Chapitre 4 | Entrainement 1

Nombre dérivé et tangente

Différenciation

●○○ **Parcours 1 :** exercices 38 ; 42 ; 45 ; **57** ; **58** ; **77** et **80**

●●○ **Parcours 2 :**exercices 48 ; 49 ; **67** ; **73** ; **79** ; **83** et **84**

●●● **Parcours 3 :** exercices 43 ; 46 ; 55 ; **59** ; **64** ; **70** ; **90** ; **94** et **100**

38 *[Calculer.]* ●○○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
1. Soit h un réel non nul.
Exprimer $f(1+h) - f(1)$ en fonction de h.

2. Montrer que f est dérivable en 1 et donner la valeur du nombre dérivé de f en 1.

3. Vérifier le résultat à la calculatrice.

39 *[Calculer.]*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x$.
1. Soit h un réel non nul. Exprimer $f(2+h) - f(2)$ en fonction de h.

2. Montrer que f est dérivable en 2 et donner la valeur du nombre dérivé de f en 2.

3. Vérifier le résultat à la calculatrice.

40 [*Calculer.*]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
1. Vérifier que pour tous réels a et b :
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. Soit h un réel non nul.
Exprimer le quotient $\dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$ en fonction de h.

3. En déduire que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

4. Vérifier le résultat à la calculatrice.

41 [*Calculer.*]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
1. **a.** Soit h un réel non nul.
Vérifier que $f(1+h) - f(1) = -\dfrac{h}{1+h}$.

b. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

2. Montrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

3. Vérifier les résultats à la calculatrice.

42 [*Calculer.*]● ○ ○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 3$.

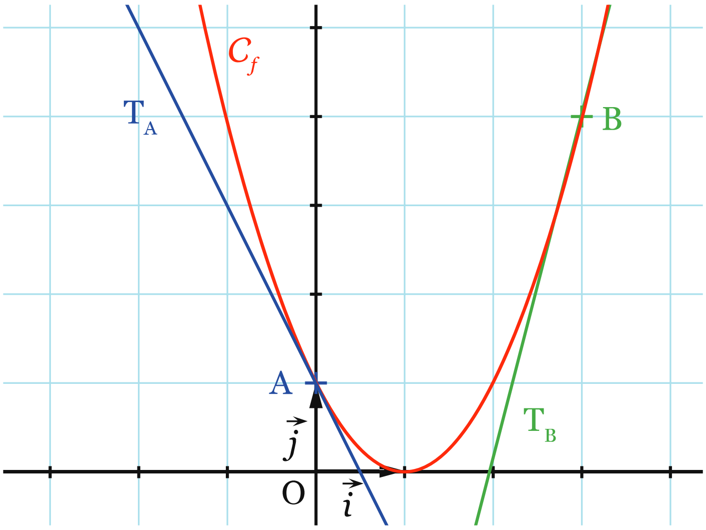
Démontrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$.

43 [*Calculer.*]

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$.
Démontrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.

44 [*Chercher.*]

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$ dont on donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$. Les droites $\mathrm{T_A}$ et $\mathrm{T_B}$ sont les tangentes respectives en A et en B à $\mathcal{C}_f$.

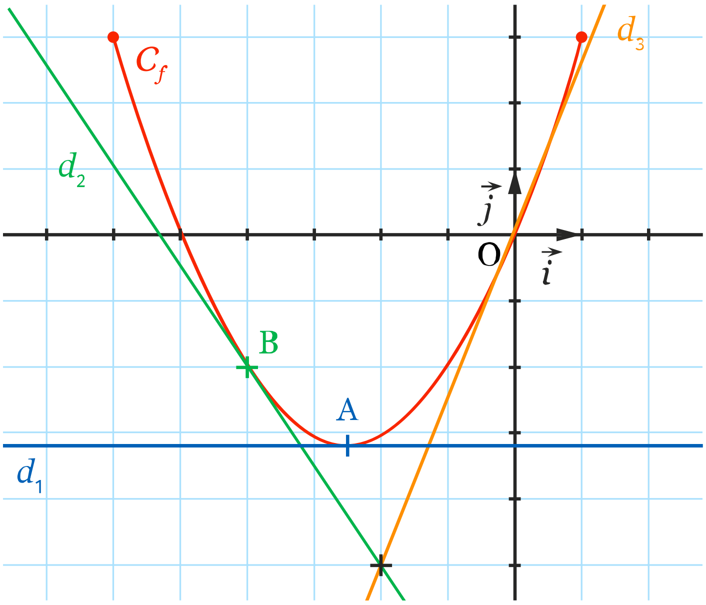


1. Par lecture graphique, déterminer la valeur du nombre dérivé de f en 0.

2. Déterminer $f'(3)$ graphiquement.

45 [*Chercher.*]

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\,;1]$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$. On a également tracé trois tangentes d_1, d_2 et d_3 à $\mathcal{C}_f$ respectivement en A d'abscisse $\dfrac{-5}{2}$, en B d'abscisse -4 et en O. On admet que d_1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Déterminer graphiquement les nombres dérivés de f en $x_1 = -4$, en $x_2 = \dfrac{-5}{2}$ et en $x_3 = 0$.

