ESMA 5015: Examen 2

Due on Abril 10, 2025

Damaris Santana

Alejandro Ouslan

Contents

1 Accept-Reject

Suponga que desea general variables aleatorias de una distribución $Gamma(\alpha, \beta)$ donde α no es necesariamente un entero. Decide usar el algoritmo **Accept-Reject** con la función candidata $Gamma(a, b)$.

1.1 Por que es necesario que $a < \alpha$ y $b > \beta$

Esto es para asegurar un buen candidato que se asurque lo mas posible a la función objetivo, esto es con el propósito de hacer el algoritmo mas eficiente.

1.2 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, demuestre que M ocurre en $x = \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}$

$$
\begin{aligned}
x &= \sup \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \sup \frac{Gamma(\alpha, \beta)}{Gamma(a, b)} \\
&= \sup \frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\frac{1}{\Gamma(a)b^{a}} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}} \\
&= \left(\frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}}{\frac{1}{\Gamma(a)b^{a}}} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{x^{a-1}} \cdot \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{e^{-\frac{x}{b}}} \right) \frac{d}{dx} \\
&= \left(x^{\alpha-a} \cdot e^{\frac{x}{b} - \frac{x}{\beta}} \right) \frac{d}{dx} \\
&= \left(x^{\alpha-1} e^{\frac{x}{b} - \frac{x}{\beta}} \right) \left(\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right] + (\alpha - a) x^{-1} \right) = 0 \\
&= \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right] + (\alpha - a) x^{-1} = 0 \\
&= \left[\frac{\alpha - a}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}} \right]_{a = \lfloor \alpha \rfloor} \\
&= \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}
\end{aligned}
$$

1.3 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, encuentre el valor optimo de b

$$
\begin{aligned}
Mode_{target} &= Mode_{candidate} \\
(\alpha - 1)\beta &= (a - 1)b \\
b &= \frac{(\alpha - 1)\beta}{a - 1}
\end{aligned}
$$

Como $\alpha - 1 \approx \alpha$ y $a - 1 \approx a$

$$
b = \frac{\alpha\beta}{a}
$$

2 Implementación del algoritmo

2.1 Describa un algoritmo Accept-Reject para generar una variable aleatoria con distribución $Gamma(3/2, 1)$

$$\begin{aligned} M &= \frac{f(x)}{f(x)} \\ &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{x e^{-x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

1. Genrar un numero Y de la distribucion $Gamma(2, 1)$.
2. Generar un numero uniiforme $U \sim U(0, 1)$
3. Si $U \geq \frac{Y}{Mg(Y)}$
4. Repetir el proceso hasta aceptar un valor

2.2 Algoritmo en Python

Implementacion de python

```python
import numpy as np


# Función de densidad de la distribución objetivo (Gamma(3/2, 1))
def f(x):
    return (2 / np.sqrt(np.pi)) * np.sqrt(x) * np.exp(-x)


# Función de densidad de la distribución candidata (Gamma(1, 2))
def g(x):
    return x * np.exp(-x)


# Algoritmo de aceptación y rechazo
def accept_reject(n, seed=787):
    # Semilla para la generación de números aleatorios
    rng = np.random.default_rng(seed=seed)
    samples = []
    M = 2 / np.sqrt(np.pi)

    while len(samples) < n:
        # Paso 1: Generar una muestra de la distribución candidata (Gamma(1, 2))
        Y = rng.gamma(1, 2)

        # Paso 2: Generar una variable aleatoria uniforme U
        U = rng.uniform(0, 1)

        # Paso 3: Aceptar o rechazar
```

```
        if U <= f(Y) / (M * g(Y)):
            samples.append(Y)

    return np.array(samples)


if __name__ == "__main__":
    n_samples = 10000
    samples = accept_reject(n_samples)
```

