

Функциональный анализ

Курс Виденского И.В.

Осень 2023

Оглавление

Оглавление	1
I Метрические пространства	4
1 Введение	5
1.1 Зачем изучать функциональный анализ	6
2 Метрические пространства	8
2.1 Банаховы пространства	11
2.2 Пространства ограниченных функций	14
2.3 Пространство последовательностей с \sup нормой	16
2.4 Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке	17
3 Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)	19
3.1 Теория меры	19
3.2 Классические неравенства	21
3.3 Пространство Лебега	24
3.4 Пространства l_n^p, l^p	27
3.5 Неполное нормированное пространство	30
3.6 Пополнение метрического пространства	31
3.7 Теорема о вложенных шарах	36
3.8 Сепарабельные пространства	38
3.9 Нигде не плотные множества	43
3.10 Полные семейства элементов	44
3.11 Полные и плотные множества в L^p	45
4 Метрические компакты	52
4.1 Относительно компактные множества в $C(K)$	59

II	Линейные операторы	66
5	Линейные операторы в линейных пространствах	67
5.1	Линейные операторы в линейных пространствах	67
5.2	Линейные операторы в нормированных пространствах .	70
5.3	Линейные функционалы	77
5.4	Изоморфные линейные пространства	82
5.5	Конечномерные пространства	85
5.6	Конечномерные подпространства	89
5.7	Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром	92
5.8	Факторпространство	95
III	Гильбертовы пространства	98
6	Гильбертовы пространства	99
6.1	Введение	99
6.2	Пространство, сопряжённое к гильбертову	116
6.3	Классические ряды Фурье	118
IV	Линейные функционалы	122
7	Геометрический смысл линейного функционала	123
7.1	Продолжение линейного функционала	125
7.2	Продолжение линейных функционалов в нормированном пространстве	132
8	Принцип равномерной ограниченности	137
8.1	Применение принципа равномерной ограниченности к рядам Фурье	143
9	Теорема об открытом отображении	147
9.1	Обратные операторы	147
9.2	Открытые отображения	150
9.3	Теорема об эквивалентных нормах и о замкнутом графике	154
9.4	Примеры неограниченных операторов в банаховом пространстве	157
10	Сопряжённые пространства	160
10.1	Сопряжённое пространство к L^p	160

10.2 Второе сопряжённое	166
10.3 Слабая сходимость	168

Часть I

Метрические пространства

Глава 1

Введение

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет X — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над \mathbb{C} (или \mathbb{R}). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \rightarrow x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть X, Y — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \rightarrow Y$

Определение 1.1 (Линейное отображение).

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \rightarrow X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ } \{u_j\}_{j=1}^n$$

λ_j — j -е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

Теорема 1.1 (Гильберт). X — гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^*, A : X \rightarrow X \Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или \mathbb{R}), то $A : X \rightarrow \mathbb{C}$, A — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. В функциональном анализе же у нас X — пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \rightarrow Y$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы-основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега L^p .

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$, там введём норму $|f| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$. Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени n не может быть больше n корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида «Функциональный анализ»;
5. У. Рудин.

Глава 2

Метрические пространства

Начнём с того, что все знают, надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз возвращаться к метрическим пространствам, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов, который мы получим, это новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в \mathbb{R}^n или в \mathbb{C}^n и обладают теми же полезными свойствами.

Определение 2.1 (Метрика). X — множество. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, ρ — **метрика**, если при $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$ она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$
 $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ — шар с радиусом r . $\{B_r(x)\}_{r>0}$ — база окрестности в точке x .

G — открытое, если $\forall x \in G \exists r > 0 B_r(x) \subset G$.

F — замкнутое $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$ — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность и $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

(X, ρ) — метрическое пространство $\Rightarrow (F$ — замкнутое $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in F$ и $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F))$)

Определение 2.2 (Фундаментальная последовательность).
 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

Замечание 2.1. $\exists x_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная

Определение 2.3 (Полное метрическое пространство).
 (X, ρ) — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в X

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

Замечание 2.2 (о пользе полноты). $F : X \rightarrow \mathbb{R}, (X, \rho)$ — метрическое пространство, F — непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$.

Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0, \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если (X, ρ) — полное, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$. А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

Пример 2.1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ — полные.

Пример 2.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ — неполное.

Пример 2.3. \mathbb{Q} — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что \mathbb{Q} — неполное.

Определение 2.4 (ограниченное множество).
 (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X, A$ — ограниченное, если

$$\exists R > 0 \exists x_0 \in X : A \subset B_R(x_0)$$

Теорема 2.1 (Свойства фундаментальных последовательностей). (X, ρ) — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — ограниченная, т.е. $\exists R > 0 \exists x_0 \in X \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_0)$
2. $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность $\Rightarrow (\exists a \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists a \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k})$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность действительных чисел, $\forall k \in \mathbb{N} \varepsilon_k > 0 \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность $\forall j \in \mathbb{N} (j > k \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k)$

1 утверждение. Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда из фундаментальности $\exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_N) < 1)$.

Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_N)$. □

2 утверждение. Возьмём $\varepsilon > 0$, тогда по фундаментальности $\exists N \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$. Возьмём это N .

$\exists a \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \exists n_k (\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N)$. Возьмём это n_k .

Возьмём некоторое $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$ □

3 утверждение. Докажем по индукции:

$\varepsilon_1 : \exists n_1 \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > n_1 \wedge m > n) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1)$. Выберем n_1 , тогда $\forall m \in \mathbb{N} (m > n_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1)$.

ε_k : по индукции выбрали n_1, \dots, n_{k-1} , $k \geq 2$. $\forall j \in (1 \dots k-1) \forall m \in \mathbb{N} (m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j)$. Из фундаментальности исходной последовательности $\exists n_k (n_k > n_{k-1} \wedge \forall m \in \mathbb{N} (m > n_k \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k))$ □

Следствие 2.1. (X, ρ) , $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

Доказательство. По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. \square

Теорема 2.2 (О замкнутом подмножестве). (X, ρ) — метрическое пространство, тогда

1. (X, ρ) — полное, $Y \subseteq X$, Y — замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ — полное
2. $Y \subseteq X$, (Y, ρ) — полное $\Rightarrow Y$ — замкнутое

1 утверждение. Доказательство следует прямо из определения. Значим, что Y — замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} x_n \in Y$ — фундаментальная. $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X, X$ — полное $\Rightarrow \exists x_0 \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Y — замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ — полное. \square

2 утверждение. Второй пункт не труднее первого. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фундаментальная последовательность в Y .

Y — полное $\Rightarrow \exists x_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$ — замкнутое из-за произвольности последовательности. \square

2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

Определение 2.5 (полунорма). Пусть X — линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} . Отображение $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется полунормой, если при $\forall x \in X \forall y \in X \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

Свойство 2.1. p — полунорма \Rightarrow

$$\forall x \in X (p(x) \geq 0 \wedge p(0) = 0)$$

Доказательство. $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow 0 = x + (-x) \Rightarrow p(0) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$ \square

Определение 2.6 (Норма). X — линейное пространство, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$. p — норма $\Leftrightarrow (p$ — полунорма $\wedge (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0))$. Будем обозначать $\|x\| := p(x)$.

$(X, \|\cdot\|)$ будем обозначать нормированное пространство. и при $(x \in X \wedge y \in X)$ $\rho(x, y) := \|x - y\|$. Тогда $(X, \|\cdot\|)$ — метрическое пространство.

Определение 2.7 (банахово пространство). $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

Определение 2.8 (подпространство в алгебраическом смысле). X — линейное пространство, $L \subset X$. L — подпространство в алгебраическом смысле \Leftrightarrow

$$\forall x \in L \forall y \in L \forall \alpha \in K \forall \beta \in K \alpha x + \beta y \in L$$

Определение 2.9 (подпространство). $(X, \|\cdot\|)$, $L \subset X$, L — подпространство, если

1. L подпространство в алгебраическом смысле
2. $L = \bar{L}$ (\bar{L} — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

Определение 2.10 (Сходимость).

$$(X, \|\cdot\|) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (*), (*) сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$
 (*) сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится

В \mathbb{R}^n (или в \mathbb{C}^n) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

Теорема 2.3 (Критерий полноты нормированного пространства). $(X, \|\cdot\|)$ - полное \Leftrightarrow из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

Доказательство. Предположим, что наше пространство полное (\Rightarrow). (X, ρ) — полное, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ сходится} \quad (**)$$

$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Цель такая: последовательность S_n — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная, } (X, \rho) \text{ — полное} \\ &\Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится} \end{aligned}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше ε .

Теперь (\Leftarrow). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что

$$\begin{aligned} \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ — подпоследовательность } \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \text{ сходится} \\ \Rightarrow \text{последовательность } x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \text{ сходится} \end{aligned}$$

Но её последовательность частичных сумм — это в точности оригинальная подпоследовательность:

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists S \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = S$$

Далее из части 2 Теоремы 2.1

$$\exists S \in X \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$$

□

2.2. Пространства ограниченных функций

Определение 2.11. Пусть A — произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ — множество всех ограниченных функций из него в комплексные (или только в действительные, не важно) числа

$$m(A) = \{f | f : A \rightarrow \mathbb{C} \wedge \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty\}$$

$$f \in m(A) \Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Теорема 2.4. $(m(A), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово пространство

Доказательство. Нужно проверить две вещи. Во-первых, что $\|\cdot\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев — возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $\|\cdot\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in A} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$$\begin{aligned} \forall f \in m(A) \forall g \in m(A) \forall x \in A |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \Rightarrow \forall f \in m(A) \forall g \in m(A) \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Следующая аксиома нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall x \in A f(x) = 0 \text{ т.е. } f \text{ — нулевая функция}$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ — фундаментальная в $m(A)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \\ ((m > N \wedge n > N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon) \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Берём ε, N из формулы выше, фиксируем x . Если для супремума есть неравенство, то и для x тем более. $\forall x \in A ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — фундаментальная последовательность чисел в \mathbb{C} .

$$\Rightarrow \forall x \in A \exists L \in \mathbb{C} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = L$$

$$\text{Определим } f := (x \in A \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$$

$$(n > N \wedge m > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \quad \text{пусть } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что f — элемент A . Для $n > N$ можем записать f как $f = (f - f_n) + f_n$, $f_n \in m(A)$, $f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = \|(f - f_n) + f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in A} f$$

Определение 2.12 (Топологический компакт). Множество K — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $(\forall \alpha \in A \ G_\alpha \text{ — открытое множество } \wedge K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n \text{ — конечная подпоследовательность } K \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j})$
2. Хаусдорфовость $\forall x \in K \forall y \in K (x \neq y \Rightarrow \exists U \exists V (U \text{ — открытое множество } \wedge V \text{ — открытое множество } \wedge x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset))$

Определение 2.13. $C(K) = \{f | f : K \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ непрерывна}\}$

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Следствие 2.2. K — топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ — банахово

Доказательство. $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ — замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n \in C(K), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{K, n \rightarrow \infty} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ — полное и $C(K)$ — полное. □

2.3. Пространство последовательностей с \sup нормой

Определение 2.14. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ — полное Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.

Определение 2.15 (l^∞).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$X = \{x\}_{j=1}^\infty \in m(A), f : A \rightarrow \mathbb{C}, j \mapsto x_j$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

Определение 2.16.

$$c = \{X = \{x\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, \|x\| = \|x\|_\infty = \sup \|X\|$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c, c_0 — замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ — банаховы.

2.4. Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

Определение 2.17 (норма n -ой производной).

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

$$\| \|f\|_{C^{(n)}[a, b]} = \max_{0 \leq k \leq n} \{ \|f\|_\infty^{(k)} \} f^{(0)} = f$$

Теорема 2.5. В $C^{(n)}[a, b]$ — банахово.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \{f_m\}_{m=1}^\infty & \text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b] \\ \varepsilon > 0 \exists N : (m > N \wedge q > N) & \Rightarrow \|f_m - f_q\|_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow \|f_m^{(k)} - f_q^{(k)}\|_\infty < \varepsilon \\ & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{f_m^{(k)}\} & \text{ — фундаментальная в полном пространстве } C[a, b] \\ \Rightarrow \exists \varphi_k \in C[a, b], f_m^{(k)} & \xrightarrow{[a, b]} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{Анализ}} (f_k^{(0)} & \xrightarrow{[a, b]} \varphi_0 \wedge f_k' \xrightarrow{[a, b]} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \\ & \Rightarrow \max \left\{ \left\| f_m^{(k)} - \varphi_0^{(k)} \right\|_\infty \right\}_{m \rightarrow \infty} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

а ЭТОТ МАКСИМУМ ЭТО И ЕСТЬ $\|f_m - \varphi_0\|_{C^{(n)}[a, b]}$

□

Глава 3

Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

3.1. Теория меры

Определение 3.1 (Мера). (X, U, μ) — пространство с мерой. X — множество, U — σ -алгебра подмножества X

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$$

— мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. μ — полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$

2. μ — σ -конечна, то есть $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из X в \mathbb{R} или в \mathbb{C} (не особо важно).

