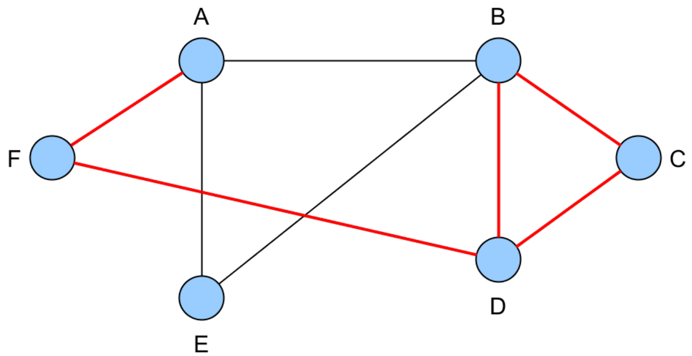
1. Choisir arbitrairement l'un des deux sommets de degré impair.
2. Construire une chaîne simple (quelle qu'elle soit) ayant pour origine ce sommet et pour extrémité l'autre sommet de degré impair (c'est toujours possible).
3. Si cette chaîne est eulérienne, la recherche est terminée.
4. Sinon, considérer le sous-graphe de G obtenu en supprimant les arêtes de la chaîne précédente.
5. À partir d'un sommet commun au sous-graphe restant et à la chaîne, construire un cycle simple.
6. Insérer ce cycle dans la chaîne.
7. Recommencer à partir de l'étape 3.

- Remarque : cet algorithme fini tjs par trouver un C. E. mais pas d'unicité

Exemple : détermination d'un chaîne eulérienne

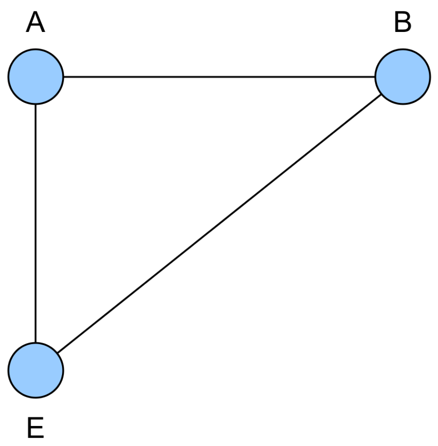


- Ce graphe possède une **chaîne eulérienne** car il est connexe, et ses sommets ont un degré pair sauf exactement deux d'entre eux, A et D.
- On commence donc par choisir l'un de ces deux sommets, par exemple D. On construit alors une chaîne simple d'origine D et d'extrémité A, comme (D,C,B,D,F,A), représentée en rouge ici :

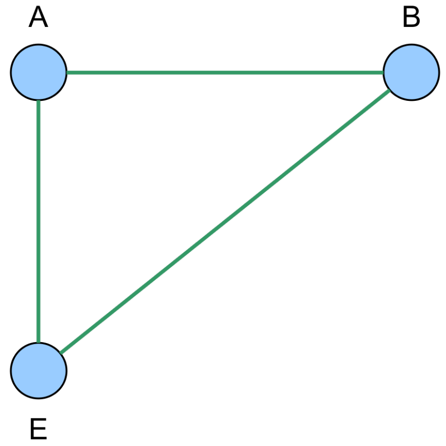


Suite

- On considère ensuite le sous-graphe de G obtenu en supprimant cette chaîne :

