DOI:10.13954/j.cnki.hdu.2005.03.018

第25卷第3期 杭州电子科技大学学报 Vol.25 No.3
2005年6月 Journal of Hangzhou Dianzi University Jun.2005

反求三次B样条曲线控制顶点的一种快速算法

吴光亚, 王小华
(杭州电子科技大学计算机学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 三次B样条曲线在实际工程中被广泛应用, 反求三次B样条曲线控制顶点的问题在很多情况下可归结为求解一个系数矩阵为三对角矩阵的方程组 $Ax=s$, 一般采用追赶法或LU分解法求解它。该文通过 A^{-1} 的研究提出一种更优的求解算法, 实验证明了该算法的优异性能。

关键词: 样条曲线; 对角矩阵; 行列式; 伴随矩阵; 逆矩阵
中图分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1001-9146(2005)03-0064-03

0 引言

B样条曲线是计算机图形学中一种非常重要的曲线。三次B样条曲线被应用最多, 高于三次的B样条曲线由于计算过于复杂用得很少。在实际工程应用中, 经常需要反求三次B样条曲线的控制顶点, 而且所涉及的计算量相当的大, 因此有必要找出反求三次B样条曲线的控制顶点的快速算法。反求三次B样条曲线控制顶点的问题在某些情况下可归结为求解一个系数矩阵为三对角矩阵的方程组。一般通过追赶法或LU分解法[3](这两种方法在理论上是完全等价的)去求解该方程组, 该文通过对 A^{-1} 的研究提出一种快速求解算法。

1 反求三次B样条曲线控制顶点的方法分析

反求三次B样条曲线控制顶点的问题可以描述为: 已知三次B样条曲线个分段点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, 求其 $n+2$ 个控制顶点 $P_1, P_2, \cdots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}$。根据三次B样条曲线的性质, 可得求解其控制顶点的方程组为:

$$(P_i+P_{i+1}+P_{i+2})/6=Q_i \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

该方程组有n个方程, n+2个未知数, 因此需补充两个边界条件方程[1]才能求解。

(1) 三次B样条曲线端点有二重控制顶点, 此时 $P_1=P_2, P_{n+2}=P_{n+1}$, 有线性方程组:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdots \\ P_n \\ P_{n+1} \\ P_{n+2} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2) 已知三次B样条曲线始端点处的一阶导数 Q'_1, 对三次B样条曲线:

$$Q'_1=\frac{1}{2}(P_3-P_1) \tag{3}$$

若将末段看成是二次B样条曲线, 可得另一个边界条件:

收稿日期: 2005-02-25
基金项目: 浙江省科技计划重点项目(2005C21023)
作者简介: 吴光亚(1981-), 男, 江苏泰兴人, 在读研究生, 图形图像处理技术.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$-P_{n-1}+3P_n-3P_{n+1}+P_{n+2}=0 \tag{4}$$

将式1、3、4联立,并对所得的方程组作变换,可得:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \cdots & & & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \cdots \\ P_n \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} (3Q_1-Q'_1)/12 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_{n-1} \\ (Q_{n-1}-Q_n)/6 \end{bmatrix} \tag{5}$$

解出式5,再由式4可求得 P_{n+2}。

此外,若已知B样条曲线末端点处的一阶导数 Q'_n,将B样条曲线的首段当成是二次B样条曲线即可;若始末端点处的一阶导数均未知,则可将B样条曲线的首末两段均视为二次B样条曲线。在前面所讨论的一些情况下,反求三次B样条曲线的控制顶点的问题可归结为求解线性方程组 $Ax=s$,其中 $A=\begin{bmatrix} b_1 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & & \cdots & & \\ & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & b_n \end{bmatrix}$ (A为n阶方阵),$x=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$,$s=[s_1, s_2, \cdots, s_n]^T$。找出 A^{-1} 的规律,可得到该方程组的快速解法。

2 对 A^{-1} 的研究

2.1 求 $|A|$

令 $D_n=\begin{vmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \cdots & & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n\times n}$,$D_n$ 有下面的递推式:

$$\begin{cases} D_n=4D_{n-1}-D_{n-2} \quad (n\geqslant 2) \\ D_1=4 \\ D_0=1 \\ D_{-1}=0 \end{cases} \tag{6}$$