Определение 3.2 (Измеримая функция). $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. f — измерима, если

$$\forall c \in \mathbb{R}, \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$$

f — измерима, если u, v — измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент σ -алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k.$$

$f(x)$ — измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

Определение 3.3 (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq f(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

Определение 3.4 (Измеримая функция). f — измерима, если

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ — конечен или $\int_X f_- d\mu$ — конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если f — измеримая, $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

Определение 3.5 (Множество суммируемых функций).

$L(X, \mu)$ — множество суммируемых функций =

$$\left\{ f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

Пример 3.1. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измерима по Лебегу, λ — мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, w — измерима по Лебегу.

$e \subset E$, e — измеримо по Лебегу. $\mu e = \int_e w(x) d\lambda$, $w(x)$ — плотность меры μ , $w(x)$ — её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточена на наборе точек и называется дискретной.

Пример 3.2. X — множество ($X \neq \emptyset$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall e, e \subset X, e$ — измеримо

Пример 3.3 (Дискретная мера). X — бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$$\{h_j\}_{j=1}^\infty, h_j > 0$$

$$\mu = \sum_{j=1}^\infty h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j: a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрируемых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

3.2. Классические неравенства

Теорема 3.1 (Неравенство Юнга). $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

Доказательство. Пусть b — фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x \in [0, +\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b, \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, x_0 — строгий локальный минимум.

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q} \\ -\frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \\ \varphi(x) &\geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК}\end{aligned}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

Замечание 3.1. Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

Теорема 3.2 (Неравенство Гельдера). (X, U, μ) — пространство с мерой. f, g — измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

Если $p = q = 2$, то это «Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

Доказательство. Для начала отбросим какие-то простые случаи.

$A = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по μ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере μ

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \quad (*)$$

Если $A = +\infty$, то $(*)$

пусть $0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы f умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с g . Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть x — фиксирован, $a = |f(x)|$, $b = |g(x)| \stackrel{\text{п.Юнга}}{\Rightarrow}$

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu$$

$$\Rightarrow \int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Умножаем на $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$ □

Теорема 3.3 (Неравенство Минковского). (X, U, μ) , f, g — измеримые, $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_C \leq \underbrace{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_A + \underbrace{\left(\int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_B \quad (*)$$

Доказательство. Сначала разберём простые случаи. $p = 1$, x — фиксирован. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ проинтегрируем по $X \Rightarrow (*)$ при $p = 1$. Теперь пусть $p > 1$. Если $A = +\infty$, или $B = +\infty$, или $C = 0$, то $(*)$.

Теперь же пусть $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$. Доказательство будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C < +\infty$.

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2 \max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$ при фиксированном x

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left(\int_X |f+g| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left(\int_X |f+g| d\mu \right)}_A^{(p-1)q} = AC$$

$$\begin{aligned} \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\stackrel{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \\ C^p &\leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow \\ C^{p-\frac{p}{q}} = C &\Rightarrow C \leq A+B \text{ (это (*))} \end{aligned}$$

□

3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения L^∞ очень аккуратно с \mathcal{L} и L читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

Определение 3.6. (X, U, μ) — пространство с мерой. $L(X, \mu)$ — пространство суммируемых функций. $1 \leq p < +\infty$ $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $\|f\|_p$ — это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}). $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \text{ — неравенство Минковского}$$

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ почти всюду по мере } \mu \text{ на } X.$$

Пример 3.4. $L[0, 1], \lambda$ — мера Лебега на $[0, 1]$.

$$\text{функция Дирихле } \varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$$

$N = \{f - \text{измерима} \wedge f(x) = 0 \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu\}$. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от p). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. N — подпространство в L^p , L^p/N — факторпространство.

$g, f \in L^p, f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ почти всюду по } \mu$. \bar{f} — класс эквивалентности, $\bar{f} = \{g : f \sim g\}$.

$\|\bar{f}\|_p := \|f\|$, то есть можно взять любую функцию из класса эквивалентности.

$$\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \bar{f} = N = \bar{0} \Rightarrow$$

$\|\bar{f}\|_p$ — норма на L^p . Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из L^p , но имеют в виду, что возьмут класс эквивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

Определение 3.7 ($L^\infty(X, \mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu (\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0\}$ (существующий суп, или на подлом англосаксонском $\text{ess sup}_X f$)

Свойство 3.1. $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > \|f\|_\infty\} = 0$

Доказательство. $e = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.

$e_m = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$ по определению $\text{ess sup}_X f$
 $\Rightarrow e = \bigcup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$ □

$\|f\|_\infty$ — полунорма на \mathcal{L}^∞

$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ для п.в. x на X
 $\Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ п.в. на } X \Leftrightarrow f \in N = \{f - \text{измерима, } f(x) = 0 \text{ п.в. на } X\}$$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

Теорема 3.4 (Фату). (X, U, μ) , $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ — измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от } n \\ \Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

Теорема 3.5 (полнота пространства Лебега). $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ — банаховы.

Доказательство. при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \leq C < +\infty \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ почти всюду на X ?

Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых x .

$$\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x)^p \forall x \in X \stackrel{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на X по μ .

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$
 $\varepsilon \Rightarrow \|S_m(x) - S_n(x)\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\xRightarrow{\text{Фатту}} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f - S_n\| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S_n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $\|f - S_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^{\infty}$,

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty} e_n, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ — ограниченная функция. $m(X_1)$ — полное $\Rightarrow \{f_n\}$ — фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists f \in m(X_1) \quad \sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^{\infty}} = 0 \quad \square$

3.4. Пространства l_n^p, l^p

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

Определение 3.8.

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \leq j \leq n$, $l_n^p = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu)$, $f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$ — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

Теорема 3.6. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

Доказательство. \Rightarrow

Пусть j — фиксировано, $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$ в l_n^p .

При $p < +\infty$ $\|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.

При $p = \infty$ $\|x - x^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Теперь \Leftarrow

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n \|x_j - x_j^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{и} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

Определение 3.9. $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X = \mathbb{N}, \mu(j) = 1, \mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

Замечание 3.2. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x^{(m)} \in l^p, \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, \nrightarrow при $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$

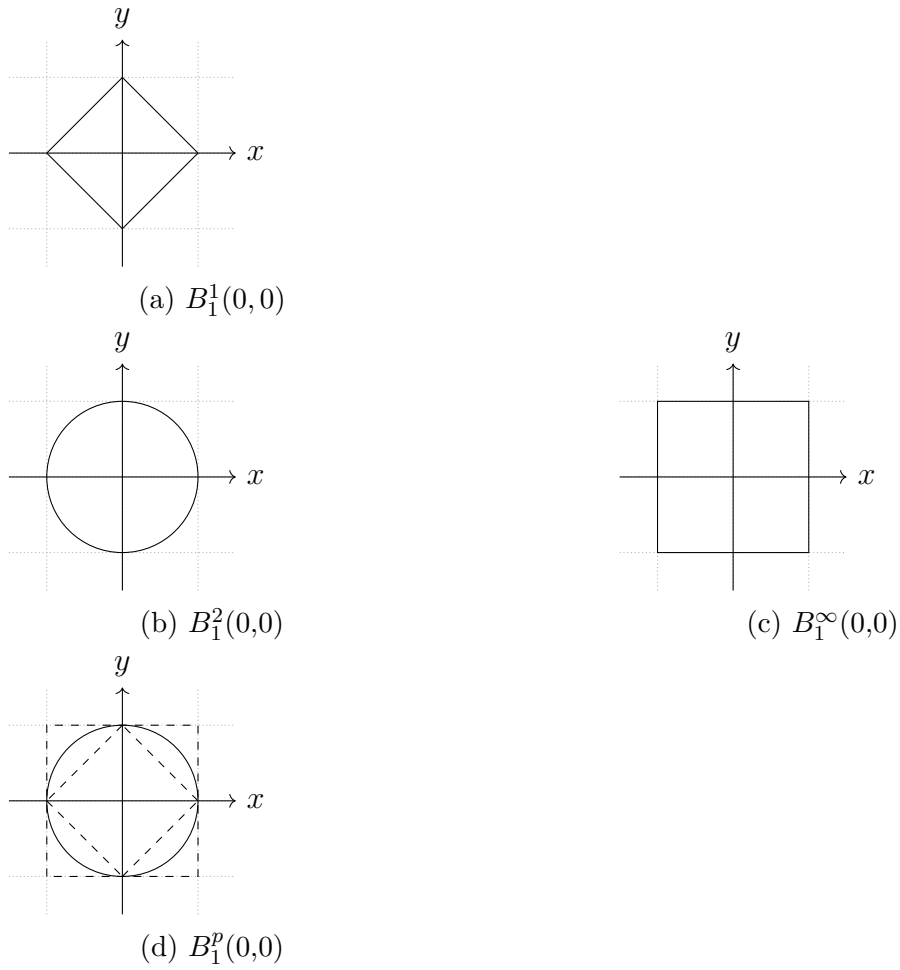


Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в l_2^p

Пусть j фиксировано. $\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0$ $\|e_m - \mathbb{0}\|_p = 1 \quad \forall p, 1 \leq p \leq +\infty$. В качестве упражнения доказать, что l^p — полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x, y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leq p < +\infty$. Для l_2^∞ норма определяется $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

3.5. Неполное нормированное пространство

Определение 3.10 (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x - \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$. $(F, \|\cdot\|_p)$ — не полное, F — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in F$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad \|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно, F — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что \overline{F} в l^p =? при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

Теорема 3.7. $C[a, b], \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$(C[a, b], \|\cdot\|)$ — не полное

Доказательство. При $p = 1$, $[a, b] = [-1, 1]$, $f \in C[a, b]$, $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1, 1]$$

f_n — фундаментальная в $(C[-1, 1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

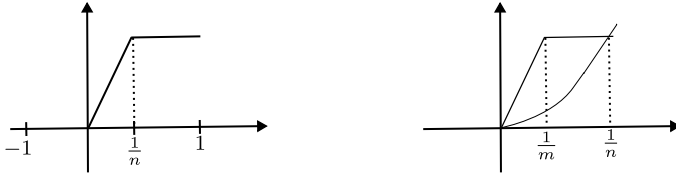


Рис. 3.2: Доказательство теоремы 3.7

Пусть $\exists f \in C[-1, 1] : \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \forall n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0, 1], f \text{ непрерывна}, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1, 0] \end{array} \right. \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

3.6. Пополнение метрического пространства

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

Определение 3.11.

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

\mathcal{P} (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a, b]$, $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$, $e^x \notin \mathcal{P}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, $\Rightarrow p_n \xrightarrow{[a, b], n \rightarrow \infty} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станет тождественным 0 $\Rightarrow \overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P} \ni e^x \Rightarrow \mathcal{P}$ — не замкнуто $\Rightarrow \mathcal{P}$ — не полное.

$$\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$$

Теорема 3.8 (Вейерштрасса, 1885). $f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathcal{P}$ т.ч. $\|f - p\| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \xrightarrow[G]{} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

Теорема 3.9 (Свойства метрики). (X, ρ) — метрическое

1. $x, y, z, u \in X \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$ — непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ — подмножество, $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$ — непрерывная функция от x
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

Доказательство. 1. $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$ Аналогично $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \dots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.
 $\rho(x, y)$ — непрерывная?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

3. $A \subset X, x, z \in X, |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$
 Пусть $y \in A$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall y \in A \\ &\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z)$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что x и z ничем не отличаются, аналогично $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое} \\ \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах. $(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства. $T : X \rightarrow Y$.

Определение 3.12 (Изометрическое вложение).

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

Определение 3.13 (Изометрия). T — изометрическое вложение, $T(X) = Y$

Определение 3.14 (Изометричность пространств). $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists T : X \rightarrow Y, T$ — изометрия

Свойство 3.2. T — изометрическое вложение $\Rightarrow T$ — инъективное, непрерывное

Доказательство. $x, z \in X, T : X \rightarrow Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$. Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(T_{x_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} = T_x$$

□

Свойство 3.3. Если T — изометрия, то $\exists T^{-1}$ — изометрия.

Свойство 3.4. «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

Определение 3.15 (Пополнение м. пространства). (X, ρ) — метрическое пространство. (Z, d) — полное метрическое пространство. (Z, d) — пополнение (X, ρ) , если существует $T : X \rightarrow Z$

1. T — изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

Замечание 3.3. Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. (X, ρ) — метрическое пространство, (U, d) — полное метрическое пространство. Пусть $\exists T : X \rightarrow U$ — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое Z построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ — пополнение X .

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

Теорема 3.10 (О пополнении метрического пространства).
 (X, ρ) — метрическое $\Rightarrow \exists$ пополнение (Z, d)

Доказательство. Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаментальных последовательностей, рассмотрением факторпространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.

Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$\|f\|_{m(X)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$ — полное пространство.

Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \rightarrow m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про X , от которого мы потом откажемся. Пусть X — ограниченное, то есть $\exists M > 0$ т.ч. $\forall x, y \in X \rho(x, y) \leq M$. Единственная цель предположения — формула для φ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.

$t \in X, t$ — фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном t — это функция на X . Именно сюда наше отображение будет отображать t . Одной точке — целая функция, понятно?

