Première spécialité / Produit scalaire

ChingEval : 5 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM :

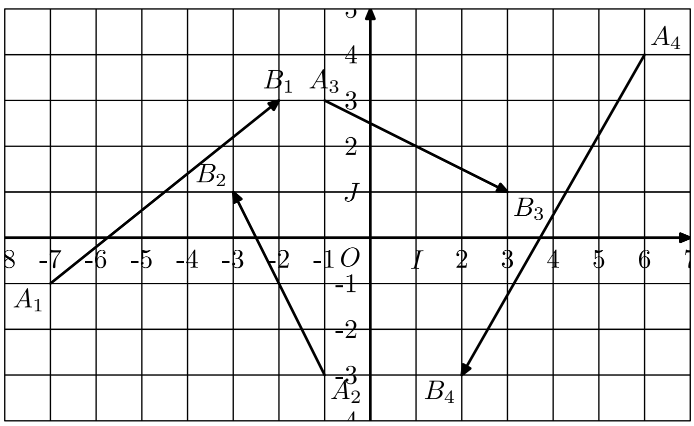
1. *Rappels*

E.6486

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. On considère les points A et B de coordonnées :
$A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$

Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, sont représentés quatre vecteurs :



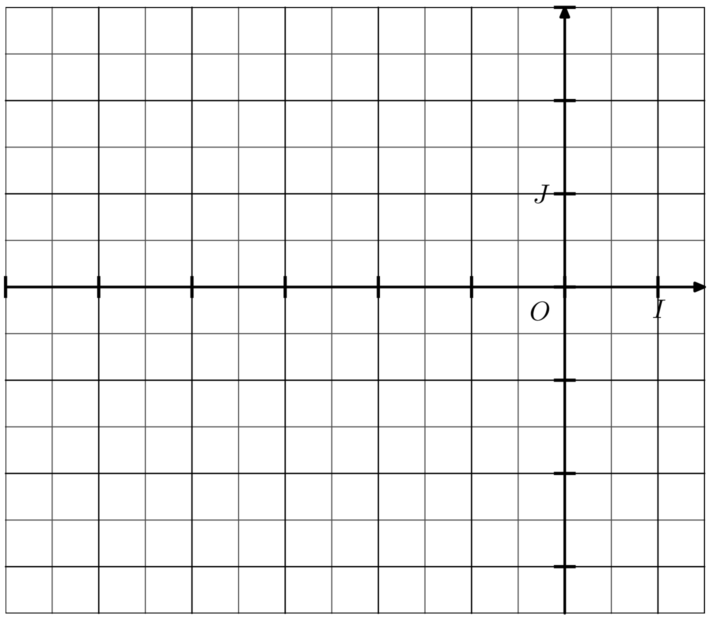
Graphiquement, déterminer les coordonnées de ces quatre vecteurs.

E.6481

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. On considère les points A et B de coordonnées :
$A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$.

- La distance AB est définie par :
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
- Notons K le milieu du segment $[AB]$. Le point K a pour coordonnées : $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les trois points suivants :
$A(-4\,;-2)$; $B(-1\,;2)$; $C(-2{,}5\,;-2{,}5)$



1. Placer les points A, B et C.

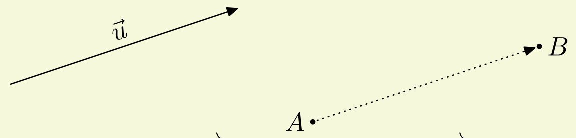
Le graphique sera complété au fur et à mesure des questions l'exercice.

2. a. Déterminer les longueurs AC et BC.
   b. On admet que le segment $[AB]$ a pour longueur 5. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
3. On note K le milieu du segment $[AB]$.
   a. Montrer que le point K a pour coordonnées : $K(-2{,}5\,;0)$.
   b. Déterminer la longueur KC.
   c. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre K et passant par le point A.

E.9596

Définition : on appelle norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ la longueur de chacun de ses représentants.

Exemple : considérons le vecteur $\overrightarrow{u}$ admettant pour représentant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour représentant :



La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour valeur : $\|\overrightarrow{u}\| = AB$

Proposition : dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour valeur :
$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

On considère le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{u}\,(5\,;2)$.
   Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. On considère les deux points $A(4\,;1)$ et $B(0{,}5\,;3)$. Déterminer la valeur de $\|\overrightarrow{AB}\|$.

E.7146

Propriétés caractérisantes du parallélogramme :

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

- Si les diagonales de $ABCD$ se coupent en leurs milieux alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles deux à deux alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si deux des côtés opposés sont parallèles et de même longueur alors $ABCD$ est un parallélogramme.

On considère les quatre points suivants caractérisés par leurs coordonnées dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :
$$A(2\,;3) \quad ; \quad B(-2\,;1) \quad ; \quad C(-4\,;-3) \quad ; \quad D(0\,;-1)$$
Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

E.10625

Définition :

- soit $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$, on appelle **déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$**, noté $\det(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$, défini par :
  $\det(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = x\times y' - x'\times y$
- deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** si, ces deux vecteurs ont même directions.

