I - Généralités sur les polynômes

Définition 1 :
Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une expression de la forme $P(X) = a_n X_n + a_{n-1} X_{n-1} + \ldots + a_2 X_2 + a_1 X + a_0$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des polynômes à coefficient réels est noté $\mathbb{R}[X]$.

Vocabulaire :

- Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme ;
- Si pour tous $i \in \mathbb{N}$, on a $a_i = 0$, P est appelé le polynôme nul, il est noté 0 ;
- On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a \neq 0$;
- Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$ est appelé un polynôme constant.

Exemple :

(a) $X^3 - 5X + \frac{3}{4}$ est un polynôme de degré 3 ;

(b) $X^n + 1$ est un polynôme de degré n ;

(c) $aX^2 + bX + c$ est un polynôme de degré 2 ;

(d) X est un monôme unitaire de degré 1.

II - Fonction polynôme du second degré

Définition 1 :
On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple :

- $a(x) = 3x^2 + 4x + 7$
- $b(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{7}{8}$
- $c(x) = 5 - 2x^2$
- $d(x) = (12 - x)(x + 3)$
- $e(x) = ax + b$
- $f(x) = 4x^4 + 7x^2 + x + 0$

III - Forme canonique

Propriété 1 :
Toute fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$

Démonstration :
$a \neq 0$, donc :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a(x - \alpha)^2 + \beta
\end{aligned}
$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ □

Exercice 1 : ***(Exemple corrigé)***

Soit la fonction polynôme g du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2 - 20x + 10$
Écrire g sous sa forme canonique.

Correction.
On cherche α et β tels que $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\
&= 2(x^2 - 10x) + 10 \\
&= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 10 \\
&= 2[(x - 5)^2 - 25] + 10 \\
&= 2(x - 5)^2 - 50 + 10 \\
&= 2(x - 5)^2 - 40
\end{aligned}
$$

$g(x) = 2(x - 5)^2 - 40$ est la forme canonique de g avec $\alpha = 5$ et $\beta = -40$

IV - Variations, extremum et représentation graphique

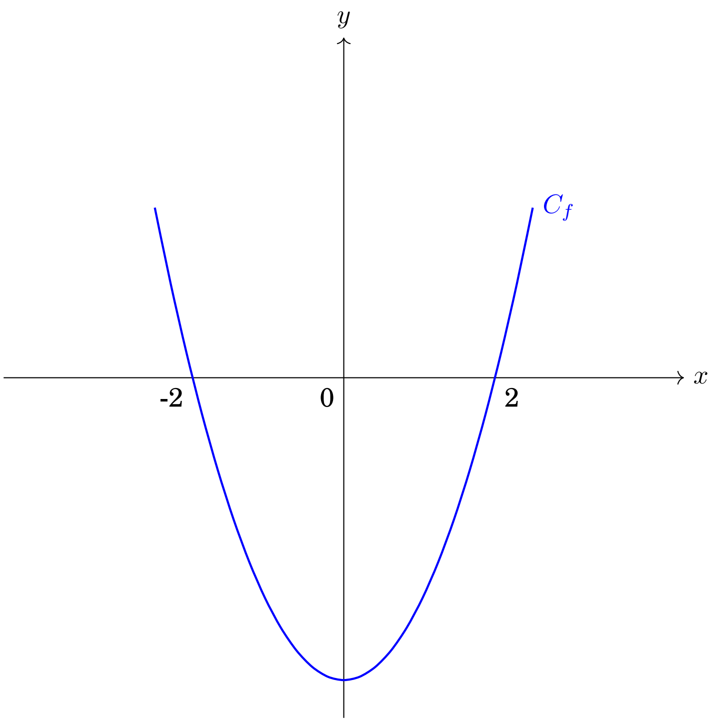
1 - Sens de variations

Propriété 1 :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, (avec $a \in \mathbb{R}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)

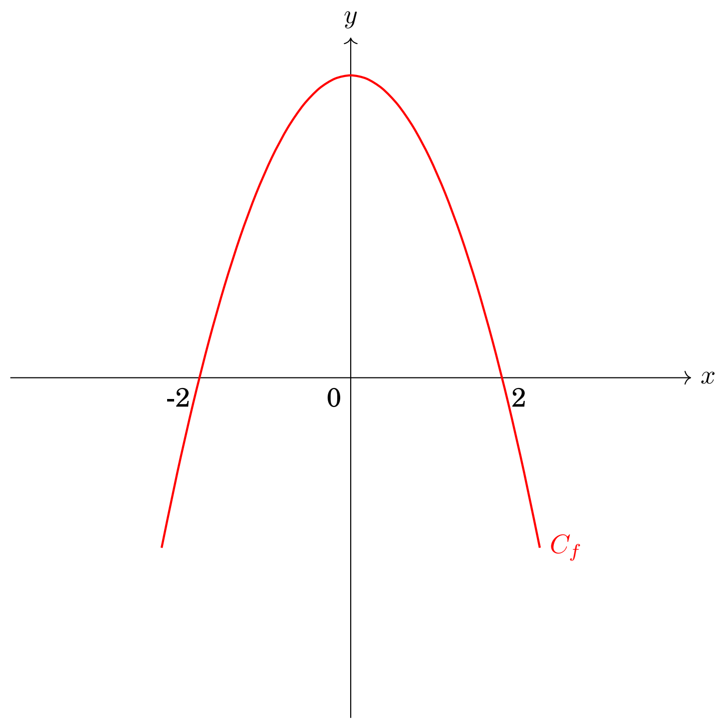
(a) Si $a > 0$, alors f est d'abord décroissante ↘ puis croissante ↗ ;