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \rightarrow f_t(x) \\ |f_t(x)| &\leq M \Rightarrow f_t \in m(X) \end{aligned}$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } t, s \in X, \quad \|f_t - f_s\|_\infty &= \sup_{x \in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)| \\ |\rho(x, t) - \rho(x, s)| &\leq \rho(t, s), \quad \text{Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s) \\ \Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty &= \rho(t, s) \Rightarrow \varphi - \text{изометрическое вложение} \end{aligned}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение φ . X — любое метрическое пространство. $a \in X$ — фиксированная точка.

$$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтобы попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \|f_t - f_s\|_\infty = \rho(s, t)$$

$$\text{Пополнение } X: \overline{\varphi(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = Z, (Z, \|\cdot\|_\infty)$$

□

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

Замечание 3.4. Забегая далеко вперёд. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, X^* — множество непрерывных линейных функционалов на X , X^* — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \rightarrow \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}, \overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ — пополнение X .

3.7. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой \mathbb{R} . (X, ρ) — метрическое пространство, $r > 0, x \in X$ Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

Теорема 3.11 (О вложенных шарах). (X, ρ) — метрическое пространство. X — полное $(| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \emptyset)$. По сравнению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

Доказательство. $\Rightarrow X$ — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная.

Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \geq N$.

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ — полное} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

любое фиксированное $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \forall n \geq m, D_m$ — замкнутое

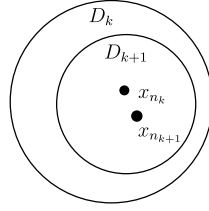
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

\Leftarrow

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) <$



$$\frac{1}{2^{k+1}} \cdot D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho(y, x_{n_k}) &\leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \\ &\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k \end{aligned}$$

Мы взяли произвольный элемент из D_{k+1} и показали, что он принадлежит D_k , то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаментальных последовательностей из первой лекции $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ \square

Замечание 3.5. В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \leq r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. \square

Замечание 3.6. Условие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

Пример 3.5 (Замкнутые множества). $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ — замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset, F_n = [n, +\infty)$

Пример 3.6 (По теореме).

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что ρ — метрика. x, y, z

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} &\Rightarrow \left(\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \wedge \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\ &x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X_N &\Rightarrow (X, \rho) \text{ — полное} \end{aligned}$$

Полноту проверили.

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n. \text{ Пусть } x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

Замечание 3.7 (Домашнее задание). Если $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, то $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$ (требование $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ лишнее)

3.8. Сепарабельные пространства

(X, ρ) — метрическое пространство,

Определение 3.16 (A плотно в C). $A \subset X, C \subset X$. A плотно в C , если $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall x \in C \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 C \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a)$$

Любой элемент C можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из A .

Определение 3.17 (A всюду плотно в C). A — всюду плотно в X , если $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для X , то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

Определение 3.18 (Сепарабельное пространство). (X, ρ) — сепарабельное, если $\exists E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \overline{E} = X$

Теорема 3.12. $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty,$

l_n^p — сепарабельное

Доказательство.

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p\}$$

$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$ □

Теорема 3.13. F — финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$

$(F, \|\cdot\|_p)$ — сепарабельно

Доказательство. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

Теорема 3.14. $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$ — сепарабельные

Доказательство. На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, \|\cdot\|_p), \overline{F}^{\|\cdot\|_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty$$

$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотно в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$

$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

Почему любой элемент из l^p может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. □

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: F — подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^\infty$, $\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

берем первые m координат и дополняем их нулями

$$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$

$$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{k > m} |x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Остаётся вопрос, почему C_0 — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\begin{aligned} &\text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty, y^{(m)} \in C_0, y^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \text{ в } C_0 \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|y - y^{(m)}\|_\infty &= 0 \quad y = \{y_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 ??? \end{aligned}$$

А это равномерная сходимостъ на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: C — сепарабельное, $C \subset l^\infty$

Теорема 3.15. l^∞ — не сепарабельное

Какой бы шарик из X мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

Доказательство.

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ — континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \neq C$$

$$X_n^A - X_n^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \|x^A - x^C\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A - X_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктивных шариков. E — всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall A \subset \mathbb{N} \exists e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \quad \underbrace{\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус. \square

Теорема 3.16. (X, ρ) — сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ — сепарабельное.

Доказательство. $\exists E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — всюду плотно в X , $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, Y) &= \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow \\ \exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) &= \rho(x_n, Y) \\ y_{n,k} \in Y, F = \{y_{n,k}\}_{n,k} &\text{ — счётное, } F \subset Y \end{aligned}$$

Проверим, что F — всюду плотно в Y . Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

\square

Следствие 3.1. X — бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ — не сепарабельное.

Доказательство. Можно слово в слово повторить доказательство для l^∞ , но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\begin{aligned} & \exists \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j \\ Y &= \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty \\ Y &\text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty \\ Y &\text{ — не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме} \\ & m(X) \text{ — не сепарабельно} \end{aligned}$$

□

Теорема 3.17.

$C[a, b]$ — сепарабельно

1 часть.

$$\begin{aligned} L &= \{ \text{ломанные} \} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R} \\ & \quad L(x) \text{ — ломанные} \\ L(x_k) &= y_k, k = 0, 1, \dots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Отметим, что L — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будет счётным нет.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } f \in C[a, b], \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \\ & \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ & \quad \exists \{x_k\}_{k=0}^n \text{ — разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta \\ & \quad y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ — ломаная} \\ & \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f - L\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{aligned}$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} E &= \{L \in \mathcal{L}, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ — счетное множество} \\ \begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{cases} &\Rightarrow E \text{ — всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a, b] \end{aligned}$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\} \quad \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \\ E &= \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{Q}\} \\ \begin{cases} \mathcal{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \end{cases} &\Rightarrow \overline{E} = C[a, b]\end{aligned}$$

□

3.9. Нигде не плотные множества

Определение 3.19. (X, ρ) — метрическое пространство. $A \subset X$, A — **нигде не плотно** в X , если

$$\forall B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\begin{aligned}\forall r > 0, x \in X \quad B_r(x) \ni B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \Leftrightarrow \forall r > 0, x \in X \quad D_r(x) \ni D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset\end{aligned}$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.

Определение 3.20 (множество первой категории). $M \subset X, (X, \rho)$. M — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

M — **множество второй категории**, если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Теорема 3.18 (Бэр, о категориях). (X, ρ) — полное $\Rightarrow X$ — множество второй категории.

Доказательство. Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^\infty$, M_j — нигде не плотно в X , $E = \bigcup_{j=1}^\infty M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит X и не принадлежит E . Это и будет обозначать, что X невозможно представить в виде такого объединения.

$$\begin{aligned} x_0 \in X \quad D_0 &= \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\} \\ M_1 \text{ — нигде не плотно} &\Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \emptyset \\ r_1 &< 1 \end{aligned}$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству M_2 , которое тоже нигде не плотно

$$\begin{aligned} \exists D_2 &= D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \emptyset \\ r_2 &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и так далее $\left\{ \begin{array}{l} \{D_n\}_{n=1}^\infty, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n} \end{array} \right.$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall n \Rightarrow x \notin E$ □

3.10. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

Определение 3.21 (Линейная оболочка). X — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Определение 3.22 (Полное семейство). $(X, \|\cdot\|)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — **полное семейство**, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в X .

Пример 3.7. $C[a, b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ — полное семейство в $C[a, b]$, так как $\mathcal{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$

Пример 3.8. l^p , $1 \leq p < +\infty$, C_0

$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — полное семейство

$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F$ — финитная последовательность

Упражнение: C — что будет полным семейством?

Утверждение 3.1. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. В нём существует $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — полное семейство

X — сепарабельное

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^\infty = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\}$. $\overline{L} = X$.

$E = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\right\}$ — счётное всюду плотное

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

□

Замечание 3.8. l^∞ , $E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. $\overline{E} = l^\infty$, E — не счётное.

3.11. Полные и плотные множества в L^p

Сначала небольшое замечание. (X, U, μ) — пространство с мерой $e \in U$ — измеримые множества, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$ — характеристическая функция. $\chi \in L^\infty(X, \mu)$, $\forall e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \leq p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

Теорема 3.19. (X, U, μ) — пространство с мерой \Rightarrow

$$\begin{aligned} \{\chi_e\}_{e \in U} & \text{ — полное семейство в } L^\infty(X, \mu) \\ \{\chi_e\}_{e \in U, \mu E < +\infty} & \text{ — полное семейство в } L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

Теорема 3.20 (Лебег). $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — измеримые, $\varphi(x)$.
 $\int_X \varphi(x) d\mu < +\infty, |h_n(x)| \leq \varphi(x)$ п.в. на X

$$h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в. по } \mu} h(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

Доказательство. Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе. f — измеримая, $f(x) \geq 0, x \in X$. Рассмотрим разбиение множества X , а по нему построим соответствующую простую функцию

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \quad e_k &= \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, k = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \\ e_{n^2} - \{x : f(x) \geq n\} &\Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \emptyset (k \neq j) \end{aligned}$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

$$\begin{aligned} \text{Теперь все готово, чтобы обсудить случай } L^\infty. \text{ Пусть } f \in L^\infty(X, \mu) &\Rightarrow \\ n \geq \|f\|_\infty &\Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n} \text{ для п.в. } x \in X \\ \Rightarrow \|f - g_n\|_\infty &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U} \\ &\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} \end{aligned}$$

Посмотрим теперь, что происходит с конечными p . Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для

произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty & |f(x) - g_n(x)|^p \leq |f(x)|^p \\ g_n(x)f(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0 & \end{cases} \xRightarrow{\text{Лебег}}$$

все, что надо — убедиться, что мера конечная $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$$\begin{aligned} f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \geq \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\int_{e_k} \left(\frac{k}{n} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{k}{n} (\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty \\ &\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}} \end{aligned}$$

Теперь покажем, что для произвольных f рассуждение тоже верно. Рассмотрим замыкание линейное оболочка

$$\begin{aligned} \begin{cases} f : X \rightarrow \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0 \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \\ \forall f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} \\ (p = \infty \forall e, p < +\infty, \mu e < +\infty) \end{aligned}$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве l^∞

Следствие 3.2. $l^\infty, A \subset \mathbb{N}, X^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, X_n^A = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases} \Rightarrow$

$\{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$ — полное семейство в l^∞

Доказательство. $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}, A$ — измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

Теорема 3.21. $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$, λ — классическая мера Лебега. U — измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \leq p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

Доказательство. Собираемся приблизить множество линейной комбинацией характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\Delta_k\}_{k=1}^n$.

$$\lambda(e) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon.$$

$$e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \text{ при } k \neq j.$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k \\ \Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\|\chi_e - \chi_b\|_p \leq \|\chi_e - \chi\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p \leq$$

$$\left(\int_{A \setminus e} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{A \setminus B} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^N \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}$$

$$\left\{ \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} = L^p \right. \quad \Rightarrow \quad \left. \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} = L^p, 1 \leq p < +\infty \right.$$

□

Следствие 3.3. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измеримые по Лебегу, $1 \leq p < +\infty$
 $\Rightarrow L^p(E, \lambda)$ — сепарабельные
 (λ — мера лебега)

Доказательство. Докажем, что $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\Delta \in \mathcal{R} \quad 0$$

$$\Rightarrow \exists \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\chi_{\Delta_0} - \chi_{\Delta}\|_p = \|\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}\|_p = \left(\int_{\Delta_0 \setminus \Delta} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{R} \quad \chi_{\Delta} \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in R_0}}$$

R_0 — полное счётное семейство $\xRightarrow{\text{утверждение}} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ — измеримое, } f \in L^p(E, \lambda)$$

$$\text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельно}$$

□

Определение 3.23. (X, U, μ) — пространство с мерой. (X, ρ) — метрическое пространство. μ — **борелевская мера**, если $(G \text{ — открытое} \Rightarrow G \in U)$

β — минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые множества. β — **борелевские множества**, то есть $\beta \subset U$.

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

Замечание 3.9. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывная $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty))$, $c \in \mathbb{R}$, $(c, +\infty)$ — открытое в \mathbb{R} . Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз f открыт в $X \Rightarrow f$ — измеримая по μ , если μ — борелевская.

Замечание 3.10. λ — мера Лебега в \mathbb{R}^n , тогда λ — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

Определение 3.24 (регулярная мера). (X, U, μ) , (X, ρ) , μ — борелевская. μ — **регулярная мера**, если $\forall e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

Замечание 3.11. λ -мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

Теорема 3.22. (X, U, μ) , (X, ρ) , μ — регулярная мера \Rightarrow непрерывная функция плотна в $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$.

$$\overline{C(X) \cap L^p(X, \mu)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(X, \mu)$$

Доказательство. Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$ — полное семейство.

пусть $e \in U$, $\mu e < +\infty$, $0, \mu$ — регулярная $\Rightarrow \exists F \subset e \subset G$, F — замкнутое, G — открытое. $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в $X \setminus G$ она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю.

