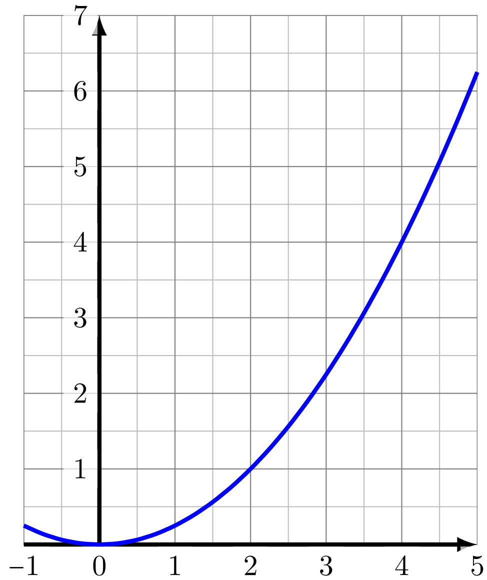
Exercice 1 : ***(Expérimentations, et Calculs théoriques)***



1. On a tracé ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{4}$.
   (a) Déterminer (par le calcul) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. On appelle d la fonction affine correspondante.
   (b) Tracer cette tangente.
   (c) Calculer $f(x) - d(x)$ pour $x = 4$, $x = 3$, $x = 2,5$, et $x = 2,1$.
   (d) Vers quelle valeur semble tendre $f(x) - d(x)$ lorsque x tend vers 2 ?
2. On cherche à résoudre l'équation différentielle :
$$\begin{cases} 2f(x) - xf'(x) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$
   Dans les questions 2b à 2d, on suppose que le tracé correspond *exactement* au tracé de la courbe de la fonction f.
   (a) Isoler $f'(x)$ dans l'équation précédente.
   (b) Placer le point de coordonnées $(2; f(2))$.
   (c) Calculer $f'(2)$, puis tracer le segment de la droite passant par le point de coordonnées $(2; f(2))$, et de coefficient directeur $f'(2)$, pour $x \in [2; 3]$.
   (d) Même question, pour une abscisse de 3, puis de 4.
   (e) Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une solution de l'équation.
   (f) Comparer la courbe tracée à cette question, et la courbe de la fonction f. Comment faire pour améliorer la précision du tracé ?
3. *Généralisation* Soit f une fonction dérivable, et a un réel de son ensemble de définition. On suppose que pour des valeurs de h suffisament petites, $f(a + h)$ est exactement égale à l'image de $a + h$ par la tangente à f en a.
   (a) Rappeler l'équation de la tangente à f au point d'abscisse a.
   (b) En déduire l'expression de $f(a + h)$ en fonction de $f(a)$, $f'(a)$ et h.