(b) Si $a < 0$, alors f est d'abord croissante ↗ puis décroissante ↘.

$a > 0$



$a < 0$



2 - Extremum

Propriété 1 :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, donée sous sa forme canonique, telle que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, (avec $a \in \mathbb{R}^*$)

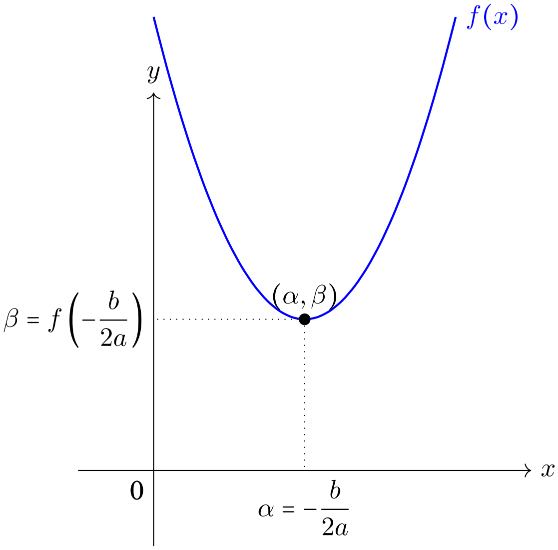
(a) Si $a > 0$, alors f admet un minimum en $x = \alpha$, avec $f(\alpha) = \beta$;

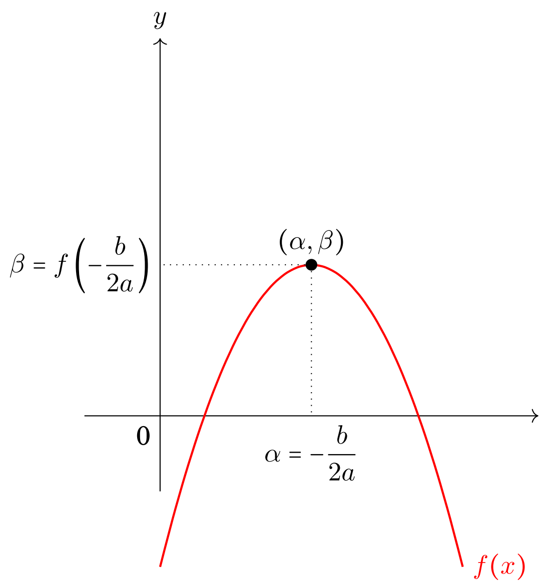
(b) Si $a < 0$, alors f admet un maximum en $x = \alpha$, avec $f(\alpha) = \beta$.

Propriété 2 :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, (avec $a \in \mathbb{R}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)
On a :

(a) $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$;

(b) $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.





Définition 1 :
La représentation graphique d'une fonction f polynôme du second degré s'appelle une **parabole**. Le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ s'appelle le **sommet** de la parabole. Il correspond à l'**extremum** de la fonction f.

Propriété 3 :
La parabole admet pour axe de symétrie la droite (verticale) d'équation $x = \alpha$.

Exercice 2 : *(Exemple corrigé)*

Soit la fonction polynôme du second degré défini par $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$

(a) Déterminer les coordonnées du sommet de la représentation graphique de la fonction f ;

(b) déterminer l'équation de l'axe de la symétrie de la parabole

Correction.

(a) Les coordonnées du sommet sont données par (α, β), avec :
$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ $\qquad$ $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$
$f(x) = 2x^2 - 12x + 1$, donc $a = 2$, $b = -12$ et $c = 1$, il vient
$\alpha = 3$ et $\beta = -17$
Le sommet de la parabole est donc le point de coordonnées $(3, -17)$

(b) L'équation de l'axe de symétrie de la parabole est données par $x = \alpha$, or $\alpha = 3$ (*cf.* (a)) donc l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 3$

3 - Représentation graphique

Exercice 3 :

Représenter graphiquement la fonction f polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$

Correction.
On commence par exprimer f sous sa forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -[(x-2)^2 - 4] \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

Donc, $\alpha = 2$ et $\beta = 4$
Les variations de f sont données dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

On calcul $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, on sait que $f(2) = 4$, $f(3) = 3$ et $f(4) = 0$.
On trace la courbe représentative de la fonction f ci-dessous :