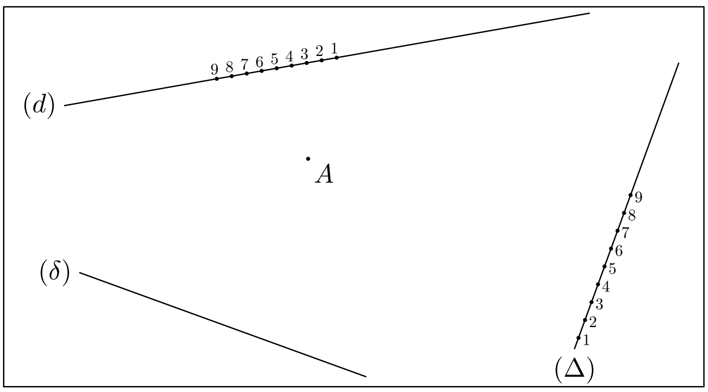
Proposition : Dans le plan muni d'un repère, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires entre eux si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les quatre points :
$$A(-6\,;3) \quad ; \quad B(2\,;-1) \quad ; \quad C(4\,;-1) \quad ; \quad D(10\,;-4)$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

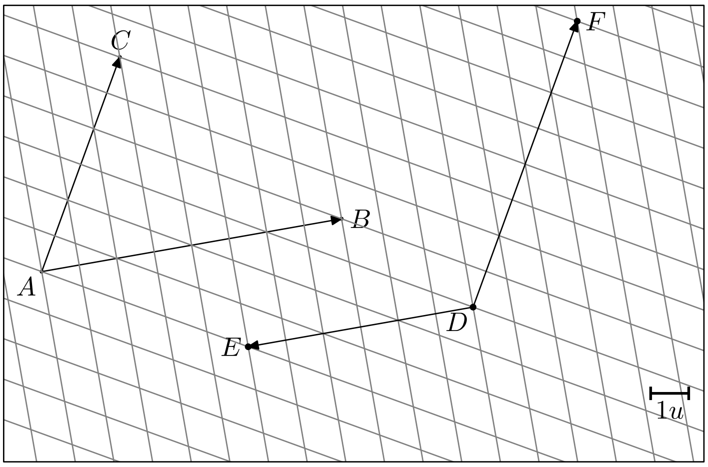
2. *Introduction*

E.9589 Dans le plan, on considère le point A et les droites (d), (Δ), (δ) :



1. a. Parmi les points proposés, noter M le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).
   b. Parmi les points proposés, noter N le projeté orthogonal du point A sur la droite (Δ).
2. Placer le point P projeté du point A sur la droite (δ).

E.7432 Dans le plan, on considère les six points et les quatre vecteurs représentés ci-dessous :



Remarque : le quadrillage, les points et l'unité ont été choisis afin que :
$AB = 8u$; $AC = 6u$; $DE = 6u$; $DF = 8u$

Partie A

1. a. Représenter le point M projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
   b. Déterminer la valeur du produit : $AB\times AM$
2. a. Représenter le point N projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
   b. Déterminer la valeur du produit : $AN\times AC$

Définition : dans le plan, on considère trois points A, B, C *(on suppose B distinct de A)*. On note H le projeté du point C sur la droite (AB).

On définit le **produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$** comme le nombre défini par :
- $AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens
- $-AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés.

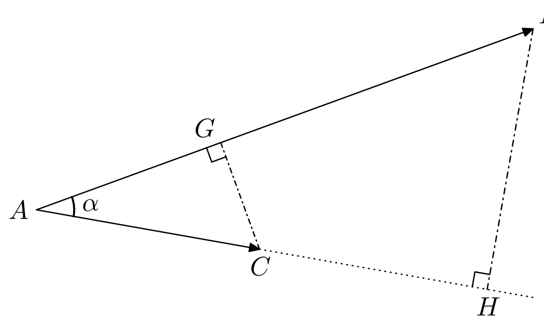
On note ce nombre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$?

Partie B

4. Montrer que : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = -24$
5. Justifier que : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$

E.8439 On considère trois points A, B, C distincts deux à deux représentés ci-dessous :



On note G *(resp. H)* le projeté orthogonal du point C *(resp. B)* sur la droite (AB) *(resp. (AC))* :

1. a. Dans le triangle AGC rectangle en G, donner l'expression de $\cos\alpha$.
   b. Dans le triangle ABH rectangle en H, donner l'expression de $\cos\alpha$.
2. En déduire l'égalité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

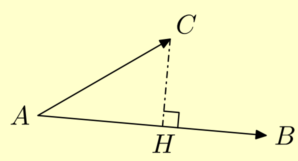
3. *Produit scalaire et projection*

E.9588

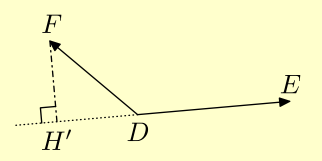
Définition :
Dans le plan, on considère trois points A, B, C *(on suppose B distinct de A)*. On note H le projeté du point C sur la droite (AB). On définit le **produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$** comme le nombre défini par :
- $AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens
- $-AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés.

On note ce nombre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Illustration :

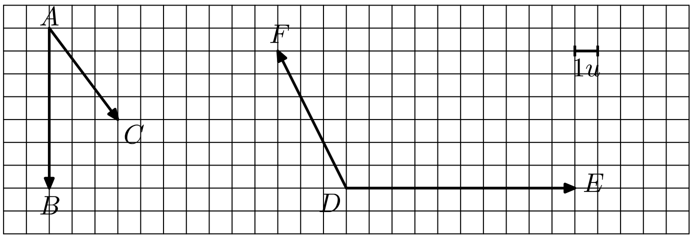


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AH$



$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = -DE\times DH'$

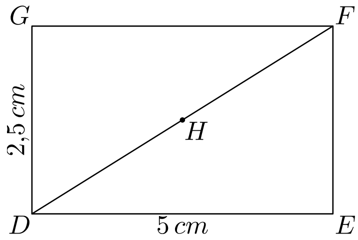
Dans un quadrillage, on considère les six points ci-dessous :



Déterminer la valeur des produits scalaires :

(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$

E.9587

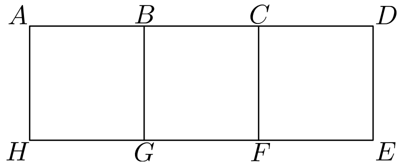


Dans le plan, on considère le rectangle $DEFG$ où le point H est le milieu de la diagonale $[DF]$, déterminer les produits scalaires :

(a) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$ (b) $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DE}$ (c) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HD}$

4. *Orthogonalité et colinéarité*

E.9590 Dans le plan, on considère les trois carrés de côté 2 représentés ci-dessous :



Établir les égalités suivantes :

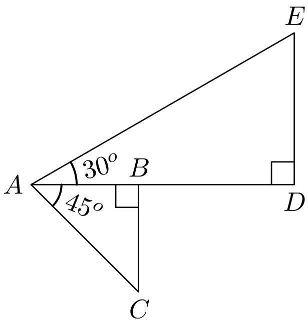
(a) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=4$ (c) $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FH}=-8$

5. *Produit scalaire et cosinus*

E.2574

Proposition : pour tout triplet de points A, B, C distincts deux à deux, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

On considère la figure ci-dessous où : $AE=4\,cm$ et $AC=2\,cm$
et on munit le plan du repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).