则可以证明A的行列式可以表示为:

$$|A|=b_1b_nD_{n-2}-(b_1+b_n)D_{n-3}+D_{n-4} \quad (n\geqslant 4) \tag{7}$$

2.2 求 A^*

A的伴随矩阵,$A^*=[A_{ij}]_{n\times n}$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$,它是一个对称矩阵。经过归纳证明可得:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_iN_j \quad (i\leqslant j) \tag{8}$$

$$M_i=\begin{cases} 1 & i=1 \\ b_1D_{i-2}-D_{i-3} & 2\leqslant i\leqslant n \end{cases}, \quad N_j=\begin{cases} b_nD_{n-j-1}-D_{n-j-2} & i\leqslant j\leqslant n-1 \\ 1 & j=n \end{cases} \tag{9}$$

2.3 A^{-1} 的简捷求法

由式6、式8和式9可得:

$$\begin{cases} A_{1n}=(-1)^{n+1} \\ A_{2n}=(-1)^{n+2}b_1 \\ A_{in}=-4A_{i-1n}-A_{i-2n} \quad (3\leqslant i\leqslant n) \end{cases} \tag{10}$$

由式10可求出 A^* 的第n行元素的值。根据式7、8、9又可得到:

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$|A| = b_n A_{nn} + A_{n-1n} \quad (n \geqslant 4) \tag{11}$$

由式8、9,可推出:

$$A_{in-k} = (-1)^k A_{in}(b_n D_{k-1} - D_{k-2}) \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1, 1 \leqslant i \leqslant n-k) \tag{12}$$

由式10、11、12可求出A^{-1}。在实际求解方程组$Ax = s$时,无需求出完整的A^{-1},采用算法1即可:

算法1

(1) 由式10求出A^*的第n行元素;

(2) 由式11求出$|A|$;

(3)$x_n = (\sum_{i=1}^{n} A_{in} S_i) / |A|$, $X_{n-1} = (-b_n) x_n + s_n$;

(4) 由递推公式$x_i + 4x_{i+1} + x_{i+2} = s_{i+1}$最终解出方程组。

3 与LU分解法的比较

3.1 算法比较

采用LU分解法求解要求矩阵A必须是主对角占优的,而该文提出的算法1则没有这个限制。若直接采用LU分解法,时间复杂度为$O(n^3)$,充分考虑A的特殊性,其时间复杂度能降到与算法1相同的$O(n)$,此时LU分解法的计算量约为次乘除法和3n次加减法,而算法1的计算量则约为3n次乘除法和4n次加减法。LU分解法的计算过程需要约2n的存储空间,而算法1仅为n。显然,无论是从运算量还是空间需求上考虑,该文的算法1均优于LU分解法。

3.2 实验结果

比较三次B样条曲线在端点有二重控制顶点的边界条件($b_1 = b_n = -1$)下,采用该文提出的算法1和采用LU分解法反求控制顶点性能上的差异。两种算法均在VC++ 6.0下实现,并在P4 2.4GHz平台下运行。如表1所示:

表1 算法比较结果

时间(μs) n / 算法	10	30	100	500	1 000
算法1	16.1	17.5	21.1	60.5	63.9
LU分解法	18.7	22.2	28.8	94.3	153.6

参考文献

[1] 陈元琰,张晓竞.计算机图形学实用技术[M].北京:科学出版社,2000.188—194.

[2] Donald Hearn, M Pauline Baker.蔡士杰,孙正兴,周群,等译.计算机图形学[M].北京:电子工业出版社,1998.252—259.

[3] 刘萍.数值计算方法[M].北京:人民邮电出版社,2002.79—83.

Research on Algorithm of Computing Control Points of Cublic B—Spline Curve

WU Guang-ya, WANG Xiao-hua

(*School of Computer Science*, *Hangzhou Dianzi University*, *Hangzhou Zhejiang* 310018, *China*)

Abstract: Cubic B—spline curve has been widely used in many projects. Some problems of computing B—spline curve's control points are equivalent to those of solving a linear equation in which is a tri—diagonal matrix. LU decomposition can be applied to solve it. In this paper, a better algorithm will be presented and its outstanding performance will be proved.

Key words: spline curve; diagonal matrix; determinant; adjoint matrix; inverting matrix

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net