2.3 Grafique el histograma de la distribución obtenida sobreponiendo la distribución deseada

Implementacion de python

```
from accept import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import gamma


def main(n: int):
    samples = accept_reject(n)

    # Traficar el histograma
    x = np.linspace(0, 10, 1000)
    plt.hist(
        samples,
        bins=50,
        density=True,
        alpha=0.6,
        color="b",
        label="Histograma (muestras)",
    )
    plt.plot(x, gamma.pdf(x, 3/2, scale=1), 'r-', label='Distribución Gamma(3/2, 1)')

    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("Densidad")
    plt.legend()
    plt.title("Histograma de la Distribución Generada vs. Distribución Objetivo")
    plt.show()


if __name__ == "__main__":
    n_samples = 10000
    main(n_samples)
```

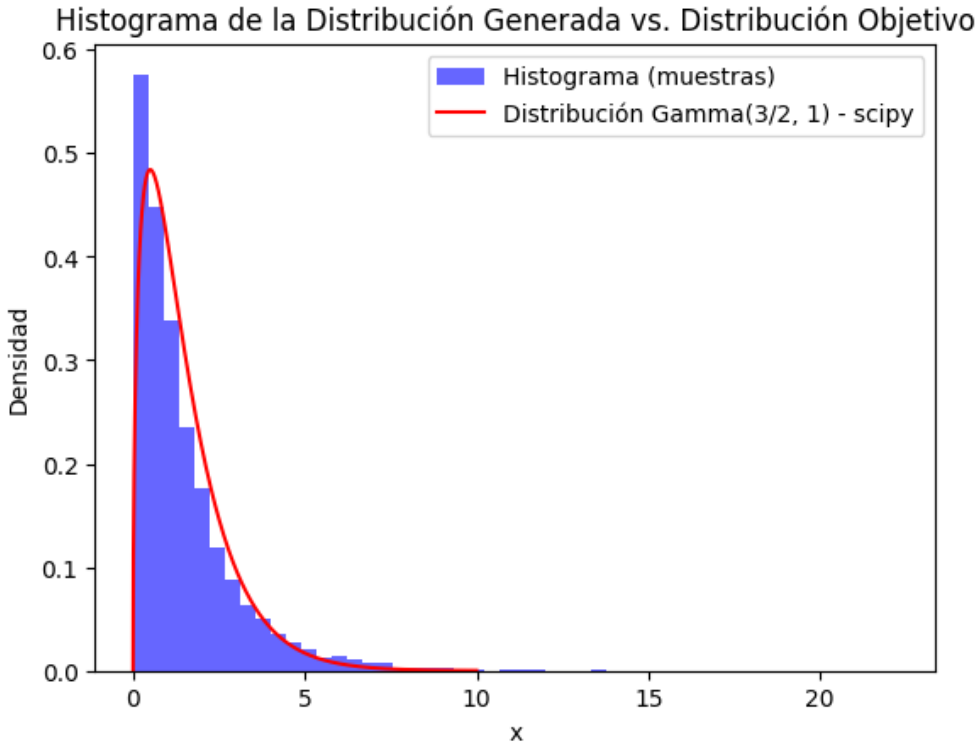

Figure 1: Histograma de la la gama simulada

2.4 Estime $E[X^2]$ y construya la gráfica de la convergencia de los running means.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 \\ &= \frac{3}{2}(\frac{3}{2}1) = 3.75 \end{aligned}$$

title

```python
# Estimar E[X^2] y construir la gráfica de la convergencia de los "running means"
running_means = np.cumsum(samples) / np.arange(1, n_samples + 1)

# Graficar la convergencia
plt.plot(running_means, label="Running Mean")
plt.axhline(y=np.mean(samples), color="r", linestyle="--", label="Media Estimada")
plt.xlabel("Número de Muestras")
plt.ylabel("Running Mean")
plt.legend()
plt.title("Convergencia del Running Mean a la Media Estimada")
plt.show()

# Estimación de E[X^2]
E_X2_estimated = np.mean(samples) + np.mean(samples) ** 2
print("Estimación de E[X^2]:", E_X2_estimated)
```