Déterminer la valeur des produits scalaires ci-dessous :

(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ (b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ (c) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}$

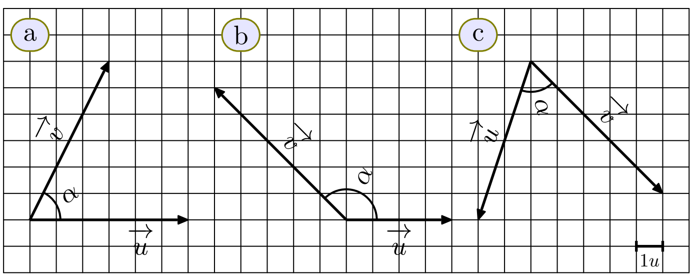
Rappels :

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

6. *Mesure d'un angle et produit scalaire*

E.8441

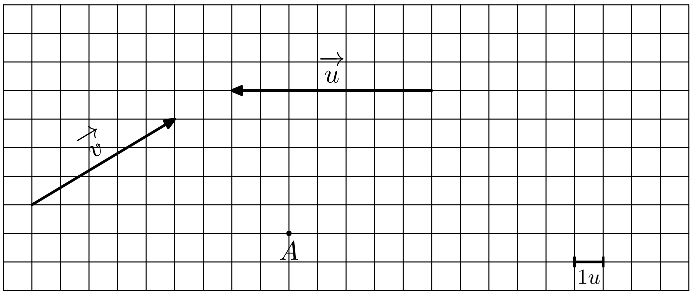
On considère les trois configurations présentant à chaque fois deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:



1. Pour chaque question, déterminer les valeurs suivantes : $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. Déterminer la mesure de l'angle α au dixième de degré près.

7. *Découverte des propriétés algébriques*

E.8442 On considère les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-dessous :



1. a. Placer les points B et C tels que :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. a. Placer le point D tel que : $2\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.

   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot(2\cdot\vec{v})$.

3. Quelle relation peut-on établir?

E.8445 Dans cet exercice, nous allons vérifier la validité de l'identité ci-dessous dans des cas particuliers :
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

Pour cela, on considère 4 points A, B, C et D tels que :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$

Pour étudier la diversité des configurations possibles, nous devrions étudier 4 disjonctions de cas : deux seulement sont proposées ici.

Partie A

Les projetés des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sur la direction du vecteur $\vec{u}$ sont dans le même sens que le vecteur $\vec{u}$.

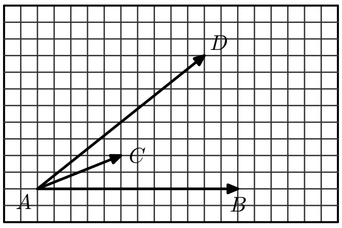


Fig. 1

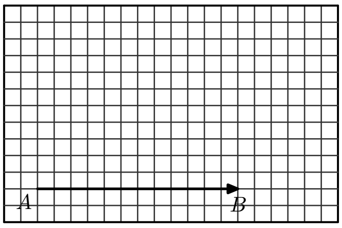


Fig. 2

1. a. Placer le point H *(resp. I)* projeté orthogonal du point C *(resp. D)* sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

2. a. Placer le point J vérifiant la relation :
$\overrightarrow{AJ}=\vec{v}+\vec{w}$
Placer le point K projeté orthogonal du point J sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

Partie B

Le projeté du vecteur $\vec{v}$ *(resp. $\vec{w}$)* sur la direction du vecteur $\vec{u}$ est dans le même sens *(resp. dans le sens opposé)* que le vecteur $\vec{u}$.

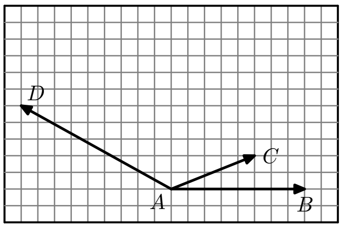


Fig. 1

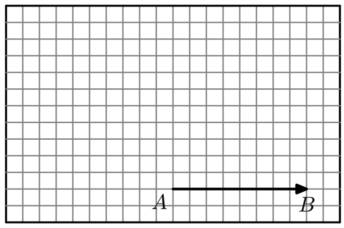


Fig. 2

3. a. Placer le point H *(resp. I)* projeté orthogonal du point C *(resp. D)* sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

4. a. Placer le point J vérifiant la relation :
$\overrightarrow{AJ}=\vec{v}+\vec{w}$
Placer le point K projeté orthogonal du point J sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

Partie C

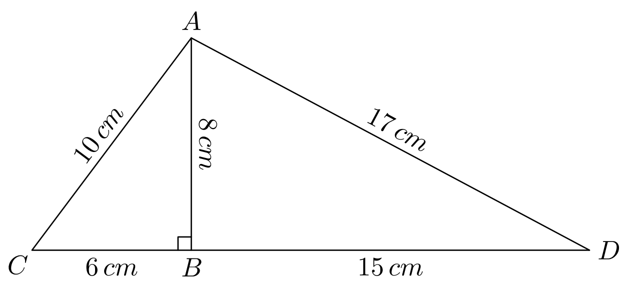
5. Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux nombres :
$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$; $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