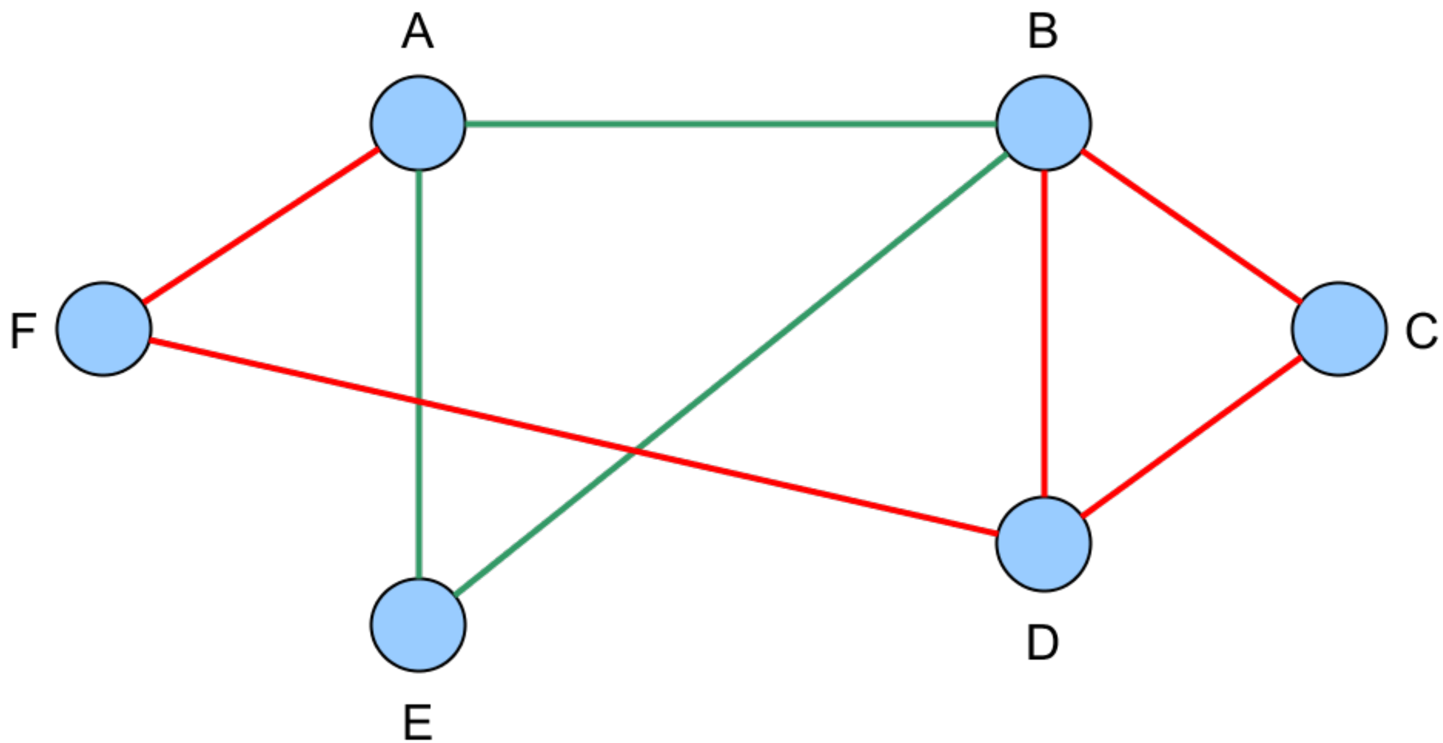


- La construction du (seul) cycle simple est triviale, il s'agit de (B,E,A,B), ici en vert :



Suite

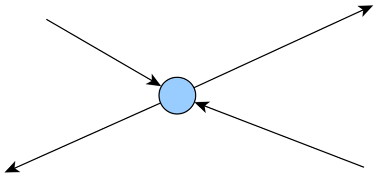
- Il ne reste plus qu'à insérer ce dernier cycle dans la chaîne, il vient (D,C,B,E,A,B,D,F,A) :



Cas des graphes orientés

- **Définitions**
- Soit G=(V,E) un graphe **orienté**.
- Un **chemin eulérien** de G est un chemin simple passant par tous les arcs de G, c'est-à-dire un chemin passant une et une seule fois par tous les arcs de G.
- Un **circuit eulérien** est un chemin eulérien ayant les mêmes extrémités.
- Un **graphe eulérien** est un graphe possédant un circuit eulérien.

Sans surprise, les conditions pour qu'un graphe orienté soit eulérien vont porter sur la **connexité** et les valeurs des **degrés** des sommets. Mais cette fois-ci la parité des degrés ne sera pas suffisante. En effet, pour que l'on puisse repartir d'un sommet autant de fois que l'on y arrive sans emprunter deux fois le même arc, il va falloir que son degré entrant soit égal à son degré sortant :



Graphes orientés

Définitions

Soit G=(V,E) un graphe **orienté**.

Un **chemin eulérien** de G est un chemin simple passant par tous les arcs de G, c'est-à-dire un chemin passant une et une seule fois par tous les arcs de G.

Un **circuit eulérien** est un chemin eulérien ayant les mêmes extrémités.

Un **graphe eulérien** est un graphe possédant un circuit eulérien.

- Remarque : les conditions pour qu'un graphe orienté soit eulérien vont porter sur la **connexité** et les valeurs des **degrés** des sommets.

  il va falloir que son degré entrant soit égal à son degré sortant

Graphes orientés

Théorème

Soit G=(V,E) un graphe **orienté connexe**.
Le graphe G admet un **circuit eulérien** si et seulement si tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant.
Le graphe G admet une **chemin eulérien** qui n'est pas un circuit si et seulement si tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant, sauf deux d'entre eux x et y qui vérifieront

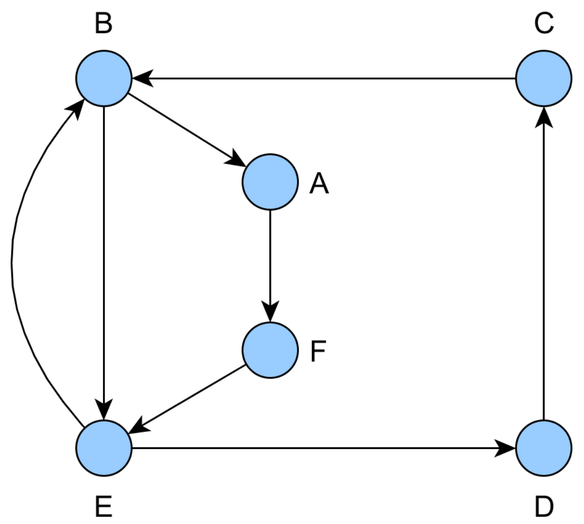
$$d_+(x) = d_-(x) - 1$$

$$d_+(y) = d_-(y) + 1$$

Ce chemin aura pour origine y et pour extrémité x.

