I - Probabilités conditionnelles dans un tableau

Définition 1 :
On appelle **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$

Rappel :

(a) La probabilité d'un événement A est toujours comprise entre 0 et 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$;

(b) Si $P(A) = 0$: l'événement A ne se produit pas, il est impossible ;

(c) Si $P(A) = 1$, l'événement se produit systématiquement ;

(d) La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1.

Remarque 1 :
Comme pour toutes les probabilités, on a : $0 \leq P_A(B) \leq 1$.

Exercice 1 :

Une entreprise de marketing a réalisé une étude sur 800 clients pour évaluer l'efficacité de deux types de campagnes publicitaires : la campagne A et la campagne B. Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude, indiquant le nombre de clients qui ont réalisé un achat suite à ces campagnes :

	Acheté	**Pas acheté**	**Total**
Campagne A	320	180	500
Campagne B	100	200	300
Total	420	380	800

1. On choisit au hasard un client et on considère les événements suivants :
   - A : « Le client a vu la campagne A. »
   - G : « Le client a réalisé un achat. »

   Calculer les probabilités suivantes :

   (a) $P(A)$
   (b) $P(G)$
   (c) $P(G \cap A)$
   (d) $P(\overline{G} \cap A)$

2. a) On choisit maintenant au hasard un client **ayant réalisé un achat**. Calculer la probabilité que ce client ait vu la campagne A sachant qu'il a réalisé un achat, $P_G(A)$.

   b) On choisit maintenant au hasard un client **ayant vu la campagne B**. Calculer la probabilité que ce client ait réalisé un achat sachant qu'il a vu la campagne B, $P_{\overline{A}}(G)$.

II - Probabilités conditionnelles, formule

Propriété 1 :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercice 2 :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement : « Le résultat est un pique ».
Soit B l'événement : « Le résultat est un roi ».
Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.
Correction.

- On calcule $P(A) = \dfrac{8}{32}$; il y a 8 cartes piques dans le paquet ;
- On calcule $P(B) = \dfrac{4}{32}$; il y a 4 rois dans le paquet ;
- On calcule $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$; il y a 1 seul roi de pique.

Enfin, on applique la formule :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{8}{32}}$$

Donc $P_A(B) = \dfrac{1}{8}$

Remarque 2 :
On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, parmi les piques, on a 1 chance sur 8 d'obtenir le roi.

III - Arbre pondéré et probabilités totales

1 - Propriétés

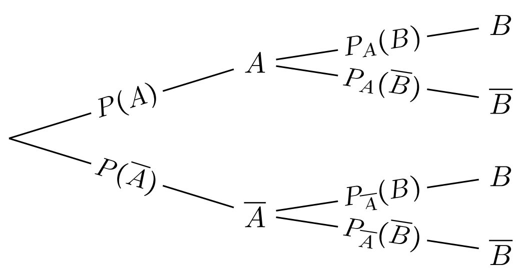
Propriété 2 :
Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

$$P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}(\overline{B})$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_{\overline{A}}(B)$$

2 - Construire un arbre pondéré

Exemple 1 :

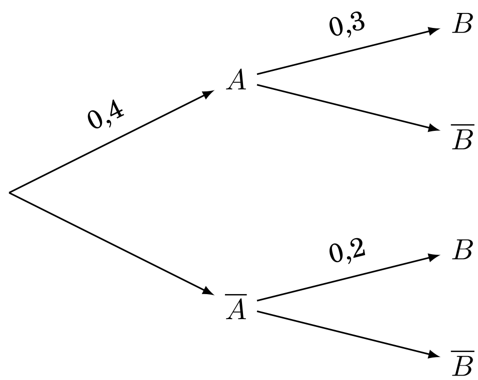


Exercice 3 :

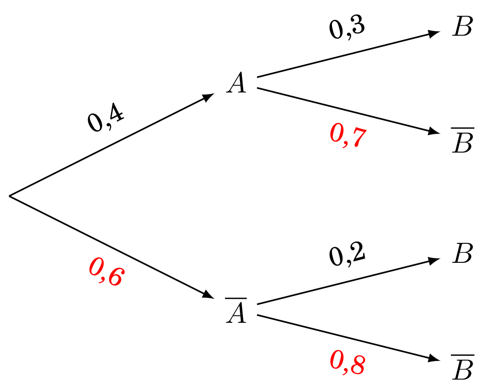
On donne : $P(A) = 0,4$; $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0,2$.
Construire l'arbre pondéré représentant cette situation.

Correction.