8. *Utilisation des propriétés algébriques, orthogonalité et colinéarité*

E.10629

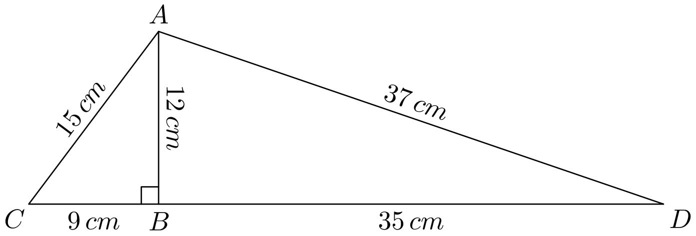
Propriétés : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(-\vec{u})\cdot\vec{v}=-(\vec{v}\cdot\vec{u})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

On considère les deux triangles ABC et ABD rectangle en B représentés ci-dessous avec leurs mesures :



1. Vérifier l'égalité : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}=-225$
2. Déterminer les produits scalaires :
   a. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}$ b. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ c. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$

E.10640 On considère les deux triangles ABC et ABD rectangle en B représentés ci-dessous avec leurs mesures :



1. Déterminer les produits scalaires :

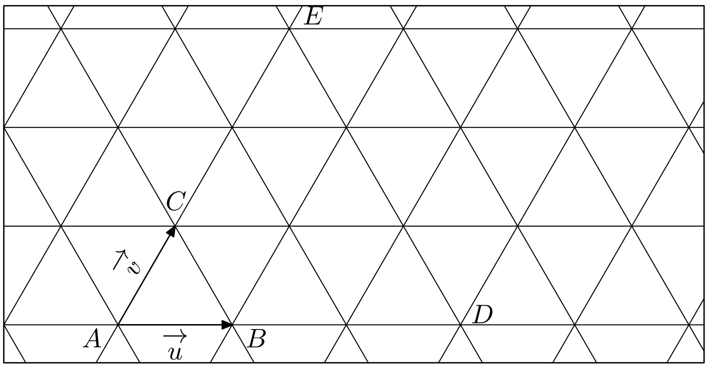
 a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2. Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

E.10630

Proposition : soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et $\lambda\in\mathbb{R}$.
On a : $(\lambda\times\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\lambda\cdot(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$

On considère le plan muni d'un pavage, représenté ci-dessous, formé de triangles équilatéraux de côté 3 et de cinq points A, B, C, D, E :



On note : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.

1. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

2. Déterminer les produits scalaires :

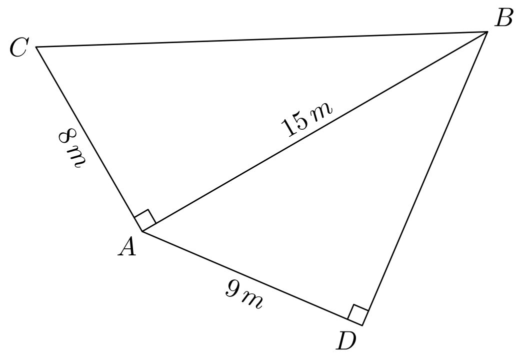
 a. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$

E.9598

Proposition : soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- $(\lambda\times\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\lambda\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens :
 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraire :
 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$

On considère les deux triangles ABC et ABD rectangle respectivement en A et D représentés ci-dessous :



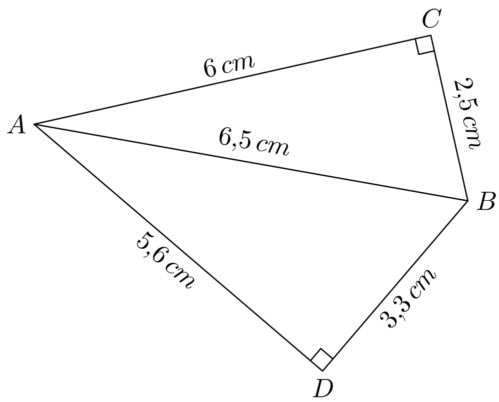
1. Établir que : $BC=17\,m$; $BD=12\,m$

2. Déterminer les valeurs des produits scalaires suivants :

 a. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ c. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$

 d. $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AB}$ e. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}$ f. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

E.10641 On considère les deux triangles ABC et ACD rectangles respectivement en C et D :



1. Déterminer les valeurs des produits scalaires :

 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

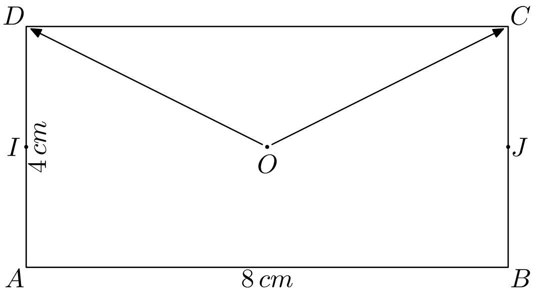
2. En déduire la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

9. Décomposition et double-distributivité

E.9597

Rappels :
- $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$

Le rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 8\,cm$ et $AD = 4\,cm$.

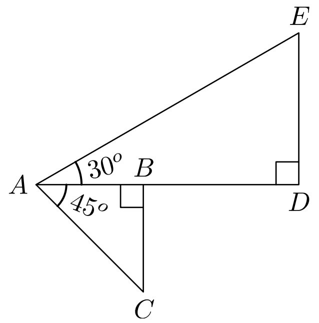


O est le centre du rectangle. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[BC]$.

1. Établir que : $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = -12$
2. À l'aide du théorème de Pythagore, montrer que : $OC = 2\sqrt{5}$
3. Déterminer l'angle orienté $\widehat{COD}$ arrondi au degré près où O est le centre du rectangle.

