I - Étude globale

1 - Définitions

Définition 1 : ***(Suite numérique)***
Une suite numérique est une fonction de dans $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 :
La fonction définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2n + 1$ est une suite.

Notation :

- On peut désigner la suite u avec la notation (u_n) (entre parenthèses) ;
- L'écriture u_n (sans parenthèses) désigne le terme de rang n de la suite u, c'est à dire $u(n)$;

Remarque 1 :
Une suite u peut être définie à partir d'un certain rang u_0, on notera alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ pour désigner la suite u.

Définition 2 : ***(Modes de génération)***
Il existe trois façon de définir une suite :

1. **Définition explicite :**
   La suite (u_n) est définie directement par son terme général :
   $$u_n = f(n)$$
   Avec f une fonction dépendant de n définie sur $\mathbb{N}$;
2. **Définition par récurrence :**
   Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, une suite u_n peut être définie par récurrence par :
   $$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
3. **Définition implicite :**
   La suite est définie par une propriété géométrique, économique ... au sein d'un problème.

Remarque 2 :
Quel que soit le mode de définition d'une suite, il se peut que celle-ci ne soit définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 > 0$.

Remarque 3 :
On peut faire les analogies suivantes entre les suites et les fonctions :

Fonctions		Suites
f	$\leftrightarrow$	u
x	$\leftrightarrow$	n
antécédent	$\leftrightarrow$	rang
image	$\leftrightarrow$	terme
f	$\leftrightarrow$	u

2 - Sens de variation

Remarque 4 :
Dans la suite, on considère (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ pour tout $n \geq n_0$, avec $n_0 \geq 0$.

Définition 3 : ***(Suite croissante)***
(u_n) croissante $\iff$ $u_{n+1} \geq u_n, \, \forall n \geq n_0$

Exemple 2 :
Considérons (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Définition 4 : ***(Suite décroissante)***
(u_n) décroissante $\iff$ $u_{n+1} \leq u_n, \, \forall n \geq n_0$

Définition 5 : ***(Suite monotone)***
La suite (u_n) est monotone si et seulement si elle uniquement est croissante ou décroissante (sans changer de sens de variation).

Définition 6 : ***(Suite constante)***
(u_n) constante $\iff$ $u_{n+1} = u_n, \, \forall n \geq n_0$

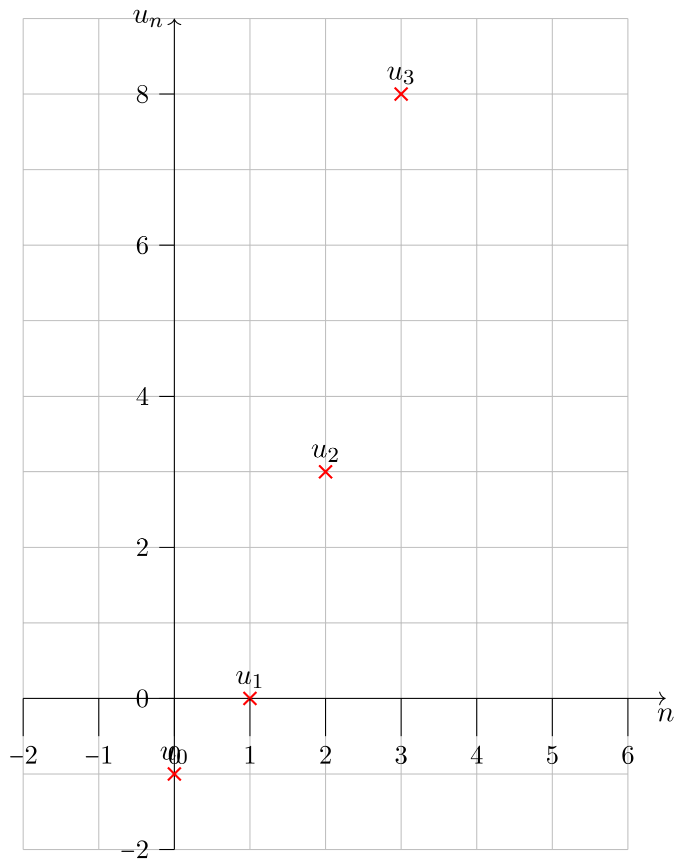
3 - Représentation graphique

Définition 7 :
Dans un repère orthonormé direct du plan, la représentation graphique d'une suite u est l'ensemble des points ayant pour coordonnées $(n; u_n)$ avec $n \in \mathbb{N}, n \leq n_0$

Exemple 3 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_n = n^2 - 1$ Les premiers termes de la suite sont donnés dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	-1	0	3	8	15	24

On obtient la représentation graphique des premiers points de la suite :



4 - Suites arithmétiques

Définition 8 :
Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé raison de la suite.

