ESMA 5015: Simulaciones Estocasticas

Alejandro Ouslan

Spring 2025

Contents

1 Importance sampling **1**
1.1 generando n para $\hat{p}_1$ . . . 1
1.2 generando n para $\hat{p}_2$ . . . 1
1.3 generando n para $\hat{p}_3$ . . . 1

2 Formulas utiles de Integracion de Monte Carlos **2**

3 Importabnce Sampling **2**
3.1 Ejemplos de practicas . . . 2
3.1.1 Ejemplo 1 . . . 2
3.2 Ejemplo 2 . . . 3
3.2.1 Metodo alterno . . . 3

1 Importance sampling

1.1 generando n para $\hat{p}_1$

Para Encontrar cuantas n son necesarias para estimar la integracion de markovs

1. Sea $n = \frac{z\sigma}{d}^2$, para un confianza de 95% y $z = 1.96$.
2. Para $\hat{p}_1 \to n = \frac{1.96\sqrt{0.127}}{.01}^2$
3.

1.2 generando n para $\hat{p}_2$

Para encontrar p_2:

1. $n = \frac{1.96\sqrt{0.052}}{.01}^2$
2. $n = 1998$

1.3 generando n para $\hat{p}_3$

Para encontrar p_3:

1. $n = \frac{1.96\sqrt{0.0302}}{.01}^2$
2. $n = 1161$

2 Formulas utiles de Integracion de Monte Carlos

Definition 1 (Formula)**.**

$$\int_a^b g(x)dx = \int_0^1 g(u(b-a)+a)(b-a)du$$
$$\to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(u_i(b-a)+a)(b-a)$$

Definition 2 (Formula)**.**

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^1 g(\frac{1}{u}-1)\frac{1}{u^2}du$$
$$\to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{1}{u_i}-1)\frac{1}{u_i^2}$$

3 Importabnce Sampling

En un metodo altenativo para la estimaxion $E_f[\ln x] = \int h(x)f(x)dx$ basado en una muestra de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una distribucion $g(x)$, donde se aproxima.

$$\begin{aligned} E_f[\ln x] &= \int h(x)f(x)dx \\ &= \int \frac{h(x)f(x)}{g(x)}g(x)dx \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{h(x_i)f(x_i)}{g(x_i)} \xrightarrow{n\to\infty} E_f[\ln x] \end{aligned}$$

Un aventaja de este metodo es que una misma muestra generada de g puede usar para estimar $E_f[\ln(x)]$ para diferentes h y f. Aunque cualquier g sea potencialmente posible, algun g sin mejor que otro

NOTE:

$$var(\frac{h(x)f(x)}{g(x)}) = E_g[\frac{h(x)^2 f(x)^2}{g(x)}^2] - E_g[\frac{h(x)f(x)}{g(x)}]^2$$

donde:

$$\begin{aligned} E_g[\frac{h(x)^2 f(x)^2}{g(x)}^2] &= \int \frac{h(x)^2 f(x)^2}{g(x)}^2 g(x)dx \\ &= \int h(x)^2 f(x)^2 \frac{g(x)}{g(x)}dx \end{aligned}$$

1. $> M$ de modo que la varianza de estimar no son infinita (o sea pequena) similara a accept reject

3.1 Ejemplos de practicas

3.1.1 Ejemplo 1

Considere $X \sim t_v$.

1. $f_x(x) = \frac{\Gamma\frac{v+1}{2}}{\Gamma\frac{v}{2}}\frac{1}{v\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+\frac{2^2}{v})\frac{v+1}{2}}$
2. para $-\infty < x < \infty$
3. $E_x[x] = 0 \forall v > 2$
4. $var(x) = \frac{v}{v-2} \forall v > 2$

Para $v = 12$ Estimar:

1. $E[\sqrt{|\frac{x}{1-x}|} = 1.13$
2. $E[x^2 I[x > 2.1] = 6.54$
3. $E[\frac{x^5}{1+(x-3)^2} I[x \geq 0] = 4.64$

Considere g

1. $Caushy(0,1), v = 1$
2. $N(0, \sigma^2 = \frac{v}{v-2})$ para que tengas lamisma varianza que f

algoritmo

$$\begin{aligned}
E[\sqrt{|\frac{x}{1-x}|} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|\frac{x}{1-x}|} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|\frac{x}{1-x}|} f(x)}{g(x)} g(x)dx \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\frac{x_i}{1-x_i}|} \frac{f(x_i)}{g(x_i)} dx
\end{aligned}$$

cuando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son idd de $g(x)$

1. $g(x) = caushy(0,1)$
2. $g(x) = N(0, \sigma^2 \frac{v}{v-2})$
3. $f(x) = zv$

3.2 Ejemplo 2

$$\begin{aligned}
E[x^5 I[x > 2.1] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^5 I[x > 2.1] f(x)dx \\
&= \int_{2.1}^{\infty} x^5 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5 I[x \geq 2.1] f(x)}{g(x)} g(x)dx \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5 I[x_i \geq 2.1] f(x_i)}{g(x_i)}
\end{aligned}$$

se estan generando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a una distribucion $Caushy(0,1)$ y $N(0, \frac{v}{v-2})$.

$$\begin{aligned}
\bar{h}n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum
\end{aligned}$$

3.2.1 Metodo alterno

para el sigiente paso considere una transformacion:

- $y = \frac{1}{x}$
- $x = \frac{1}{y}$

- $dx = -\frac{1}{y^2}$

entonces

$$
\begin{aligned}
&= \int_{1/2.1}^{0} \frac{1}{y^5}[-\frac{1}{y^2}]f(\frac{1}{y})dy \\
&= \int_{0}^{1/2.1} \frac{1}{y^7}f(\frac{1}{y})dy \\
&=
\end{aligned}
$$