

# 基于四阶贝塞尔曲线的无人车可行轨迹规划

陈 成<sup>1,2</sup> 何玉庆<sup>1</sup> 卜春光<sup>1</sup> 韩建达<sup>1</sup>

**摘 要** 对于实际的无人车系统来说, 轨迹规划需要保证其规划出来的轨迹满足运动学约束、侧滑约束以及执行机构约束. 为了生成满足无人车初始状态约束、目标状态约束的局部可行轨迹, 本文提出了一种基于四阶贝塞尔曲线的轨迹规划方法. 在该方法中, 轨迹规划问题首先被分解为轨形规划及速度规划两个子问题. 为了满足运动学约束、初始状态约束、目标状态约束以及曲率连续约束, 本文采用由 3 个参数确定的四阶贝塞尔曲线来规划轨迹形状. 为了保证转向机构可行, 本文进一步采用优化方法求解一组最优参数从而规划出曲率变化最小的轨线. 对于轨迹执行速度规划, 为了满足速度连续约束、加速度连续约束、加速度有界约束以及目标状态侧滑约束, 本文首先求解了可行的轨迹执行耗时区间, 再进一步在该区间中求解能够保证任意轨迹点满足侧滑约束的耗时, 最后再由该耗时对任意点速度进行规划. 本文结合实际无人车的应用对轨迹搜索空间生成、道路行车模拟以及路径跟踪进行了仿真实验, 并基于实际的环境数据进行了轨迹规划实验.

**关键词** 轨迹规划, 可行性, 无人车, 四阶贝塞尔曲线

**引用格式** 陈成, 何玉庆, 卜春光, 韩建达. 基于四阶贝塞尔曲线的无人车可行轨迹规划. 自动化学报, 2015, 41(3): 486–496

**DOI** 10.16383/j.aas.2015.c140295

## Feasible Trajectory Generation for Autonomous Vehicles Based on Quartic Bézier Curve

CHEN Cheng<sup>1,2</sup> HE Yu-Qing<sup>1</sup> BU Chun-Guang<sup>1</sup> HAN Jian-Da<sup>1</sup>

**Abstract** For practical autonomous vehicles, the generated trajectories should ensure the feasibility imposed by kinematic, dynamic and actuation. To generate a locally feasible trajectory from the initial state to the target state, a trajectory generation algorithm based on quartic Bézier curve is proposed. Firstly, the original problem is decomposed into shaping the trajectory and executing the shape. To satisfy the kinematic constraints, initial state and target state constraints and continuous curvature constraint, a quartic Bézier curve defined by 3 parameters is adopted to shape the trajectory. To further ensure the feasibility of steering, optimization is utilized to resolve a set of parameters to generate a trajectory that has a minimum curvature change. For velocity generation, an interval of executing time is firstly generated to ensure a continuous velocity, continuous acceleration, bounded acceleration and side-slip avoidance at the target state. Then, the executing time that could avoid side-slip at every point is resolved by adjusting the time. Finally, the executing velocity of the trajectory at each point is generated based on the executing time. To verify the algorithm, trajectory generation based on real environment data and simulations on search space generation, driving on road and path tracking are conducted.

**Key words** Trajectory generation, feasibility, autonomous vehicles, quartic Bézier curve

**Citation** Chen Cheng, He Yu-Qing, Bu Chun-Guang, Han Jian-Da. Feasible trajectory generation for autonomous vehicles based on quartic Bézier curve. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(3): 486–496

在过去的几十年中, 无人车一直是机器人领域的热点研究问题. 对于无人车来说, 生成一条从初始状态到目标状态的轨迹是其自主导航行为<sup>[1]</sup>的基础. 近几年来, 研究人员对这一问题进行了大量的研

究<sup>[2–3]</sup>. 主要研究内容是如何生成一条轨迹, 然而对于生成的轨迹是否满足运动学约束、侧滑约束以及执行机构约束, 即轨迹的可行性, 研究相对较少.

对于无人车这一受非完整性约束的系统, 研究人员通常基于车体模型进行轨迹规划. 按照车体模型的精确程度, 轨迹规划方法可以进一步分为基于模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 以及基于几何轨线的规划方法. 基于模型预测的无人车轨迹规划方法首先由 Kelly 等<sup>[4]</sup>提出. 在该类方法中, 无人车相对于行驶距离的曲率由参数化的多项式表征. 通过优化的方法, 如梯度下降法, 不断调整多项式参数, 使得轨迹的末端状态不断靠近期望目

收稿日期 2014-05-04 录用日期 2014-08-18  
Manuscript received May 4, 2014; accepted August 18, 2014  
国家重点自然科学基金 (61035005) 资助  
Supported by State Key Program of National Natural Science Foundation of China (61035005)  
本文责任编辑 谭民  
Recommended by Associate Editor TAN Min  
1. 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学国家重点实验室 沈阳 110016  
2. 中国科学院大学 北京 100049  
1. State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016  
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

标状态. 最终得到一组参数, 使得无人车能够由初始状态到达目标状态. 文献[5-8]进一步将该方法扩展到在不同场景下由不同移动机构驱动的机器人系统中. 对于无人车的速度规划则采用常速度、定加/减速度的方式进行<sup>[9]</sup>. 该类方法存在3个主要问题: 1) 对于实际的无人车系统来说, 生成轨迹的可行性无法保证. 为了解决这一问题, 需要首先生成若干条备选轨迹, 再从这些轨迹中选择一条可行的轨迹作为无人车的执行轨迹. 因此, 大量的时间被浪费在生成不可行的轨迹上. 2) 该方法对初始的曲率参数极为敏感. 若初始参数与最优参数偏差较远, 该方法通常无法收敛到目标状态. 3) 该方法在生成轨迹时, 需要不断地对车体模型进行前向模拟, 该模拟过程需要消耗大量的时间. 为了解决问题2)和问题3), 研究人员通常在内存中预先存储大量的参数与状态的对应关系表. 在实际的无人车系统中, 该对应关系表通常会消耗数百兆内存.

部分研究人员采用几何轨线, 如线段圆弧<sup>[10]</sup>、螺旋曲线<sup>[11]</sup>、 $\beta$ 样条曲线<sup>[12]</sup>、贝塞尔曲线<sup>[13-16]</sup>等, 来近似无人车的运动学约束, 从而进行轨迹规划. 然而, 这些方法对车体的执行机构约束考虑较少. Gómez-Bravo等<sup>[12]</sup>基于 $\beta$ 样条曲线, 针对停车这一典型操作进行了研究. 该方法生成了曲率连续同时满足避碰约束的曲线, 然而对曲率边界并不做约束. Gómez-Bravo等仅仅在转向能力较强的小型电动车上进行了实验. Jolly等<sup>[14]</sup>基于三阶贝塞尔曲线, 对多机器人轨迹规划问题进行了研究. 由于Jolly等主要针对差动转向的机器人进行研究, 其提出的方法并没有考虑曲率约束, 而是仅考虑了加速度约束. Choi等<sup>[15]</sup>基于贝塞尔曲线规划出了曲率连续的轨迹. 为了同时保证曲率连续以及数值稳定性, Choi等将低阶的贝塞尔曲线连接生成了曲率连续的轨迹. 然而Choi等并没有对曲率边界进行约束, 也没有给出算法的实时性分析.

