

Méthode des éléments finis : treillis plans à nœuds articulés

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

24 mars 2006 – 29 mars 2011

Table des matières

Introduction	3
1 Matrices élémentaires	3
2 Exemple 1 : treillis soumis à une force nodale	6
2.1 Énoncé	6
2.2 Partition des degrés de liberté	6
2.3 Étude élémentaire	7
2.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus	7
2.5 Efforts normaux dans les éléments	7
2.6 Actions de liaison	8
3 Exemple 2 : treillis soumis à une force nodale	8
3.1 Énoncé	8
3.2 Partition des degrés de liberté	8
3.3 Étude élémentaire	9
3.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus	9
3.5 Efforts normaux dans les éléments	10
3.6 Actions de liaison	10
4 Exemple 3 : treillis soumis à une variation de température	10
4.1 Énoncé	10
4.2 Partition des degrés de liberté	11
4.3 Étude élémentaire	11
4.4 Premier cas de charge	12
4.4.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus	12
4.4.2 Efforts normaux dans les éléments	12
4.4.3 Actions de liaison	12
4.5 Deuxième cas de charge	13
4.5.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus	13
4.5.2 Efforts normaux dans les éléments	13
4.5.3 Actions de liaison	13
5 Programmes Maple	14
5.1 tre_mat	14
5.2 exemple_1	14
5.3 exemple_2	15
5.4 exemple_3	15
Références	16

Introduction

Un **treillis** est un ensemble de poutres droites (**éléments**) reliées entre elles par des rotules (**nœuds**). Les liaisons extérieures sont des rotules et des appuis simples. Les charges sont des forces portées par les rotules, des gradients thermiques et des déplacements d'appui. **La force intérieure dans une section droite se réduit à l'effort normal.**

Le treillis est plan si :

- Le plan $\{O; x, y\}$ est un plan de symétrie pour toutes les sections droites.
- Les forces appliquées sont situées dans le plan $\{O; x, y\}$.

On suppose que **les déplacements sont petits.**

1 Matrices élémentaires

Soit $(i \rightarrow j)$ un élément de treillis plan de section droite constante (figure 1).

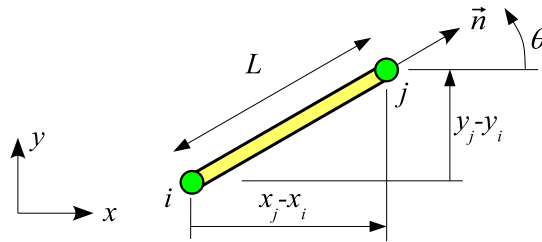


Figure 1 – Élément $i \rightarrow j$

L est la longueur de l'élément et A l'aire de sa section droite.

(x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont les coordonnées des nœuds de l'élément.

Le vecteur unitaire \vec{n} porté par l'axe de la poutre est défini par :

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad , \quad L^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (1.1)$$

où θ est l'angle que fait \vec{n} avec l'axe x .

E et α sont respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

L'élément est soumis à un effort normal N (positif : traction, négatif : compression) et à une variation de température ΔT constante.

(u_i, v_i) et (u_j, v_j) sont les déplacements nodaux (figure 2).

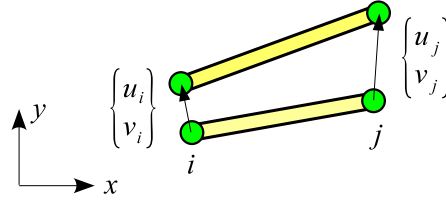


Figure 2 – Déplacements élémentaires

Les efforts aux extrémités de l'élément sont (figure 3) :

$$-N \vec{n} \text{ en } i, \quad N \vec{n} \text{ en } j \quad (1.2)$$

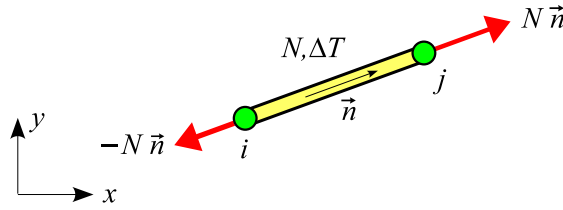


Figure 3 – Efforts élémentaires

Différentions la relation :

