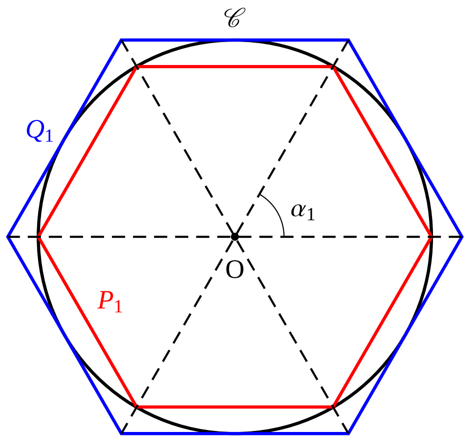
4) Déterminer la tangente (T_0) en 0 puis tracer la fonction tangente et (T_0) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 23

Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Dans un texte intitulé « *De la mesure du cercle* », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1 : on construit, pour $n \geqslant 1$ deux polygones réguliers P_n, et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathscr{C}$, et Q_n, exinscrit à $\mathscr{C}$ (voir la figure ci-contre).



$n = 1$ (6 côtés)

Le périmètre du cercle ($= 2\pi$) est encadré par ces deux polygones. On note p_n et q_n, les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n. Ainsi, $p_n < \pi < q_n$

1) Le cas $n = 1$
   Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2) Expression de p_n, et q_n

   a) Évaluer l'angle au centre α_n qui intercepte l'un des côtés de P_n en fonction de n.

   b) En déduire les relations : $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ et $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$.

   En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n et q_n.
   Dans la suite, nous nous orientons vers un calcul de proche en proche.

3) Relations de récurrence

   a) On pose $\beta_n = \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n et q_n, en fonction de n et β_n.

   b) On admet que : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$

      En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{q_n}\right)$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$

   c) Calculer q_2 et p_2 à l'aide des relations précédentes.
      Quelle est la précision sur la valeur approchée de π ?

4) Algorithme.

   a) Proposer un algorithme permettant de calculer les valeurs de p_n et q_n jusqu'à obtenir un encadrement de n d'amplitude 10^{-6}. Donner l'encadrement de π ainsi obtenu.

   b) Proposer une fonction en Python qui donne le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un encadrement à 10^{-p} du nombre π, $p \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre d'itérations nécessaires pour fournir 3 décimales supplémentaire ? Cet algorithme est-il efficace pour connaître les décimales de π ?