本文对无人车的可行轨迹规划问题进行了研究, 与之前的研究相比, 本文在以下几个方面有所不同. 1) 本文提出的轨迹规划方法是基于四阶贝塞尔曲线的, 其生成的轨迹满足运动学约束, 并且轨迹以及轨迹曲率是连续的. 2) 本文生成的轨迹曲率是有界的. 该边界由无人车的转向能力确定, 从而保证该轨迹对转向机构来说是可行的. 3) 本文生成的轨迹速度及加速度是连续的, 并且加速度是有界的. 4) 本文提出的轨迹规划方法对参数初值是不敏感的, 不需要预先存储参数与状态的对应关系.

本文的结构如下: 首先, 在第1.1节及第1.2节中分别对无人车可行轨迹规划问题以及四阶贝塞尔曲线基础知识进行了介绍. 在第2.1节中, 无人车轨迹规划问题被分解为轨线规划及速度规划两个子

问题. 接下来为了满足车体运动学约束、初始状态约束、目标状态约束以及曲率连续有界约束, 在第2.2节中, 轨线规划问题被简化为求解一组满足曲率有界约束的四阶贝塞尔曲线参数. 进一步, 为了执行该轨迹, 第2.3节在满足速度连续约束、加速度连续有界约束以及侧滑约束的条件下进行了速度规划. 为了对本文提出的方法进行验证, 第3节基于该方法对轨迹空间生成、行车模拟以及路径跟踪进行了仿真, 并且在实际的环境模型中进行了实验验证. 最后对本文提出的方法及实验效果进行了总结.

## 1 基础知识

### 1.1 问题描述

对于移动机器人来说, 轨迹生成问题主要研究如何生成一系列动作, 使得机器人由初始状态到达目标状态. 对于无人车来说, 其初始状态包括其二维坐标 $(x, y)$ 、航向角 $\psi$ 以及曲率 $\kappa$ , 如图1所示.

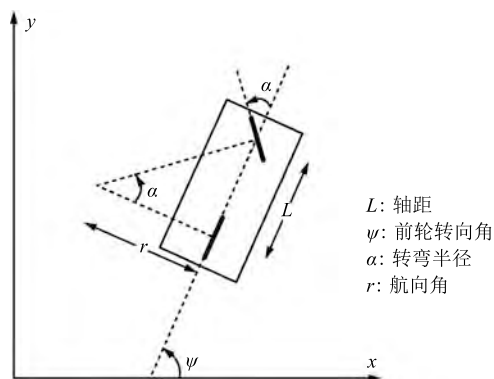


图1 无人车前轮转向模型

Fig.1 Front wheel steering model

曲率、转弯半径、前后轮轴距以及前轮转向角之间的关系为<sup>[17]</sup>

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{\tan(\alpha)}{L} \quad (1)$$

对于采用转向和速度作为控制量的地面移动机器人来说, 其运动学模型为

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = v(t)\kappa(t) \\ \dot{x}(t) = v(t)\cos(\psi(t)) \\ \dot{y}(t) = v(t)\sin(\psi(t)) \end{cases} \quad (2)$$

那么, 无人车的轨迹生成问题可以总结为规划一系列动作, 使得无人车从初始状态 $\mathbf{X}_I = [x_I \ y_I \ \psi_I \ \kappa_I]^T$ 到达目标状态 $\mathbf{X}_T = [x_T \ y_T \ \psi_T \ \kappa_T]^T$ .

近几十年来, 针对无人车的轨迹规划已有大量的研究. 然而, 由于受无人车运动学约束、动力学约

束以及执行机构约束, 该问题并没有完全解决. 对于无人车来说, 其动力学非常复杂. 本文仅考虑不发生侧向滑动这一最基本的动力学约束.

## 1.2 四阶贝塞尔曲线

由于本文提出的方法是基于四阶贝塞尔曲线的, 本节仅对其相关的特性进行介绍, 详细的贝塞尔曲线资料可参考文献 [18].

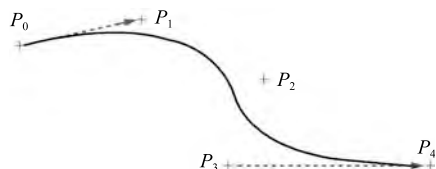


图 2 四阶贝塞尔曲线示例

Fig. 2 Quartic Bézier curve example

如图 2 所示, 由 5 个控制点唯一确定的平面四阶贝塞尔曲线具有以下特性.

1) 其参数化表达式为

$$P(\tau) = P_0(1-\tau)^4 + 4P_1(1-\tau)^3\tau + 6P_2(1-\tau)^2\tau^2 + 4P_3(1-\tau)\tau^3 + P_4\tau^4, \quad \tau \in [0, 1]$$

2) 曲线经过第 1 个及第 5 个控制点, 即

$$P(0) = P_0$$

$$P(1) = P_4$$

3) 曲线端点切向量为

$$P'(0) = 4(P_1 - P_0)$$

$$P'(1) = 4(P_4 - P_3)$$

4) 曲线在任一点曲率为

$$\kappa(\tau) = \frac{x'(\tau)y''(\tau) - y'(\tau)x''(\tau)}{(x'^2(\tau) + y'^2(\tau))^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

曲线在初始端点曲率为

$$\kappa(0) = \frac{3}{4} \times \frac{|(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_1)|}{|P_1 - P_0|^3} \quad (4)$$

5) 曲线具有仿射变换不变的特性.

## 2 轨迹生成算法

### 2.1 问题分解

为了简化轨迹生成算法, 在这里首先将无人车的速度控制以及转向控制进行解耦. 无人车相对于

时间的线速度以及相对于移动距离的曲率可以表征为

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} \\ \kappa(s) &= \frac{d\psi}{ds} \end{aligned} \quad (5)$$

将式 (5) 带入式 (2), 并且相对于无人车走过的距离  $s$  进行积分, 无人车的状态可以表征为

$$\begin{cases} \psi(s) = \psi_0 + \int_0^s \kappa(s) ds \\ x(s) = x_0 + \int_0^s \cos(\psi(s)) ds \\ y(s) = y_0 + \int_0^s \sin(\psi(s)) ds \end{cases} \quad (6)$$

显然, 无人车的轨迹形状以及无人车在各点的航向角仅与无人车的移动距离以及在不同距离的曲率 (前轮转向角) 有关. 在无人车不发生侧向滑动的条件下, 无人车速度仅影响完成该轨迹所消耗的时间. 因此, 无人车的轨迹规划问题可以分为两个步骤:

1) 生成合适的曲率, 以规划出满足初始状态  $\mathbf{X}_I$  以及目标状态  $\mathbf{X}_T$  的轨线 (即为轨形规划);

2) 生成合适的速度, 以执行生成的轨线 (即为速度规划).

为了保证轨迹是可行的, 合适的曲率应满足以下 4 个条件:

1) 该曲率生成的轨线应满足无人车运动学约束<sup>1</sup>;

2) 车体在  $s = 0$  及  $s = s_T$  的状态分别为  $\mathbf{X}_I$  和  $\mathbf{X}_T$ ;

3) 为了保证连续的前轮转向角,  $\kappa(s)$  应连续;

4) 为了保证转向机构可执行该轨迹,  $\kappa(s)$  应有界, 该界限由无人车转向能力决定.

同样, 合适的执行速度应满足以下 3 个条件:

1) 速度及加速度连续;

2) 无人车以该速度执行该轨迹不会发生侧向滑动;

3) 为了保证无人车可执行该速度, 应有界, 该界限由无人车加速能力决定.