E.8443

On considère la figure ci-dessous où : $AE = 4\,cm$ et $AC = 2\,cm$ et on munit le plan du repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).



1. Déterminer les valeurs exactes des longueurs des côtés des triangles ABC et ADE.
1. Établir l'égalité : $\big(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\big) \cdot \big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\big) = AD{\times}AB - DE{\times}BC$
2. Déterminer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$

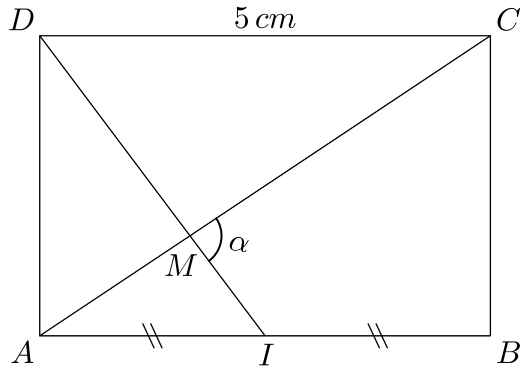
E.9796 Établir la propriété suivante :

"*Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.*"

E.3014 Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ tel que :

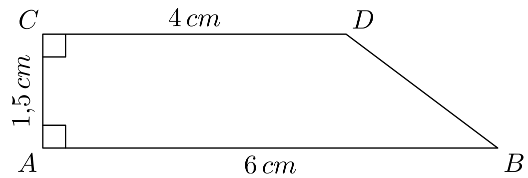
$AB = 5\,cm \quad ; \quad BC = \dfrac{2}{3} \cdot AB$

I est le milieu du segment $[AB]$; les droites (AC) et (ID) s'interceptent au point M.



1. En exprimant les vecteurs à l'aide de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$, déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. a. Déterminer les longueurs des segments $[DI]$ et $[AC]$.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IMC}$ au dixième de degré près.

E.10645 On considère le trapèze $ABCD$ représenté ci-dessous :

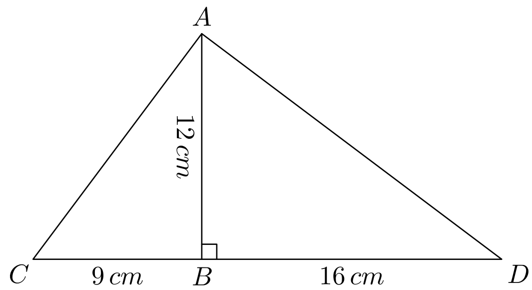


où : $AC = 1{,}5\,cm \quad ; \quad CD = 4\,cm \quad ; \quad AB = 6\,cm$

Déterminer la valeur du produit scalaire des diagonales de ce trapèze.

E.10671 On considère le triangle ACD et on note B le pied de la hauteur issue de A. On a les mesures :

$AB = 12\,cm \quad ; \quad BC = 9\,cm \quad ; \quad BD = 16\,cm$



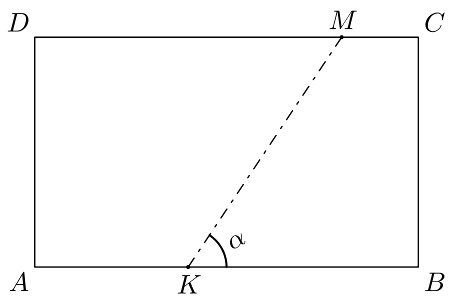
Établir que le triangle ACD est un triangle rectangle en A.

10. *Double-distributivité et condition sur un angle*

E.9620 On considère un rectangle $ABCD$ tel que :

$AB = 5\,cm \quad ; \quad AD = 3\,cm$

On considère le point K appartenant au segment $[AB]$ et tel que $AK = 2\,cm$.



Soit M un point du segment $[DC]$, on note x la longueur MC.

1. Établir que : $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KB}=9-3x$
2. Déterminer la longueur KM en fonction de x.
3. On souhaite déterminer la ou les positions du point M afin que $\widehat{BKM}=60^o$.

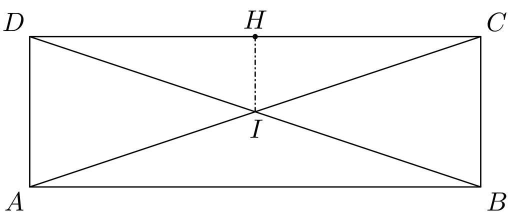
   a. Sachant que $\cos 60=\dfrac{1}{2}$, montrer que la longueur x est solution de l'équation :
   $x^2-6x+6=0$

   b. En déduire la ou les positions du point M satisfaisant $\widehat{BKM}=60^o$.

11. *Orthogonalité, colinéarité, calcul d'angles*

E.8444 On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous où I est le point d'intersection de ses diagonales et où les dimensions suivantes sont données :

$AB=6\,cm$; $BC=2\,cm$



1. Établir l'égalité suivante :
$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}=\dfrac{1}{4}\cdot AD^2-\dfrac{1}{4}\cdot AB^2=-8$
2. a. Déterminer la longueur du segment $[IC]$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DIC}$.

12. *Produit scalaire et parallélogramme*

E.5059

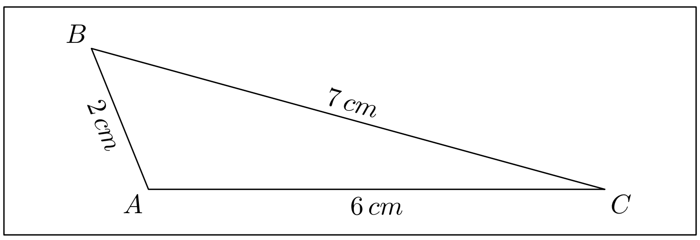
Proposition - Définition : soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans le plan muni d'un repère orthonormé. On a les identités :

- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\Big(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\Big)$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\Big(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big)$
- $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=2\cdot\|\overrightarrow{u}\|^2+2\cdot\|\overrightarrow{v}\|^2$

Ces identités s'appellent les **identités du parallélogramme**.