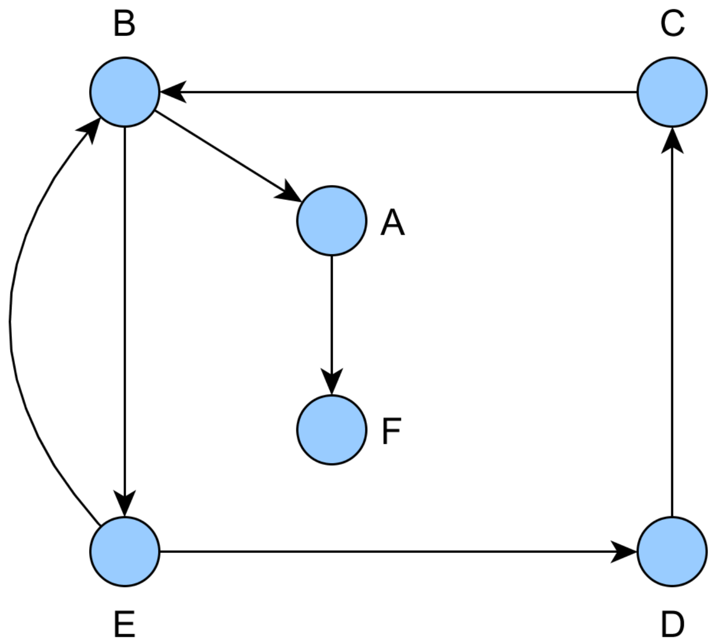
Exemple : Un graphe eulérien

- Considérons le graphe orienté dont la représentation sagittale est la suivante :



- Ce graphe est **eulérien** car il est connexe, et tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant.

Un graphe possédant un chemin eulérien

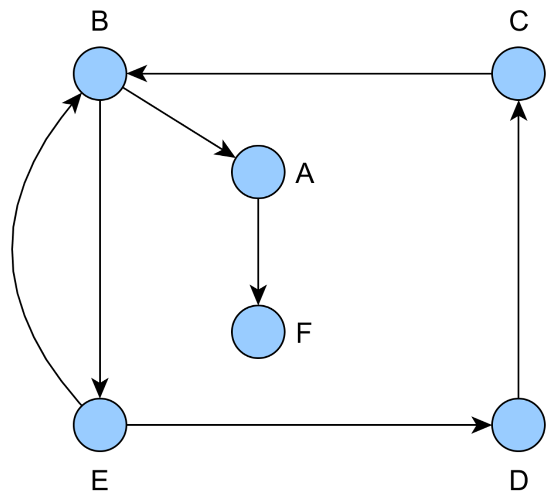


- Ce graphe est **eulérien** car il est connexe, et tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant à part les sommets E et F qui vérifient les conditions du théorème. Il existe donc un chemin eulérien d'origine E et d'extrémité F.

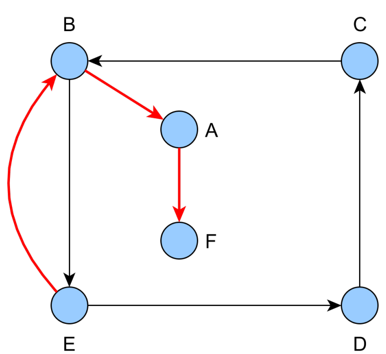
Graphes orientés

- Les méthodes pour déterminer un chemin ou un circuit eulérien sont **exactement les mêmes que dans le cas non orienté**, en tenant bien sûr compte de l'orientation.
- Il faut juste bien penser que dans la recherche d'un chemin eulérien, l'origine du chemin doit être le sommet dont le degré sortant est supérieur au degré entrant.