对于单一轨迹, 以上 7 个条件必须满足. 并且对于由多条轨迹首尾相连构成的路径来说, 为了保证整条路径的可行性, 该路径上任意一段轨迹以及两段轨迹的连接点必须满足以上 7 个条件.

<sup>1</sup> 四阶贝塞尔曲线本身已满足式 (2) 的运动学约束.



## 2.2 轨形规划

### 2.2.1 轨线参数化

由于其基本特性, 早期已有部分研究人员采用贝塞尔曲线生成轨迹. 然而, 由于高阶贝塞尔曲线的数值稳定性较差<sup>[15]</sup>, 研究人员通常采用二阶或三阶的贝塞尔曲线. 为了解决数值稳定性问题, 本文提出了一种新的四阶贝塞尔曲线参数化方法.

为了简化数学推导过程, 首先对初始状态的无人车进行旋转平移, 使得  $\mathbf{X}_I = [0 \ 0 \ 0 \ \kappa_I]^T$ . 由平面贝塞尔曲线的仿射变换不变的特性可知, 该旋转平移不会影响曲线的形状. 四阶贝塞尔曲线可以通过满足初始状态以及目标状态进行参数化.

#### 1) 初始状态约束 $\mathbf{X}_s(0) = \mathbf{X}_I$

初始状态的位置约束可以简单地通过设置第 1 个控制点  $P_0 = (0, 0)$  来满足. 设  $d_1 = |P_0 P_1|$ , 那么为了满足初始航向角约束, 由贝塞尔曲线的端点切向量特性可以得到第 1 个控制点的坐标为

$$P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

为了满足贝塞尔曲线在第 1 个控制点的曲率约束  $\kappa_I$ , 第 2 个控制点的坐标为

$$P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{4\kappa_I d_1^2}{3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

#### 2) 目标状态约束 $\mathbf{X}_s(s_T) = \mathbf{X}_T$

目标状态的位置约束可以通过设定  $P_4 = (x_T, y_T)$  来满足. 设  $d_4 = |P_3 P_4|$ , 为了满足目标状态的航向角约束, 第 4 个控制点的坐标应为

$$P_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T - d_4 \cos(\psi_T) \\ y_T - d_4 \sin(\psi_T) \end{bmatrix} \quad (9)$$

以上推导过程已满足无人车的初始状态及目标状态的约束, 同时得到了四阶贝塞尔曲线的 5 个控制点坐标. 这 5 个控制点中仅有 3 个自由变量  $p = (d_1, d_4, x_2)$ , 即这 3 个自由变量可以唯一确定 5 个控制点, 进一步可以唯一确定该四阶贝塞尔曲线.

### 2.2.2 曲率连续有界约束

通过以上参数化方法, 由 3 个自由变量确定的贝塞尔曲线已满足车体运动学约束, 初始状态及目标状态约束. 轨线曲率连续有界约束通过以下方法满足.

#### 1) 曲率连续约束

由四阶贝塞尔曲线曲率式 (3) 可知, 轨线曲率仅在以下条件成立时不连续.

$$x'(\tau) = y'(\tau) = 0 \quad (10)$$

假设该条件成立, 那么在  $\tau$  之后的曲线将退化为一个点, 这样使得曲线无法到达最后一个控制点, 与贝塞尔曲线的定义矛盾. 因此, 由四阶贝塞尔曲线确定的轨迹曲率处处连续.

#### 2) 曲率有界约束

对于贝塞尔曲线来说, 控制其在每一点的曲率是不切实际的. 对于无人车系统来说, 其最大前轮转向角是有限的. 为了保证轨迹是可行的, 仅需要对其最大及最小曲率进行约束. 将曲率式 (3) 展开可以得到如下形式

$$\kappa(\tau) = \frac{A\tau^4 + B\tau^3 + C\tau^2 + D\tau + E}{F\tau^6 + G\tau^5 + H\tau^4 + I\tau^3 + J\tau^2 + K\tau + L^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

其中,  $A \sim G$  是由参数  $d_1, d_4, x_2$  决定的多项式系数. 那么曲率有界的条件可以表示为

$$K_{\min} \leq \kappa(\tau) \leq K_{\max} \quad (12)$$

其中,  $K_{\min}$  和  $K_{\max}$  分别表征最小及最大曲率. 曲率与前轮转向角之间的关系由式 (1) 确定.

### 2.2.3 轨线优化

通过以上参数化方法, 最终可以得到由 3 个参数  $p = (d_1, d_4, x_2)$  确定的满足运动学约束、初始状态约束、目标状态约束以及曲率连续约束的轨线. 为了保证该轨线的可行性, 该轨线的曲率必须有界. 本文采用最优化方法求解满足曲率边界条件约束的参数. 优化目标函数可以根据不同的应用设定, 本文采用的优化函数为

$$J(\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_T, p) = \kappa_{\max}(\tau_1) - \kappa_{\min}(\tau_2), \quad \tau_1, \tau_2 \in [0, 1] \quad (13)$$

其中,  $\tau_1$  和  $\tau_2$  分别为使得轨线曲率为最大及最小的  $\tau$ . 该目标函数表征的物理含义是优化参数  $p$ , 使得车体的最大前轮转向角与最小前轮转向角之差最小, 从而得到较为平滑的轨迹. 该轨形规划问题最终可以表征为有约束条件的非线性优化问题.

$$\text{minimize: } J(\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_T, p)$$

$$\text{s. t. } \kappa_{\max}(\tau) \leq K_{\max}$$

$$\kappa_{\min}(\tau) \geq K_{\min}$$

$$d_1 > 0$$

$$d_4 > 0$$

$$\vdots$$

注意到在该表达式中只包含曲率边界约束. 在实际的无人车系统中, 其他条件如目标状态曲率、

避障等也可以作为约束条件加入到该优化问题中. 本文采用序列二次规划 (Sequential quadratic programming, SQP) 方法来求解该问题. 在每一次优化迭代中, 最大最小曲率可以通过求解曲率  $\kappa(\tau)$  极值得到. 为了求解曲率极值, 本文先采用数值的方法求解 9 阶方程  $\kappa'(\tau) = 0$  的根, 再求解得到曲率极值点. 本文的优化方法对参数初始值  $p_0$  并不敏感, 初始值可以简单地设为  $(0.5, 0.5, 0.5x_T)$ .

注意到本文提出的轨形规划方法中忽略了目标状态的曲率约束. 一方面在实际的应用中通常对目标状态的曲率 (即目标点前轮转向角) 没有约束, 另一方面对目标状态曲率的约束会极大地影响初始状态到目标状态的可达性. 尽管如此, 在某些应用中, 如第 3 节中给出的实例, 无人车需要依次通过多个目标点. 若对当前目标点  $\mathbf{X}_{T1}$  的曲率不作限制, 下一个目标点  $\mathbf{X}_{T2}$  很有可能会因为车体到达  $\mathbf{X}_{T1}$  的曲率而不可到达. 本文通过设定期望目标点的曲率来解决这一问题. 首先, 可以通过圆弧连接当前目标点及下一个目标点求解到达当前目标点的期望曲率. 再将该期望目标状态曲率加上一定阈值作为约束条件加入到优化过程中. 通过这种方法, 可以尽可能地保证下一个目标点是可达的.