Exemple 4 :
Considérons (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$

Propriété 1 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ;

- Si $r > 0$ la suite est strictement croissante ;
- Si $r < 0$ la suite est strictement décroissante ;
- Si $r = 0$ la suite est constante.

Théorème 4 : ***(Terme général d'une suite arithmétique)***
Soit une suite arithmétique de raison r définie à partir d'un certain rang n_0.

Pour tout entier supérieur ou égal à n_0 son terme général est égal à :

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

En particulier si $n_0 = 0$, on a :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Exemple 5 :
On considère (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_5 = 18$.

$$\forall n \geq 5, u_n = 18 + (n - 5)2 = 2n + 8$$

Propriété 2 :
Soit (u_n) une suite arithmétique. Les points de sa représentation graphique sont alignés.

5 - Suites géométriques

Définition 9 :
Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Le nombre q est appelé raison de la suite.

Exemple 6 :
Considérons (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \times 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$

Propriété 3 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $q > 0$;

- Si $q > 1$ la suite est strictement croissante ;
- Si $0 < q < 1$ la suite est strictement décroissante ;
- Si $q = 1$ la suite est constante.

Théorème 6 : ***(Terme général d'une suite géométrique)***
Soit une suite géométrique de raison q définie à partir d'un certain rang n_0.
Pour tout entier supérieur ou égal à n_0 son terme général est égal à :

$$u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$$

En particulier si $n_0 = 0$, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple 7 :
On considère (u_n) une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $u_3 = 10$.

$$\forall n \geq 5, u_n = 10 \times 5^{(n-3)} = \frac{10}{125} \times 5^n$$

Propriété 4 :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Les points de sa représentation graphique ne sont pas alignés.

6 - Déterminer la raison

Définition 10 :
Nombre de termes. étant donné n_1 et n_2 deux rangs de la suite, on détermine le nombre de termes entre ces rangs par : $k = n_2 - n_1$

Propriété 5 :
Soit (u_n) une suite arithmétique, étant donné n_1 et n_2 deux rangs de la suite tels que $u_{n_1} = a$ et $u_{n_2} = b$, on à :

$$r = \frac{u_{n_2} - u_{n_1}}{n_2 - n_1}$$

Propriété 6 :
Soit (u_n) une suite géométrique, étant donné n_1 et n_2 deux termes de la suite tels que $u_{n_1} = a$ et $u_{n_2} = b$, on à :

$$q = \sqrt[n_2-n_1]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n_2 - n_1}}$$

7 - Suites arithmético-géométriques

Définition 11 :
Une suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Théorème 7 : ***(Terme général d'une suite arithmético-géométrique)***
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique avec $a \neq 1$ définie à partir d'un certain rang n_0.
En posant : $r = \dfrac{b}{1-a}$ Pour tout entier supérieur ou égal à n_0 son terme général est égal à :

$$u_n = a^{n-n_0}(u_{n_0} - r) + r$$

En particulier si $n_0 = 0$, on a :

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r$$

8 - Séries

Définition 12 :
Étant donné une suite de terme général u_n, étudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite de terme général S_n définie par :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exemple 8 :
Soit (u_n) la suite arithmétique de terme général $u_n = n$ (*i.e.* $r = 1$; $u_0 = 0$), on a donc :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=0}^{n} k$$

Théorème 8 : ***(Somme des termes d'une suite arithmétique.)***
Soit (u_n) une suite arithmétique :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Théorème 8 : ***(Somme des termes d'une suites géométrique.)***
Soit (u_n) une suite géométrique :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Plus généralement, pour tout entier naturel $k < n$:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_k \times \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}$$