Exemple : Détermination d'un cycle eulérien

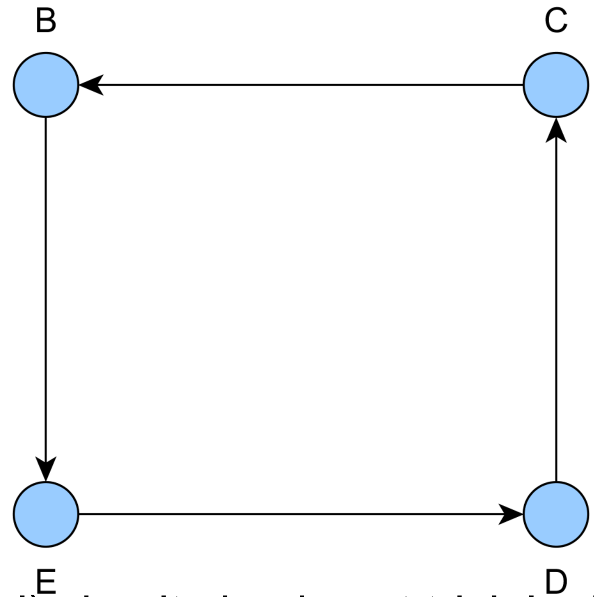


- Nous avions établi qu'il existe un chemin eulérien d'origine E et d'extrémité F.
- Pour en déterminer un, on commence par construire un chemin simple d'origine E et d'extrémité F, comme (E,B,A,F), représenté en rouge ici :

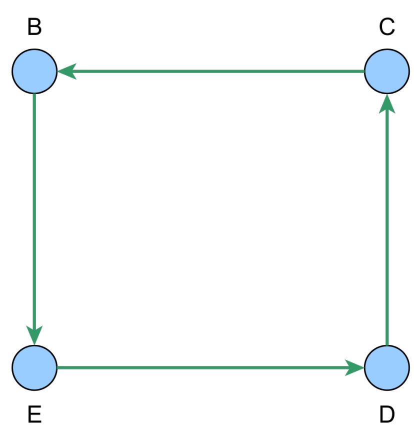


Suite

- On considère ensuite le sous-graphe de G obtenu en supprimant ce chemin :

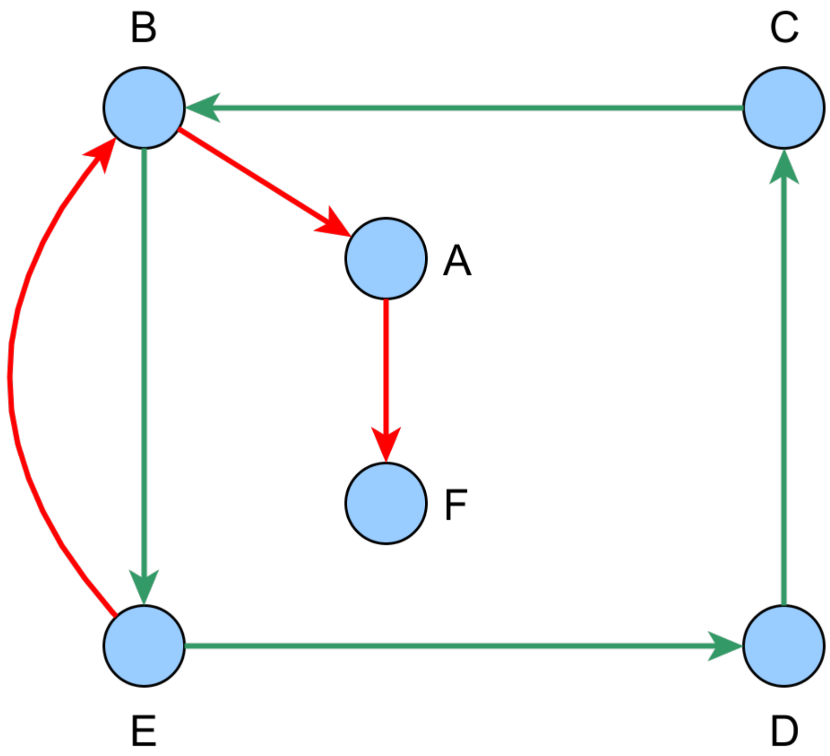


- La construction du (seul) circuit simple est triviale, il s'agit de (B,E,D,C,B), ici en vert :



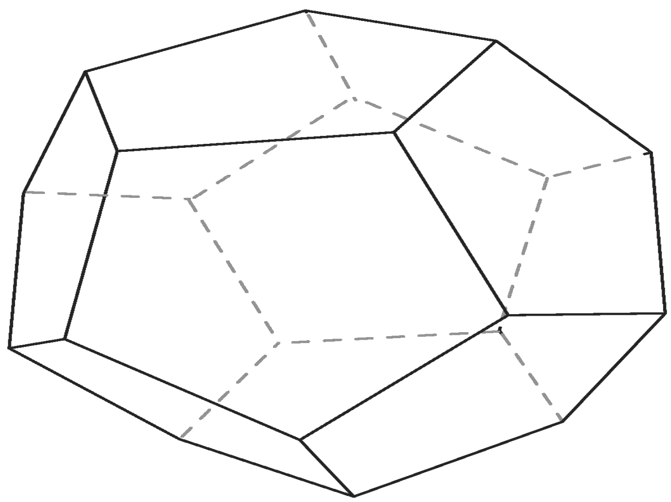
Suite

- Il ne reste plus qu'à insérer ce dernier circuit dans le chemin, il vient (E,B,E,D,C,B,A,F) :