### 2.3 速度规划

通过以上轨形规划方法, 可以得到满足运动学约束、初始状态及目标状态约束以及曲率连续有界约束的轨线. 为了保证规划的轨线对于无人车来说是可以执行的, 仍需要对车体执行该轨线的速度进行规划. 对于在道路中行驶的无人车来说, 速度规划的基本要求是避免侧滑. 本文采用以下 4 个步骤来进行速度规划.

1) 计算在**不同曲率 (前轮转向角) 条件下保证车辆不会侧滑的最大速度约束**. 该约束可以通过车辆动力学求解或从车辆制造商获取到相应的数据.

2) 在满足速度连续约束、加速度连续约束、加速度有界约束以及目标状态侧滑约束的条件下, 求解得到该轨迹可行的执行耗时区间  $[T_1, T_2]$ .

3) 从区间  $[T_1, T_2]$  中求解实际轨迹执行时间  $T$ , 以满足轨迹上任意一点侧滑约束.

4) 由轨迹执行时间  $T$  解算得到该轨迹每一点的执行速度.

本节将对具体的速度规划过程进行介绍. 在仅考虑前轮侧滑的条件下, 本文以如图 3 所示的简单动力学模型为例来求解最大速度约束.

对于前轮来说, 为了防止侧滑, 其向心力应小于静摩擦力, 即为

$$\frac{mv_f^2}{R} \leq \mu mg \quad (14)$$

其中,  $\mu$  及  $g$  分别为静摩擦系数以及重力加速度. 那么车体速度约束为

$$v_{\max}(\kappa) = \sqrt{\mu g(1 + L^2 \kappa^2)} \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + L^2} \quad (15)$$

由该式可以解算得到不同曲率对应的最大速度约束.

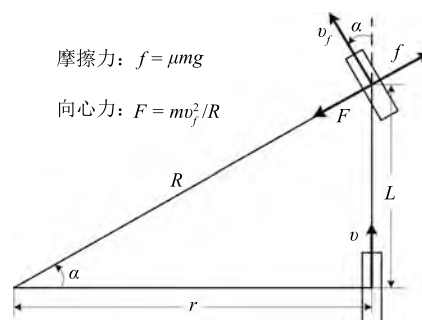


图 3 仅考虑前轮侧滑条件下的车体动力学模型示例  
Fig. 3 Simplified vehicle dynamic model only considering front wheel side-slip

为了对无人车执行该轨迹的速度进行规划, 设无人车执行该段轨迹的速度与时间  $t$  满足以下关系

$$v(t) = At^2 + Bt + C, \quad t \in [0, T] \quad (16)$$

其中,  $A, B, C$  为待求解系数,  $T$  为无人车完成该轨迹的总计耗时. 设无人车在初始状态  $t = 0$  时的速度和加速度分别为  $v_0$  和  $a_0$ , 为了保证速度及加速度连续

$$v(t) = At^2 + a_0 t + v_0, \quad t \in [0, T] \quad (17)$$

为了防止在目标状态发生侧滑, 无人车在到达目标状态时的速度应小于最大允许速度  $v_{T\max}$ , 即

$$v(T) < v_{T\max} \quad (18)$$

对于无人车来说, 其加速及减速能力是有限的. 加速度  $a(t) = 2At + a_0$  应满足

$$\begin{cases} a(T) > a_{\min} \\ a(T) < a_{\max} \end{cases} \quad (19)$$

无人车走过的轨迹长度由对速度进行积分得到

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{At^3}{3} + \frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t \quad (20)$$

设通过轨形规划得到的轨线长度为  $s_T$ , 那么

$$s(T) = s_T \quad (21)$$

由以上约束条件可知, 为了满足无人车速度连续、加速度连续、加速度有界以及到达目标状态时不会发生侧滑, 无人车的速度规划应满足以下条件

$$\begin{cases} s(T) = s_T \\ v(T) < V_{T\max} \\ a(T) > a_{\min} \\ a(T) < a_{\max} \end{cases} \quad (22)$$

其中, 待确定变量为系数  $A$  及完成该轨迹耗时  $T$ . 对其进行化简, 可以得到如下二次不等式组

$$\begin{cases} f(T) = \{a_0 T^2 + (4v_0 + 2v_{T\max})T - 6s_T\} > 0 \\ g(T) = \{(-a_{\min} - 2a_0)T^2 - 6v_0 T + 6s_T\} > 0 \\ h(T) = \{(a_{\max} + 2a_0)T^2 + 6v_0 T - 6s_T\} > 0 \end{cases} \quad (23)$$

其中,  $T$  为待求解变量;  $a_0$  和  $v_0$  分别为无人车在初始状态的速度及加速度, 可以通过传感器获取;  $a_{\min}$  和  $a_{\max}$  分别为无人车最小和最大加速度, 由车辆加速能力确定;  $v_{T\max}$  为无人车到达目标状态时的最大允许速度, 该速度由式 (15) 确定.

为了求解满足以上不等式的耗时  $T$ , 首先求解关于  $T$  的二次方程  $f(T) = 0$ ,  $g(T) = 0$ ,  $h(T) = 0$  的解. 这些解将  $T$  分成若干个区间, 对每个区间内任取一点即可判断该区间是否满足以上不等式. 若  $T \in [T_1, T_2]$  满足以上不等式, 那么该区间即为可行耗时区间, 对应的轨迹执行速度为

$$v(t) = \left( \frac{6s_T - 3a_0 T^2 - 6v_0 T}{2T^3} \right) t^2 + a_0 t + v_0, \quad t \in [0, T] \quad (24)$$

注意到该轨迹执行速度仅能保证车体在目标状态不会发生侧滑, 需要进一步从区间  $[T_1, T_2]$  中求解  $T$  以满足在轨迹任意一点均不会发生侧滑. 为了保证无人车尽快完成该轨迹, 可以在  $T_1$  的基础上不断增加执行时间来降低执行速度. 也可以通过二分法查找测试可行执行时间. 通过几次迭代可以求解得到  $T$ , 使得每一点的执行速度都满足侧滑约束.

在以上速度规划的过程中, 车辆动力学模型相对较为简单. 在实际的系统中可以根据车辆性能及道路特性采用更为复杂的动力学模型来求解满足侧滑约束的最大允许速度. 同时还注意到在实际的无人车系统中, 精确的速度控制是不切实际的. 本文所提出的速度规划方法规划出的速度为无人车的执行速度提供了一个参考, 无人车实际控制速度可能会有所偏差. 为了保证无人车的执行轨迹严格符合规划的轨迹形状, 只需要控制方向盘执行与轨迹长度对应的前轮转向角即可. 无人车的实际执行速度仅影响完成该轨迹的时间.

### 3 仿真及实验验证

为了对提出的轨迹规划方法进行验证, 本文对轨迹搜索空间生成、道路行车、路径跟踪进行了仿真实验, 并在实际的环境模型中进行了轨迹规划实验. 仿真中的车辆长、宽分别为 4.242 m 和 1.840 m, 轴距为 2.64 m, 最小转弯半径为 5.35 m, 对应的最小及最大曲率分别为  $-0.187 \text{ m}^{-1}$  和  $0.187 \text{ m}^{-1}$ . 仿真实验所采用的电脑 CPU 为 Intel Core i3-2120, 内存为 4 GB. 仿真在 Windows 7 (32 位) 系统下 Matlab 2013 A 中进行.

