Chapitre 4 | Entrainement 3

Fonctions dérivées

Différenciation

Parcours 1 : exercices **38 ; 42 ; 45 ; 57 ; 58 ;** 77 ; 80 ;

Parcours 2 : exercices **48 ; 49 ; 67 ; 73 ;** 79 ; 83 ; 84 ;

Parcours 3 : exercices **43 ; 46 ; 55 ; 59 ; 64 ; 70 ;** 90 ; 94 ; **100 ;**

Pour les exercices 74 à 86

On considère f et g deux fonctions définies et dérivables respectivement sur deux ensembles I et J de $\mathbb{R}$. On note f' et g' les fonctions dérivées associées.

74 [*Calculer.*]

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x)=2019$ et $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x)=4x-7$ et $\mathrm{J}=\mathbb{R}$.

75 [*Calculer.*]

1. Calculer f' pour $f(x)=x^4$ et $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.

2. Calculer g' pour $g(x)=4x^4$ et $\mathrm{J}=\mathbb{R}$.

76 [*Calculer.*]

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = (2x-1)(x+3)$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \left(x^2 - x + 2\right)\left(2x^3 - 4\right)$ et $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

77 *[Calculer.]* ● ○ ○

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ et $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

78 *[Calculer.]*

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ et $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

79 *[Calculer.]* ● ● ○

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$ et $g(x) = \sqrt{x}\left(x^2 - x + 1\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions f et g.

2. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

80 *[Calculer.]* ● ○ ○

1. a. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = (2x+3)(1-4x)$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

b. Développer et réduire $f(x)$ et calculer la dérivée de l'expression obtenue.

2. a. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + x\right)$ et $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

b. Développer et réduire $g(x)$ et calculer la dérivée de l'expression obtenue.

81 [*Calculer.*]

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \sqrt{x}\left(x^2+1\right)$ et $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \frac{1}{x}\left(x^2-1\right)$ et $\mathrm{J} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

82 [*Calculer.*]

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \dfrac{4}{2x-3}$ et $\mathrm{I} =]-\infty\,;\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}\,;+\infty[$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{2}{1-4x}$ et $\mathrm{J} =]-\infty\,;\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4}\,;+\infty[$.

83 [*Calculer.*] ●●○

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+x+1}$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{3}{x^4+1}$ et $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

84 [*Calculer.*] ●●○

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+2}$ et $\mathrm{I} =]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{3-x}{1+4x}$ et $\mathrm{J} =]-\infty\,;-\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4}\,;+\infty[$.

85 [*Calculer.*]

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ et $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

86 *[Calculer.]*

1. Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ et $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

2. Calculer $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ et $\mathrm{J} =]0\,;+\infty[$.

87 Python *[Calculer.]*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

2. Écrire, en langage Python, une fonction qui calcule le nombre dérivé en un réel x_0 d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Cliquez pour accéder à la correction

88 *[Calculer.]*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Dans chaque cas, identifier la forme $g(ax+b)$, préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = (5x+3)^2 ; \mathrm{I} = \mathbb{R}$

2. $f(x)=\sqrt{3x-4}; \mathrm{I}=\left[\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$

3. $f(x)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)^3\,; \mathrm{I}=\mathbb{R}$

89 [*Calculer.*]

Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$.
Dans chaque cas, préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

1. $f(x)=\sqrt{2x+3}+\frac{1}{x}\,; \mathrm{I}=[\frac{-3}{2}\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

2. $f(x)=\sqrt{x-2}\left(x^2-1\right)\,; \mathrm{I}=[2\,;+\infty[$.

3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,; \mathrm{I}=]-\infty\,;\frac{1}{2}]$.

4. $f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{x^3}\,; \mathrm{I}=]-\infty\,;0[\cup]0\,;3]$.