$$L^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (1.3)$$

Il vient :

$$2 L dL = 2 (x_j - x_i) (dx_j - dx_i) + 2 (y_j - y_i) (dy_j - dy_i) \quad (1.4)$$

d'où l'expression de l'allongement unitaire suivant \vec{n} :

$$\varepsilon_n = \frac{dL}{L} = \frac{1}{L} \left(\frac{(x_j - x_i)}{L} (dx_j - dx_i) + \frac{(y_j - y_i)}{L} (dy_j - dy_i) \right) \quad (1.5)$$

soit :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{L} (n_x (u_j - u_i) + n_y (v_j - v_i)) \quad (1.6)$$

Cet allongement unitaire est dû à l'effort normal (loi de Hooke) et à la variation de température :

$$\varepsilon_n = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T \quad (1.7)$$

L'effort normal s'écrit en fonction des déplacements nodaux :

$$\begin{aligned} N &= EA (\varepsilon_n - \alpha \Delta T) \\ &= \frac{EA}{L} (n_x (u_j - u_i) + n_y (v_j - v_i)) - EA \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (1.8)$$

soit :

$$N = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -n_x & -n_y & n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} - EA \alpha \Delta T \quad (1.9)$$

On en déduit :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f_{\text{th}}\} \quad (1.10a)$$

avec :

$$\{f_{\text{nod}}\} = N \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (1.10b)$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -n_x & -n_y & n_x & n_y \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & -n_x^2 & -n_x n_y \\ & n_y^2 & -n_x n_y & -n_y^2 \\ \text{sym.} & & n_x^2 & n_x n_y \\ & & & n_y^2 \end{bmatrix} \quad (1.10c)$$

$$\{f_{\text{th}}\} = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (1.10d)$$

$\{f_{\text{nod}}\}$ est le vecteur force nodal (N).

$\{u\}$ est le vecteur déplacement élémentaire (m).

$[k]$ est la matrice de rigidité (N/m).

$\{f_{\text{th}}\}$ est le vecteur force équivalent au gradient thermique (N).

Remarque 1 : la matrice de rigidité peut se mettre sous la forme :

$$[k] = \begin{bmatrix} [\bar{k}] & -[\bar{k}] \\ -[\bar{k}] & [\bar{k}] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [\bar{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Remarque 2 : la matrice de rigidité est égale à :

$$[k] = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ n_y & 0 \\ 0 & n_x \\ 0 & n_y \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

ou :

$$[k] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & 0 & 0 \\ n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & -n_y \\ 0 & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 \\ -n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & n_y \\ 0 & 0 & -n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Remarque 3 : l'énergie de déformation est égale à (à un coefficient près indépendant des déplacements et de leurs dérivées) :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} EA \varepsilon_n^2 L - EA \varepsilon_n \alpha \Delta T L \\ &= \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} - \{u\}^T \{f_{\text{th}}\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le travail des forces extérieures se réduit au travail des forces nodales :

$$W_{\text{ext}} = \{u\}^T \{f_{\text{nod}}\} \quad (1.15)$$

L'énergie potentielle est égale à :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{def}} - W_{\text{ext}} \quad (1.16)$$

La matrice de rigidité est la matrice hessienne (ou matrice de Hess) de l'énergie de déformation par rapport aux déplacements nœaux (programme **tre_mat**) :

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 E_{\text{def}}}{\partial u_i \partial u_j} \quad (= k_{ji}) \quad (1.17)$$

Le vecteur des efforts aux nœuds est le gradient de l'énergie de déformation par rapport aux déplacements nœaux :

$$f_{\text{nod},i} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial u_i} \quad (1.18)$$

2 Exemple 1 : treillis soumis à une force nodale

2.1 Énoncé

Le treillis plan à noeuds articulés représenté sur la figure 4 est composé de trois poutres de même nature et de même section droite.