#### 3.1 轨迹搜索空间

对于无人车来说, 在进行路径规划时通常需要对其目标状态进行采样得到轨迹搜索空间, 再从该搜索空间中选择合适的轨迹执行. 本文基于提出的轨迹规划方法生成的三组轨迹搜索空间如图 4 所示.

生成这三组轨迹搜索空间的无人车初始状态  $\mathbf{X}_I$  分别为  $(0, 0, \pi/2, -0.15)$ ,  $(0, 0, \pi/2, 0)$ ,  $(0, 0, \pi/2, 0.15)$ , 对应的初始前轮转向角分别为  $-21.6036^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $21.6036^\circ$ . 目标状态位置由对半径为 20 m 的圆弧采样得到, 目标状态航向角由圆心到目标位置航向角以及该航向角  $\pm 15^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$  得到 (分别与图中不同线型的轨迹曲线对应). 每一组轨迹搜索空间生成了 105 条轨迹, 其中 3 条轨迹由于不满足曲率有界约束而不可行. 对三组轨迹搜索空间的生成过程进行统计, 得到其迭代次数及耗时如表 1 所示, 对应的迭代次数及耗时直方图如图 5 所示.

本文提出的轨迹规划方法能够满足无人车的实时性需求. 与基于 MPC 的轨迹生成方法相比, 本文提出的方法不需要在内存中存储状态及轨迹参数的映射表, 并且本文求解的曲率变化最小即最平滑的轨迹, 若不对轨迹参数进行优化, 仅求解一组可行解, 本文提出轨迹规划方法的实时性可以得到进一步提高.

#### 3.2 道路行车模拟

对于在道路上行驶的无人车来说, 保持当前车道线、切换车道线是最基本的功能. 本文对无人车在道路上的这类操作进行了模拟. 如图 6 及图 7 所示, 车辆初始状态为 0, 车辆需要进行若干操作分别到达目标状态 1~6.

在图 6 中, 由初始状态到达目标状态仅由一步操作完成, 对应的曲率变化如图 8 所示. 注意到在进行保持当前轨道线操作 (即为从 0 到 1, 2, 3 状态的操作) 中, 车辆曲率变化极小. 而在变换车道线的操作 (即为从 0 到 4, 5, 6) 中, 曲率变化相对较大. 各条轨迹的参数都被优化以得到较为平滑的轨迹. 如轨迹 0-4 需要在短距离进行较大的姿态变化, 车辆曲

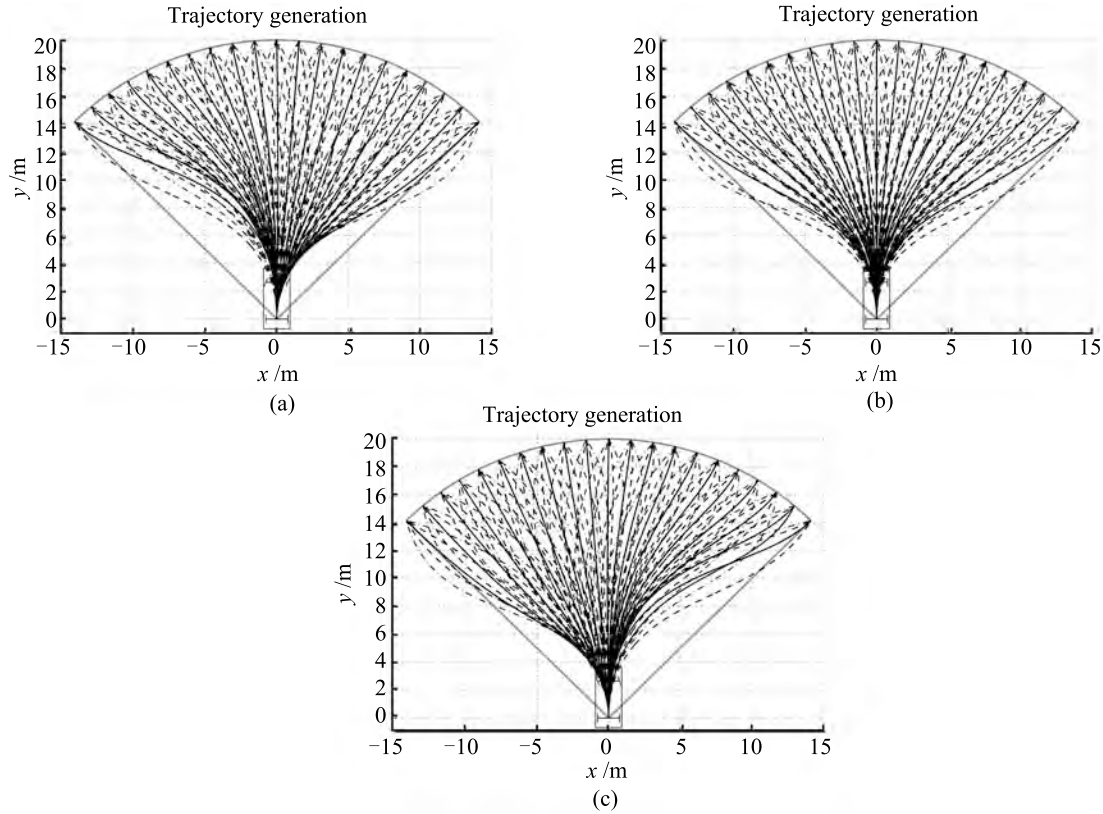


图 4 不同初始前轮转向角条件下生成的轨迹搜索空间 (初始前轮转向角分别为: (a)  $-21.6036^{\circ}$ ; (b)  $0^{\circ}$ ; (c)  $21.6036^{\circ}$ )  
Fig. 4 Trajectory search space generation (Front wheel steering angles are: (a)  $-21.6036^{\circ}$ ; (b)  $0^{\circ}$ ; (c)  $21.6036^{\circ}$ .)

表 1 轨迹搜索空间生成迭代次数及耗时统计

Table 1 Iterations and time consumed to generate the search space

初始曲率	前轮转向角	可行轨迹 (条)	总计迭代 (次)	总计耗时 (s)	平均迭代 (次)	平均耗时 (s)
-0.15	$-21.6036^{\circ}$	102	54 815	20.951	522	0.200
0.0	$0.0^{\circ}$	102	87 349	34.096	832	0.325
0.15	$21.6036^{\circ}$	102	56 268	22.320	536	0.213

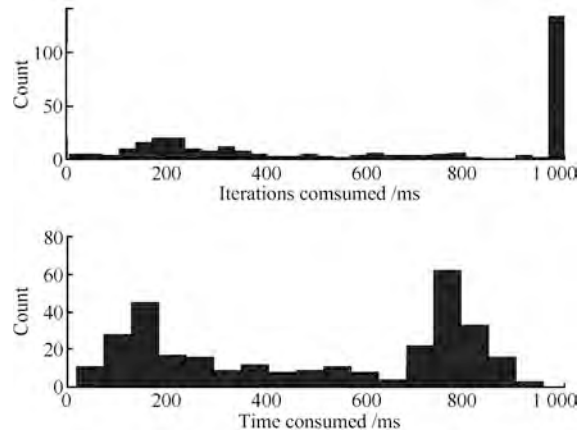


图 5 轨迹搜索空间生成迭代次数及耗时直方图  
Fig. 5 Histogram of iterations and time consumed to generate the search space