On considère le triangle ABC tel que :

$AB=2\,cm$; $AC=6\,cm$; $BC=7\,cm$



1. À l'aide de la formule :
$\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
Déterminer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. a. Placer le point D tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

   b. À l'aide de la formule :
   $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   Déterminer la mesure de la diagonale $[AD]$ arrondie au millimètre près.

E.3011

1. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, établir l'égalité suivante :
$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=4\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
2. On considère le parallélogramme $ABCD$ dans le plan. On note : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}$

   a. Que représentent les vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ pour le parallélogramme $ABCD$?

   b. À l'aide des questions précédentes, établir la proposition suivante :
   "Dans un parallélogramme, les diagonales sont de même longueur si, et seulement si, les côtés adjacents sont perpendiculaires."

13. *Coordonnées et produit scalaire*

E.7781

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\big)$, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$.

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un nombre noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ défini par : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=x\cdot x'+y\cdot y'$
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ et les trois points : $A(-5\,;1)$; $B(-3\,;-5)$; $C(-2\,;2)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

E.9593 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal et les trois points :
$A(2\,;1)$; $B(1\,;-2)$; $C(-1\,;2)$.
Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.

E.3018 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants :

$A(-3\,;2)$; $B(-2\,;-2)$; $C(2\,;-1)$; $D(1\,;3)$.

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

E.9592 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ et les trois points : $D(-3\,;-2)$; $E(1\,;1)$; $F\left(2\,;-\dfrac{26}{3}\right)$.
Montrer que le triangle DEF est rectangle. On précisera le sommet de l'angle droit.

14. *Coordonnées et recherche des coordonnées d'un point*

E.8432 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux points $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$ et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC est rectangle en B.

Déterminer les coordonnées du point C.

E.9654 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux points :
$B(2{,}2\,;-0{,}5)$; $C(3{,}7\,;-0{,}9)$.
Le point A est tel que :

- le triangle ABC est rectangle en B ;
- l'ordonnée du point A a pour valeur 1.

Déterminer les coordonnées du point A.

E.9617 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux points $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$ et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC soit rectangle en B.

Déterminer les coordonnées du point C.

E.5154 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux points $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$ et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC soit rectangle en C.

Déterminer l'ensemble des points C réalisant ces conditions.

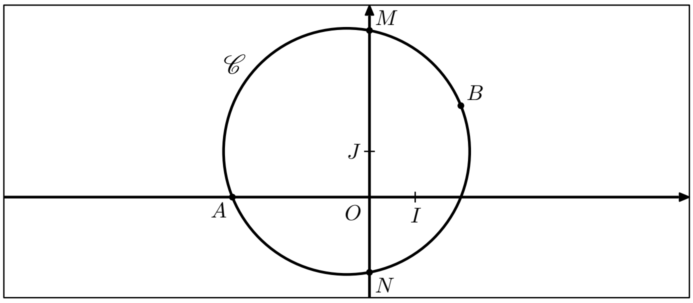
E.5155 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux points $A(2\,;2)$ et $B(4\,;-4)$ et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC soit rectangle en C.

Déterminer les coordonnées du point C.

E.9595 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et dont on connait les coordonnées : $A(-3\,;0)$; $B(2\,;2)$

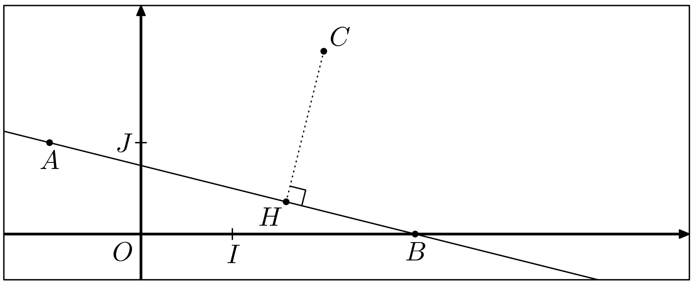
Déterminer les coordonnées des deux points M et N intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.



On utilisera la proposition admise suivante :

Proposition : soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. pour tout point M de $\mathscr{C}$ distinct de A et de B, le triangle ABM est un triangle rectangle en M.

E.9599 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points : $A(-1\,;1)$; $B(3\,;0)$; $C(2\,;2)$



Déterminer les coordonnées du projeté du point C sur la droite (AB).

15. *Norme d'un vecteur*

E.8433

Définition : soit $\vec{u}$ un vecteur, on appelle **norme du vecteur** $\vec{u}$ sa longueur et on la note $\|\vec{u}\|$.

Proposition : dans le plan muni d'un repère orthonormé, le vecteur $\vec{u}\,(x\,;y)$ a pour norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, le vecteur $\vec{u}\,(3\,;2)$ et les deux points $A(2\,;-1)$ et $B(4\,;2)$.

1. Déterminer la norme du vecteur $\vec{u}$.
2. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

E.8434

1. On considère le vecteur $\vec{u}\left(-\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{4}{3}\right)$. Montrer que : $\|\vec{u}\| = \dfrac{17}{6}$
2. On considère les deux points $A\left(-\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{8}{3}\,;-2\right)$. Montrer que : $\|\overrightarrow{AB}\| = \dfrac{25}{6}$

16. Calcul d'angles dans un repère

E.2596 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère : $A(3\,;2)$; $B(5\,;-1)$; $C(-2\,;3)$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$
3. Déterminer les distances AB, AC et BC.
4. Déterminer la mesure des 3 angles du triangle ABC arrondis au degré près.

E.2593 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $\widehat{EDF}$ où $D(3\,;5)$, $E(-1\,;0)$, $F(2\,;4)$ au centième de degré près.

