

ESMA 5015: Examen 2

Due on Abril 10, 2025

Damaris Santana

Alejandro Ouslan

Contents

1	Accept-Reject	3
1.1	Por que es necesario que $a < \alpha$ y $b > \beta$	3
1.2	Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, demuestre que M ocurre en $x = \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}$	3
1.3	Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, encuentre el valor optimo de b	3
2	Implementación del algoritmo	4
2.1	Describa un algoritmo Accept-Reject para generar una variable aleatoria con distribución $Gamma(3/2, 1)$	4
2.2	Algoritmo en Python	4
2.3	Grafique el histograma de la distribución obtenida sobreponiendo la distribución deseada	5
2.4	Estime $E[X^2]$ y construya la gráfica de la convergencia de los running means.	6
3	Importance Sampling	7
3.1	Estimador importance Sampling	7
3.1.1	$Cauchy(0, 1)$	7
3.1.2	$Normal(0, \frac{v}{v-2})$	8
3.1.3	$Exponencial(\lambda = 1)$	8
3.2	Estimador Monte Carlo	8
3.3	Implementacion	8
3.4	Graficas	8

1 Accept-Reject

Suponga que desea generar variables aleatorias de una distribución $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ donde α no es necesariamente un entero. Decide usar el algoritmo **Accept-Reject** con la función candidata $\text{Gamma}(a, b)$.

1.1 Por que es necesario que $a < \alpha$ y $b > \beta$

Esto es para asegurar un buen candidato que se asurque lo mas posible a la función objetivo, esto es con el propósito de hacer el algoritmo mas eficiente.

1.2 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, demuestre que M ocurre en $x = \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}$

$$\begin{aligned}
 x &= \sup \frac{f(x)}{g(x)} \\
 &= \sup \frac{\text{Gamma}(\alpha, \beta)}{\text{Gamma}(a, b)} \\
 &= \sup \frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\frac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}} \\
 &= \left(\frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}}{\frac{1}{\Gamma(a)b^a}} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{x^{a-1}} \cdot \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{e^{-\frac{x}{b}}} \right) \frac{d}{dx} \\
 &= \left(x^{\alpha-a} \cdot e^{\frac{x}{b} - \frac{x}{\beta}} \right) \frac{d}{dx} \\
 &= \left(x^{\alpha-1} e^{\frac{x}{b} - \frac{x}{\beta}} \right) \left(\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b} \right] + (\alpha - a)x^{-1} \right) = 0 \\
 &= \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b} \right] + (\alpha - a)x^{-1} = 0 \\
 &= \left[\frac{\alpha - a}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}} \right]_{a=\lfloor \alpha \rfloor} \\
 &= \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b}}
 \end{aligned}$$

1.3 Para $a = \lfloor \alpha \rfloor$, encuentre el valor optimo de b

$$Mode_{target} = Mode_{candidate}$$

$$(\alpha - 1)\beta = (a - 1)b$$

$$b = \frac{(\alpha - 1)\beta}{a - 1}$$

Como $\alpha - 1 \approx \alpha$ y $a - 1 \approx a$

$$b = \frac{\alpha\beta}{a}$$

2 Implementación del algoritmo

2.1 Describa un algoritmo Accept-Reject para generar una variable aleatoria con distribución $\text{Gamma}(3/2, 1)$

$$\begin{aligned} M &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{x e^{-x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

1. Generar un número Y de la distribución $\text{Gamma}(2, 1)$.
2. Generar un número uniforme $U \sim U(0, 1)$
3. Si $U \geq \frac{Y}{Mg(Y)}$
4. Repetir el proceso hasta aceptar un valor

2.2 Algoritmo en Python

Implementación de python

```
import numpy as np

# Función de densidad de la distribución objetivo (Gamma(3/2, 1))
def f(x):
    return (2 / np.sqrt(np.pi)) * np.sqrt(x) * np.exp(-x)

# Función de densidad de la distribución candidata (Gamma(1, 2))
def g(x):
    return x * np.exp(-x)

# Algoritmo de aceptación y rechazo
def accept_reject(n, seed=787):
    # Semilla para la generación de números aleatorios
    rng = np.random.default_rng(seed=seed)
    samples = []
    M = 2 / np.sqrt(np.pi)

    while len(samples) < n:
        # Paso 1: Generar una muestra de la distribución candidata (Gamma(1, 2))
        Y = rng.gamma(1, 2)

        # Paso 2: Generar una variable aleatoria uniforme U
        U = rng.uniform(0, 1)

        # Paso 3: Aceptar o rechazar
```

```
        if U <= f(Y) / (M * g(Y)):
            samples.append(Y)

    return np.array(samples)

if __name__ == "__main__":
    n_samples = 10000
    samples = accept_reject(n_samples)
```

