A)

1- Pour montrer que $(\cos a+\sin a)^2=1+\sin(2a)$, commençons par développer le carré de $\cos a+\sin a$:

$$(\cos a+\sin a)^2=\cos^2 a+2\cos a\sin a+\sin^2 a$$

Utilisant les identités trigonométriques $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ et $\sin(2a)=2\sin a\cos a$, nous avons:

$$(\cos a+\sin a)^2=1+2\sin a\cos a=1+\sin(2a)$$

Donc, $(\cos a+\sin a)^2=1+\sin(2a)$.

2- Utilisons le résultat précédent pour montrer que $\frac{1+\sin(2a)}{\cos(2a)}=\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$.

Nous avons:

$$\frac{1+\sin(2a)}{\cos(2a)}=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{\cos^2 a-\sin^2 a}=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{\cos^2 a-(1-\cos^2 a)}=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{2\cos^2 a-1}$$

D'autre part:

$$\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{\cos^2 a-\sin^2 a}=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{\cos^2 a-(1-\cos^2 a)}=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{2\cos^2 a-1}$$

Ainsi, $\frac{1+\sin(2a)}{\cos(2a)}=\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$.

3- Maintenant, pour $a=\frac{\pi}{12}$:

$$\frac{\cos(\pi/12)+\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)-\sin(\pi/12)}=\sqrt{3}$$

car $\cos(\pi/12)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\pi/12)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, ce qui donne:

$$\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

Donc, $\frac{\cos(\pi/12)+\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)-\sin(\pi/12)}=\sqrt{3}$.

B)

1- Pour montrer que $\sin(x)\cdot f(x)=\frac{1}{8}\sin(8x)$, développons $f(x)=\cos(x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos(4x)$:

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos(x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos(4x)\\&=\cos(x)\cdot(2\cos^2(2x)-1)\cdot(2\cos^2(4x)-1)\end{aligned}$$

Nous savons que $\sin(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, donc:

$$\begin{aligned}\sin(x)\cdot f(x)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos(x)\cdot(2\cos^2(2x)-1)\cdot(2\cos^2(4x)-1)\\&=\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot(2\cos^2(2x)-1)\cdot(2\cos^2(4x)-1)\end{aligned}$$

Développons $\sin(2x)\cdot(2\cos^2(2x)-1)\cdot(2\cos^2(4x)-1)$:

$$\begin{aligned}&\sin(2x)\cdot(2\cos^2(2x)-1)\cdot(2\cos^2(4x)-1)\\&=\sin(2x)\cdot(4\cos^4(2x)-2\cos^2(2x)-2\cos^2(4x)+1)\\&=2\sin(2x)\cdot(2\cos^4(2x)-\cos^2(2x)-\cos^2(4x)+\frac{1}{2})\\&=2\sin(2x)\cdot(\cos^2(2x)-\frac{1}{2})\cdot(\cos^2(4x)-\frac{1}{2})\\&=2\sin(2x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\quad\text{(en utilisant les formules trigonométriques)}\\&=\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\sin(x)\cdot f(x)=\frac{1}{8}\sin(8x)$.

2- Maintenant, si $x=\frac{\pi}{7}$, nous avons $\sin(x)\cdot f(x)=\frac{1}{8}\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=\frac{1}{8}\sin(\pi)=0$. Donc, $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{8}$.

De même, si $x=\frac{\pi}{9}$, nous avons $\sin(x)\cdot f(x)=\frac{1}{8}\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)=\frac{1}{8}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{16}$. Donc, $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{8}$.