Soient E le module de Young du matériau et A l'aire des sections droites.

Le noeud 1 est articulé et le noeud 3 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale.

Le noeud 2 porte une charge de composantes $(0, P)$.

Application numérique : on donne :

$$A = 100 \text{ mm}^2, L = 0.2 \text{ m}, E = 200000 \text{ MPa}, P = -10000 \text{ N}$$

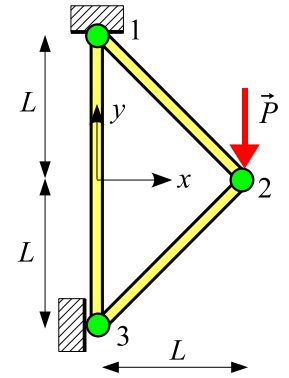


Figure 4 – Exemple 1

2.2 Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ($[1]$, $[12]$) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ v_2 \rightarrow 2 \\ u_3 \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

2.3 Étude élémentaire

– coordonnées nodales :

nœud	x	y
1	0	L
2	L	0
3	0	$-L$

– élément 1 \rightarrow 2 :

caractéristiques : $L\sqrt{2}$, A , E , $n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ v_2 \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad [k_{1-2}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

– élément 3 \rightarrow 1 :

caractéristiques : $2L$, A , E , $n_x = 0$, $n_y = 1$

$$\{ddl_{3-1}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 3 \\ u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}, \quad [k_{3-1}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– élément 3 \rightarrow 2 :

caractéristiques : $L\sqrt{2}$, A , E , $n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\{ddl_{3-2}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 3 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ v_2 \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad [k_{3-2}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple_1**) :

$$u_2 = \frac{PL}{2EA} = -0.050 \text{ mm}, \quad v_2 = \frac{PL}{2EA}(1 + 2\sqrt{2}) = -0.191 \text{ mm}$$

$$v_3 = \frac{PL}{EA} = -0.100 \text{ mm}$$

2.5 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-2} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \right) = -\frac{P\sqrt{2}}{2} = 7071 \text{ N}$$

$$N_{3-1} = \frac{EA}{2L} (-v_3) = -\frac{P}{2} = 5000 \text{ N}$$

$$N_{3-2} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (v_2 - v_3) \right) = \frac{P\sqrt{2}}{2} = -7071 \text{ N}$$

2.6 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-2} \vec{n}_{1-2} + N_{3-1} \vec{n}_{3-1} \quad \text{d'où}$$

$$F_{1x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-2} = \frac{P}{2} = -5000 \text{ N} \quad , \quad F_{1y} = \frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-2} + N_{3-1} = -P = 10000 \text{ N}$$

– nœud 3 :

$$\vec{F}_3 = -N_{3-1} \vec{n}_{3-1} - N_{3-2} \vec{n}_{3-2} \quad \text{d'où}$$

$$F_{3x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{3-2} = -\frac{P}{2} = 5000 \text{ N}$$

Remarque : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad , \quad -2LF_{1x} - LF_{2x} + LF_{2y} = 0$$

3 Exemple 2 : treillis soumis à une force nodale

3.1 Énoncé

Le treillis plan représenté sur la figure 5 est composé de trois poutres de même section.

Soient E le module de Young du matériau et A l'aire des sections droites.

Le nœud 1 est articulé et le nœud 2 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale.

Le nœud 3 porte une charge d'intensité $(P, 3P, 0)$.