2.3 Grafique el histograma de la distribución obtenida sobreponiendo la distribución deseada

Implementacion de python

```
from accept import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import gamma

def main(n: int):
    samples = accept_reject(n)

    # Traficar el histograma
    x = np.linspace(0, 10, 1000)
    plt.hist(
        samples,
        bins=50,
        density=True,
        alpha=0.6,
        color="b",
        label="Histograma (muestras)",
    )
    plt.plot(x, gamma.pdf(x, 3/2, scale=1), 'r-', label='Distribución Gamma(3/2, 1)')

    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("Densidad")
    plt.legend()
    plt.title("Histograma de la Distribución Generada vs. Distribución Objetivo")
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    n_samples = 10000
    main(n_samples)
```

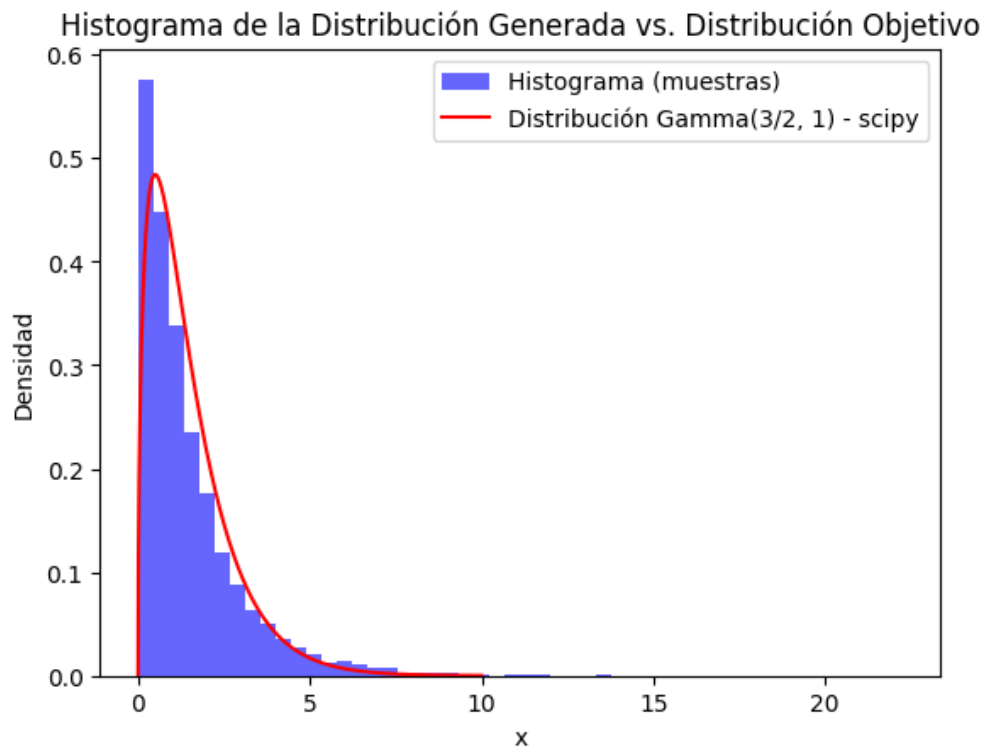


Figure 1: Histograma de la la gama simulada

2.4 Estime $E[X^2]$ y construya la gráfica de la convergencia de los running means.

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \alpha(\alpha + 1)\beta^2 \\
 &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 3.75
 \end{aligned}$$

title

```

# Estimar  $E[X^2]$  y construir la gráfica de la convergencia de los "running means"
running_means = np.cumsum(samples) / np.arange(1, n_samples + 1)

# Graficar la convergencia
plt.plot(running_means, label="Running Mean")
plt.axhline(y=np.mean(samples), color="r", linestyle="--", label="Media Estimada")
plt.xlabel("Número de Muestras")
plt.ylabel("Running Mean")
plt.legend()
plt.title("Convergencia del Running Mean a la Media Estimada")
plt.show()

# Estimación de  $E[X^2]$ 
E_X2_estimated = np.mean(samples) + np.mean(samples) ** 2
print("Estimación de  $E[X^2]$ :", E_X2_estimated)