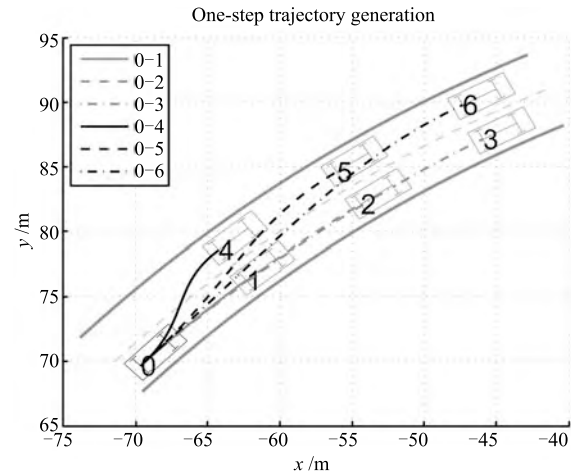


图 6 一步道路行车模拟保持、切换车道线  
Fig. 6 One-step trajectory to keep and change lane

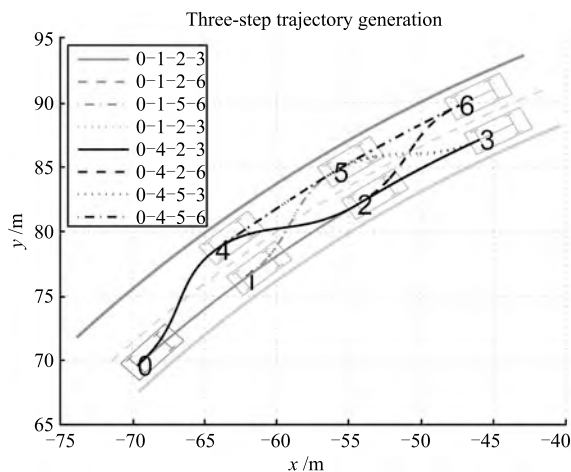


图7 三步道路行车模拟保持、切换车道线

Fig. 7 Three-step trajectory to keep and change lane

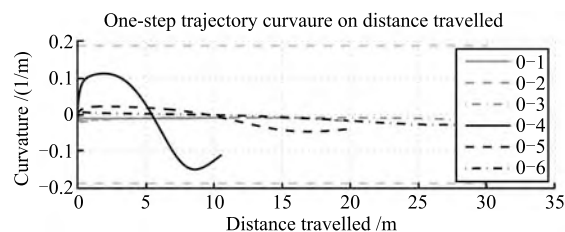


图8 一步道路行车模拟曲率相对于行驶距离的变化

Fig. 8 One-step trajectory curvature changes with respect to distance travelled

率变化较为剧烈. 而轨迹 0-6 的距离相对较长, 车辆曲率变化较为平缓. 表 2 列出了求解最优轨迹的迭代次数及耗时, 该算法的实时性能够满足在道路上以正常速度行驶的车辆需求.

表 2 一步道路行车模拟迭代次数及耗时统计  
Table 2 Iterations and time consumed to generate one-step trajectory

轨迹	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
迭代 (次)	641	223	205	1 000	1 002	1 000
耗时 (ms)	227	75	73	366	362	375

在图 7 中, 每一条轨迹由三段构成, 下一段轨迹

表 3 三步道路行车模拟迭代次数及耗时统计  
Table 3 Iterations and time consumed to generate three-step trajectory

轨迹	0-1-2-3	0-1-2-6	0-1-5-3	0-1-5-6	0-4-2-3	0-4-2-6	0-4-5-3	0-4-5-6
迭代 (次)	560	2 113	1 240	1 370	504	1 052	1 098	597
耗时 (ms)	221	790	453	507	192	368	414	217

的初始状态即为上一段轨迹到达目标时的状态. 其中轨迹 0-1-2-3 保持当前车道线, 轨线 0-1-2-6, 0-1-5-6 以及 0-4-5-6 分别完成了一次切换车道操作, 轨线 0-1-5-3, 0-4-2-3 以及 0-4-5-3 分别完成了一次超车, 轨线 0-4-2-6 完成了连续两次超车. 对应的曲率变化如图 9 所示, 注意到每一条轨迹中的每一段轨迹曲率是连续的, 同时在不同段轨迹的交接点处曲率也是连续的. 为了尽可能减小上一段轨迹到达目标状态时车辆的曲率对下一个目标状态的可达性的影响, 该仿真中在约束条件中加入了期望目标状态曲率的约束. 在所有的三步道路行车模拟中, 完成连续两次超车的轨迹 0-4-2-6 的曲率变化最为剧烈, 本文提出的方法规划得到的车体曲率始终保持在可行范围内. 表 3 对三步轨迹规划的耗时及迭代次数进行了统计, 轨线 0-1-2-6 消耗时间最长, 为 0.79s. 同样地, 对于以正常速度行驶的车辆来说, 本文提出的算法实时性能够满足要求.

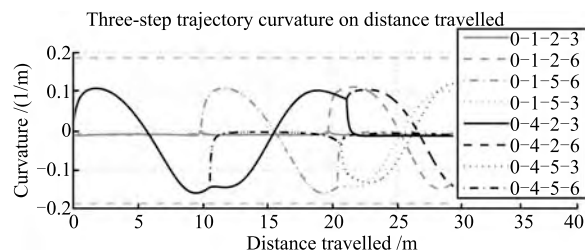


图9 三步道路行车模拟曲率相对于行驶距离的变化

Fig. 9 Three-step trajectory curvature with respect to distance travelled

### 3.3 路径跟踪

对于无人车来说, 路径跟踪是另一种典型应用. 在路径跟踪应用中, 由操作人员手动或电脑自动生成若干个目标点, 无人车需要依次通过这些目标点到达最终目标状态. 如图 10 所示, S 形参考轨线由圆弧及线段构成. 无人车需要沿着该参考轨线从初始状态  $(0, 0, \pi/2, 0)$  到达  $(40, 40, \pi/2)$ . 图中粗线条车辆为 7 个中间状态, 无人车实际走过的轨迹如实轨线所示. 该路径由 7 段轨迹构成, 生成完整的轨迹总计耗时 0.9523s, 总计迭代次数为 2 039 次.



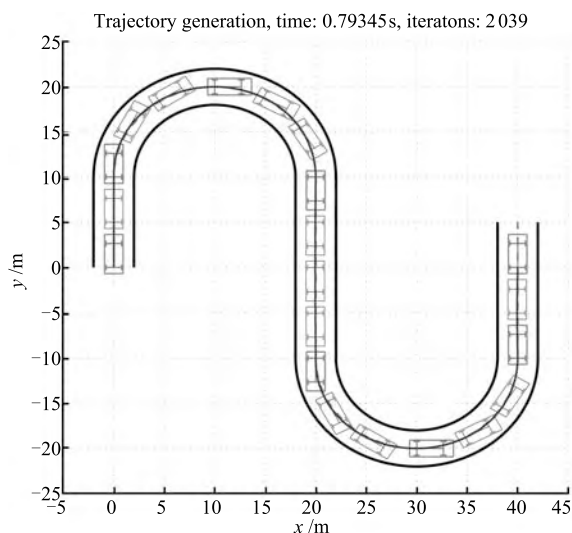


图 10 路径跟踪仿真

Fig. 10 Path tracking simulation

车辆执行该段路径相对于走过距离的曲率变化及前轮转向角变化如图 11 所示, 其中虚线分别表征曲率边界  $-0.187 \text{ m}^{-1}$ ,  $0.187 \text{ m}^{-1}$  及前轮转向角边界  $-26.27^\circ$ ,  $26.27^\circ$ . 图中交替地使用灰色和黑色来表征不同的轨迹段. 在保证路径曲率连续有界的同时, 车辆曲率的变化也通过 SQP 方法优化到最小. 同时需要注意到在仿真过程中生成参考轨迹中的圆弧半径为  $10 \text{ m}$ , 规划出的轨迹曲率也近似为  $0.1 \text{ m}^{-1}$  和  $-0.1 \text{ m}^{-1}$ , 这也说明了本文提出的方法能有效地跟踪参考轨迹变化. 车辆曲率仅仅在每两段轨迹的连接处有所波动.