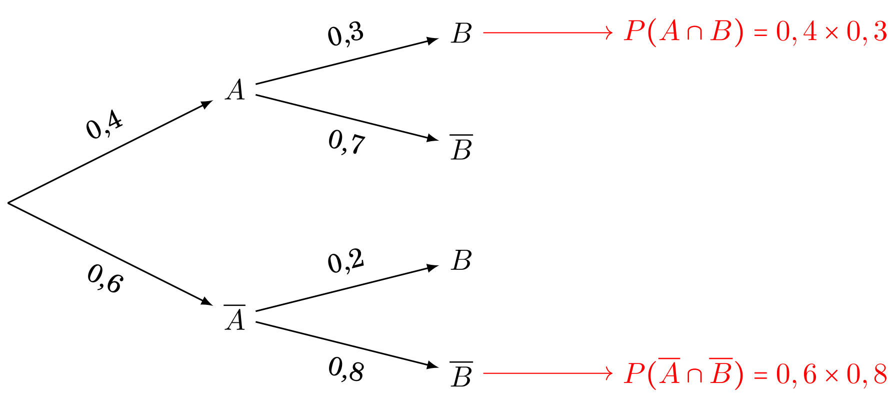
On place dans notre arbre les probabilités que l'on connait :



On calcule les probabilités complémentaires :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,6$; $P_A(\overline{B}) = 0,7$; $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,8$.



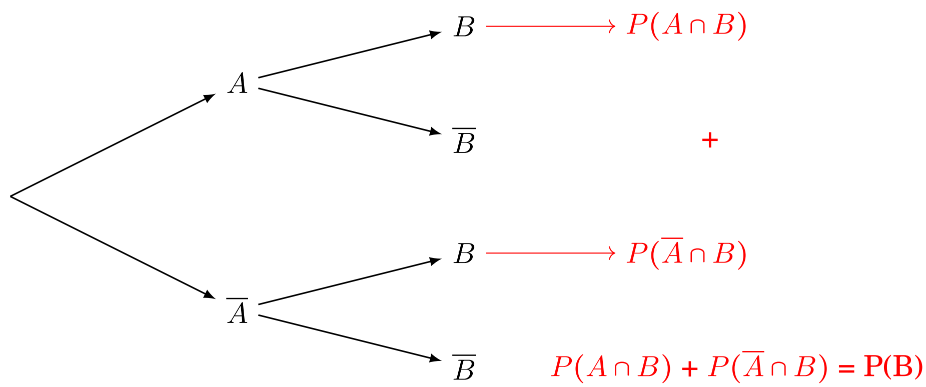
On calcule les probabilités d'intersections :
$P(A \cap B) = P(A) \times P_{\overline{A}}(B)$



3 - Probabilités totales

Propriété 3 : *(Formule des probabilités totales)*
$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

Démonstration :



□

Exercice 4 : *(Utiliser la formule des probabilités totales)*

Une entreprise propose une formation de gestion aux employés de différents services. Il a été observé que 40 % des employés viennent du service commercial. À la fin de la formation, les résultats montrent que :

- Si un employé vient du service commercial, il réussit la formation dans 85 % des cas ;
- si un employé ne vient pas du service commercial, il réussit la formation dans 70 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour l'ensemble des employés et d'utiliser ces informations pour estimer les chances de réussite à la formation.
On note respectivement C et R les événements « Être du service commercial » et « Réussir la formation ».

(a) Un employé est choisi au hasard. Quelle est la probabilité qu'il réussisse la formation?

(b) Si un employé a réussi la formation, quelle est la probabilité qu'il soit du service commercial?

IV - Loi de Bernoulli

Définition 2 :
La loi de Bernoulli est une loi de probabilité qui décrit une expérience aléatoire ayant seulement deux issues possibles : un **succès** ou un **échec**.

Propriété 4 :

(a) La probabilité d'obtenir un succès est notée p.

(b) La probabilité d'obtenir un échec est notée $1 - p$.

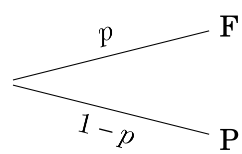
(c) La variable aléatoire X suivant la loi de Bernoulli peut prendre deux valeurs :

- $X = 1$ (succès) avec une probabilité p.
- $X = 0$ (échec) avec une probabilité $1 - p$.

Vocabulaire :
p est appelé le **paramètre** de la loi de Bernoulli.

Exemple 2 :
Lancer une pièce de monnaie est une expérience de Bernoulli où :

- Obtenir “face” est un succès avec une probabilité $p = 0.5$.
- Obtenir “pile” est un échec avec une probabilité $1 - p = 0.5$.



V - Loi Binomiale

Définition 3 :
La loi binomiale est une généralisation de la loi de Bernoulli qui s’applique à une séquence de n essais indépendants, chacun ayant une probabilité de succès p.
Elle permet de modéliser le nombre total de succès obtenus parmi ces n essais.

Propriété 5 :

(a) La loi binomiale est caractérisée par deux paramètres :

- n : le nombre total d’essais.
- p : la probabilité de succès pour chaque essai.

(b) La variable aléatoire X suivant la loi binomiale mesure le nombre de succès parmi les n essais.

Exercice 5 : ***(Répétitions d’épreuves de Bernoulli)***

On considère l’expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l’urne.
On répète l’expérience deux fois de suite.

1. Représenter l’ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   (a) On tire deux boules blanches.
   (b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
   (c) On tire au moins une boule blanche.