TD5 = Analyser la complexité des algorithmes

Ex 1 = Complexité des algorithmes de tris

1- Tri par sélection (voir TD 4)

```
fct tri-Selection ( T: tableau de réels, n: entier)
Var i, imin : entier
debut
T_1(n) ①    pour i allant de 0 à (n-2) faire
T_2(n) ②        imin ← getMin(T, i, n-1)
T_3(n) ③        si (i ≠ imin) alors échange(T, i, m)
            finpour
fin.
```

[redacted] : On doit séparer 2 cas :

1-1- Complexité en termes de comparaisons :

- taille du problème : la taille du tableau : n
- Dans le pire des cas : le tableau est trié dans le sens décroissant, au démarrage de l'algo :
- $T(n)$ = nbre des comparaisons des éléments du tableau :

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n)$$

$T_1(n) =$ 0 comparaisons

$$T_2(n) = \sum_{i=0}^{n-2} T_{getMin_i}(n)$$

$T_{getMin_i}(n)$ est le nombre de comparaisons ds le pire des cas à l'étape i :

ō. chaque appel de getMin on opère au pire des cas [redacted] $\sum_{j=i+1}^{n-1} O(1)$ comparaisons

②

$$T_{getMin_i}(n) = \sum_{j=i+1}^{n-1} O(1) = (n-1-(i+1)+1)O(1)$$

$$= (n-1-i)O(1)$$

d'où $$T_2(n) = \sum_{i=0}^{n-2} T_{getMin_i}(n)$$

$$T_2(n) = \sum_{i=0}^{n-2} ((n-1-i)O(1))$$

$$T_2(n) = \sum_{i=0}^{n-2} n\,O(1) - \sum_{i=0}^{n-2} O(1) - \sum_{i=0}^{n-2} i\,O(1)$$

$$T_2(n) = (n-1)n\,O(1) - (n-1)O(1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2}O(1)$$

$$T_2(n) = \frac{2n-(n-2)}{2}(n-1)O(1) - (n-1)O(1)$$

$$T_2(n) = \frac{(n+2)(n-1)}{2}O(1) - (n-1)O(1)$$

$$T_2(n) = \left(\frac{(n+2)-2}{2}\right)(n-1)O(1)$$

$$T_2(n) = \frac{n}{2}(n-1)O(1) = O(n^2)$$

③ $T_3(n) = 0$ comparaisons.

donc : $T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n)$

$T(n) = 0 + O(n^2) + 0 = \boxed{O(n^2)}$ quadratique

1-2 : etudions la complexité de l'algorithme de tri par selection en termes d'échanges dans le pire des cas :

$T(n) =$ nbre d'échanges
$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n)$

$T_1(n) = 0$
$T_2(n) = 0$
$T_3(n) = \sum_{i=0}^{n-2} 3\,O(1) = 3(n-1)\,O(1) = O(n)$ linéaire

$T(n) = 0 + 0 + O(n)$: complexité linéaire

2- etudions maintenant le tri par insertion (voir TD4) :
nous allons etudier le premier cas en termes de comparaisons, dans le pire des cas : tableau et trié dans le sens décroissant, au démarrage :

(4) fct tri insertion (T : tableau de reels, n : entier)
var i : entier, x : reel
début
Pour i allant de 1 à n-1
(1) $T_1(n)$ $x \leftarrow T[i]$
(2) $T_2(n)$ $j \leftarrow i$
(3) $T_3(n)$ tq $((j > 0)$ et $(T[j-1] > x))$ faire
(4) $T_4(n)$ $T[j] \leftarrow T[j-1]$
(5) $T_5(n)$ $j \leftarrow j-1$
fintq
(6) $T_6(n)$ $T[j] \leftarrow x$
finpour
fin.

$T(n)$ = nbre de comparaisons ds le pire des cas.

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n) + T_4(n) + T_5(n) + T_6(n)$$

4-suite

$$T_1(n) = 0$$

$$T_2(n) = 0$$

$$T_3(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} O(1) = \sum_{i=1}^{n-1} i\,O(1) = \frac{n(n-1)}{2} O(1)$$

$$T_3(n) = O(n^2)$$

$$T_4(n) = 0, \; T_5(n) = 0, \; T_6(n) = 0$$

$T(n) = T_3(n) = O(n^2)$ complexité quadratique

$T_3(n) = O(n^2)$

$T(n) = O(n) + O(n^2) = O(n^2)$ quadratique

2-2 : Cas de la complexité en terme d'échanges
$T(n)$ = nbre d'échange dans le pire des cas
(tri par insertion) :

$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n) + T_4(n) + T_5(n) + T_6(n)$

$T_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1} O(1) = (n-1) O(1) = O(n)$

$T_2(n) = 0$, $T_3(n) = 0$, $T_5(n) = 0$

$T_4(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} O(1) =$ déjà calculé $= O(n^2)$

$T_6(n) = \sum_{i=1}^{n-1} O(1) = O(n)$ déjà calculé.

$T(n) = T_4(n) + T_6(n) = O(n^2) + O(n) = O(n^2)$
quadratique.

3-1 : Complexité de l'algorithme de tri à bulle dans le pire des cas, en termes des comparaisons :
voir l'algorithme de tri à bulle sur la correction TD4 !

Le pire cas implique que l'algorithme fera le max d'opérations qu'on doit déterminer et en estimer l'ordre :

(7) :

3-2 : étudions la complexité du tri à bulle en termes d'échanges dans le pire des cas :

$T(n) =$ nbre d'échanges $= T_1(n) + T_2(n)$

$T_1(n) = 0$, $T_2(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} O(1) = O(n^2)$

$T(n) = T_2(n) = O(n^2)$ quadratique

Synthèse : Dans le pire des cas

Algorithme	Complexité (comparaison)	Complexité (échanges)
tri par sélection	$O(n^2)$: quadratique	$O(n)$: linéaire
tri par insertion	$O(n^2)$: quadratique	$O(n^2)$: quadratique
tri à bulle	$O(n^2)$: quadratique	$O(n^2)$: quadratique