E.9616 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :
$A(6\,;3)$; $B(1\,;1)$; $C(3\,;-1)$

Déterminer, au dixième de degré près, la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

17. Produit scalaire et manipulations algébriques

E.3016 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et les trois points suivants :

$A(2\,;3)$; $B(6\,;5)$; $C(0\,;6)$

On note : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

1. a. Déterminer les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. a. Développer l'expression : $\left(3\times\vec{u}-2\times\vec{v}\right)^2$.
   b. En déduire la norme : $\|3\times\vec{u}-2\times\vec{v}\|$.

18. Formule d'Al-Kashi : déterminer une longueur

E.8528 On considère le triangle ABC dont les mesures sont :
$AC=3{,}7\,cm$; $BC=7\,cm$; $\widehat{ACB}=48^o$

Déterminer la mesure, au millimètre près, du segment $[AB]$.

E.9655 ⚠ On considère un triangle ABC vérifiant les mesures :
$BC=17\,cm$; $AC=23\,cm$; $\widehat{BAC}=45^o$

Déterminer les mesures possibles du segment $[AB]$ réalisant ces conditions. *(on donnera ces mesures au millimètre près)*

19. Formule d'Al-Kashi : déterminer un angle

E.2590

Les formules d'Al-Kashi appliquées au triangle ABC donne :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :

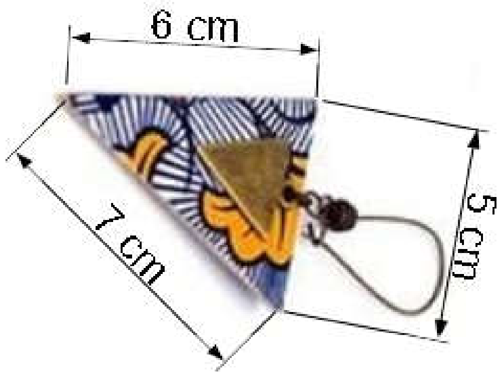
$AB = 5{,}3\,cm \quad ; \quad AC = 3{,}7\,cm \quad ; \quad BC = 7\,cm$

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC.

E.6706 Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC ayant les mesures suivantes :

$AB = 6{,}4\,cm \quad ; \quad AC = 4{,}8\,cm \quad ; \quad BC = 8\,cm$

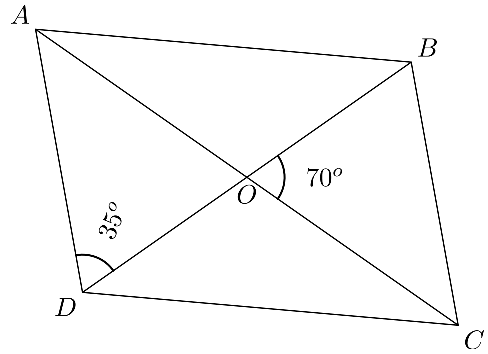
E.7916 Un artisan veut industrialiser sa fabrication de boucles d'oreille *(voir ci-dessous)*.



Pour ce faire, on doit aider le technicien de l'entreprise retenue à déterminer les trois angles du triangle utilisé comme forme géométrique du bijou, car la fabrication de l'outil de découpe l'exige.

Les mesures d'angles seront données en degré, avec une précision de 10^{-1}.

E.10168 On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un parallélogramme.



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OAB}$. A FINIR

20. *Caractérisation des points du cercle*

E.8437 Soit A et B deux points distincts du plan. On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Établir, pour tout point M du plan, la relation : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{AI}\|^2$
2. Considérons un point C tel que le triangle ABC soit rectangle en C.
   a. Établir que : $IC = IB = IA$
   b. Que peut-on dire du point C relativement au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$?
3. Réciproquement, que peut-on dire du triangle ABM si le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$?

Établir cette propriété.

E.8436 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les points A et B de coordonnées : $A(-2\,;3) \quad ; \quad B(3\,;0)$
et le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

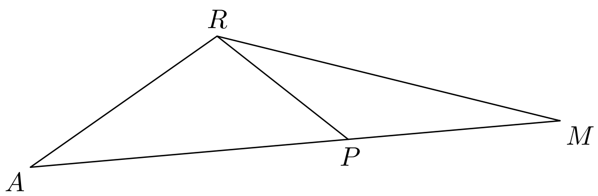
Déterminer les coordonnées des deux points du cercle $\mathscr{C}$ ayant pour abscisse 1.

On pourra utiliser la proposition suivante :

Proposition : si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés forme un diamètre alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

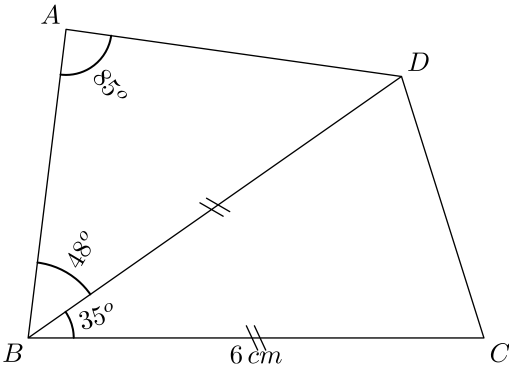
21. *Approfondissement : Formule des sinus*

E.9594 On considère la configuration ci-dessous :



1. Écrire la formule de l'égalité des sinus dans le triangle RPM
2. Compléter l'égalité : $\sin \widehat{ARP} = \dfrac{\ldots \times \sin \widehat{RAP}}{\ldots}$

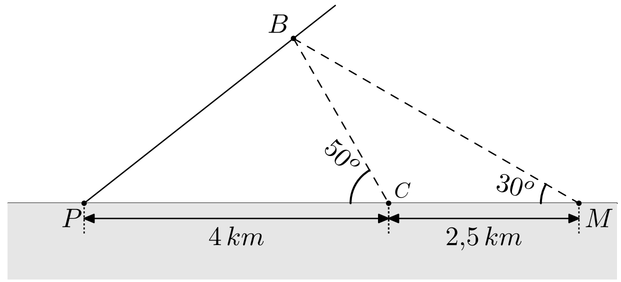
E.2674 On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous :



1. Les formules d'AL-Kashi donne la formule :
$$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \times BD \times BC \times \cos \widehat{DBC}$$
En déduire la mesure de la longueur DC arrondie au millimètre près.