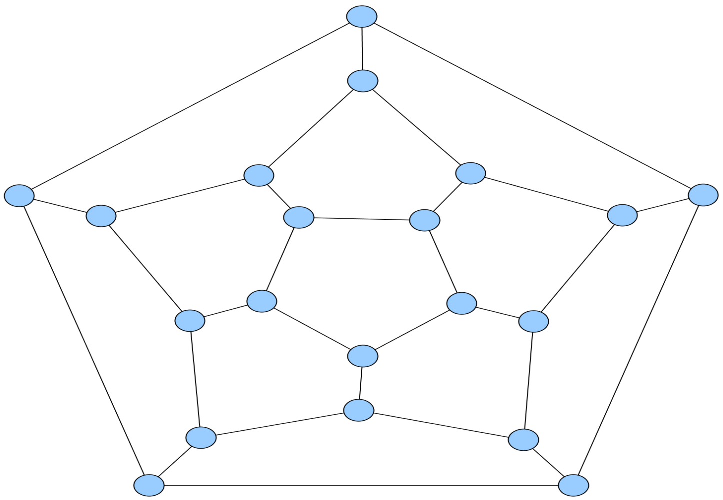
Graphes hamiltoniens

- Nous allons cette fois-ci imposer une **contrainte** à nos parcours relative aux **sommets** d'un graphe.
- Un peu d'Histoire : question formulée en 1859 par Sir **William Rowan Hamilton**
- On considère 20 villes du globe terrestre positionnées sur les sommets d'un dodécaèdre régulier



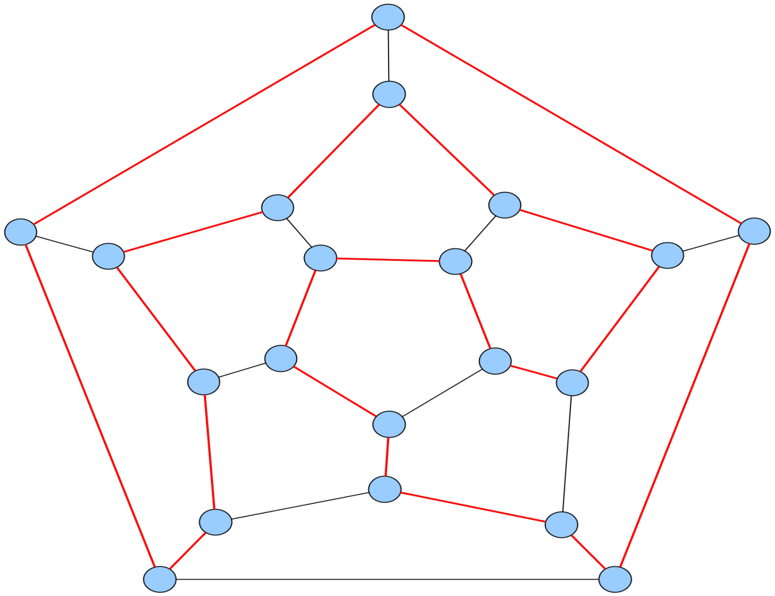
- La question est la suivante : peut-on effectuer un parcours en passant **une et une seule fois** par chacune de ces villes et en revenant à son point de départ ?

- On peut associer un **graphe planaire**, dont les sommets et les arêtes correspondent à ceux du dodécaèdre



- Ce graphe est construit à partir de ce que l'on appelle le **diagramme de Schlegel** du dodécaèdre

- Reformulons notre question : peut-on trouver un **cycle passant une et une seule fois par tous les sommets** de ce graphe ?



- Un tel parcours sera qualifié d'**hamiltonien**.

Cas général

Définitions

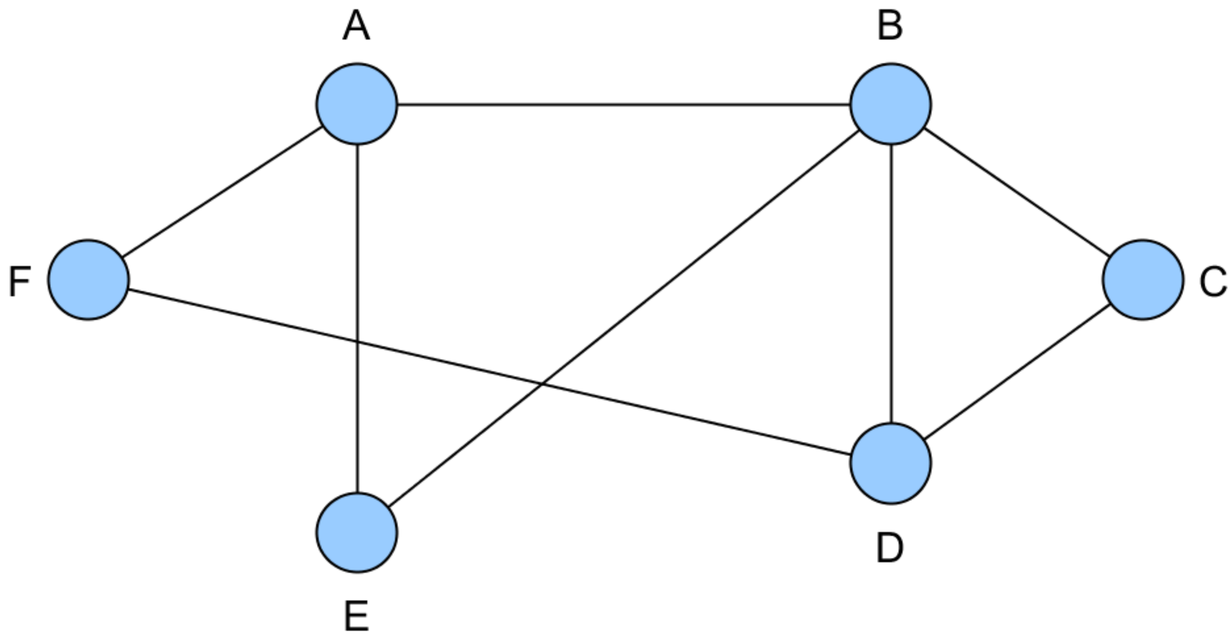
Soit G=(V,E) un graphe **orienté ou non**.