90 Vrai / Faux [*Raisonner.*] ●●●

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. « Les fonctions f et g définies pour tout $x\neq-1$ et $x\neq1$ par $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-1}$ et $g(x)=1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}$ ont la même fonction dérivée. »

2. « La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2}$. »

3. « Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)(x+1)^2$ et $g(x)=(x-1)^2(x+1)$. Il existe un unique réel a pour lequel $f'(a)=g'(a)$. »

4. « Les nombres dérivés en 1 des fonctions inverse et valeur absolue sont égaux. »

91 **QCM** *[Calculer.]*

Pour chacune des propositions suivantes, choisir la (ou les) réponse(s) correcte(s).

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.
Alors $f'(x)$ est égal à :

- ☐ **a.** -5
- ☐ **b.** 3
- ☐ **c.** $3x$
- ☐ **d.** 0

2. La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$ est définie par $f'(x) =$:

- ☐ **a.** $2x + 1$
- ☐ **b.** $2x$
- ☐ **c.** 2
- ☐ **d.** 0

3. Soit f la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$. Alors $f'(x)$ est égal à :

- ☐ **a.** $\dfrac{1}{x}$
- ☐ **b.** 0
- ☐ **c.** $\dfrac{2}{x^2}$
- ☐ **d.** $\dfrac{2}{x^3}$

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
Alors f est la fonction dérivée de la fonction g définie par :

- ☐ **a.** $g(x) = (x-1)^3$
- ☐ **b.** $g(x) = \left(x^2 - 1\right)(x+1)$
- ☐ **c.** $g(x) = (x+1)(x-1)^2 + 1$
- ☐ **d.** $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

5.Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.
Alors $f'(1)$ est égal à :

- ☐ **a.** 1

- [ ] **b.** -1
- [ ] **c.** $\frac{1}{2}$
- [ ] **d.** $\frac{-1}{2}$

92 Démo *[Raisonner.]*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x - 2|$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f sur $]\frac{2}{3} ; +\infty[$

2. Même consigne sur $] - \infty ; \frac{2}{3}[$

3. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en $\frac{2}{3}$.

93 Démo *[Raisonner.]*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x^2 + x - 12\right|$

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$.

2. Déterminer la fonction dérivée de f sur $] - \infty ; -4[\cup]3 ; +\infty[$.

3. Même consigne sur $] - 4 ; 3[$.

4. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en -4, ni en 3.

5. Tracer la courbe de f à la calculatrice. Que remarque-t-on ?

94 Démo *[Raisonner.]* ●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f sur $]1 ; +\infty[$.

2. Même consigne sur $]-\infty\,;1[$.

3. Calculer la limite du taux de variation de f pour $x > 1$ et pour $x < 1$. Conclure

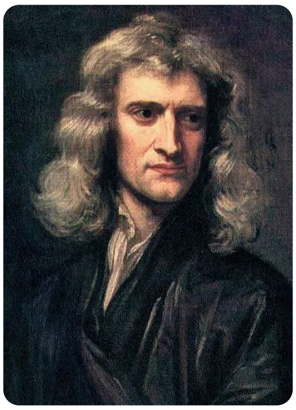
95 | En physique | *[Communiquer.]*

Une particule évolue de façon rectiligne au cours du temps. Sa position x en fonction du temps est donnée par l'équation $x(t) = 3t^2 + 9t + 8$ où $x(t)$ exprime (en mètre) la distance parcourue par la particule au temps t (en seconde). La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée en mètre par seconde par la fonction dérivée de la fonction x. On note $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$

1. Quelle est la vitesse de la particule lorsque $t = 2$?

2. Quelle est la position de la particule lorsque $v(t) = 10$?

Histoire des maths



Isaac Newton (1642-1727), physicien anglais, a aussi contribué à l'avancée des mathématiques. Ses travaux sur le calcul infinitésimal, inspirés par la définition de la tangente à une courbe comme position limite d'une sécante donnée par le mathématicien français Fermat (1610-1665) et menés en concurrence avec le mathématicien allemand Leibniz (1646-1716) ont jeté les bases du calcul différentiel et de la dérivation.