2. La formule des sinus exprimés dans le triangle ABD s'exprime par :
$$\frac{\sin \widehat{DBA}}{AD} = \frac{\sin \widehat{ADB}}{AB} = \frac{\sin \widehat{DAB}}{DB}$$
En déduire les mesures des longueurs AB et AD arrondie au millimètre près.

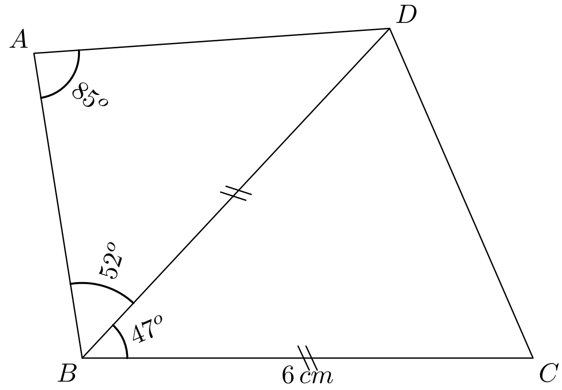
E.6710 Un bateau B rejoint le port P en ligne droite ; sur le bord de la rive, Marc et Cléa regarde le bateau rentré au port.



Les longueurs seront arrondies à la centaine de mètres près.

1. Dans le triangle MCB, déterminer la longueur BC.
2. En déduire la distance séparant le bateau du port.

E.6707 Déterminer les mesures des quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ au millimètre près.

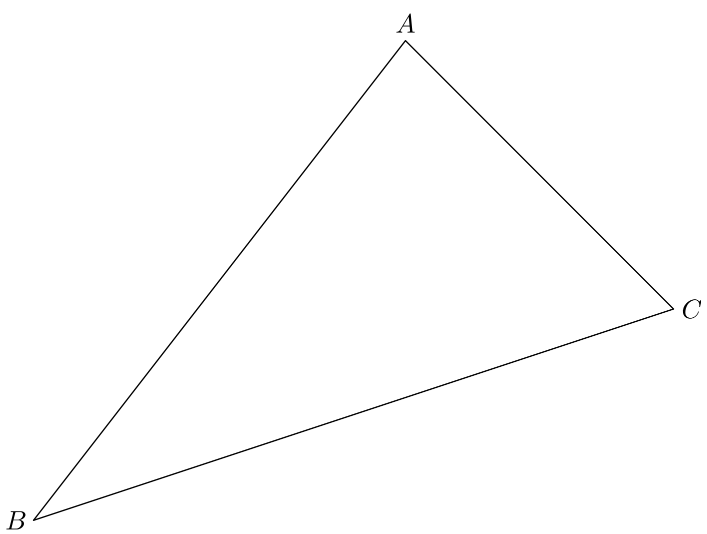


22. *Approfondissement : Droites remarquables et concourance*

E.2661 Soit ABC un triangle quelconque.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a la relation :
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
2. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H.

E.8438 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



On note I le milieu du segment $[AB]$ et on définit le point G par la relation vectorielle : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{IC}$

1. a. Placer le point G dans la figure ci-dessus.
   b. Justifier que le point G appartient à la médiane du triangle ABC issue du sommet C.
2. a. Établir que le point G vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
   b. Réciproquement, montrer que le point G est le seul point M du plan vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$
3. On note J le milieu du segment $[AC]$ et H le point du plan défini par la relation : $\overrightarrow{JH} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{JB}$
   a. Montrer que le point H vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$
   b. Que peut-on dire du point H ? Justifier vos réponses.
4. De même, montrer que le point G appartient à la médiane du triangle ABC issue du sommet A.

23. *Produit scalaire et suites*

E.11044 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

- la suite (u_n) est arithmétique de premier terme -6 et de raison 3.
- la suite (v_n) est géométrique de premier terme 27 et de raison $\dfrac{1}{3}$.

Dans le plan orthogonal, on considère la suite des points (M_n) définis sur $\mathbb{N}$ par :

$M_n(u_n\,;v_n)$

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_4}$ sont orthogonaux.

E.11045 ***L'exercice n'existe pas.***

24. *Produit scalaire et nombre dérivé*

E.11046 On considère les deux fonctions :

$f(x) = x^2 - 5x + 2 \quad ; \quad g(x) = -x^2 + 5x - 1$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal.

Etablir que les tangentes respectives aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 3 sont orthogonales.

25. *Produit scalaire et fonction exponentielle*

E.11047 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \mathrm{e}^{2x+2} \quad ; \quad g(x) = -4\cdot\mathrm{e}^{-2x+7}$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormal.

Pour x un nobmre réel, on note M_x et N_x les deux points d'abscisse x et appartenent respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x tels que les deux vecteurs $\overrightarrow{OM_x}$ et $\overrightarrow{ON_x}$ soient orthogonaux.

E.11048 ***L'exercice n'existe pas.***

26. *Exercices non-classés*

E.2662 Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A. I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.

1. Établir la relation suivante : $HA^2 = HB\times HC$
2. a. Établir la relation vectorielle suivante :
   $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK}$
   b. Démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

E.7786 Dans le plan muni d'un repère, on considère les deux droites (d) et (Δ) admettant pour équation :

$(d) :\ y = 3\cdot x - 1 \quad ; \quad (\Delta) :\ 2\cdot x + 6\cdot y + 4 = 0$

1. Démontrer que les droites (d) et (Δ) sont perpendiculaires.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).