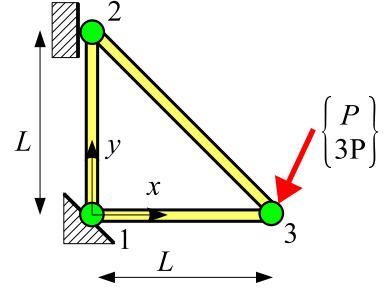


Figure 5 – Exemple 2

Application numérique : on donne :

$$A = 100 \text{ cm}^2 \quad , \quad E = 200000 \text{ MPa} \quad , \quad L = 0.7 \text{ m} \quad , \quad P = -120 \text{ kN}$$

3.2 Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ($[1]$, $[12]$) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

3.3 Étude élémentaire

– coordonnées nodales :

nœud	x	y
1	0	0
2	0	L
3	L	0

– élément $1 \rightarrow 2$:

caractéristiques : L , A , E , $n_x = 0$, $n_y = 1$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \end{Bmatrix} , \quad [k_{1-2}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– élément $1 \rightarrow 3$:

caractéristiques : L , A , E , $n_x = 1$, $n_y = 0$

$$\{ddl_{1-3}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix} , \quad [k_{1-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– élément $2 \rightarrow 3$:

caractéristiques : $L\sqrt{2}$, A , E , $n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix} , \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{nod,L}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 3P \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple_2**) :

$$v_2 = \frac{3PL}{EA} = -0.126 \text{ mm}$$

$$u_3 = \frac{4PL}{EA} = -0.168 \text{ mm} , \quad v_3 = \frac{(7+6\sqrt{2})PL}{EA} = -0.650 \text{ mm}$$

3.5 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-2} = \frac{EA}{L} v_2 = 3P = -360 \text{ kN}$$

$$N_{1-3} = \frac{EA}{L} u_3 = 4P = -480 \text{ kN}$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} (v_3 - v_2) \right) = -3\sqrt{2}P = 509 \text{ kN}$$

3.6 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-2} \vec{n}_{1-2} - N_{1-3} \vec{n}_{1-3} \quad \text{d'où}$$

$$F_{1x} = -N_{1-3} = -4P = 480 \text{ kN} \quad , \quad F_{1y} = -N_{1-2} = -3P = 360 \text{ kN}$$

– nœud 2 :

$$\vec{F}_2 = N_{1-2} \vec{n}_{1-2} - N_{2-3} \vec{n}_{2-3} \quad \text{d'où}$$

$$F_{2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{2-3} = 3P = -360 \text{ kN}$$

Remarque : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad , \quad LF_{3y} - LF_{2x} = 0$$

4 Exemple 3 : treillis soumis à une variation de température

4.1 Énoncé

Le treillis plan à nœuds articulés représenté sur la figure 6 est composé de trois poutres de même matériau et de même section droite.

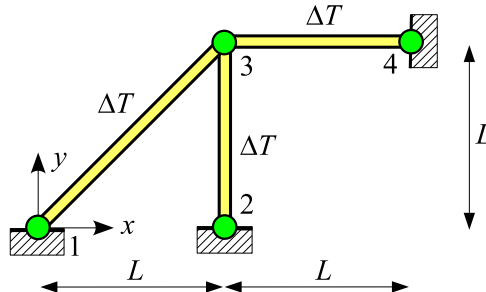


Figure 6 – Exemple 3

Soient E et α respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

Soit A l'aire des sections droites.

Les nœuds 1, 2 et 4 sont liés à l'extérieur par une rotule.

Premier cas de charge : la structure est soumise à une variation de température ΔT .

Deuxième cas de charge : la poutre (2 – 3) est soumise à une variation de température ΔT .