Une chaîne, un chemin, un cycle ou un circuit de G sont dits **hamiltoniens** s'ils passent une et une seule fois par tous les sommets de G.

Un **graphe hamiltonien** est un graphe non orienté possédant un cycle hamiltonien ou un graphe orienté possédant un circuit hamiltonien.

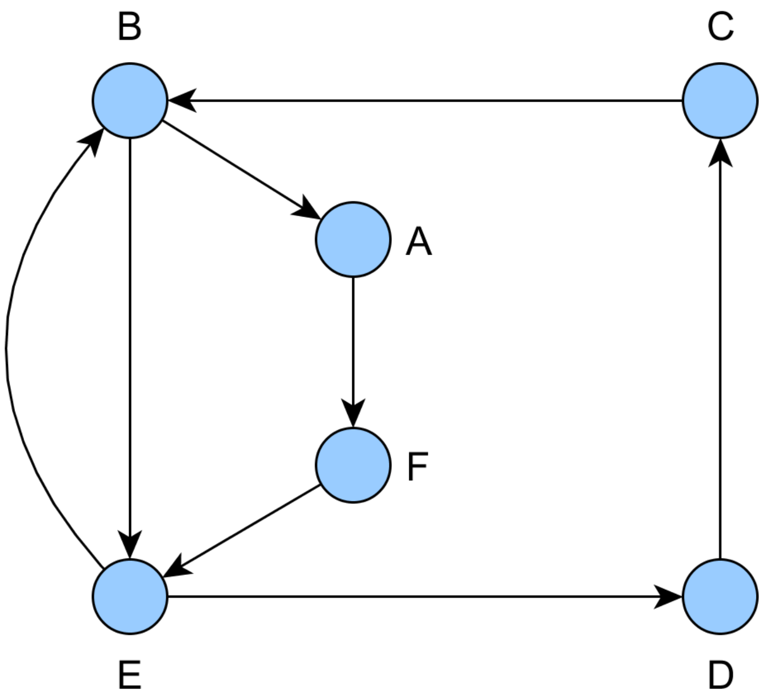
- la recherche de parcours eulérien est un problème relativement facile
- la recherche de parcours hamiltonien est extrêmement difficile.
- Pour l'instant, on ne connaît d'ailleurs pas de conditions générales permettant d'affirmer qu'un graphe est hamiltonien.

Exemple : Un graphe non orienté hamiltonien



- Ce graphe est hamiltonien car il possède le cycle (A,E,B,C,D,F,A).

Un graphe orienté hamiltonien



- Ce graphe est hamiltonien car il possède le cycle (E,D,C,B,A,F,E).