$\rho(x, A)$ — непрерывная функция $\forall A \subset X$. $X \setminus G$ — замкнутое, F — замкнутое. Если $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0 \forall x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall x \in X \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Понятно, что модуль $\varphi(x)$ совпадает с характеристической функцией множества e .

$$\begin{aligned} |\chi_e(x) - \varphi(x)| &\leq 1 \quad \forall x \in X \\ \chi_e(x) - \varphi(x) &= 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G \\ \Rightarrow \|\chi_e - \varphi\|_p &= \left(\int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{\|\cdot\|_p} \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что $\chi_e(x)$ может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоит отметить, что $\mu G < \mu e + \varepsilon < +\infty$ $\int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu G \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

Глава 4

Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 4.1 (из топологии). 1. (X, ρ) – метрическое пространство, $K \subset X$, K – компакт $\Leftrightarrow K$ – счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in K$$

2. K – компакт $\Rightarrow K$ – ограниченное замкнутое множество.

Пример 4.1. \mathbb{R}^n , K – компакт $\Leftrightarrow K$ – ограниченное, замкнутое

Замечание 4.1. НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ из того, что K – ограниченное замкнутое, не следует, что K – компакт

Замечание 4.2. $l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \right\}$

$D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ – ограниченное, замкнутое

$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, 0, \dots)$, $n \neq m \quad \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$ – не фундаментальная. Тогда $\nexists \lim_{j \rightarrow \infty} e_{n_j} \Rightarrow D$ – не компакт.

Ещё одно *напоминание*, кто такие относительно компактные множества.

Определение 4.1 (относительный компакт). $(X, \rho), A \subset X, A$ — относительно компактно, если \overline{A} — компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит A . A в компакте предел обязательно лежит в A .

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В \mathbb{R}^n мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

Определение 4.2 (ε -сеть). (X, ρ) — метрическое пространство. $A \subset X, \varepsilon > 0$
 F — ε -сеть для A , если

$$\begin{aligned} \forall a \in A \exists f \in F : \rho(a, f) < \varepsilon \\ (\Leftrightarrow \forall a \in A B_{\varepsilon}(a) \cap F \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f \in F} B_{\varepsilon}(f)) \end{aligned}$$

Определение 4.3. A — вполне ограниченное множество, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть для A .

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах вполне ограниченных — как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность — одно и то же. А проверять вполне ограниченность — гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим ε -сеть и всё!

Замечание 4.3. $(X, \rho), A$ — вполне ограниченное $\Rightarrow A$ — ограничено.

Пример 4.2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = l_n^2$ $A \subset \mathbb{R}^n$. A — ограниченное $\Leftrightarrow A$ вполне ограниченное

Доказательство. A — ограниченное $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$
 $A \subset Q = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$ Как же построить ε -сеть?

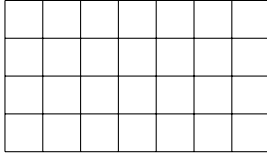


Рис. 4.1: классный поясняющий рисунок

Пусть $\varepsilon > 0$, $Q = \bigcup Q_j$, l – сторона Q_j

$$\text{diam } Q_j = \sup_{x, y \in Q_j} \rho(x, y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

F – вершины Q_j – ε -сеть

ЕС = equicontinuous

□

Убедимся в пространстве l^2

Пример 4.3. $D \subset l^2, D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ Убедимся, что D – не вполне ограниченное.

Доказательство.

$$\{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots), n \neq m, \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F = \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$$\Rightarrow \forall n \exists f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n), f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для l^∞

Пример 4.4. $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^\infty$. Проверим, что Π – вполне ограничено. 0

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=N+1}^\infty \left(\frac{1}{2^k} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$$

Если мы забудем про нули, то можем думать, что Π^* лежит в \mathbb{R}^n , и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное. $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$, Π^* – ограниченное \Rightarrow вполне ограниченное $\Rightarrow \exists F \subset \Pi^*$ – конечная ε -сеть. Докажем, что F – 2ε -сеть для Π .

$$\begin{aligned} x \in \Pi &\Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)}_z \\ \|z\|_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* &\Rightarrow \exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \\ \|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 &\leq \|y - f\|_2 + \|z\|_2 < 2\varepsilon \\ &\Rightarrow \Pi - \text{вполне ограничено} \end{aligned}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве l^p . Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

- Свойство 4.1.**
1. A – вполне ограничено $\Rightarrow \bar{A}$ – вполне ограничено
 2. $A \subset Y \subset X$, A – вполне ограничено в X $\Rightarrow A$ – вполне ограниченное в Y .
 3. A – вполне ограничено $\Rightarrow (A, \rho)$ – сепарабельно.

1 свойство. $A \subset X, \varepsilon > 0$. F – конечная ε -сеть для A . Проверим, что F – (2ε) -сеть для \bar{A}

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in \bar{A} &\Rightarrow \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \rho(x, f) \leq \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

2 свойство. Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность. $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$ – ε -сеть для $A, x_k \in X$
 $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$, если $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset$, то пусть $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$ (если $= \emptyset$, то не будем выбирать)

Мы найдем ε -сеть из точек множества A , тогда она точно будет обслуживать и Y . Как же и куда сдвигать точки?

$$E = \{y_k\}_{k=1}^n$$

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow \exists x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \\ \rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \\ E - (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A \end{aligned}$$

□

3 свойство. $n \in \mathbb{N}$, $F_n - (\frac{1}{n})$ -сеть для A , F_n — конечное.

$$F \text{ (счетное) } = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n - \text{плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

Утверждение 4.2 (о разбиении). $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0$. F — конечная ε -сеть для $A \Rightarrow$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n \quad A = \bigcup_{j=1}^n C_j \quad C_j \cap C_k = \emptyset, j \neq k, \text{diam } C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \emptyset$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F = \{x_k\}_{k=1}^n, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k) \\ C_1 = A \cap B_\varepsilon(x_1) \\ C_2 = (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1 \\ C_k = A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j \right) \quad k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

если $C_k = \emptyset$, то забудем о нём. $C_k \subset B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \text{diam } C_k \leq 2\varepsilon$

□

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

Теорема 4.1 (Хаусдорф). (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

A – компакт \Leftrightarrow

1. A полное, то есть $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$ – фундаментальная $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2. A – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, попытаюсь вытянуть.

Доказательство. \Rightarrow

A – компакт, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, $x_n \in A$.

A – компакт $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$. Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$ – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, и среди них существует конечное подпокрытие.

пусть $\varepsilon > 0$ $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a) \wedge A$ – компакт $\Rightarrow, \exists \{a_j\}_{j=1}^n, a_j \in A :$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon}(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^n - \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы. \Leftarrow .

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$. Собираемся применять лемму о разбиении. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$.

По лемме $\exists \{C_j^{(1)}\}_{j=1}^{N_1} . A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \text{diam } C_j^{(1)} \leq 1$. Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое. $\exists j : C_j^{(1)}$ содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}$. $A_1 :=$

$C_j^{(1)}$.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists \left\{ C_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\text{diam } C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$\exists 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}$ содержит бесконечное количество элементов в x_n

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \text{diam } A_m \leq \frac{1}{2^m}$$

A_m содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (*)

$$x_{n_1} \in A_1, \quad \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. } (*)$$

$$\text{и так далее } \exists n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \text{diam } A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} - \text{фундаментальная} \wedge A - \text{полное}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компакте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

Следствие 4.1. (X, ρ) – метрическое, $A \subset X$.

1. A – относительно компактно $\Rightarrow A$ вполне ограничено
2. (X, ρ) – полное, A – относительно компактно $\Leftrightarrow A$ вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

1 утверждение. A – относительно компактно, $\Rightarrow \bar{A}$ – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа \bar{A} – вполне ограничено, $A \subset \bar{A} \Rightarrow A$ вполне ограничено. □

2 утверждение. (X, ρ) – полное, A – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству (\bar{A} – вполне ограничено $\wedge \bar{A}$ – замкнутое в $X \Rightarrow \bar{A}$ – полное) \Rightarrow по теореме Хаусдорфа \bar{A} компакт $\Rightarrow A$ – относительно компактно. □

Оказывается, можно вместо конечных ε -сетей можно утверждать чуть большее.

Следствие 4.2. (X, ρ) – полное, $A \subset X$. Если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ относительно компактная ε -сеть, то A – относительно компактно

Доказательство. $0, F$ – ε -сеть для A . F – относительно компактно $\Rightarrow F$ вполне ограничено, $\exists E$ – конечная ε -сеть для $F \Rightarrow E$ – (2ε) -сеть для $A \Rightarrow A$ – вполне ограничено $\Rightarrow A$ – относительно компактно. \square

4.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

Определение 4.4. (K, ρ) – метрический компакт. $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ – непрерывная}\}$, $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$. $\Phi \subset C(K)$. Φ – **равностепенно непрерывно**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \Phi, \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

EC – equicontinuous.

Равностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что δ не зависит от f , но от ε конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на диффурах:

Теорема 4.2 (Асколи-Арцелла). K – компакт, (K, ρ) , $\Phi \subset C(K)$. Φ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограниченное в $C(K)$
2. Φ – равностепенно непрерывно ($\Phi \in EC$ equicontinuous)

Доказательство. С самого начала отметим, что $C(K)$ – полное. Вместо проверки относительной компактности Φ будем проверять вполне ограниченность.

\Rightarrow

Φ – относительно компактно $\Rightarrow \Phi$ – вполне ограничено $\Rightarrow \Phi$ – ограничено, то есть $\exists M \geq 0$ т.ч. $\|f\| \leq M \forall f \in \Phi \Leftrightarrow \forall x \in K, \forall f \in \Phi |f(x)| \leq$

М. $\varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -сеть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n, \varphi_j \in C(K), \varphi_j$ – равномерно непрерывна
 $\exists \delta_j > 0$

$x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j$

здесь лекция закончилась

при описании относительного компакта мы получили такой результат:
 $C(K)$ – полное $\Rightarrow \Phi$ относительный компакт $\Leftrightarrow \Phi$ – вполне ограничено. Будем этим пользоваться.

$\Rightarrow \Phi$ – вполне ограниченное $\Rightarrow \Phi$ – ограничено

Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – ε -сеть для Φ . $\varphi_j \in C(K) \Rightarrow \varphi_j$ – равномерно непрерывна

$\exists \delta_j > 0 \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j, \delta > 0$$

пусть $f \in \Phi \Rightarrow \exists j : \|f - \varphi_j\| < \varepsilon$ то есть

надо оценить этот модуль через неравенство треугольника; справа, очевидно, будет 3 слагаемых

$$\max_{x \in K} |f(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x, y \in K, \rho(x, y) < \delta, |f(x) - f(y)| &\leq \underbrace{|f(x) - \varphi_j(x)|}_{< \varepsilon} + \\ &+ \underbrace{|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|}_{< \varepsilon \text{ так как } \delta \leq \delta_j} + |\varphi_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

мы и проверили равностепенную непрерывность. Тривиальная часть доказательства закончена.

\Leftarrow

Φ – ограничено $\Rightarrow \exists M > 0 : f \in \Phi \Rightarrow \|f\| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M \forall x \in K$.
 Надо по определению построить конечную ε -сеть в множестве непрерывных функций. Но мы воспользуемся двумя облегчающими хитростями: 1. $\Phi \subset C(K)$, а $C(K) \subset m(K)$, и если множество имеет ε -сеть в большем пространстве, то в меньшем и подавно. Более того, сеть можно построить из элементов меньшего множества. Мы выберем ограниченные функции. 2. выберем относительно компактную ε -сеть в $m(K)$ вместо конечной в $C(K)$, и этого будет достаточно.

$$\varepsilon > 0 \quad \Phi \subset C(K) \subset m(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C}, \sup_{x \in K} |f(x)| < +\infty\}$$

$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta$ из определения (EC)

применим к этой парочке лемму о разбиении $(K, \rho), \delta > 0$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n, \text{diam } C_j < \delta, K = \bigcup_{j=1}^n C_j, C_j \cap C_i = \emptyset (j \neq i), C_j \neq \emptyset$$

$$\Psi = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\} \subset m(K), y_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n$$

$$g \in \Psi, \|g\|_\infty = \sup_{x \in K} |g(x)| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$F : l_n^\infty \rightarrow \Psi, F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

Мы выяснили, что F биекция, изометрия, линейное.

$Q = \{y = (y_1, \dots, y_n), |y_j| \leq M\}$ полидиск, что бы это пока не значило

Q – компакт, F – непрерывна $\Rightarrow F(Q)$ – компакт в $m(K)$

$$E := F(Q), E = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x), |y_j| \leq M \right\}$$

вот у нас есть компакт E , и мы собираемся проверить, что он и будет ε -сетью для Φ . Будет полезно в каждом множестве выбрать по точке. Пусть $x_j \in C_j, f \in \Phi, y_j := f(x_j)$.

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x), g \in E, |y_j| \leq M$$

Пусть $x \in K \Rightarrow \exists j, x \in C_j \Rightarrow g(x) = f(x_j) \Rightarrow$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ т.к. } \rho(x, x_j) < \delta$$

Вот это и то, что было обещано. E – компактная ε -сеть. □

Замечание 4.4. Условия теоремы не зависимы.

Пример 4.5. $C[0, 1]. f_n(x) = x^2 + n, \{f_n\}$ – равностепенно непрерывны, но $\{f_n\}$ не ограничено.