Application numérique : on donne :

$$A = 100 \text{ mm}^2, L = 0.1 \text{ m}, E = 200000 \text{ MPa}, \alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \Delta T = 100 \text{ K}$$

4.2 Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ([1], [12]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \\ v_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

4.3 Étude élémentaire

– coordonnées nodales :

nœud	x	y
1	0	0
2	L	0
3	L	L
4	$2L$	L

– élément 1 \rightarrow 3 :

$$\text{caractéristiques : } L\sqrt{2}, A, E, \alpha, n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\{ddl_{1-3}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \end{Bmatrix} \quad [k_{1-3}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f_{th,1-3}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

– élément 2 \rightarrow 3 :

$$\text{caractéristiques : } L, A, E, \alpha, n_x = 0, n_y = 1$$

$$\{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \end{Bmatrix} \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f_{th,2-3}\} = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

– élément 3 → 4 :

caractéristiques : L , A , E , α , $n_x = 1$, $n_y = 0$

$$\{ddl_{3-4}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \\ v_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix} \quad [k_{3-4}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{f_{th,3-4}\} = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4.4 Premier cas de charge

4.4.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{th,L}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}+2 \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple_3**) :

$$u_3 = (\sqrt{2}-2) L \alpha \Delta T = -0.0586 \text{ mm} \quad , \quad v_3 = \sqrt{2} L \alpha \Delta T = 0.1414 \text{ mm}$$

4.4.2 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_3 \right) - EA \alpha \Delta T = (\sqrt{2}-2) EA \alpha \Delta T = -11716 \text{ N}$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L} v_3 - EA \alpha \Delta T = (\sqrt{2}-1) EA \alpha \Delta T = 8284 \text{ N}$$

$$N_{3-4} = \frac{EA}{L} (-u_3) - EA \alpha \Delta T = (1-\sqrt{2}) EA \alpha \Delta T = -8284 \text{ N}$$

4.4.3 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-3} \vec{n}_{1-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{1x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-3} = (\sqrt{2}-1) EA \alpha \Delta T = 8284 \text{ N} \quad , \quad F_{1y} = F_{1x} = 8284 \text{ N}$$

– nœud 2 :

$$\vec{F}_2 = -N_{2-3} \vec{n}_{2-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{2x} = 0 \quad , \quad F_{2y} = -N_{2-3} = (1-\sqrt{2}) EA \alpha \Delta T = -8284 \text{ N}$$

– nœud 4 :

$$\vec{F}_4 = N_{3-4} \vec{n}_{3-4} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{4x} = N_{3-4} = (1-\sqrt{2}) EA \alpha \Delta T = -8284 \text{ N} \quad , \quad F_{4y} = 0$$

Remarque : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{4x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{4y} = 0 \quad , \quad L F_{2y} - L F_{4x} = 0$$

4.5 Deuxième cas de charge

4.5.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple_3**) :

$$u_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} L\alpha\Delta T = -0.0207 \text{ mm} \quad , \quad v_3 = \frac{3-\sqrt{2}}{2} L\alpha\Delta T = 0.0793 \text{ mm}$$

4.5.2 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_3 \right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T = 5858 \text{ N}$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L} v_3 - EA\alpha\Delta T = \frac{1-\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T = -4142 \text{ N}$$

$$N_{3-4} = \frac{EA}{L} (-u_3) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} EA\alpha\Delta T = 4142 \text{ N}$$

4.5.3 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-3} \vec{n}_{1-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{1x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-3} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T = -4142 \text{ N} \quad , \quad F_{1y} = F_{1x} = -4142 \text{ N}$$

– nœud 2 :

$$\vec{F}_2 = -N_{2-3} \vec{n}_{2-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{2x} = 0 \quad , \quad F_{2y} = -N_{2-3} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} EA\alpha\Delta T = 4142 \text{ N}$$

– nœud 4 :

$$\vec{F}_4 = N_{3-4} \vec{n}_{3-4} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{4x} = N_{3-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} EA\alpha\Delta T = 4142 \text{ N} \quad , \quad F_{4y} = 0$$

Remarque : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{4x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{4y} = 0 \quad , \quad L F_{2y} - L F_{4x} = 0$$

5 Programmes Maple

Les programmes suivant se trouvent dans le fichier **treillis.txt**.

