I - Étude globale

1 - Définitions

Définition 1 : *(Suite numérique)*
Une suite numérique est une fonction de dans $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 :
La fonction définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2n + 1$ est une suite.

Notation :

- On peut désigner la suite u avec la notation (u_n) (entre parenthèses) ;
- L'écriture u_n (sans parenthèses) désigne le terme de rang n de la suite u, c'est à dire $u(n)$;

Remarque 1 :
Une suite u peut être définie à partir d'un certain rang u_0, on notera alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ pour désigner la suite u.

Définition 2 : *(Modes de génération)*
Il existe trois façon de définir une suite :

1. **Définition explicite :**
   La suite (u_n) est définie directement par son terme général :
   $$u_n = f(n)$$
   Avec f une fonction dépendant de n définie sur $\mathbb{N}$;
2. **Définition par récurrence :**
   Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, une suite u_n peut être définie par récurrence par :
   $$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
3. **Définition implicite :**
   La suite est définie par une propriété géométrique, économique ... au sein d'un problème.

Remarque 2 :
Quel que soit le mode de définition d'une suite, il se peut que celle-ci ne soit définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 > 0$.

Remarque 3 :
On peut faire les analogies suivantes entre les suites et les fonctions :

Fonctions		Suites
f	$\leftrightarrow$	u
x	$\leftrightarrow$	n
antécédent	$\leftrightarrow$	rang
image	$\leftrightarrow$	terme
f	$\leftrightarrow$	u

2 - Sens de variation

Remarque 4 :
Dans la suite, on considère (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ pour tout $n \geq n_0$, avec $n_0 \geq 0$.

Définition 3 : ***(Suite croissante)***
(u_n) croissante $\iff u_{n+1} \geq u_n, \forall n \geq n_0$

Exemple 2 :

Définition 4 : ***(Suite strictement croissante)***
(u_n) strictement croissante $\iff u_{n+1} > u_n, \forall n \geq n_0$

Exemple 3 :

Définition 5 : ***(Suite décroissante)***
(u_n) décroissante $\iff u_{n+1} \leq u_n, \forall n \geq n_0$

Exemple 4 :

Définition 6 : ***(Suite strictement décroissante)***
(u_n) strictement décroissante $\iff u_{n+1} < u_n, \forall n \geq n_0$

Exemple 5 :

Définition 7 : ***(Suite monotone)***
La suite (u_n) est monotone si et seulement si elle uniquement est croissante ou décroissante (sans changer de sens de variation).

Exemple 6 :

Définition 8 : ***(Suite constante)***
(u_n) constante $\iff u_{n+1} = u_n, \forall n \geq n_0$

Exemple 7 :