```

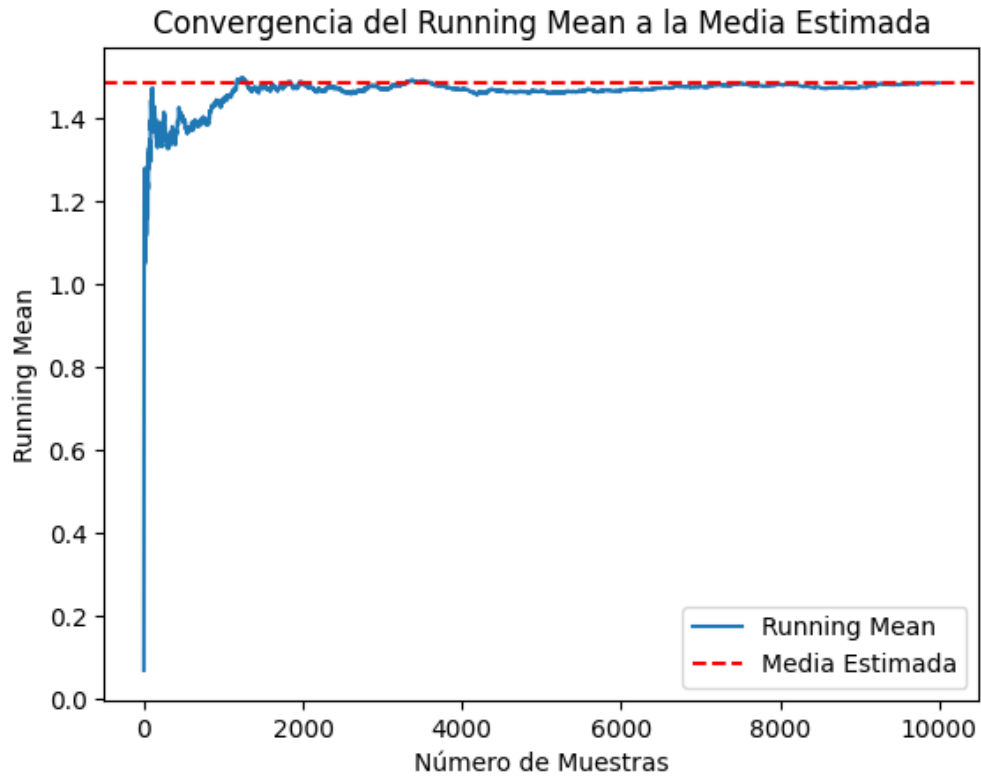


Figure 2: Histograma de la variable aleator

3 Importance Sampling

Usando Importance Sampling estime $E_f \left[\frac{X^5}{1+(X-3)^2} I[X \geq 0] \right]$, donde f es la distribución t con $v = 12$ Utilice las siguientes g :

3.1 Estimador importance Sampling

Para cada una de estas distribuciones presente el estimador que corresponde a la sumatoria definida por el metodo de **Importance Sampling** y que converge al valor esperado de interes

3.1.1 *Cauchy*(0, 1)

$$\begin{aligned}
 E_f \left[\frac{f(x)}{g(x)} p(x) \right] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x)}{g(x)} p(x); \text{ where } x \sim \text{cauchy}(0, 1) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\frac{X^5}{1+(X-3)^2} I[X \geq 0]}{\frac{1}{\pi(1+x^2)}} \cdot \text{student}(12)
 \end{aligned}$$

3.1.2 $Normal(0, \frac{v}{v-2})$

$$\begin{aligned}
E_f \left[\frac{f(x)}{g(x)} p(x) \right] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x)}{g(x)} p(x); \text{ where } x \sim normal(0, \frac{12}{12-2}) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{X^5}{1+(X-3)^2} I[X \geq 0] \text{student}(12)
\end{aligned}$$

3.1.3 $Exponencial(\lambda = 1)$

$$\begin{aligned}
E_f \left[\frac{f(x)}{g(x)} p(x) \right] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x)}{g(x)} p(x); \text{ where } x \sim exponential(1) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{X^5}{1+(X-3)^2} I[X \geq 0] \text{student}(12)
\end{aligned}$$

3.2 Estimador Monte Carlo

Para cada uno presente el estimador que corresponde a la sumatoria definida por el metodo de Integracion Monte Carlos y que converge al valor esperado de interes.

$$\begin{aligned}
MC &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x); \text{ where } x \sim student(12) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \frac{X^5}{1+(X-3)^2} I[X \geq 0]
\end{aligned}$$

3.3 Implementacion**3.4** Graficas

Construya un asola graica y presente la convergencia de los running menas para los cuatro estimadores. Compare la varianza empirica de los cuatro estimadores