ограниченная, но не равностепенно непрерывная

Пример 4.6. $C[0, 1], f_n(x) = x^n. \{f_n\}$ – ограничены, но не равностепенно непрерывны.

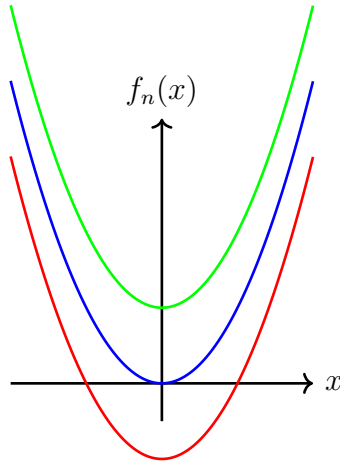


Рис. 4.2: Пример 4.5

Теорема 4.1 (достаточные условия равностепенной непрерывности). (K, ρ) – компакт, $\Phi \subset C(K)$. Сначала какие-то абстрактные множества, потом будут более конкретные.

1. Если $\exists M > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ такие что

$$\forall f \in \Phi, (\forall x, y \in K \rho(x, y) < \beta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M(\rho(x, y))^\alpha \\ \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

2. $C[a, b], \Phi \subset C[a, b]$, пусть $\exists L > 0$

$$\forall f \in \Phi \exists f'(x), x \in (a, b), |f'(x)| \leq L \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

3. чуть более общий случай. $K \subset G \subset \mathbb{R}^n$, K – компакт, G – открытое.

$$\exists L > 0 : \forall f \in \Phi, \exists \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq L (1 \leq j \leq n), \forall x \in G \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

4. про аналитические функции. предполагать можно будет гораздо меньшее. $K \subset G \subset \mathbb{C}$, G – открытое, K – компакт.

$$\exists L > 0, f \in \Phi, f \text{ аналитическая в } G, \exists f'(x), \underbrace{|f(x)|}_{\text{ТУТ}} \leq L, \forall x \in G$$

ТУТ НЕ ПРОИЗВОДНАЯ, НА ЭКЗАМЕНЕ ЧАСТО ОШИБАЮТСЯ!!!!

Аналитичность – фантастическое свойство, в отличие от, например, дифференцируемости. Именно из-за неё ТАМ как раз и не производная.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, $x, y \in K$, пусть $\rho(x, y) < \beta$, пусть $\delta < \beta, \rho(x, y) < \delta, \delta(\varepsilon) = ?$.

$$\begin{aligned} f \in \Phi &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\rho(x, y)^\alpha < M\delta^\alpha \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \delta(\varepsilon) &= \min \left\{ \beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \end{aligned}$$

□

Будем сводить остальные доказательства к первому пункту, находя M, α, β . Второй пункт теперь совсем лёгкий.

2. $\Phi \subset C[a, b]$, $x, y \in [a, b]$, $f \in \Phi$. Для оценки разности $f(x) - f(y)$ воспользуемся теоремой Лагранжа.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(c)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f'(c)||x - y| \leq L|x - y| \\ M &= L, \alpha = 1, (\beta - \forall) \stackrel{1}{\Rightarrow} \Phi \in (EC) \end{aligned}$$

□

3. Пусть $z, y \in K$ такие что $[z, y] \subset G$, $f \in \Phi$ Оценим разность $f(y) - f(z)$.

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] &\rightarrow [y, z] \\ \Gamma(t) &= ty + (1 - t)z, \Gamma(0) = z, \Gamma(1) = y \end{aligned}$$

опять можем воспользоваться теоремой Лагранжа

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0)) = (f(\Gamma(c)))'_t \\ (f(\Gamma(t)))'_t &= (f(ty + (1 - t)z))'_t = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots)(y_j - z_j) \end{aligned}$$

$$|f(\Gamma(t))'| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} L\sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^n (y_j - z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{n}\rho(y, z)$$

Если выбрать β достаточно маленьким, то наш отрезок будет лежать в этом компакте. $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ – замкнутое, $\rho(x, F)$ – непрерывная

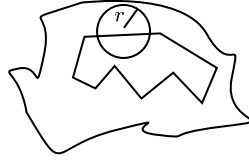


Рис. 4.3: Утопленность компакта

функция в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho(x, F)$ непрерывна на $K \Rightarrow \exists x_o \in K, \rho(x_o, F) = \min_{x \in K} \rho(x, F)$

$$\begin{aligned} x_0 \notin F &\Rightarrow \rho(x_0, F) > 0, r := \rho(x_0, F) \\ \forall x \in K \ B_r(x) &\subset G, \beta = r \\ \rho(x, y) < r &\Rightarrow y \in B_r(x) \subset G \Rightarrow \\ &\text{отрезок } [x, y] \subset B_r(x) \subset G \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{n}\rho(x, y) \end{aligned}$$

z и y , которые с самого начала были выбраны вместо x и y , чтобы не смущаться из-за dx , обратно превратились в x и y , все же поняли?

На пальцах: наш компакт настолько утоплен в G , что если мы возьмём шарик радиуса r , то шарик всё ещё лежит в G . \square

4. Букву r , которую мы нашли в предыдущем пункте, будем изо всех сил использовать. $K \subset G \subset \mathbb{C}$. В 3 пункте выяснили, что $\exists r > 0 : B_r(x) \subset G \forall x \in K, \beta = \frac{r}{3}$.

$$\begin{aligned} x, y \in K, \rho(x, y) < \beta, \gamma &= \{\zeta \in \mathbb{C} : |x - \zeta| = 2\beta\} \\ f &\in \Phi \end{aligned}$$

разницу собираемся оценивать с помощью формулу Коши, поэтому никакие производные и не нужны!!!

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \\ f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta \\ f(x) - f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{x - y}{(\zeta - x)(\zeta - y)} d\zeta \end{aligned}$$

оцениваем самым грубом образом, отправляя модули под интегралы

$$|f(\zeta)| \leq L, |\zeta - x| = 2\beta, |z - y| \geq \beta$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2\pi} L \cdot |x - y| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{(2\beta) \cdot \beta} = |x - y| L \frac{(2\beta) \cdot 2\pi}{(2\pi)(2\beta)\beta} = \\ &= \frac{L}{\beta} |x - y| \end{aligned}$$

и в обозначениях 1 пункта получаем $M = \frac{L}{\beta}, \alpha = 1, \beta = \frac{r}{3}, \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$ \square

Перед тем, как мы покинем относительно компакты, пара упражнений, которые на экзамене спрашивали в качестве задачи на 5.

Утверждение 4.3. $1 \leq p < +\infty$. $\Phi \subset l^p, \Phi$ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограничено в l^p

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in \Phi, \left(\sum_{j=N+1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

Утверждение 4.4. $\Phi \subset C_0, \Phi$ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограничено

2. $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Phi \quad \sup_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Мы сейчас находимся на перепутье функционального анализа. Можно отправиться в Гильбертовы пространства, в линейные операторы или еще куда-то. Изучить-то придётся всё, но мы начинаем линейные операторы.

Часть II

Линейные операторы

Глава 5

Линейные операторы в линейных пространствах

Первый параграф про линейные пространства будет совсем простой, здесь будут самые тривиальные свойства, следующие из линейности.

5.1. Линейные операторы в линейных пространствах

Определение 5.1 (Линейный оператор). X, Y — линейны над k ($k = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}). $A : X \rightarrow Y$, A — **линейный оператор**, если

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az, \quad x, z \in X, \alpha, \beta \in k$$

$\text{Lin}(X, Y)$ — множество линейных операторов из X в Y . Также нам понадобится линейное пространство над k

$$\alpha \in k, A \in \text{Lin}(X, Y), (\alpha A)(x) := \alpha Ax, 0(x) = 0 \text{ (0 в пространстве } Y)$$
$$A, B \in \text{Lin}(X, Y), (A + B)(x) := Ax + Bx$$

Если $X = Y$, пишем только $\text{Lin}(X)$.

Пример 5.1 (интегральный оператор). $C[a, b], K(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$

$$f \in C[a, b], (\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt$$
$$(\mathcal{K}f)(s) \in C[a, b], \mathcal{K} \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Пример 5.2 (оператор дифференцирования). $X = C^{(1)}[0, 1] = \{f : f' \in C[0, 1]\}$, $Y = C[0, 1]$. $f \in X, D(f) = f', D \in \text{Lin}(X, Y)$

Пример 5.3 (оператор вложения). $l^1 \subset l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \sum_{n=1}^\infty |x_n| < +\infty, x \in l^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow x \in l^2$

$$Ax = x, A \text{ оператор вложения } l^1 \xrightarrow{A} l^2$$

$$\forall 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty \Rightarrow l^{p_1} \xrightarrow{A} l^{p_2}, Ax = x$$

$$A \in \text{Lin}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

Пример 5.4 (оператор, но не линейный). $x = X$ — линейное пространство, $x_0 \in X, x_0 \neq 0, Ax = x + x_0 \Rightarrow A$ — не линейный.

Перед тем, как доказывать теорему, еще одно небольшое определение.

Определение 5.2 (Выпуклое множество). $B \subset X, X$ — линейное пространство. B — **выпуклое**, если

$$\forall x, z \in B, \forall t, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx + (1 - t)z \in B$$

то есть отрезок, соединяющий любые две точки, полностью лежит в этом множестве

Теорема 5.1 (простейшие свойства линейного оператора). X, Y — линейные пространства над k (\mathbb{R} или \mathbb{C}), $A \in \text{Lin}(X, Y)$

1. $L \subset X, L$ — подпространство в $X \Rightarrow A(L)$ — подпространство в Y (образ подпространства — подпространство)
2. $M \subset Y, M$ — подпространство в $Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(M)}_{\text{прообраз}}$ — подпространство в X
3. $B \subset X, B$ — выпуклое $\Rightarrow A(B)$ — выпуклое в Y
4. $C \subset Y, C$ — выпуклое $\Rightarrow A^{-1}(C)$ — выпуклое в X
5. пусть A — биекция $\Rightarrow A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$

Все 5 свойств доказывать не будем, покажем только несколько и скажем, что остальные доказываются аналогично.

1. L — подпространство, $y, v \in A(L), \alpha \in k$. Наша мечта — проверить ($\stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha y + v \in A(L)$), не обязательно писать α и β .

$$\Rightarrow \exists x, y \in L : (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \\ \alpha x + u \in L \Rightarrow A(\alpha x + u) \in A(L) \Rightarrow \alpha y + v \in A(L)$$

□

3 проверяется тютелька в тютельку как 1, а 2 — как 4, поэтому проверим 4.

4. C — выпуклое, $x, u \in A^{-1}(C), 0 \leq t \leq 1$.

$$(y := Ax \wedge v := Au) \quad y, v \in C \Rightarrow ty + (1 - t)v \in C \\ A(tx + (1 - t)u) = tAx + (1 - t)Au = ty + (1 - t)v \in C \\ \Rightarrow tx + (1 - t)u \in A^{-1}(C) \Rightarrow A^{-1}(C) \text{ выпуклое}$$

□

5. $y, v \in Y \Rightarrow x = A^{-1}y, u = A^{-1}v \Rightarrow (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow$

$$\text{пусть } \alpha \in k, \quad A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \Rightarrow \\ \alpha x + u = A^{-1}(\alpha y + v) = \alpha A^{-1}y + A^{-1}v \Rightarrow \\ A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

□

Определение 5.3 (Ядро линейного оператора). $A \in \text{Lin}(X, Y)$

$$\text{Ker } A = \{x \in X : Ax = 0\} \text{ — ядро } A$$

$$\text{Im } A = \{y \in Y : \exists x : Ax = y\} = A(X) \text{ — образ } A$$

Следствие 5.1. X, Y — линейные пространства, $\Rightarrow \text{Ker } A$ — подпространство в X , $\text{Im } A$ — подпространство в Y .

Определение 5.4 (произведение операторов). X, Y, Z — линейные пространства

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

$A \in \text{Lin}(X, Y), B \in \text{Lin}(Y, Z), C = BA, C(x) := B(Ax), x \in X \Rightarrow C \in \text{Lin}(X, Z), C$ — произведение BA

Всё самое тривиальное для операторов в линейных пространствах мы вспомнили

5.2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы в нормированных пространствах — главный объект, который изучает функциональный анализ.

Определение 5.5 (Ограниченный оператор). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$. A — **ограниченный**, если $\forall C \subset X, C$ — ограниченное $\Rightarrow A(C)$ — ограниченное в Y .

Оказывается, для операторов ограниченность эквивалентна непрерывности. Казалось бы, ограниченность сильно слабее, но если к ней добавить линейность, то будет аж непрерывность.

Обычно если в теореме 2 свойства, то говорят «если и только если», а если условий несколько, то говорят «равносильность». Подлые англичане говорят Following Conditions are Equivalent.

Теорема 5.2 (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$. Следующие условия равносильны (СУР) (FCE)

1. A непрерывен в точке 0
2. A непрерывен $\forall x \in X$
3. $\exists C > 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \forall x \in X$
4. A ограниченный
5. $\exists r > 0 A(B_r(0))$ — ограниченное множество в Y .