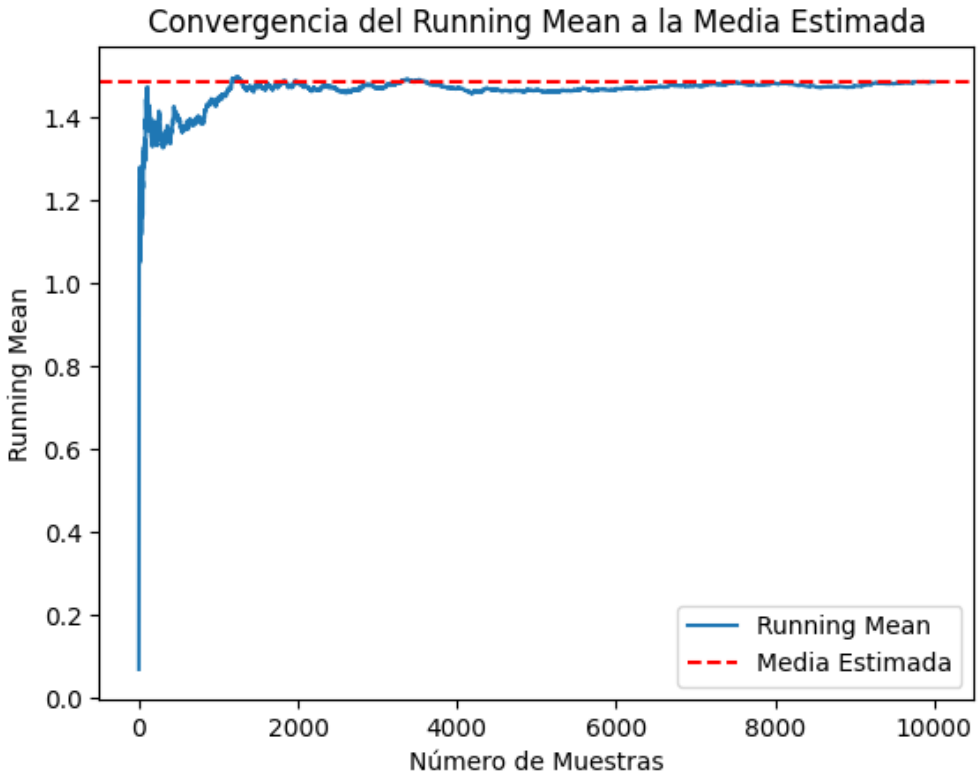

Figure 2: Histograma de la variable aleator

3 Importance Sampling

Usando Importance Sampling estime $E_f\left[\frac{X^5}{1+(X-3)^2}I[X \geq 0]\right]$, donde f es la distribucion t con $v = 12$ Utilice las siguientes g:

1. $Cauchy(0, 1)$
2. $Normal(0, \frac{v}{v-2})$
3. $Exponencial(\lambda = 1)$

3.1 Estimador importance Sampling

Para cada una de estas distribuciones presente el estimador que corresponde a la summatoria definida por el metodo de **Importance Sampling** y que converge al valor esperado de interes

3.1.1 $Cauchy(0, 1)$

3.1.2 $Normal(0, \frac{v}{v-2})$

3.1.3 $Exponencial(\lambda = 1)$

3.2 Estimador Monte Carlo

Para cada uno presente el estimador que corresponde a la sumatoria definida por el metodo de Integracion Monte Carlos y que converge al valor esperado de interes.

3.2.1 $Cauchy(0, 1)$

3.2.2 $Normal(0, \frac{v}{v-2})$

3.2.3 $Exponencial(\lambda = 1)$

3.3 Implementacion

3.4 Graficas

Construya un asola graica y presente la convergencia de los running menas para los cuatro estimadores. Compare la varianza empirica de los cuatro estimadores