

ESMA 5015: Examen 2

Due on Abril 10, 2025

Damaris Santana

Alejandro Ouslan

Contents

1	Accept-Reject	3
1.1	Por que es necesario que $a < \alpha$ y $b > \beta$	3
1.2	Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, demuestre que M ocurre en $x = \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{a}}$	3
1.3	Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, encuentre el valor optimo de b	3
2	Implementacion del algoritmo	3
2.1	Describa un algoritmo Accept-Reject para generar una variable aleatoria con distribucion $Gamma(3/2, 1)$	3
2.2	Algoritmo en Python	3
2.3	Grafique el histograma de la distribucion obtenida sobreponiendo la distribucion deseada	3
2.4	Estime $E[X^2]$ y construya la grafica de la convergencia de los running means.	3
3	Importance Sampling	3
3.1	Estimador importance Sampling	3
3.1.1	$Cauchy(0, 1)$	3
3.1.2	$Normal(0, \frac{v}{v-2})$	3
3.1.3	$Exponencial(\lambda = 1)$	3
3.2	Estimador Monte Carlo	3
3.2.1	$Cauchy(0, 1)$	4
3.2.2	$Normal(0, \frac{v}{v-2})$	4
3.2.3	$Exponencial(\lambda = 1)$	4
3.3	Implementacion	4
3.4	Graficas	4

1 Accept-Reject

Suponga que desea generar variables aleatorias de una distribución $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ donde α no es necesariamente un entero. Decide usar el algoritmo **Accept-Reject** con la función candidata $\text{Gamma}(a, b)$.

1.1 Por qué es necesario que $a < \alpha$ y $b > \beta$

1.2 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, demuestre que M ocurre en $x = \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}$

1.3 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, encuentre el valor óptimo de b

2 Implementación del algoritmo

2.1 Describa un algoritmo **Accept-Reject** para generar una variable aleatoria con distribución $\text{Gamma}(3/2, 1)$

2.2 Algoritmo en Python

2.3 Grafique el histograma de la distribución obtenida sobreponiendo la distribución deseada

2.4 Estime $E[X^2]$ y construya la gráfica de la convergencia de los running means.

3 Importance Sampling

Usando Importance Sampling estime $E_f \left[\frac{X^5}{1+(X-3)^2} I[X \geq 0] \right]$, donde f es la distribución t con $v = 12$. Utilice las siguientes g :

1. $\text{Cauchy}(0, 1)$
2. $\text{Normal}(0, \frac{v}{v-2})$
3. $\text{Exponencial}(\lambda = 1)$

3.1 Estimador importance Sampling

Para cada una de estas distribuciones presente el estimador que corresponde a la sumatoria definida por el método de **Importance Sampling** y que converge al valor esperado de interés

3.1.1 $\text{Cauchy}(0, 1)$

3.1.2 $\text{Normal}(0, \frac{v}{v-2})$

3.1.3 $\text{Exponencial}(\lambda = 1)$

3.2 Estimador Monte Carlo

Para cada uno presente el estimador que corresponde a la sumatoria definida por el método de Integración Monte Carlos y que converge al valor esperado de interés.

3.2.1 *Cauchy*(0, 1)

3.2.2 *Normal*(0, $\frac{v}{v-2}$)

3.2.3 *Exponencial*($\lambda = 1$)

3.3 Implementacion

3.4 Graficas

Construya un asola graica y presente la convergencia de los running menas para los cuatro estimadores. Compare la varianza empirica de los cuatro estimadores