Доказательство очень простое, и, конечно, строится на линейности

$1 \Rightarrow 2$. A непрерывен в точке 0. Пусть $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$ ($A(0) = 0$). утверждается, что те же самые ε и δ подходят.

пусть $x_0 \in X$, проверим, что A непрерывен в x_0

пусть $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

□

2 \Rightarrow 1 очевидно

1 \Rightarrow 3. Пусть $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} z \in X, z \neq 0 \quad x = \frac{z}{\|z\|} \cdot \delta \Rightarrow \|x\| = \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \|A\left(\frac{z}{\|z\|} \cdot \delta\right)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\| \text{ т.е. } C = \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned}$$

□

3 \Rightarrow 4. $B \subset X$, B — ограниченное, то есть $\exists M > 0 : (\forall x \in B \wedge \|x\| < M) \xrightarrow{3} \|Ax\| \leq C\|x\| \leq CM \forall x \in B \Rightarrow \{A(B)\}$ — ограниченное. □

4 \Rightarrow 5 очевидно ($B_r(0)$ — ограниченное)

5 \Rightarrow 1. $\exists R > 0 A(B_r^x(0)) \subset B_R^y(0)$

$$\|x\| < r \Rightarrow \|Ax\| < R$$

непрерывность в 0 означает

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad \|x\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

$$\|z\| < \varepsilon \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow \|z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\| < r \Rightarrow \|A\left(z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\right)\| < R \Rightarrow \|Az\| < \varepsilon$$

□

с помощью теоремы, которую мы только что доказали, введём норму в этом пространстве.

Определение 5.6 (норма оператора). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

$$\underbrace{\mathcal{B}(X, Y)}_{\text{bounded}} = \{A \in \text{Lin}(X, Y) \wedge A \text{ — ограниченный}\}$$

$$A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\|A\| = \inf\{C : C > 0 \wedge \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}$$

то бишь точная нижняя грань множества величин, на которые наш оператор увеличивает норму элемента.

Раз мы так объявили норму, то надо проверять аксиомы нормы.

Утверждение 5.1. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y)$

1. $\forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ (то есть \inf в определении нормы $= \min$)
2. $\|A\|$ удовлетворяет аксиомам нормы

Доказательство. x - фиксирован, $\Rightarrow \forall c > \|A\|, \|Ax\| \leq c \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Был фиксирован, теперь любой, первое утверждение доказано. Теперь второе.

$\alpha \in k, \alpha \neq 0, x \in X, x$ — фиксирован

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \|(\alpha A)(x)\| &= \|\alpha \cdot Ax\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| \leq |\alpha| \|A\| \end{aligned}$$

Очевидное замечание по слёзной просьбе двух студенток, которые ничего не понимали. Если мы докажем $\|Ax\| \leq M \|x\| \forall x \in X$, то $\|A\| \leq M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \frac{1}{\alpha} (\alpha A) \right\| &\leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha A\| \Rightarrow |\alpha| \|A\| \leq \|\alpha A\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \\ A, B &\in \mathcal{B}(X, Y), x \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(A+B)(x)\| &= \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = \\ &= (\|A\| + \|B\|) \|x\| \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Как только есть какая-то константа, то настоящая норма меньше или равна этой константы. $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$. $\Rightarrow Ax = 0 \forall x \in X \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \|A\|$ — настоящая норма \square

Теорема 5.3 (вычисление нормы непрерывного оператора).

$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow$

$$\|A\| = \underbrace{\sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \|Ax\|}_a = \underbrace{\sup_{\{\|x\| < 1\}} \|Ax\|}_b = \underbrace{\sup_{\{\|x\|=1\}} \|Ax\|}_c = \underbrace{\sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_d$$

Доказательство. Очевидно $a \geq b, a \geq c, d \geq c$. Докажем $\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|, \|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$.

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \quad \forall x, \|x\| \geq 1 \Rightarrow \sup_{\{\|x\| \geq 1\}} \|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow a \leq \|A\|$$

Доказали $\|A\| \geq a$.

$$\text{Пусть } \varepsilon > 0, z \in X, z \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)} \right\| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

$$\begin{aligned} \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)}\right) \right\| &\leq b \Rightarrow \|Az\| \leq b(1+\varepsilon)\|z\| \quad \forall z \in X \\ &\Rightarrow \|A\| \leq b(1+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|A\| \leq b \end{aligned}$$

Закончили с первой цепочкой неравенств.

$$\text{Пусть } x \neq 0 \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow d = \sup_{\{x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

$$\text{пусть } z \in X, z \neq 0, \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \leq c \Rightarrow \|Az\| \leq C\|z\| \quad \forall z \in X$$

c — супремум по единичной сфере

$$\Rightarrow \|A\| \leq C$$

□

Пример 5.5. $C[a, b], h(x) \in C[a, b]$ — фиксированная функция. $f \in C[a, b], M_h(f) := h(x) \cdot f(x)$.

$$M_h \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Проверим, что он непрерывен и сосчитаем его норму.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|M_h(f)\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} |h(x) \cdot f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \\ &\Rightarrow M_h \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

получили непрерывность; раз есть общая константа, не зависящая от f , то мы получаем и оценку для нормы

$$\begin{aligned} \chi_{[a, b]}(x) &= 1 \quad \forall x \in [a, b], \chi_{[a, b]} \in C[a, b], \|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1 \\ \|M_h\| &\geq \|M_h(f)\| / \|f\| = 1 \Rightarrow \|M_h\| \geq \|M_h(\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \\ &\Rightarrow \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} = \|h\|_\infty \end{aligned}$$

□

Теперь посмотрим на оператор дифференцирования, это очень важный пример.

Пример 5.6. $Y = C[a, b], X = \{f : \exists f' \in C[a, b]\}, 0 \leq a \leq b$

$X \subset Y, X$ — подпространство Y , то есть

$$\|f\|_X = \|f\|_Y = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$D(f) = f' \Rightarrow D \in \text{Lin}(X, Y),$$

$$D(x^n) = nx^{n-1} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|D(x^n)\|}{\|x^n\|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{nb^{n-1}}{b^n} = +\infty$$

при таком определении нормы оператор дифференцирования D не непрерывен.

Пример 5.7. $Y = C[a, b], X = C^{(1)}[a, b]$

$$\|f\|_X = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

$$D(f) = f' \quad \|D(f)\| = \|f'\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq \underbrace{\max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}}_{\|f\|_X}$$

$$\Rightarrow D \in \mathcal{B}(X, Y), \|D\| \leq 1$$

Теорема 5.4 (вложение пространств в l^p). Пусть $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. $x \in l^{p_1}$. Рассмотрим оператор вложения $Ax = x \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), \|A\| = 1$.

Доказательство. То, что он линейный, мы уже обсуждали, это очевидно. Удобно будет рассматривать последовательности из единичной сферы. $x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{C}$. $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$. Возьмём не просто последовательность из l^{p_1} , но и такую, что $\|x\|_{p_1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} = 1 \quad Ax = x$.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow |x_n| \leq 1 \Rightarrow (|x_n|^{p_2}) < |x_n|^{p_1} \\ \|Ax\|_{p_2} &= \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_2}} = 1 \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \\ \|A\| &= \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \leq 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \leq 1 \quad \text{при } p_2 < +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{теперь } p_2 = +\infty \quad \|x\|_{p_1} = 1 &\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \\ &A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \quad \|A\| \leq 1 \end{aligned}$$

если $e_1 = (1, 0, \dots)$, $\|e_1\|_p = 1 \quad \forall p : 1 \leq p \leq +\infty$

$$\|A\| = \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \geq \|Ae_1\|_{p_2} = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1 \quad \forall p_1 < p_2$$

□

Посмотрим теперь на похожую теорему для больших пространств L^p .

Теорема 5.5 (вложение пространств в $L^p(\mu)$ для конечной меры). $(X, U, \mu), 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty, \mu(X) < +\infty$. Рассмотрим $f \in L^{p_2}, Af = f \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1})$. $\|A\| = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}, (\frac{1}{\infty} = 0)$

Доказательство. Начнём с самого простого случая. То есть что называлось существенно ограниченными функциями. $p_2 = \infty, f \in L^\infty(\mu), |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ п.в. для $x \in X$ по μ .

$$\|Af\|_{p_1} = \|f\|_{p_1} = \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|f\|_\infty \left(\int_X d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$$

Вот у нас получилась константа, которая обслуживает все функции f . Тогда, во-первых, оператор непрерывен, а во-вторых, это и есть оценка для нормы

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1}), \|A\| &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1}} \\ \text{пусть } p_2 < +\infty, f \in L^{p_2}, \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} &= \|f\|_{p_2} \\ \|Af\|_{p_1} = \|f\|_{p_1} = \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \text{ н. Гёльдера} &\leq \left[\left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p_1}} = \\ p = \frac{p_2}{p_1}, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2} & \\ = \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot (\mu(X))^{(1 - \frac{p_1}{p_2}) \frac{1}{p_1}} &= \|f\|_{p_2} (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \\ \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1}), \|A\| &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

Почти всё готово. Мы оценили норму сверху, и утверждается, что на самом деле имеет место равенство. На какой пробной функции получить неравенство с другой стороны? Наверное, все уже догадались. Раз есть \sup , то мы можем подставить какую-то конкретную функцию. $p_2 < +\infty, \chi_X(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned} \|A\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|_{p_1}}{\|f\|_{p_2}} &\geq \frac{\|A(\chi_X)\|_{p_1}}{\|\chi_X\|_{p_2}} = \frac{(\int_X \chi_X^{p_1} d\mu)^{\frac{1}{p_1}}}{(\int_X \chi_X^{p_2} d\mu)^{\frac{1}{p_2}}} = \\ &= \frac{(\mu(X))^{\frac{1}{p_1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{p_2}}} = \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

если $p_2 = \infty, \|\chi_X\|_\infty = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1})} \geq \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$ □

Позже вычислим норму интегрального оператора, который часто встречается в анализе и в матфизике.

Теорема 5.6 (полнота пространства операторов, действующих в банахово пространство). $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, $(Y, \|\cdot\|)$ — банахово $\Rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ — банахово.

Доказательство. Тут без хитростей. По определению возьмём фундаментальную последовательность и покажем, что у нее есть предел. Сначала надо добыть оператор, который будет претендентом на

звание предела. $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная, $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$. Пусть $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$. $x \in X, x$ — фиксирован, $\Rightarrow \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon \|x\|$. Тогда $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная в Y, Y — банахово \Rightarrow

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \in Y, Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \text{ поточечный предел}$$

$$\lim — \text{линейная} \Rightarrow A \in \text{Lin}(X, Y)$$

$$x — \text{фиксирован} \quad \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|, \text{ пусть } m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow A_n - A \in \mathcal{B}(X, Y), \|A_n - A\| \leq \varepsilon \Rightarrow A = (A - A_n) + A_n \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

Поговорим немного о линейных функционалах. Вы только не думайте, что мы покидаем линейные операторы, это всё-таки главный объект изучения функционального анализа.

5.3. Линейные функционалы

Определение 5.7 (линейный функционал). X — линейное пространство над k (\mathbb{R} или \mathbb{C}). $\text{Lin}(X, k)$ — линейные функционалы на X

Определение 5.8 (сопряжённое пространство). $(X, \|\cdot\|), X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ (или же $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$) — сопряжённое пространство. X^* — линейные **НЕПРЕРЫВНЫЕ** функционалы.

Про непрерывность надо помнить. На экзамене часто спрашивают, что такое сопряжённое пространство, и не могут выпытать непрерывность. Что делают с такими студентами? Выгоняют.

Следствие 5.2. $(X, \|\cdot\|), f \in X^* \Rightarrow$

$$\|f\| = \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\| < 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\| = 1\}} |f(x)| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Следствие 5.3. $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow X^* — \text{банахово}$

Доказательство. \mathbb{R} и \mathbb{C} — полные $\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ — банахово ($\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ — банахово). \square

Пример 5.8. $X = l^p, (1 \leq p \leq +\infty), i \in \mathbb{N}$ — фиксированное число

$$x \in l^p \Rightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, f(x) := x_i \Rightarrow f \in X^*, \|f\| = 1$$

$$\begin{aligned} |f(x)| = |x_i| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 1 \leq p < +\infty \text{ и} \\ &\leq \sup_n \|x_n\| = \|x\|_{\infty} \text{ при } p = +\infty \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = X^*, \|f\| \leq 1 \\ \|f\| &= \sup_{\{\|x\|=1\}} |f(x)| \geq |f(e_i)| = 1 \end{aligned}$$

Со временем мы считаем, что такое сопряженное пространство к l^p для конечных p . По секрету, это l^q , где p и q — сопряжены.

Почему всегда рассматривается компакт? Потому что на компакте функция достигает свой максимум, и иначе непонятно, как норму вводить.

Пример 5.9. $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \wedge f \text{ непрерывные}\}, x_0 \in K, K$ — компакт.

