UMONS

Introduction à l'Analyse Numérique

Projet : « skateboard »

Ce projet tente modestement d'aborder un problème « concret » grâce aux techniques numériques vues au cours (ou en adaptant celles-ci). Un problème réel n'a évidemment pas une unique facette et vous serez donc amenés à employer ce que vous avez vu dans d'autres cours. En particulier, autant l'aspect mathématique que numérique sera présent et, dans certains cas, il vous sera demandé d'approfondir ou d'accroître vos connaissances mathématiques. Comme dans votre vie professionnelle future, il est normal que ce projet présente un certain défi. Les heures en présentiel prévues vous permettront de nous poser des questions mais il est bien sûr attendu de vous ayez fait votre part du travail et que vous puissiez faire montre de vos efforts. De plus, en tant qu'équipe, il est important que vous collaboriez et que chacun des membres de votre groupe puisse expliquer les développements réalisés et les problèmes rencontrés.

Le code doit respecter les standards de lisibilité, bonne factorisation et documentation vus au premier quadrimestre.

Un *bref* rapport écrit devra être téléversé sur Moodle à la fin du projet. Celui-ci fera au maximum 15 pages manuscrites (hors annexes) et résumera les développements mathématiques, les solutions apportées aux problèmes posés et les conclusions des expériences numériques. Les algorithmes complexes pourront être présentés à un haut niveau, sans les détails d'implémentation, ces derniers faisant l'objet de commentaires appropriés dans le code. Si vous avez dû apprendre des mathématiques supplémentaires et voulez y référer, il suffit de les mettre en annexe.

Nous allons nous atteler à déterminer les bons paramètres pour qu'un saut en *skateboard* se passe de la manière la plus sûre possible.

Le dispositif de saut se compose d'une rampe de lancement, qui permet à la personne de prendre son élan, et d'une rampe de récupération sur laquelle le sauteur finit sa course. Chacune des deux rampes est modélisée par une courbe paramétrique, c'est-à-dire qu'elle est l'image d'une fonction [1]

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \gamma(s) = \big(\gamma_1(s), \gamma_2(s)\big) \qquad \text{telle que } \forall s \in \mathbb{R},\ \|\partial_s \gamma(s)\| \neq 0,$$

où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous supposons que γ est deux fois continuement dérivable.

Pour la situation qui nous intéresse (voir fig. 1), la rampe de lancement est modélisée par la fonction ζ tandis que nous supposons que la rampe de récupération peut être déplacée et sera donc modélisée par l'image de η translatée horizontalement d'une distance d. Les fonctions ζ et η sont données par [2] :

$$\zeta :]-\infty, 0] \to \mathbb{R} : s \mapsto \big(s, \tfrac{1}{2}(s+2)^2\big) \qquad \text{et} \qquad \eta : [0, \infty[\to \mathbb{R} : s \mapsto \Big(s, \frac{1+\cos s}{1+0{,}1s}\Big).$$

Le sauteur part avec une vitesse nulle du point de $\operatorname{Im}\zeta$ d'abscisse $c < 0$. Nous supposons que sa masse vaut $m = 1\,\text{kg}$ et qu'il subit uniquement la force de gravitation lorsqu'il quitte la rampe.

1. Nous utilisons la notation $\|x\|$ pour la norme Euclidienne de x.
2. Les coordonnées sont données en mètres.

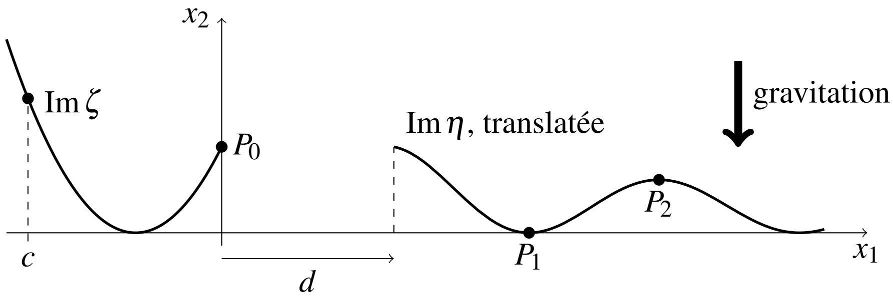

FIGURE 1 – Géométrie du problème.

