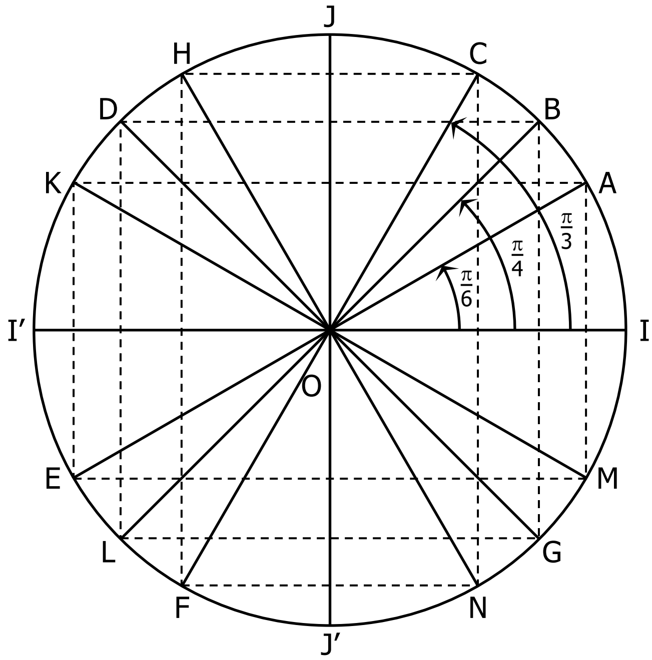
EXERCICE 1C.1

On a donné les valeurs exactes du sinus et cosinus de quelques angles remarquables entre 0 et 90°.

Point								**I**	**A**	**B**	**C**	**J**				
x (°)								**0**	**30**	**45**	**60**	**90**				
x (rad)	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos *x*								**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**				
sin *x*								**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**				



a. Retrouver le point qui correspond à chaque angle.

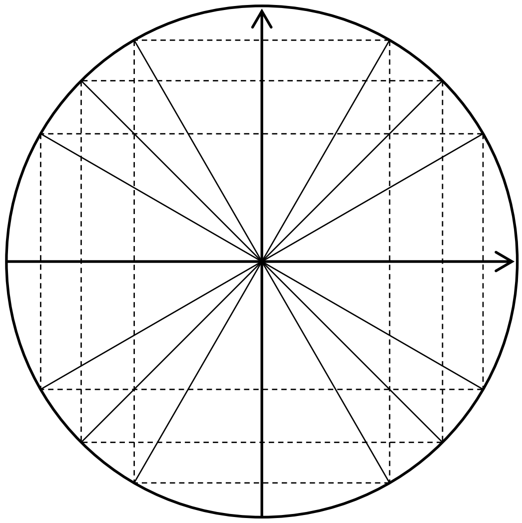
b. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de tous les angles du tableau.

EXERCICE 1C.2 Calculer dans chaque cas l'expression pour la valeur de x donnée :

$f(x) = -2\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{2}$	$f(x) = 5\cos x + 3\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{3}$	$f(x) = 3\cos^2 x$ pour $x = \pi$
$f(x) = \cos x \sin x$ pour $x = \frac{\pi}{2}$	$f(x) = \sin^2 x$ pour $x = \frac{\pi}{3}$	$f(x) = \cos 3x$ pour $x = -\frac{\pi}{2}$
$f(x) = x \sin x$ pour $x = -\frac{\pi}{6}$	$f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$	$f(x) = \cos^2 x \times \sin x$ pour $x = \frac{2\pi}{3}$

On rappelle les valeurs remarquables des sinus et cosinus :

***x* (rad)**	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
***x* (°)**	**0**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Les exercices suivants seront résolus **sans utiliser la machine**.
Mais il est conseillé d'utiliser la figure ci-contre →

EXERCICE 1D.1

a. Compléter :

$\cos 30° = \ldots\ldots$ $\sin 45° = \ldots\ldots$ $\cos 60° = \ldots\ldots$ $\sin 90° = \ldots\ldots$

$\cos 180° = \ldots\ldots$ $\sin 120° = \ldots\ldots$ $\cos 150° = \ldots\ldots$ $\sin 210° = \ldots\ldots$

$\cos 330° = \ldots\ldots$ $\sin 225° = \ldots\ldots$ $\cos 135° = \ldots\ldots$ $\sin 270° = \ldots\ldots$

b. Compléter :

$\cos \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$ $\sin \frac{\pi}{6} = \ldots\ldots$ $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\sin \frac{\pi}{3} = \ldots\ldots$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots$ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ldots\ldots$ $\cos \pi = \ldots\ldots$ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \ldots\ldots$

