ESMA 5015: Examen 2

Due on Abril 10, 2025

Damaris Santana

Alejandro Ouslan

Contents

1 Accept-Reject

Suponga que desea general variables aleatorias de una distribución $Gamma(\alpha, \beta)$ donde α no es necesariamente un entero. Decide usar el algoritmo **Accept-Reject** con la función candidata $Gamma(a, b)$.

1.1 Por que es necesario que $a < \alpha$ y $b > \beta$

Esto es para asegurar un buen candidato que se asurque lo mas posible a la función objetivo, esto es con el propósito de hacer el algoritmo mas eficiente.

1.2 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, demuestre que M ocurre en $x = \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}$

$$
\begin{aligned}
x &= \sup \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \sup \frac{Gamma(\alpha, \beta)}{Gamma(a, b)} \\
&= \sup \frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\frac{1}{\Gamma(a)b^{a}} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}} \\
&= \left(\frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}}{\frac{1}{\Gamma(a)b^{a}}} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{x^{a-1}} \cdot \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{e^{-\frac{x}{b}}} \right) \frac{d}{dx} \\
&= \left(x^{\alpha-a} \cdot e^{\frac{x}{b} - \frac{x}{\beta}} \right) \frac{d}{dx} \\
&= \left(x^{\alpha-1} e^{\frac{x}{b} - \frac{x}{\beta}} \right) \left(\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right] + (\alpha - a)x^{-1} \right) = 0 \\
&= \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right] + (\alpha - a)x^{-1} = 0 \\
&= \left[\frac{\alpha - a}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}} \right]_{a = \lfloor \alpha \rfloor} \\
&= \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}
\end{aligned}
$$

1.3 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, encuentre el valor optimo de b

$$
\max(x) = \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}
$$

2 Implementación del algoritmo

2.1 Describa un algoritmo Accept-Reject para generar una variable aleatoria con distribución $Gamma(3/2, 1)$

2.2 Algoritmo en Python

2.3 Trafique el histograma de la distribución obtenida sobreponiendo la distribución deseada

2.4 Estime $E[X^2]$ y construya la gráfica de la convergencia de los running means.

3 Importance Sampling

title

```
def main(x):
    lst = [x + i for i in range(3)]
    return lst


if __name__ == "__main__":
    main()
```

Usando Importance Sampling estime $E_f\left[\frac{X^5}{1+(X-3)^2} I[X \geq 0]\right]$, donde f es la distribucion t con $v = 12$ Utilice las siguientes g:

1. $Cauchy(0, 1)$
2. $Normal(0, \frac{v}{v-2})$
3. $Exponencial(\lambda = 1)$

3.1 Estimador importance Sampling

Para cada una de estas distribuciones presente el estimador que corresponde a la summatoria definida por el metodo de **Importance Sampling** y que converge al valor esperado de interes

3.1.1 $Cauchy(0, 1)$

3.1.2 $Normal(0, \frac{v}{v-2})$

3.1.3 $Exponencial(\lambda = 1)$

3.2 Estimador Monte Carlo

Para cada uno presente el estimador que corresponde a la sumatoria definida por el metodo de Integracion Monte Carlos y que converge al valor esperado de interes.

3.2.1 $Cauchy(0, 1)$

3.2.2 $Normal(0, \frac{v}{v-2})$

3.2.3 $Exponencial(\lambda = 1)$

3.3 Implementacion

3.4 Graficas

Construya un asola graica y presente la convergencia de los running menas para los cuatro estimadores. Compare la varianza empirica de los cuatro estimadores