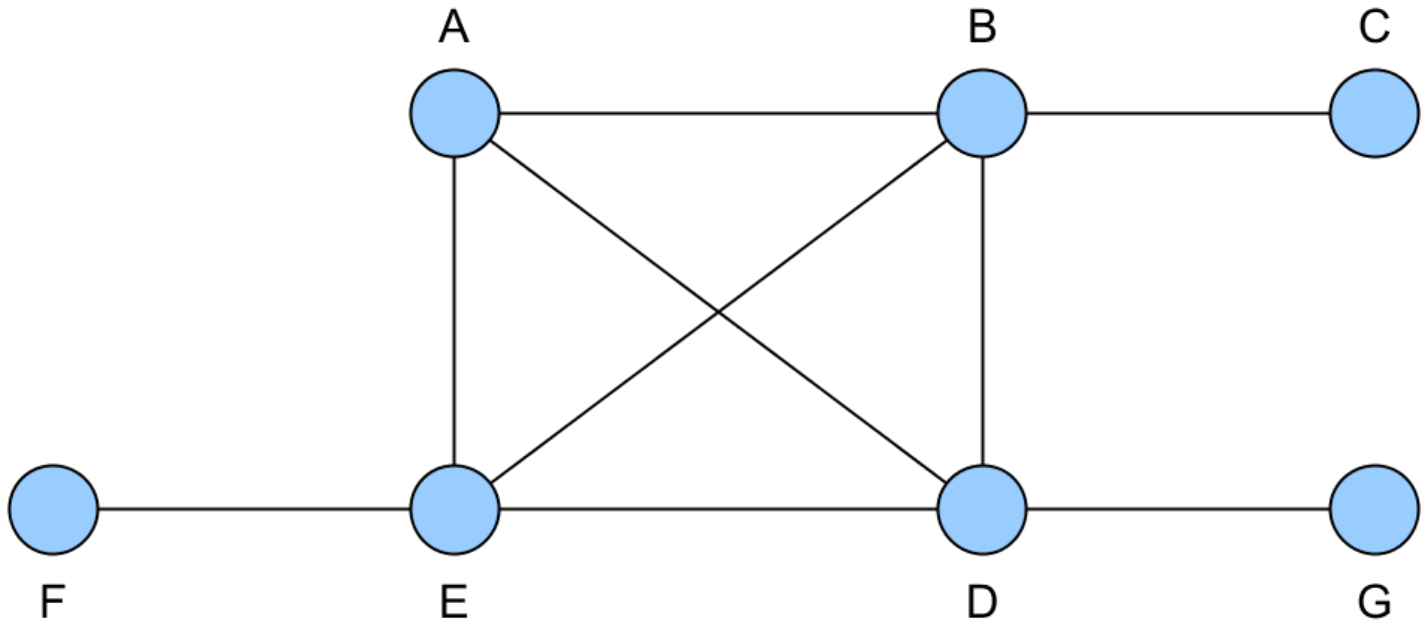
Conditions suffisantes d'existence

- Si l'on ne connait pas encore de conditions nécessaires pour affirmer qu'un graphe est hamiltonien ou non, il existe quelques **conditions suffisantes**.
- La condition suivante est ainsi assez grossière.

Propriété
Soit G=(V,E) un graphe **non orienté**.
Si G possède un sommet de degré 1 il ne peut pas être hamiltonien.

Ce résultat est assez évident, car pour qu'un graphe possède un cycle hamiltonien on doit pouvoir arriver et repartir par n'importe quel sommet, et donc le degré de chacun d'eux doit être au moins égal à 2.

Exemple : Un graphe non hamiltonien



- Ce graphe n'est pas hamiltonien car le sommet F est de degré 1.

Conditions suffisantes d'existence

- La condition suivante est du au mathématicien **Dirac** .

Condition de Dirac

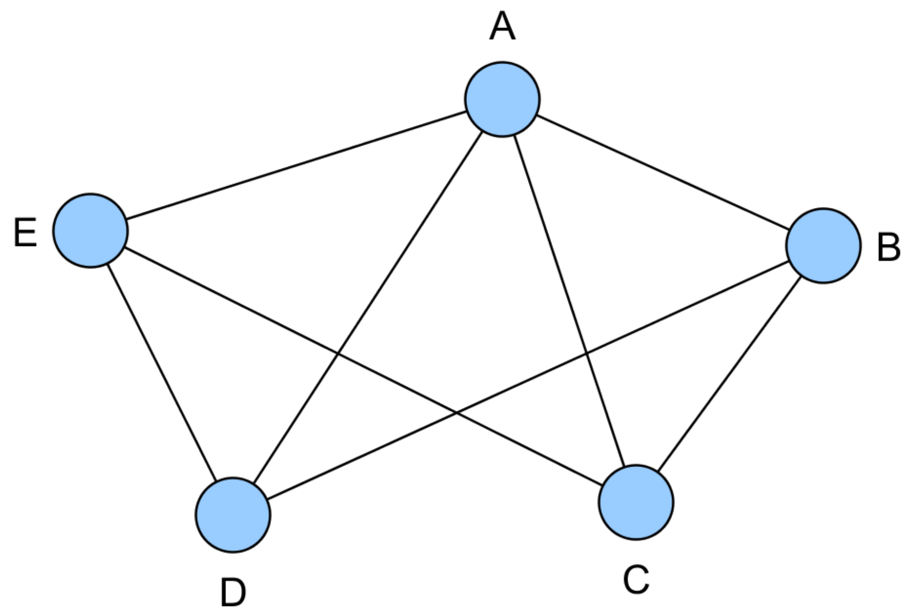
Soit G=(V,E) un graphe **non orienté** d'ordre n, avec $n \geq 3$.

Si pour tout sommet x de G on a $d(x) \geq \frac{n}{2}$

alors G est hamiltonien.

- Cette condition suffisante mais absolument pas nécessaire est en pratique peu vérifiée.