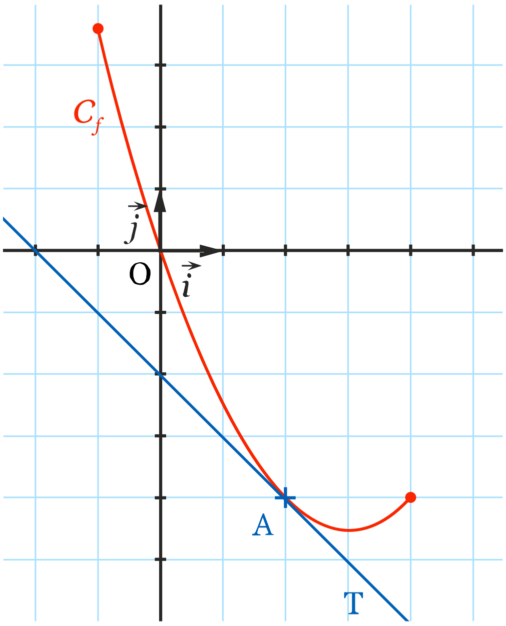
46 [*Raisonner.*] ●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Soit a un réel. À l'aide du taux de variation de f en a, justifier que f est dérivable en a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.

Pour les exercices 47 à 50

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et de représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ La droite T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a.

47 [*Chercher.*]

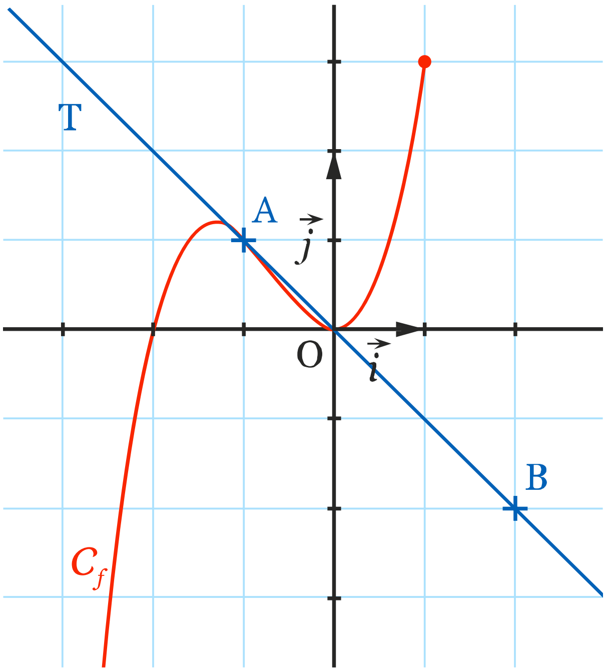


On donne $\mathrm{I} = [-1\,;4]$ et $a = 2$.
Déterminer graphiquement $f'(a)$.

Aide

Graphiquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de T.

48 [*Chercher.*]

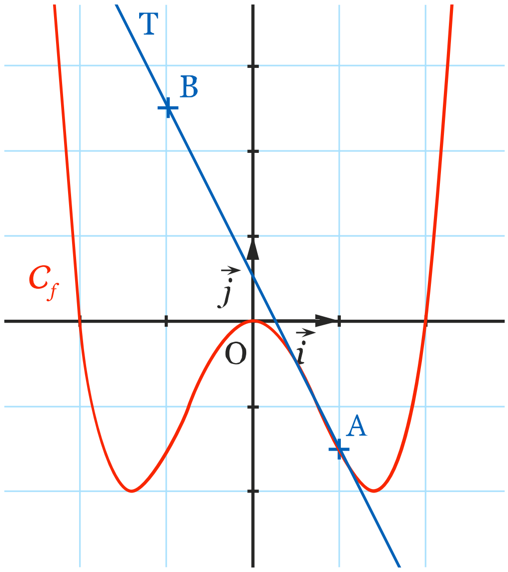


On donne $\mathrm{I} = [-3\,;1]$ et $a = -1$. Sachant que T passe par A et par le point $\mathrm{B}(2\,;-1)$, calculer $f'(a)$.

