

# ESMA 5015: Simulaciones Estocasticas

Alejandro Ouslan

Spring 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduccion</b>	<b>1</b>
1.1	generando $n$ para $\hat{p}_1$	1
1.2	generando $n$ para $\hat{p}_2$	1
1.3	generando $n$ para $\hat{p}_3$	1
<b>2</b>	<b>Formulas utiles de Integracion de Monte Carlos</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Importabnce Sampling</b>	<b>2</b>
3.1	Ejemplos de practicas	2
3.1.1	Ejemplo 1	2
3.2	Ejemplo 2	3

## 1 Introduccion

### 1.1 generando $n$ para $\hat{p}_1$

Para Encontrar cuantas  $n$  son necesarias para estimar la integracion de markovs

1. Sea  $n = \frac{z\sigma^2}{d}$ , para un confianza de 95% y  $z = 1.96$ .
2. Para  $\hat{p}_1 \rightarrow n = \frac{1.96\sqrt{0.127}}{.01}^2$
- 3.

### 1.2 generando $n$ para $\hat{p}_2$

Para encontrar  $p_2$ :

1.  $n = \frac{1.96\sqrt{0.052}}{.01}^2$
2.  $n = 1998$

### 1.3 generando $n$ para $\hat{p}_3$

Para encontrar  $p_3$ :

1.  $n = \frac{1.96\sqrt{0.0302}}{.01}^2$
2.  $n = 1161$

## 2 Formulas utiles de Integracion de Monte Carlos

**Definition 1** (Formula).

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx &= \int_0^1 g(u(b-a) + a)(b-a)du \\ &\rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(u_i(b-a) + a)(b-a)\end{aligned}$$

**Definition 2** (Formula).

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(x)dx &= \int_0^1 g\left(\frac{1}{u} - 1\right) \frac{1}{u^2} du \\ &\rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g\left(\frac{1}{u_i} - 1\right) \frac{1}{u_i^2}\end{aligned}$$

## 3 Importabnce Sampling

En un metodo altenativo para la estimaxion  $E_f[\ln x] = \int h(x)f(x)dx$  basado en una muestra de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de una distribucion  $g(x)$ , donde se aproxima.

$$\begin{aligned}E_f[\ln x] &= \int h(x)f(x)dx \\ &= \int \frac{h(x)f(x)}{g(x)}g(x)dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h(x_i)f(x_i)}{g(x_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_f[\ln x]\end{aligned}$$

Un ventaja de este metodo es que una misma muestra generada de  $g$  puede usar para estimar  $E_f[\ln(x)]$  para diferentes  $h$  y  $f$ . Aunque cualquier  $g$  sea potencialmente posible, algun  $g$  sin mejor que otro

NOTE:

$$var\left(\frac{h(x)f(x)}{g(x)}\right) = E_g\left[\frac{h(x)^2 f(x)^2}{g(x)}\right] - E_g\left[\frac{h(x)f(x)}{g(x)}\right]^2$$

donde:

$$\begin{aligned}E_g\left[\frac{h(x)^2 f(x)^2}{g(x)}\right] &= \int \frac{h(x)^2 f(x)^2}{g(x)} g(x)dx \\ &= \int h(x)^2 f(x)^2 \frac{g(x)}{g(x)} dx\end{aligned}$$

1.  $> M$  de modo que la varianza de estimar no son infinita (o sea pequena) similara a accept reject

### 3.1 Ejemplos de practicas

#### 3.1.1 Ejemplo 1

Considere  $X \sim t_v$ .

1.  $f_x(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1+\frac{x^2}{v})^{\frac{v+1}{2}}}$
2. para  $-\infty < x < \infty$
3.  $E_x[x] = 0 \forall v > 2$
4.  $var(x) = \frac{v}{v-2} \forall v > 2$

Para  $v = 12$  Estimar:

1.  $E[\sqrt{|\frac{x}{1-x}|}] = 1.13$
2.  $E[x^2 I[x > 2.1]] = 6.54$
3.  $E[\frac{x^5}{1+(x-3)^2} I[x \geq 0]] = 4.64$

Considere  $g$

1.  $Cauchy(0, 1), v = 1$
  2.  $N(0, \sigma^2 = \frac{v}{v-2})$  para que tengas lamisma varianza que  $f$
- algoritmo

$$\begin{aligned} E[\sqrt{|\frac{x}{1-x}|}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|\frac{x}{1-x}|} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|\frac{x}{1-x}|} f(x)}{g(x)} g(x) dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{|\frac{x_i}{1-x_i}|} \frac{f(x_i)}{g(x_i)} dx \end{aligned}$$

cuando  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son iid de  $g(x)$

1.  $g(x) = cauchy(0, 1)$
2.  $g(x) = N(0, \sigma^2 \frac{v}{v-2})$
3.  $f(x) = zv$

## 3.2 Ejemplo 2

$$\begin{aligned} E[x^2 I[x > 2.1]] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^5 I[x > 2.1] f(x) dx \\ &= \int_{2.1}^{\infty} x^5 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5 I[x > 2.1] f(x)}{g(x)} g(x) dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^5 I[x_i > 2.1] f(x_i)}{g(x_i)} \end{aligned}$$

para el sigiente paso considere una transformacion:

- $y = \frac{1}{x}$
- $x = \frac{1}{y}$
- $dx = -\frac{1}{y^2}$

entonces

$$\begin{aligned} &= \int_{1/2.1}^0 \frac{1}{y^5} [-\frac{1}{y^2}] f(\frac{1}{y}) dy \\ &= \int_0^{1/2.1} \frac{1}{y^7} f(\frac{1}{y}) dy \\ &= \end{aligned}$$