Exemple : Application de la condition de Dirac



- Ce graphe est d'ordre 5 et chacun de ses sommet a un degré au moins égal à 3. Il est donc hamiltonien.
- Voici un exemple de cycle hamiltonien : (A,B,C,E,D,A)

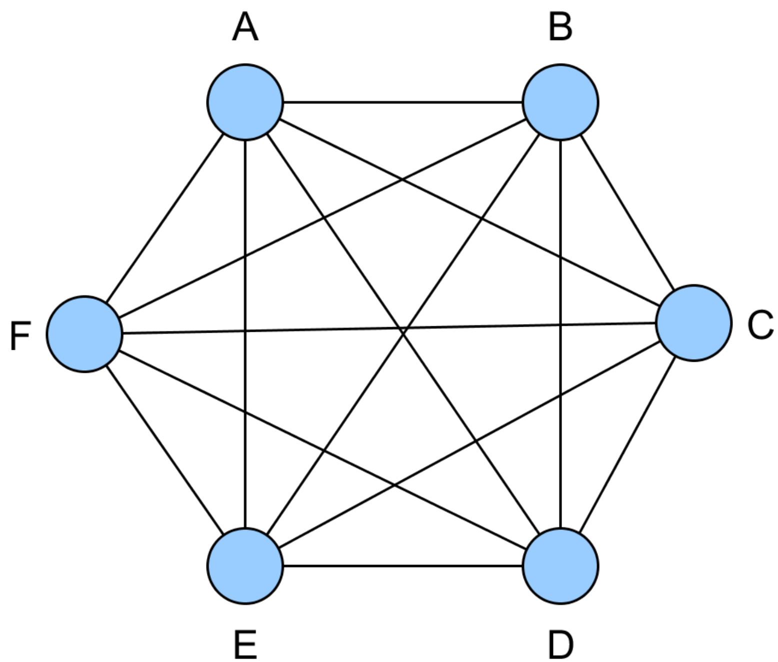
Conditions suffisantes d'existence

- La condition précédente va permettre de prouver que **les graphes complets sont hamiltoniens**.

Propriété
Soit G=(V,E) un graphe **non orienté** d'ordre n, avec $n \geq 3$.
Si le graphe G est complet alors il est hamiltonien.

Preuve
Le degré de chaque sommet est égal à $n-1$ donc la condition de Dirac est vérifiée.

Un graphe complet hamiltonien

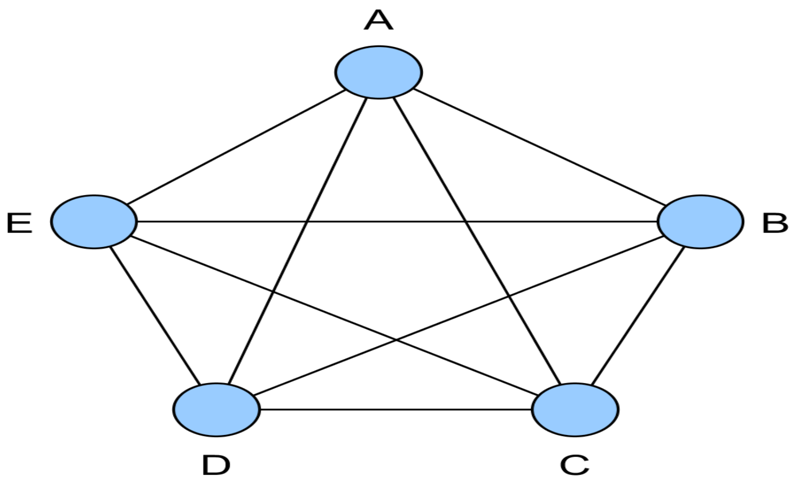


- Nous espérons que le lecteur saura trouver de lui-même un cycle hamiltonien dans ce graphe...

Applications

Organisation de dîners

- Cinq amis dînant autour d’une table ronde se demandent combien de dîners pourront-ils organiser afin que personne n’ait deux fois le même voisin.
- Modélisons ce problème par un **graphe complet à cinq sommets** :



- Un plan de table va correspondre à un **cycle hamiltonien** de ce graphe. En effet, positionner les convives autour de la table en ne se souciant que de l'identité de chacun des voisins revient à énumérer les différentes personnes.

- Deux cycles hamiltoniens ayant une arête commune correspondront à des plans de table où deux amis se retrouveront deux fois côte à côte.

- La question se ramène donc à **dénombrer le nombre de cycles hamiltoniens disjoints**, c'est-à-dire n'ayant aucune arête commune.

- Ce graphe comportant 10 arêtes, et un cycle hamiltonien en possédant 5, il y aura au plus deux cycles hamiltoniens disjoints. Et il y en a exactement deux : (A,B,C,D,E,A) et (A,C,E,B,D,A).

- Ces amis pourront donc organiser **deux dîners** avec cette contrainte.