Dans un premier temps, nous allons supposer qu'aucun frottement n'est exercé par les rampes. On rappelle que dans ce cas l'énergie $\frac{1}{2}m\|\partial_t x(t)\|^2 + mgx_2(t)$, où $t \mapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ est la position du sauteur en fonction du temps, est conservée. La constante de gravitation terrestre g vaut approximativement $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Question 1. En fonction de $c < 0$, déterminez analytiquement la vitesse $v \in \mathbb{R}^2$ du sauteur à la fin de la rampe de lancement (c'est-à-dire au point $P_0 = \zeta(0)$ de la figure 1).

Question 2. En fonction de $c < 0$, déterminez analytiquement la distance d à laquelle il faut positionner la rampe de récupération pour que l'athlète retombe au début ce celle-ci à la fin de son saut. Donnez les valeurs de d correspondant à $c = -5$ et $c = -6$.

Supposons maintenant que les rampes exercent une force de frottement « visqueuse » de direction opposée à la vitesse et d'amplitude $\mu_1 > 0$ (resp. $\mu_2 > 0$) fois cette vitesse pour la rampe ζ (resp. η). Décrire le mouvement du mobile le long de la rampe γ ($\gamma = \zeta$ ou $\gamma = \eta$ selon les besoins) revient à déterminer comment la variable s, qui paramétrise la courbe, varie en fonction du temps. Autrement dit, on cherche une fonction

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto S(t)$$

telle que $t \mapsto \gamma(S(t))$ donne la trajectoire du mobile dans l'espace. En faisant le bilan des forces, vous avez vu que S doit satisfaire l'équation[3] :

$$\|\partial_s\gamma(S)\|^2\,\partial_t^2 S = -\big(\partial_s\gamma(S)\,\big|\,\partial_s^2\gamma(S)\big)\,(\partial_t S)^2 - g\,\partial_s\gamma_2(S) - \frac{\mu}{m}\|\partial_s\gamma(S)\|^2\,\partial_t S \tag{1}$$

où μ vaut μ_1 ou μ_2 selon que γ est ζ ou η respectivement.

Question 3. À partir de la loi de Newton et en supposant que les forces qui maintiennent le mobile sur la courbe soient perpendiculaires à cette dernière, dérivez l'équation (1).

Question 4. Écrivez une routine qui, étant donné un point de départ donné par $c < 0$, retourne[4] (si possible) le couple (t, v) où t est le temps nécessaire pour atteindre la fin de la rampe de lancement et $v \in \mathbb{R}^2$ est le *vecteur* vitesse du sauteur *dans l'espace* à ce moment là. Nous ne nous attendons pas à une routine qui marche pour un $c < 0$ arbitraire mais la stratégie que vous employez — que vous devez expliquer ci-dessous — doit être suffisamment générale.

3. La notation $(x|y)$ désigne le produit scalaire usuel. On a donc $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
4. Nous rappelons qu'il y a une différence entre *retourner* le résultat et l'*imprimer* à l'écran.

Question 5. Écrivez une routine qui, en fonction de $c < 0$, retourne la distance d à laquelle il faut positionner la rampe de récupération pour que le sauteur retombe au début ce celle-ci à la fin de son saut.

Lorsque la personne retombe sur la rampe de récupération, on supppose qu'elle garde uniquement la partie de sa vitesse qui est tangente à la courbe η puis évolue le long de η. Lorsqu'on fait varier c ci-dessous, on considère toujours que la rampe de récupération est mise à la bonne distance d déterminée dans la question (5).

Question 6. Écrivez une routine qui, étant donné $c < 0$, retourne le temps total du parcours pour atteindre P_1 (voir figure 1).

Question 7. Donnez $c < 0$ tel que le sauteur arrive en P_2 avec une vitesse nulle pour les valeurs ci-après de μ_1 et μ_2. Expliquez votre démarche. Si certaines valeurs sont fixées grâce à des graphes que vous avez tracés, joignez ceux-ci au code que vous remettez (et référencez les dans vos explications !).