$f \in C(K), G(f) := f(x_0) \Rightarrow G \in X^*, \|G\| = 1$ (функционал значения в точке, подлые ангlosаксы говорят point evaluation).

$$\begin{aligned} G &\in \text{Lin}(C(K), \mathbb{C}) \\ f \in C(K), |G(f)| &= |f(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{C(K)} \Rightarrow \\ G &\in X^*, \|G\| \leq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \chi_K(x) = 1, \chi_K \in C(K), \|\chi_K\| = 1, \chi_K(x_0) = 1 \\ \Rightarrow \|G\| = \sup_{\{\|f\|=1\}} |G(f)| \geq |G(\chi_K)| = 1 \end{array} \right. &\Rightarrow \|G\| = 1 \end{aligned}$$

Когда-то мы опишем пространство непрерывных функций, но доказывать, почему оно так выглядит, не будем, ибо это очень сложно, и придётся просто поверить в это описание. Сейчас докажем теорему про норму интегрального оператора в $C[a, b]$. Мы ей даже когда-то нескоро воспользуемся.

Теорема 5.7. $C[a, b] = \{f|f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывная}\}$. Ядро интегрального оператора $k(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$, пусть $f \in C[a, b]$.

$$(\mathcal{K}f)(s) := \int_a^b k(s, t)f(t)dt \quad \text{при } s \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|\mathcal{K}\| = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)|dt$$

Доказательство начнём с важной леммы, помогающей вычислить норму линейного функционала. Когда мы сосчитаем норму линейного функционала, то будет очень нетрудно применить это для вычисления нормы линейного оператора.

Лемма 5.1. $\varphi(t) \in C[a, b], \varphi$ — фиксирована. $f \in C[a, b], G(f) := \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \Rightarrow G \in (C[a, b])^*, \|G\| = \int_a^b |\varphi(t)|dt$.

Доказательство леммы. Оценка сверху совершенно тривиальна. $f \in C[a, b]$

$$\begin{aligned} |G(f)| &= \left| \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)||\varphi(t)|dt \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \cdot \int_a^b |\varphi(t)|dt = \\ &= \|f\|_\infty \int_a^b |\varphi(t)|dt \Rightarrow \\ G &\in (C[a, b])^*, \|G\| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt \end{aligned}$$

Теперь оценка $\|G\|$ снизу. Сначала тривиальные замечания. Если $\varphi(t) \geq 0 \forall t \in [a, b]$, то $\chi_{[a, b]}(x) \equiv 1$

$$|G(\chi_{[a, b]})| = \left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| = \int_a^b \varphi(t)dt$$

Если $\varphi(t) \leq 0 \forall t \in [a, b]$ — то же самое.

$$g(t) = \text{sign } \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \varphi(t) > 0 \\ -1 & \varphi(t) < 0 \\ 0 & \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

$G(g) = \int_a^b |\varphi(t)|dt$, но $g \notin C[a, b]$. До сих пор мы всегда находили пробную функцию, на котором достигался \sup , а здесь такого элемента

нет. Поэтому будем приближать φ непрерывными функциями с точностью до ε , вот такая идея.

Пусть $\varepsilon > 0, \varphi \in C[a, b] \Rightarrow \varphi$ — равномерно непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 \mid s - t \mid < \delta \Rightarrow \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \quad a \leq s, t \leq b$$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, t_k - t_{k-1} < \delta$.

Рассмотрим $\{\Delta_j\}_{j=1}^n$. Δ_j — интервалы $[t_{k-1}, t_k]$. Нумерация будет не по порядку, как сперва может показаться, а совершенно другая, и она никак не будет зависеть от расположения на отрезке. Разобьём интервал на 2 сорта. Первый — где функция положительна или отрицательна, то есть не меняет знак. Второй — где меняет знак или обращается в 0. $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ — те интервалы, на которых $\varphi(t) > 0, t \in \Delta_j$ или $\varphi(t) < 0, t \in \Delta_j$ ($1 \leq j \leq r$)

$\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$ — те интервалы, для которых $\exists s \in \Delta_j : \varphi(s) = 0, n \geq j > r$.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } t \in \Delta_j, j > r \Rightarrow \exists s \in \Delta_j, \varphi(s) = 0 \Rightarrow \\ & \mid \varphi(t) \mid = \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \Rightarrow \int_{\Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt < \varepsilon \mid \Delta_j \mid \\ & \Rightarrow \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt \leq \varepsilon \left(\sum_{j=r+1}^n \mid \Delta_j \mid \right) \leq \varepsilon(b-a) \\ & h(t) = \begin{cases} \text{sign } \varphi(t), t \in \Delta_j & 1 \leq j \leq r \\ \text{линейная на } \Delta_j & j > r \\ \text{если } [a, t_1] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(a) = 0 \\ \text{если } [t_{n-1}, b] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(b) = 0 \end{cases} \quad h \in C[a, b], \mid h(t) \mid \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|G\| &= \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| \geq |G(h)| = \left| \int_a^b h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |h(t)| |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2 \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|G\| \geq \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

□

Главной частью доказательства теоремы было доказательство теоремы. Вернёмся к теореме.

Доказательство. Оценим сначала норму оператора сверху. $(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$, $f \in C[a, b]$. $M = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)| dt$. Мы как раз хотим показать, что норма оператора будет равна M .

$$|(Kf)(s)| \leq \int_a^b |k(s, t)| |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(s, t)| dt \leq M \|f\|_\infty$$

$$\|\mathcal{K}f\|_\infty = \max_s |\mathcal{K}f(s)| \leq M \cdot \|f\| \quad \forall f \in C[a, b] \Rightarrow \mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b])$$

$$\|K\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq M$$

Теперь оценим $\|\mathcal{K}\|$ снизу.

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \int_a^b |k(s, t)| dt \Rightarrow g \in C[a, b] \Rightarrow \\
 \exists s_0 \quad g(s_0) &= \max g(s) \Rightarrow g(s_0) = M
 \end{aligned}$$

применим к произвольной непрерывной функции оператор

$$f \in C[a, b], \|(\mathcal{K}f)(s)\|_\infty = \max_{a \leq s \leq b} |\mathcal{K}f(s)| \geq |(\mathcal{K}f)(s_0)| = \left| \int_a^b k(s_0, t) f(t) dt \right| = |G(f)|$$

где $\varphi(t) = K(s_0, t)$, $G(f) = \int_a^b k(s_0, t)f(t)dt$.

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} \|\mathcal{K}(f)\| \geq \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| = \|G\|_{(C[a,b])^*} \stackrel{\text{лемма}}{=} \int_a^b |\varphi(t)|dt = M \Rightarrow \|K\| = M$$

□

От сопряжённых пространств мы не уходим, а наоборот, углубляемся в них.

5.4. Изоморфные линейные пространства

Определение 5.9 (изоморфность пространств). $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ — **линейно изоморфны**, если $\exists A \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. A — **линейный изоморфизм**

Замечание 5.1. «Изоморфность» — отношение эквивалентности на множестве нормированных пространств.

Когда можно сказать, что два пространства изоморфны?

Теорема 5.8 (критерий линейного изоморфизма). $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $A \in \text{Lin}(X, Y)$, $A(X) = Y$ (то есть A — сюръекция).
 A — линейный изоморфизм \Leftrightarrow пусть $0 < c_1 < C_2 < +\infty$ т.ч.
 $c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \leq C_2 \|x\|$, $\forall x \in X$

Доказательство. \Rightarrow

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(X, Y) &\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, C_2 = \|A\| \\ \exists A^{-1} \mathcal{B}(Y, X) &\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| \quad \forall y \in Y \\ \text{пусть } x \in X, y = Ax &\Rightarrow \|A^{-1}(Ax)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow \\ &\frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \quad c_1 = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \end{aligned}$$

\Leftarrow

$\|Ax\| \leq C_2 \|x\| \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y) (\|A\| \leq C_2)$. Теперь проверим, что A

— инъекция. Без неравенства снизу мы сейчас как раз выведем, что образы различных иксов различны. Пусть $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$

$$0 = \|A(x_1 - x_2)\| \geq c \|x_1 - x_2\| \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow A \text{ — биекция}$$

$$\stackrel{\text{доказали}}{\Rightarrow} \exists A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

$$\begin{cases} c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in X \\ \text{пусть } y \in Y, x = A^{-1}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_1 \|A^{-1}y\| \leq \|y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{c_1} \|y\| \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \left(\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_1} \right)$$

□

Раз нам предстоит потом долгий разговор про обратные операторы, сразу отметим некоторое следствия из доказательства теоремы, чтобы не возвращаться к нему потом.

Следствие 5.4 (из доказательства теоремы).
 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y), A(X) = Y$

$$\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \exists c > 0 : \|Ax\| \geq c \|x\| \quad \forall x \in X$$

Доказательство. Следует из доказательства теоремы. □

Часто бывает, что на одном и том же пространстве определены две различные нормы. Какие же нормы будут называться эквивалентными?

Определение 5.10. X — линейное пространство, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ — две нормы на X . $\|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0$$

По-другому можно сказать, что топологии, которые задают эти нормы, одинаковые: $\Leftrightarrow G \subset X, G$ — открытое в $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow G$ — открытое в $(X, \|\cdot\|_2)$

Следствие 5.5. X — линейное, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ — нормы на X . $\|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 \leq +\infty$ т.ч.

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

хотя в определении не утверждалось, что одну норму можно оценить через другую

Доказательство. $X = (X, \|\cdot\|_1), Y = (X, \|\cdot\|_2)$ — как бы 2 разных пространства, но на одном множестве. Рассмотрим оператор $Ix = x$. Ясно, что $I \in \text{Lin}(X, Y)$, I — биекция, $I^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$. Что означает, что $\|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2$? $\Leftrightarrow I, I^{-1}$ непрерывны $\Leftrightarrow I$ — линейный изоморфизм X и Y $\xLeftrightarrow{\text{т.критерий линейного изоморфизма}}$ $c_1 \|x\|_1 \leq \underbrace{\|Ix\|_2}_{\|x\|_2} \leq C_2 \|x\|_1$

□

Не очень скоро мы получим обобщение этой теоремы. Окажется, что если пространство банахово в обеих нормах, то только одно из последних неравенств влечёт другое.

Утверждение 5.2. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — линейно изоморфны. Пусть X — банахово, тогда Y — банахово.

Доказательство.

$A : X \rightarrow Y \quad A \in \mathcal{B}(X, Y) \quad A$ — линейный изоморфизм

$A^{-1} : Y \rightarrow X \quad A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$

$\{y_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная в $Y \quad x_n = A^{-1}y_n$

$\|x_n - x_m\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\| \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальная в X

теперь применяем наш, слава богу, непрерывный оператор

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Ax_0 \Rightarrow$$

Y полное

□

5.5. Конечномерные пространства

Определение 5.11 (Размерность пространства). X — линейное пространство над \mathbb{C} или \mathbb{R} . Если $\exists n$ линейно независимых элементов в X , и $\forall (n+1)$ элементов линейно зависимы, то $\dim X = n$

Определение 5.12. Если $\forall n \in \mathbb{N} \exists n$ линейно независимых элементов, то X — **бесконечномерное**

Теорема 5.9. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — линейные пространства над \mathbb{C} , $\dim X = \dim Y = n$.

$\Rightarrow X$ линейно изоморфно Y

Доказательство. Поскольку мы обсудили, что изоморфность — отношение эквивалентности, то можно зафиксировать

$$X = l_n^2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}, \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } Y$$

$$A : l_n^2 \rightarrow Y, A(e_j) = f_j$$

утверждается, что это и будет линейный изоморфизм

$$A \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j f_j, A \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$$

$$x \in l_n^2, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j f_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|f_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_{l_n^2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M}$$

мы оценили норму оператора A

$$\Rightarrow \|Ax\|_Y \leq \|x\|_{l_n^2} \cdot M \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|A\| \leq M$$

$$g(x) := \|Ax\| \text{ — функция на } l_n^2 \Rightarrow g(x) \text{ — непрерывна на } l_n^2$$

Теперь рассмотрим эту функцию не на всём пространстве, а на единичной сфере $S = \{x \in l_n^2, \|x\|_2 = 1\}$ — компакт в l_n^2 .

$$x \in S, g(x) > 0, g \text{ непрерывная на компакте } S \Rightarrow \\ \exists x_0 \in S, g(x_0) = \min_{x \in S} g(x), r = g(x_0), r > 0$$

$$\text{пусть } x \in l_n^2, x \neq 0 \quad \frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq r \Rightarrow$$

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq r \Rightarrow \|Ax\| \geq r \|x\| \quad \forall x \in l_n^2$$

\Rightarrow — линейная изометрия

□

Следствие 5.6. $(X, \|\cdot\|), \dim X = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1. X — банахово
2. $K \subset X, K$ — относительно компактно $\Leftrightarrow K$ — ограничено
3. $K \subset X, K$ — компакт $\Leftrightarrow K$ — ограничено и замкнуто

Мы когда-нибудь выясним, что если в пространстве единичный шар — компакт, то это пространство конечномерное.