$\cos \frac{2\pi}{3} = \ldots\ldots$ $\sin \frac{5\pi}{6} = \ldots\ldots$ $\cos \frac{3\pi}{4} = \ldots\ldots$ $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \ldots\ldots$

$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \ldots\ldots$ $\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right) = \ldots\ldots$ $\cos \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \ldots\ldots$

EXERCICE 1D.2

a. Compléter :

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$

$\cos x = \frac{1}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$ $\sin x = 1$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$ $\sin x = 0$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$

$\cos x = -1$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$ $\sin x = -\frac{1}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$

$\cos x = 0$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots°$ ou $\ldots\ldots°$

b. Déterminer une **mesure en radians** de l'angle dont on connaît le cosinus et le sinus

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$ donc $x = \ldots\ldots$ $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots$

$\cos x = 1$ et $\sin x = 0$ donc $x = \ldots\ldots$ $\cos x = 0$ et $\sin x = -1$ donc $x = \ldots\ldots$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$ donc $x = \ldots\ldots$ $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \ldots\ldots$

Exercice 1E.1 :

À l'aide de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

1) Déterminer cos *x* sachant que $\sin x = \frac{2}{3}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Déterminer sin *x* sachant que $\cos x = -\frac{1}{5}$ et $x \in [-\pi; 0]$.

Exercice 1E.2 :

Démontrer que pour tout réel *x*, on a :

a) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

b) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\cos x \sin x$

Exercice 1E.3 :

On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1) Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$.

2) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus des réels $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$.

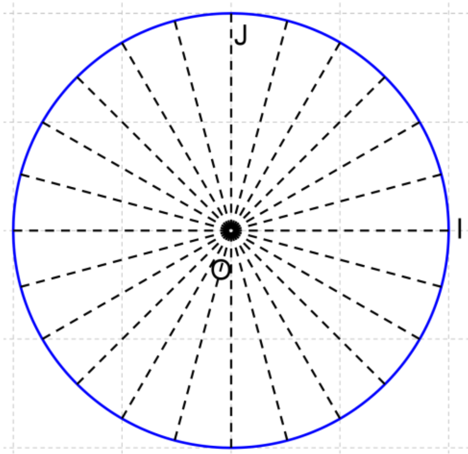
Exercice 1E.4 :

On donne $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1) Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) A l'aide du cercle trigonométrique, en déduire $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

EXERCICE 2A.1
Placer les points suivants sur le cercle en fonction du réel qui leur est associé :

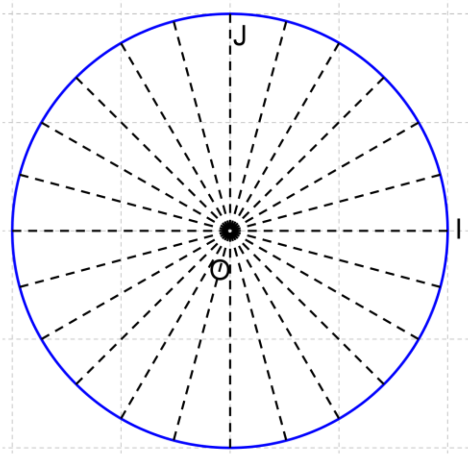


A (π) B $\left(\frac{\pi}{12}\right)$ C $\left(\frac{\pi}{3}\right)$

D $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ E $\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ F $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

G $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ H $\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$

EXERCICE 2A.2
Placer les points suivants sur le cercle en fonction du réel qui leur est associé :



A (5π) B $\left(\frac{-5\pi}{2}\right)$ C $\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

D $\left(\frac{-11\pi}{4}\right)$ E $\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ F $\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$

G (-534π) H $\left(\frac{-99\pi}{2}\right)$

EXERCICE 2A.3
Associer entre eux les nombres qui correspondent au même point du cercle :

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	6π	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{14\pi}{3}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
14π	$-\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	3π	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

EXERCICE 2A.4 Retrouver 4 autres longueurs d'arcs (2 positives, 2 négatives) correspondant au même point.

a. $\frac{3\pi}{2} \rightarrow$	**b.** $-\frac{\pi}{4} \rightarrow$
c. $\frac{2\pi}{3} \rightarrow$	**d.** $-\frac{5\pi}{12} \rightarrow$

EXERCICE 2A.5
a. A l'aide du tableau, retrouver la longueur de l'arc associé à l'angle (en degré).

Degrés	**180**	15	30	90	135	150
Longueur de l'arc	π					

b. A l'aide du tableau, retrouver l'angle (en degrés) associé à l'arc.

