I - Taux d'accroissement

Définition 1 :
Le <u>taux d'accroissement</u> de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 1 :
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= 2a + h
\end{aligned}$$

II - Nombre dérivé

Définition 2 :
On dit que f est <u>dérivable</u> en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque 1 :
On note aussi la dérivée $f'(a)$ comme la limite suivante :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Propriété 1 : ***(Interprétation géométrique)***
Si une fonction f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$.

Exemple 2 :
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, calculer le nombre dérivé de f en 3 puis en -1 :

1. $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h$ d'après l'exemple 1

2. $f'(a) = \lim_{h\to 0} 2a + h = 2a$
3. $f'(2) = 2 \times 3 = 6$
4. $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

Exemple 3 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
Son taux d'accroissement en $a = 1$ est donné par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{(x^2+1)-(1^2+1)}{x-1} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= x+1 \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 2$
Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

III - Equation de la tangente

Propriété 2 :
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$
La tangente T_a en à la courbe C_f en a a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'(x) + \frac{f(a)}{x-a} &= \frac{f(x)}{x-a} \\ f(x) &= f'(x)(x-a) + \frac{f(a)(x-a)}{x-a} \\ f(x) &= f'(x)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

□

Exemple 4 :
Soit $f(x) = x^2 + 2$. Déterminer l'équation de la tangente en 0 et en -1

1. $f'(0) = 0$ donc $T_0 : y = 0 \times (x-0) + f(0) = 2$
2. $f'(-1) = -2$ donc $T_{-1} : y = -2 \times (x+1) + f(-1) = -2x + 1$