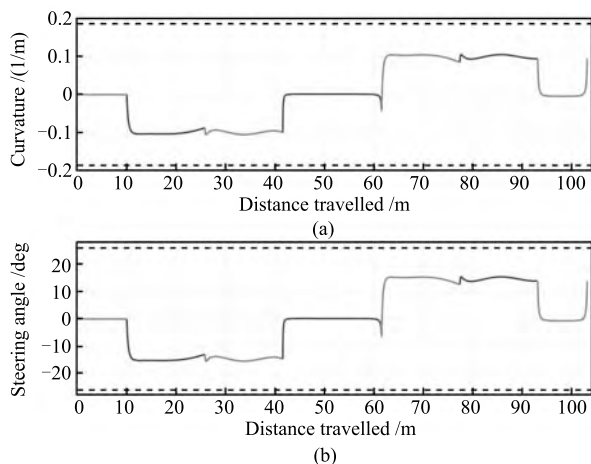


图 11 路径跟踪仿真中曲率及前轮转向角的变化  
(a) 曲率相对于行驶距离的变化; (b) 前轮转向角相对于行驶距离的变化

Fig. 11 Curvature and front wheel steering angle changes in path tracking simulation ((a) Curvature change with respect to distance travelled; (b) Front wheel steering angle with respect to distance travelled)

在图 12 中给出了该段路径的速度规划, 其中, 上图中的虚线表征满足侧滑约束的最大允许速度 (相对于行驶距离), 实线表征实际规划的无人车行驶速度; 下图中的虚线分别表征最小加速度 ( $-8 \text{ m/s}^2$ ) 及最大加速度 ( $6 \text{ m/s}^2$ ) 约束. 为了保证无人车的速度连续、加速度连续, 下一段轨迹的初始状态即为上一段轨迹到达目标的状态. 无人车从静止开始逐渐加速沿着规划的轨迹跟踪该路径, 完成该段  $103 \text{ m}$  路径总计耗时  $16.6 \text{ s}$ , 平均速度为  $6.20 \text{ m/s}$  ( $22.32 \text{ km/h}$ ). 从该仿真可知, 本文提出的速度规划方法在满足侧滑约束的同时保证了速度连续、加速度连续且有界.

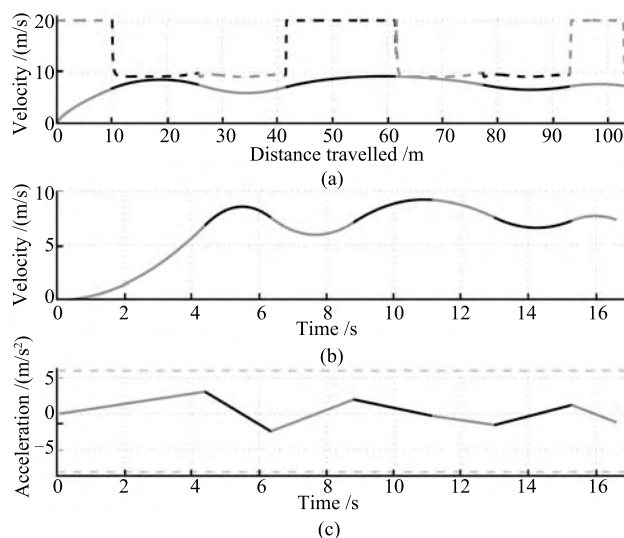


图 12 路径跟踪仿真中速度及加速度变化 ((a) 速度及最大允许速度相对于行驶距离的变化; (b) 速度相对于行驶时间的变化; (c) 加速度相对于行驶时间的变化)

Fig. 12 Velocity and acceleration changes in path tracking simulation ((a) Velocity and maximum allowed velocity change with respect to distance travelled; (b) Velocity change with respect to time; (c) Acceleration change with respect to time)

本文提出方法的轨迹参数都有其物理含义, 轨迹生成方法对初始轨迹参数并不敏感. 在以上仿真中, 所有轨迹的初始参数均为默认参数, 在实际应用中不需要在内存中存储参数与状态的对应关系表.

### 3.4 轨迹规划实验

为了进一步在实际无人车系统中验证本文提出的轨迹规划方法, 本文基于两组真实的环境模型对轨迹规划进行了实验验证.

图 13 给出了实验场景 1 及其对应的点云模型, 点云模型通过累积激光测距仪量测点得到. 该场景转弯过程中规划的轨迹如图 14 所示, 在图 14 中箭头表征当前目标状态, 箭头对应轨线为采用本文提

出的方法规划出的从初始状态到当前目标的轨迹, 其他轨线为从初始状态到当前目标状态周边采样点的轨迹. 采样点由目标状态位置垂直于航向偏移  $\pm 1\text{ m}$ ,  $\pm 2\text{ m}$ , 航向角偏移  $\pm 8^\circ$  得到.



图 13 场景 1 及其点云模型

Fig. 13 Scene 1 and corresponding point cloud model

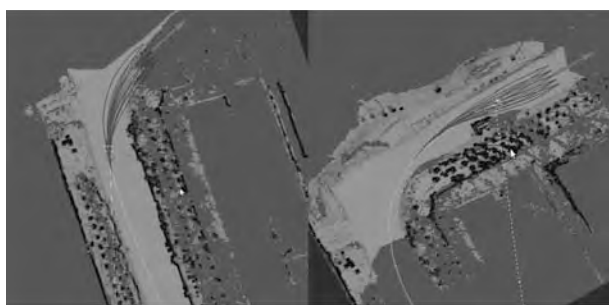


图 14 场景 1 的栅格高程图及规划的轨迹

Fig. 14 Elevation grids of Scene 1 and generated trajectories

同样地, 在场景 2 (图 15) 中规划的轨迹如图 16 所示. 由于本文提出的方法在求解轨迹时对前轮转向角的变化量进行优化, 因此规划得到轨迹较为平滑, 并且与驾驶员实际驾驶的轨迹基本重合.



