I - Limite

Définition 1 : ***(Cas général)***
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ (avec $a < b$).
Si, en s'approchant de $c \in]a;b[$, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de l, alors on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers c est l. On écrit :

$$\lim_{x \to c} f(x) = l.$$

Définition 2 : ***(Limite en 0)***
On dit qu'une fonction f a pour limite 0 en 0 si $f(h)$ se rapproche de 0 dès que h est assez petit.

On note : $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$

Les fonctions suivantes ont comme limite 0 en 0 :

$\lim\limits_{h \to 0} h = 0$
$\lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0$
$\lim\limits_{h \to 0} h^3 = 0$
$\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{h} = 0$

Exemple 1 :

(a) $\lim\limits_{h \to 0} h + h^2 + h^3 = 0$

(b) $\lim\limits_{h \to 0} 3h^2 - 4h = 0$

(c) $\lim\limits_{h \to 0} -2h^3 + \sqrt{h} - 1 = -1$

II - Taux d'accroissement

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
a et x sont deux réels distincts de I.
Définition 3 :
Le taux d'accroissement de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 2 :
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$
\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\
&= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} \\
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= 2a+h
\end{aligned}
$$

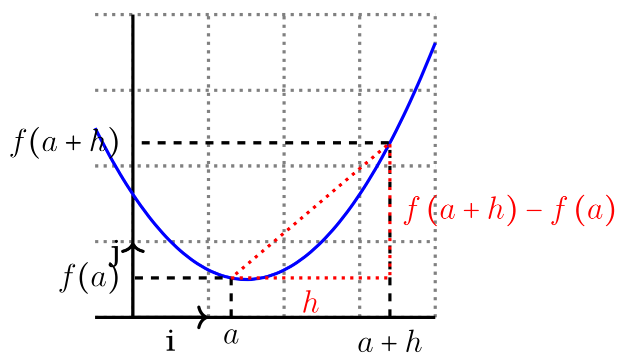
Définition 4 : ***(Rappel)***
La pente d'un segment ou d'une droite, généralement symbolisée par la variable m, correspond à la valeur de son inclinaison par rapport à l'axe des abscisses.

Rappel :
La formule pour calculer la pente m d'une droite qui passe par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

où Δy représente la variation des ordonnées et Δx représente la variation des abscisses.

Remarque 1 :
Le taux d'accroissement est donc la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$.



III - Nombre dérivé

Définition 5 :
On dit que f est dérivable en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque 2 :
On note aussi la dérivée $f'(a)$ comme la limite suivante :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Propriété 1 : ***(Interprétation géométrique)***
Si une fonction f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$.

Exemple 3 :
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, calculer le nombre dérivé de f en 3 puis en -1 :

1. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a + h$ d'après l'exemple 1
2. $f'(a) = \lim_{h\to 0} 2a + h = 2a$
3. $f'(2) = 2 \times 3 = 6$
4. $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

Exemple 4 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
Son taux d'accroissement en $a = 1$ est donné par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{(x^2+1)-(1^2+1)}{x-1} \\
&= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\
\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= x+1
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 2$
Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

IV - Equation de la tangente

Propriété 2 :
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$
La tangente T_a en à la courbe C_f en a a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
f'(x) + \frac{f(a)}{x-a} &= \frac{f(x)}{x-a} \\
f(x) &= f'(x)(x-a) + \frac{f(a)(x-a)}{x-a} \\
f(x) &= f'(x)(x-a) + f(a)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 5 :
Soit $f(x) = x^2 + 2$. Déterminer l'équation de la tangente en 0 et en -1

1. $f'(0) = 0$ donc $T_0 : y = 0 \times (x - 0) + f(0) = 2$
2. $f'(-1) = -2$ donc $T_{-1} : y = -2 \times (x + 1) + f(-1) = -2x + 1$