I - Taux d'accroissement

Définition 1 :
Le taux d'accroissement de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Avec $x=a+h$, ce quotient s'écrit aussi :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple 1 :
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= 2a+h\end{aligned}$$

II - Nombre dérivé

Définition 2 :
On dit que f est dérivable en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque 1 :
On note aussi la dérivée $f'(a)$ comme la limite suivante :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Propriété 1 : ***(Interprétation géométrique)***
Si une fonction f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$.

Exemple 2 :
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$, calculer le nombre dérivé de f en 3 puis en -1 :

1. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a+h$ d'après l'exemple 1

2. $f'(a) = \lim_{h\to 0} 2a + h = 2a$

3. $f'(2) = 2 \times 3 = 6$

4. $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

Exemple 3 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
Son taux d'accroissement en $a = 1$ est donné par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{(x^2+1) - (1^2+1)}{x-1} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= x + 1 \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 2$
Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

III - Equation de la tangente

Propriété 2 :
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$
La tangente T_a en à la courbe C_f en a a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'(x) + \frac{f(a)}{x-a} &= \frac{f(x)}{x-a} \\ f(x) &= f'(x)(x-a) + \frac{f(a)(x-a)}{x-a} \\ f(x) &= f'(x)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

□

Exemple 4 :
Soit $f(x) = x^2 + 2$. Déterminer l'équation de la tangente en 0 et en -1

1. $f'(0) = 0$ donc $T_0 : y = 0 \times (x - 0) + f(0) = 2$

2. $f'(-1) = -2$ donc $T_{-1} : y = -2 \times (x + 1) + f(-1) = -2x + 1$

IV - Dérivés usuelles

Fonction f	Dérivée	f est définie sur	f est dérivable sur
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$

V - Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^2	$2u'u$
u^n $(n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$