Longueur de l'arc	π	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
Degrés	**180**					

Mesures principales d'angles en radians

MODELES : Mesures principales des angles suivants :

$\dfrac{33\pi}{13}$? On utilise le fait que $2\pi=\dfrac{26\pi}{13}$: Ainsi : $\dfrac{33\pi}{13}=\dfrac{26\pi}{13}+\dfrac{7\pi}{13}=\dfrac{7\pi}{13}+2\pi$ avec $\dfrac{7\pi}{13}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

$-\dfrac{19\pi}{4}$? On a : $2\pi=\dfrac{8\pi}{4}$: Ainsi : $-\dfrac{19\pi}{4}=-\dfrac{8\pi}{4}-\dfrac{8\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{4}-2\pi-2\pi$ avec $\dfrac{-3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

$\dfrac{31\pi}{6}$? On a : $2\pi=\dfrac{12\pi}{6}$: Ainsi : $\dfrac{31\pi}{6}=\dfrac{12\pi}{6}+\dfrac{12\pi}{6}+\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}+2\times2\pi$ **MAIS** $\dfrac{7\pi}{6}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

$\dfrac{31\pi}{6}=\dfrac{12\pi}{6}+\dfrac{12\pi}{6}+\dfrac{12\pi}{6}-\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{5\pi}{6}+3\times2\pi$ avec $\dfrac{-5\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

$-\dfrac{29\pi}{5}$? On a : $2\pi=\dfrac{10\pi}{5}$: Ainsi $-\dfrac{29\pi}{5}=-\dfrac{10\pi}{5}-\dfrac{10\pi}{5}-\dfrac{9\pi}{5}=-\dfrac{9\pi}{5}-2\times2\pi$ **MAIS** $\dfrac{-9\pi}{6}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

$-\dfrac{29\pi}{5}=-\dfrac{10\pi}{5}-\dfrac{10\pi}{5}-\dfrac{10\pi}{5}+\dfrac{1\pi}{5}=\dfrac{\pi}{5}-3\times2\pi$ avec $\dfrac{\pi}{5}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Exercice 2B.1 : Quelles sont les mesures principales des angles suivants :

$\dfrac{19\pi}{3}$? On a $2\pi=\dfrac{......\pi}{3}$: Ainsi : $\dfrac{19\pi}{3}=\dfrac{.....\pi}{3}+\dfrac{.....\pi}{3}+\dfrac{.....\pi}{3}+\dfrac{.....\pi}{3}=\dfrac{.....\pi}{3}+3\times2\pi$, $\dfrac{....\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

$\dfrac{33\pi}{6}$? On a $2\pi=\dfrac{......\pi}{6}$: Ainsi : $\dfrac{33\pi}{6}=\dfrac{.....\pi}{6}+\dfrac{.....\pi}{6}+\dfrac{.....\pi}{6}=\dfrac{.....\pi}{6}+2\times2\pi$ **MAIS** $\dfrac{.....\pi}{6}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

$\dfrac{33\pi}{6}=\dfrac{.....\pi}{6}+\dfrac{.....\pi}{6}+\dfrac{.....\pi}{6}-\dfrac{.....\pi}{6}=-\dfrac{.....\pi}{6}+3\times2\pi$, $...\dfrac{....\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

$\dfrac{-23\pi}{9}$?

$\dfrac{-25\pi}{7}$?

Exercice 2B.2 :

Pour chaque mesure d'angle, en radians, donner la mesure principale θ_i (i variant de 1 à 12), puis placer le point M_i correspondant sur un cercle trigonométrique :

$\dfrac{7\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{4}$; $\dfrac{75\pi}{4}$; $\dfrac{13\pi}{3}$; $\dfrac{-13\pi}{3}$; $\dfrac{19\pi}{5}$; -124π ; 125π ; $\dfrac{341\pi}{12}$; -379π ; $\dfrac{325\pi}{4}$; $-\dfrac{1023\pi}{6}$

Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

<u>Exercice 3A.1</u> :
Exprimer A, B, C en fonction de cos *x* et sin *x* en détaillant les différentes étapes de calcul

$$A = 2\cos(-x) + \cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos(\pi + x)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5\cos(\pi - x) + 4\cos(3\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$C = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - 2\sin(3\pi + x) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$D = 5\cos(x + \pi) - 7\sin(\pi - x) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

<u>Ex 3A.2</u> :
Exprimer en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$:

$$A = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$C = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

<u>Ex 3A.3</u> :
Vérifier que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$

puis calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{7\pi}{12}$

<u>Ex 3A.4</u> :
Le réel x est tel que $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$

calculer cos 2*x* et en déduire la valeur de *x*

<u>Ex 3A.5</u> :
Soit $x \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$; calculer $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$