图 15 场景 2 及其点云模型

Fig. 15 Scene 2 and corresponding point cloud model

## 4 结论

对于无人车来说, 生成从初始状态到目标状态的可行轨迹是其自主行为的基础. 本文基于四阶贝塞尔曲线提出了一种无人车可行轨迹规划方法. 在该方法中, 轨迹生成问题首先被分解为轨形规划及速度规划两部分. 对于轨形规划问题, 为了满足初始状态约束、目标状态约束以及曲率连续约束, 本文采

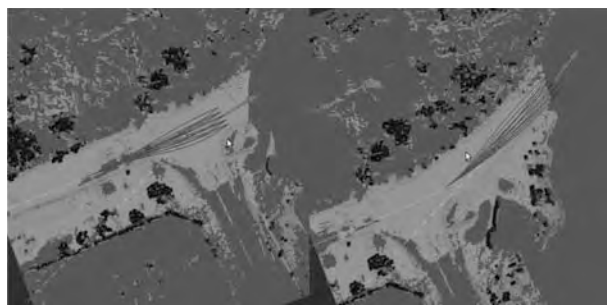


图 16 场景 2 的栅格高程图及规划的轨迹

Fig. 16 Elevation grids of Scene 2 and generated trajectories

用参数化方法得到由 3 个自由参数确定四阶贝塞尔曲线来表征无人车的轨迹. 为了进一步满足曲率有界约束, 本文采用优化方法 (序列二次规划, SQP) 求解得到一组最优的参数. 为了执行由该组参数确定的轨线, 本文进一步对速度规划问题进行了研究. 速度规划主要考虑了速度连续约束、加速度连续约束、加速度有界约束以及侧向滑动约束. 为了保证不会发生侧向滑动, 速度规划首先对无人车执行该轨迹的最大允许速度进行求解, 再求解出满足目标状态侧滑约束的轨迹执行时间区间, 最后再从该区间中求解出轨迹的执行时间以满足轨迹上任意一点的侧滑约束.

为了验证该方法的有效性和实时性, 本文对该方法进行了仿真及实验验证. 仿真主要包括轨迹搜索空间生成、道路行车模拟以及路径跟踪. 仿真实验结果表明, 本文提出的方法能够快速生成满足初始状态约束、目标状态约束、曲率连续有界约束、速度连续约束、加速度连续有界约束以及侧滑约束的轨迹. 在仿真实验中, 所有的初始参数均为默认参数, 这也说明了本文提出的方法对初始参数是不敏感的, 不需要消耗大量内存存储状态与参数的对应关系. 为了验证该方法在实际环境中的效果, 本文基于已有的环境模型对轨迹规划问题进行了实验, 实验结果表明该方法能够生成更为平滑的轨迹, 适用于在实际道路中行驶的车辆.

## References

- 1 Howard T M, Kelly A. Trajectory and spline generation for all-wheel steering mobile robots. In: Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Beijing, China: IEEE, 2006. 4827–4832
- 2 Yan Fei, Zhuang Yan, Bai Ming, Wang Wei. 3D outdoor environment modeling and path planning based on topology-elevation model. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(11): 1493–1501  
(闫飞, 庄严, 白明, 王伟. 基于拓扑高程模型的室外三维环境建模与路径规划. *自动化学报*, 2010, **36** (11): 1493–1501)
- 3 Chen Yang, Zhang Dao-Hui, Zhao Xin-Gang, Han Jian-Da. UAV 3D path planning based on IHDR autonomous-

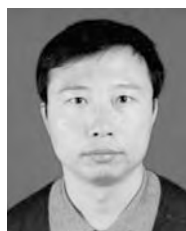
- learning-framework. *Robot*, 2012, **34**(5): 513–518  
(陈洋, 张道辉, 赵新刚, 韩建达. 基于 IHDR 自主学习框架的无人机 3 维路径规划. *机器人*, 2012, **34** (5): 513–518)
- 4 Kelly A, Nagy B. Reactive nonholonomic trajectory generation via parametric optimal control. *The International Journal of Robotics Research*, 2003, **22**(7–8): 583–601
  - 5 Howard T M, Kelly A. Optimal rough terrain trajectory generation for wheeled mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, 2007, **26**(2): 141–166
  - 6 Ferguson D, Howard T M, Likhachev M. Motion planning in urban environments: Part II. Intelligent robots and systems. In: *Proceedings of the 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Nice: IEEE, 2008. 1070–1076
  - 7 Howard T M, Green C J, Kelly A. Receding horizon model-predictive control for mobile robot navigation of intricate paths. *Field and Service Robotics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010, **62**: 69–78
  - 8 Howard T M, Pivtoraiko M, Knepper R A, Kelly A. Model-predictive motion planning: several key developments for autonomous mobile robots. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2014, **21**(1): 64–73
  - 9 Ferguson D, Howard T M, Likhachev M. Motion planning in urban environments. *Journal of Field Robotics*, 2008, **25**(11–12): 939–960
  - 10 Laumond J P, Jacobs P E, Taix M, Murray R M. A motion planner for nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1994, **10**(5): 577–593
  - 11 Scheuer A, Fraichard T. Continuous-curvature path planning for car-like vehicles. In: *Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Grenoble: IEEE, 1997. **2**: 997–1003
  - 12 Gómez-Bravo F, Cuesta F, Ollero A, Viguria A. Continuous curvature path generation based on  $\beta$ -spline curves for parking manoeuvres. *Robotics and Autonomous Systems*, 2008, **56**(4): 360–372
  - 13 Li Y B, Xiao J. On-line planning of nonholonomic trajectories in crowded and geometrically unknown environments. In: *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Kobe: IEEE, 2009. 3230–3236
  - 14 Jolly K G, Sreerama K R, Vijayakumar R. A bezier curve based path planning in a multi-agent robot soccer system without violating the acceleration limits. *Robotics and Autonomous Systems*, 2009, **57**(1): 23–33
  - 15 Choi J, Curry R E, Elkaim G H. Curvature-continuous trajectory generation with corridor constraint for autonomous ground vehicles. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Atlanta, GA: IEEE, 2010. 7166–7171
  - 16 Morten K, Nils A, Ole R. Generic trajectory representation and trajectory following for wheeled robots. In: *Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Hong Kong, China: IEEE, 2014. 4073–4080
  - 17 Kelly A, Stentz A. Rough terrain autonomous mobility — Part 1: a theoretical analysis of requirements. *Autonomous Robots*, 1998, **5**(2): 129–161
  - 18 Duncan M. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*. Springer, 2005.



**陈 成** 中国科学院沈阳自动化研究所博士研究生. 2009 年获南开大学信息技术科学学院自动化专业学士学位. 主要研究方向为环境建模及路径规划. 本文通信作者. E-mail: chenc@sia.cn  
(**CHEN Cheng** Ph.D. candidate at the Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his bachelor degree from Nankai University in 2009. His research interest covers environment modeling and path planning. Corresponding author of this paper.)



**何玉庆** 中国科学院沈阳自动化研究所研究员. 2008 年获中国科学院沈阳自动化研究所工学博士学位. 主要研究方向为系统估计与控制, 自主导航与控制, 多机器人协作以及人机协作. E-mail: heyuqing@sia.cn  
(**HE Yu-Qing** Professor at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his Ph.D. degree from Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences in 2008. His research interest covers system estimation and control, autonomous navigation and control, multi-robot collaboration and human-robot collaboration.)



**卜春光** 中国科学院沈阳自动化研究所副研究员. 1999 年获东北大学工学硕士学位. 主要研究方向为机器人系统设计, 自主导航与控制. E-mail: cgbu@sia.cn  
(**BU Chun-Guang** Associate professor at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his master degree from Northeastern University in 1999. His research interest covers robot system design, autonomous navigation and control.)



**韩建达** 中国科学院沈阳自动化研究所研究员. 1998 年获哈尔滨工业大学工学博士学位. 主要研究方向为基于传感器的机器人鲁棒控制系统设计, 多机器人系统和智能控制系统设计. E-mail: jdhan@sia.cn  
(**HAN Jian-Da** Professor at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his Ph.D. degree from Harbin Institute of Technology in 1998. His research interest covers sensor based robot robust control system design, multi-robot system and intelligent control system design.)