5.1 tre_mat

```
# calculs élémentaires
restart:with(linalg):

# allongement unitaire
eps:=(nx*(uj-ui)+ny*(vj-vi))/L;

# énergie de déformation
Edef:=EA*eps^2*L/2-eps*EA*alpha*DT*L;

# matrice de rigidité
k:=hessian(Edef,[ui,vi,uj,vj]);

# efforts nodaux
fnod:=grad(Edef,[ui,vi,uj,vj]);

# remarque
k:=jacobian(fnod,[ui,vi,uj,vj]);

# vecteur dû au gradient thermique
fth:=-jacobian(fnod,[DT]);
```

5.2 exemple_1

```
restart:with(linalg):

# application numérique

#L:=200;E:=200000;A:=Pi*30^2/4;P:=-10000;

# matrice de rigidité

KL:=matrix([[2,0,-1],[0,2,-1],[-1,-1,1+sqrt(2)]]):
KL:=scalarmul(KL,E*A/2/sqrt(2)/L);

# vecteur FL

FL:=vector([0,P,0]);

# calcul des déplacements nodaux

UL:=linsolve(KL,FL);

#evalf(%);
```

5.3 exemple_2

```
restart:with(linalg):

# application numérique

# L:=700;E:=200000;A:=10000;P:=-120e3;

# matrice de rigidité
KL:=matrix([[1+2*sqrt(2),1,-1],[1,1+2*sqrt(2),-1],[-1,-1,1]]):
KL:=scalarmul(KL,E*A/2/sqrt(2)/L);

# vecteur FL
FL:=vector([0,P,3*P]);

# calcul des déplacements nodaux
UL:=linsolve(KL,FL);
#evalf(%);
```

5.4 exemple_3

```
restart:with(linalg):

# application numérique

#L:=100;E:=200000;A:=100;alpha:=1e-5;DT:=100;

# matrice de rigidité

x:=1+2*sqrt(2):
KL:=matrix([[x,1],[1,x]]):
KL:=scalarmul(KL,E*A/2/sqrt(2)/L);

# vecteurs F
x:=E*A*alpha*DT/2:
FLcas1:=vector([(sqrt(2)-2)*x,(sqrt(2)+2)*x]);
FLcas2:=vector([0,E*A*alpha*DT]);

# calcul des déplacements nodaux

ULcas1:=linsolve(KL,FLcas1);
ULcas2:=linsolve(KL,FLcas2);

# map(evalf,ULcas1);
# map(evalf,ULcas2);
```

Références

- [1] J. H. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK – *Die methode der finiten elemente, Band I. Verschiebungsmethode in der statik*, Vieweg, 1986.
- [2] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [3] — , *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 2. Poutres et plaques*, Hermès, 1990.
- [4] A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MCINTYRE et C. LABERGE – *Résistance des matériaux*, 3 éd., Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 2002.
- [5] L. CHEVALIER – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [6] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS – *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005.
- [7] F. FREY – *Traité du génie civil, Volume 1. Analyse des structures et milieux continus. Statique appliquée*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- [8] — , *Traité du génie civil, Volume 2. Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des structures*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000.
- [9] F. FREY et J. JIROUSEK – *Traité du génie civil, Volume 6. Méthode des éléments finis*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2001.
- [10] D. GAY et J. GAMBELIN – *Une approche simple du calcul des structures par la méthode des éléments finis*, Hermès, 1989.
- [11] — , *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.
- [12] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [13] S. LAROZE – *Mécanique des structures, Tome 2. Théorie des poutres*, 2 éd., Eyrolles/Masson, 1988.
- [14] A. PORTELA et A. CHARAFI – *Finite elements using Maple. A Symbolic Programming Approach*, Springer, 2002.
- [15] J. S. PRZEMIENIECKI – *Theory of matrix structural analysis*, Dover, 1986.
- [16] W. WEAVER et J. M. GERE – *Matrix analysis of framed structures*, 3 éd., Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [17] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.
- [18] W. WUNDERLICH et W. D. PILKEY – *Mechanics of structures. Variational and computational methods*, 2 éd., CRC PRESS, 2003.