Aide

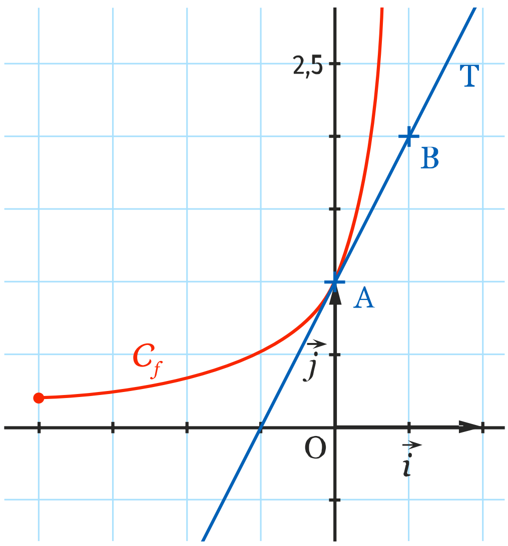
Le coefficient directeur de la droite (AB) peut se calculer à partir des coordonnées de A et B.

49 [*Chercher.*] ● ● ○



On donne $I=[-3\,;3]$ et $a=1$. Sachant que T passe par le point $\mathrm{A}\left(1\,;\dfrac{-3}{2}\right)$ et par le point $\mathrm{B}\left(-1\,;\dfrac{5}{2}\right)$, calculer $f'(a)$.

50 [*Chercher.*]



On donne $\mathrm{I} = \left[-2 \,; \frac{1}{2}\right]$ et $a = 0$. Sachant que T passe par A et par le point $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2} \,; 2\right)$, calculer $f'(a)$.

51 Vrai / Faux [*Raisonner.*]

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. « Pour tout réel $h \neq 0$, on suppose que le taux de variation d'une fonction f entre -1 et $-1+h$ est égal à $h^2 - 3h + 2$. Alors f est dérivable en -1 et le nombre dérivé de f en -1 est égal à 2. »

2. « Pour tout réel $h \neq 0$ et strictement supérieur à -1, on suppose que le taux de variation d'une fonction f entre 1 et $1+h$ est égal à $\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$. Alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.»

3. « Pour tout réel h non nul et différent de -1, on suppose que la différence $f(2+h) - f(2)$ est égale à $\frac{-3h}{1+h}$. Alors f est dérivable en 2 et $f'(2) = 0$. »

52 [*Représenter.*]

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3 \,; 3]$ dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	0	$\frac{3}{2}$	3
$f(x)$	-2	0	2	0	-4
$f'(x)$	0	2	0	$\frac{-5}{2}$	0

Tracer une courbe représentative possible pour la fonction f dans le repère suivant.

53 *[Représenter.]*

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;4]$ telle que :
$f(0)=f(2)=f(4)=1, f(1)=f(3)=-1$ et
$f'(0)=f'(1)=f'(2)=f'(3)=f'(4)=0.$
Tracer une courbe représentative possible pour la fonction f dans un repère $(\mathrm{O};\mathrm{I},\mathrm{J})$.

Cliquez ici pour avoir accès à un espace de dessin

54 Démo [*Raisonner.*]

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
Soient deux réels $a>0$ et $h\neq 0$ tels que $a+h>0$.
1. Déterminer $f(a+h)-f(a)$ en fonction de h.

2. En déduire l'expression du taux de variation $\tau(h)$ de f en a.

3. Que peut-on dire de $\tau(h)$ lorsque h devient de plus en plus proche de 0 ?

4. Justifier alors que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $f'(a)$.

5. Justifier alors que f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et exprimer $f'(a)$ lorsque a est un réel strictement négatif.

Démonstration au programme

Lien vers vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=BUx15mF75E4

55 Démo [*Raisonner.*]

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
1. Soit h un réel non nul. À l'aide d'une identité remarquable, développer et simplifier l'expression $(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})$.

1, exprimer le taux de variation de f en 2 en fonction de h.

3. En déduire que f est dérivable en 2 et donner la valeur de $f'(2)$.

4. De manière analogue, démontrer que f est dérivable en tout réel a strictement positif et exprimer $f'(a)$ en fonction de a avec $a+h>0$.

5. Justifier que f n'est pas dérivable en 0.

Démonstration au programme

Lien vers vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=ltv8xakRoNA