Доказательство. 1. l_n^2 — полное, X — линейно изоморфно l_n^2 и по утверждению из конца предыдущего параграфа $\Rightarrow l_n^2 X$ банахово

2. $A \in \mathcal{B}(l_n^2, X), A^{-1} \in \mathcal{B}(X, l_n^2), A, A^{-1}$ — непрерывны

3. аналогично 2

□

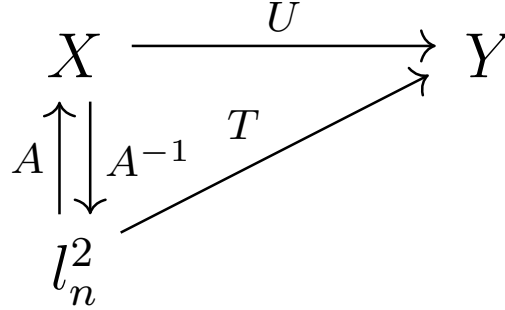
Следствие 5.7. $X, \dim X = n, n \in \mathbb{N}$, на X две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2$

Доказательство. $(X, \|\cdot\|_1)$ линейно изоморфно $(X, \|\cdot\|_2)$.

□

Теорема 5.10. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \dim X = n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \text{Lin}(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$$



Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, потом сведём произвольный случай к частному. Пусть $T \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$.

$$e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$$

$$x \in l_n^2, x = \{x_j\}_{j=1}^n, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow Tx = \sum_{j=1}^n x_j T e_j$$

оцениваем норму простейшим образом

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|T e_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_M \leq \|x\|_2 \cdot M$$

2 множитель не зависит от x , и раз получилась независимая константа, то оператор непрерывен

$$\Rightarrow T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|T\| \leq M$$

теперь произвольный случай, пусть $U \in \text{Lin}(X, Y)$, $\dim X = n$

A — линейный изоморфизм

$$\begin{aligned} T &= UA \in \text{Lin}(l_n^2, Y) \stackrel{\text{доказали}}{\Rightarrow} T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y) \\ \Rightarrow U &= TA^{-1} \quad A, A^{-1} \text{ непрерывны} \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y) \end{aligned}$$

□

ранее мы сформулировали следствие, и теперь скажем пару слов о доказательстве

Следствие 5.8. $(X, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2), \dim X = n < +\infty$

$$\Rightarrow \|\cdot\|_1 \text{ эквивалентна } \|\cdot\|_2$$

Доказательство. $(X = (X, \|\cdot\|_1)), Y = (X, \|\cdot\|_2)$

$$\begin{cases} Ix = x \Rightarrow I \in \text{Lin}(X, Y) \xrightarrow{\text{теорема}} I \in \mathcal{B}(X, Y) \\ I^{-1}x = x \quad I^{-1} : Y \rightarrow X \Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \end{cases} \Rightarrow \|\cdot\|_1 \equiv \|\cdot\|_2$$

$$(\Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 : c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1)$$

Если последовательность сходится в одной норме, то под действием непрерывного оператора сходится и в другой. \square

Последнее, что хочется сказать в этом параграфеЖ

Теорема 5.11. $(X, \|\cdot\|), \dim X = n < +\infty \Rightarrow$

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \quad \dim X^* = n$$

Доказательство.

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

$$\text{пусть } \{e_j\}_{j=1}^n \text{ — базис } X, x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$f_j(x) = x_j, f_j : X \rightarrow \mathbb{C}, f_j \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

проверим $\{f_j\}_{j=1}^n$ базис в X^*

$$f \in X^*, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \alpha_j = f(e_j)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$$

Проверим, что $\{f_j\}_{j=1}^n$ линейно независимы

$$\begin{aligned} \text{пусть } \sum_{j=1}^n c_j f_j = 0, \text{ то есть } 0(x) = 0 \forall x \in X \\ f_j(e_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j \right)}_{=0}(e_k) = c_k \Rightarrow c_k = 0, 1, \dots, n \\ \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } X^* \end{aligned}$$

□

Теперь мы расстаёмся с конечномерными пространствами.

5.6. Конечномерные подпространства

Начнём с некоторого общего определения, которое касается метрических пространств.

Определение 5.13. (X, ρ) — метрическое, $Y \subset X, x_0 \in X, \rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_0, y)$. Если $\exists y_0 \in Y$ т.ч. $\rho(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0)$, то y_0 — **элемент наилучшего приближения** для x_0 в Y

Возникают вопросы, существует ли он, и если да, то единственный ли? Тривиальное замечание

Замечание 5.2. Если Y компакт, то $\exists y_0 \in Y : f(y) = \rho(x_0, y), f(y)$ непрерывна на Y . $\exists y_0, f(y_0) = \min_{y \in Y} f(y)$

теперь мы имеем дело с конечномерным подпространством

Теорема 5.12. $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, $L \subset X$. L — подпространство (в алгебраическом смысле), $\dim L = n < +\infty \Rightarrow$

1. L — замкнутое

2. $\forall x_0 \in X \exists y_0 \in L$ — элемент наилучшего приближения

1. Естественно, о компактности никакой речи быть не может, но конечномерность нам поможет. Во-первых, мы уже отмечали, что все

конечномерные пространства — полные. Ещё мы доказывали линейную изоморфность. Таким образом, L — полное. А ещё почти на первой лекции мы обсуждали, что если есть полное подмножество метрического пространства, то оно автоматически оказывается замкнутым. \square

2.

$$\text{пусть } x_0 \in X \setminus L \quad \rho(x_0, L) = d > 0 \\ \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| \Rightarrow \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in L$$

План такой: мы докажем что последовательность ограниченная, значит, она относительно компактная, и из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, а так как L замкнуто, то предел будет лежать в L . Для оценки воспользуемся неравенством треугольника

$$d < \|x_0 - y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена в } L \\ \dim L < +\infty \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ относительно компактна} \Rightarrow \\ \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0, L \text{ — замкнуто} \Rightarrow y_0 \in L \\ d \leq \|x_0 - y_{n_k}\| \leq d + \frac{1}{n_k} \Rightarrow \text{при } k \rightarrow \infty \|x_0 - y_0\| = d$$

\square

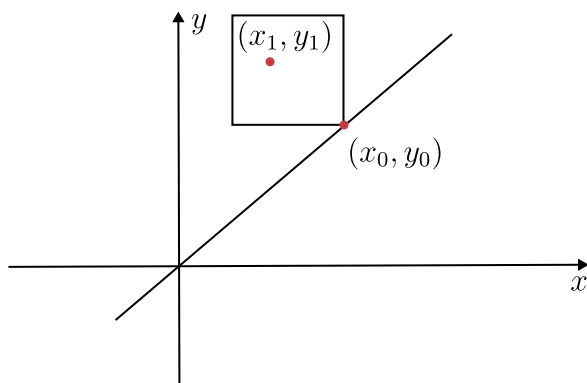
Замечание 5.3. $\dim L < +\infty$, элемент наименьшего приближения может быть не единственным.

Пример 5.10 (l_2^{∞}). $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq 0\}$. (\cdot) — элемент наилучшего приближения, единственный

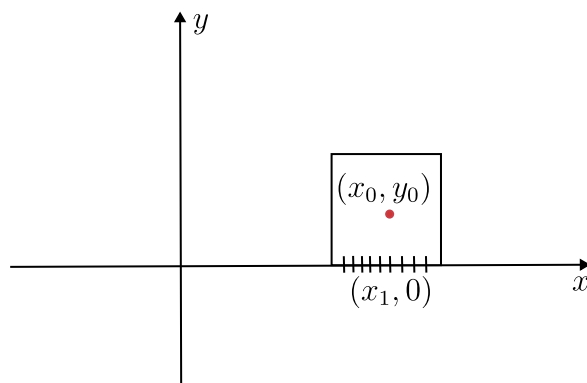
Если допустить $k = 0$, то все точки будут лежать на одном и том же расстоянии от (x_1, y_1) . $\forall x \in [x_1 - y_1, x_1 + y_1], y = 0 \forall (\cdot)$ — элемент наилучшего приближения

Пример 5.11 (l_2^1). $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$, $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq \pm 1\}$, тогда \exists единственный элемент наилучшего приближения. Если же $L = \{y = x\}$, все точки отрезка — элементы наилучшего приближения

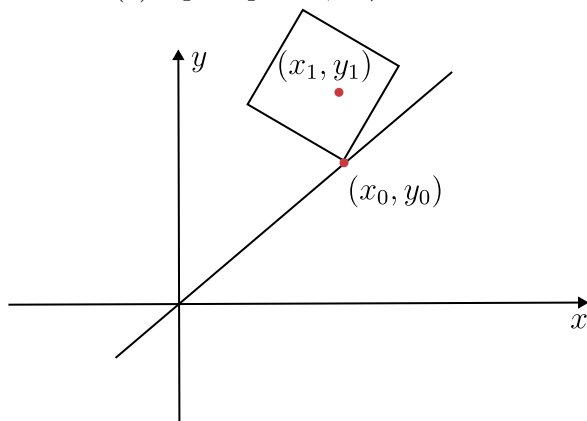
Пример 5.12 (l_2^2). $l_2^2 = \{(x, y) : \|(x, y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}\} \forall L \exists !$ элемент наилучшего приближения, при $1 < p < +\infty$ аналогично



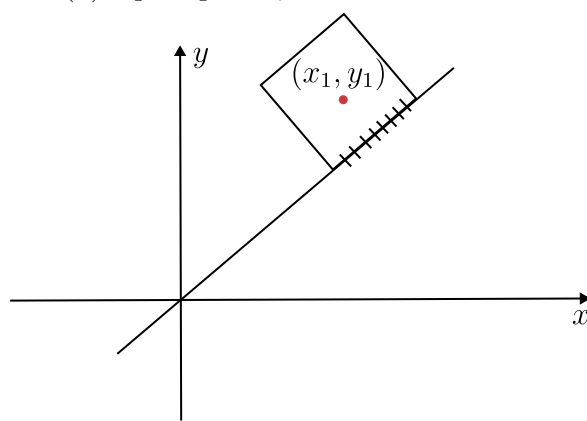
(a) Пример 5.10, $k \neq 0$



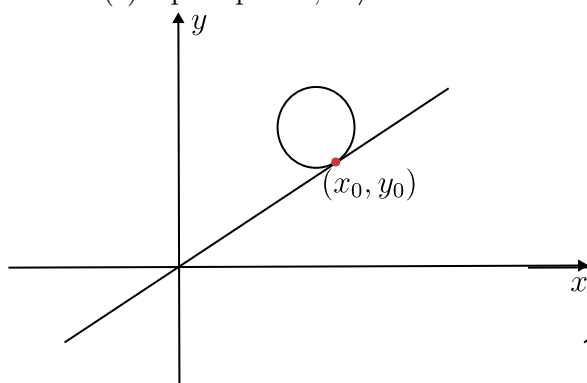
(b) Пример 5.10, $k = 0$



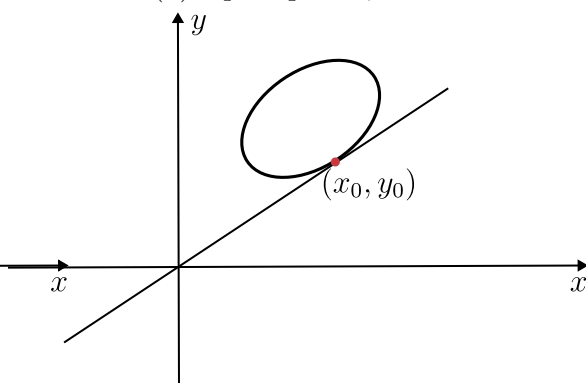
(c) Пример 5.11, $k \neq \pm 1$



(d) Пример 5.11, $k = 1$



(e) Пример 5.12, l_2^2



(f) Пример 5.12, $1 < p < +\infty$

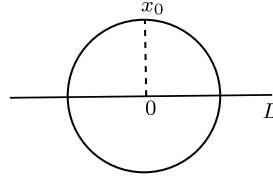


Рис. 5.2: Почти перпендикуляр

Следствие 5.9 (про многочлены). $C_{\mathbb{R}}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\},$

$$\mathcal{P}_n \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \exists p_0 \text{ т.ч. } E_n(f) = \|f - p_0\|_{\infty}, p_0$$

носит торжественное название многочлена наилучшего приближения

Доказательство. $\dim \mathcal{P}_n = n + 1 \Rightarrow \exists p_0$ □

Замечание 5.4. $\exists!$ p_0 , так как $p_0(x) = 0$ только в n точках. В пространстве непрерывных функций единичный шар устроен совершенно кошмарно, хотя норма устроена похожим образом на l^{∞} . В шаре полно отрезков.

5.7. Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром

Лемма 5.2 (Ф.Рисс, о почти перпендикуляре). $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$ — замкнутое подпространство, $0 < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists x_0, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

На рисунке 5.2 показано, причём тут «почти перпендикуляр». Хотелось, чтобы x_0 , был элемент на расстоянии 1, но 1 обеспечить нельзя, но $1 - \varepsilon$ — можно.

Доказательство.

$$z \in X \setminus L, d = \rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\| \Rightarrow \exists y_0 \in L : d \leq \|z - y_0\| < d(1 + \varepsilon)$$

$$x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \|x_0\| = 1$$

оценим норму разности

$$\text{пусть } y \in L \quad \|x_0 - y\| = \left\| \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \underbrace{\left\| z - y_0 - y \|z - y_0\| \right\|}_{\geq d} \geq \frac{d}{d(1 + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

$$\forall y \in L \Rightarrow \rho(x_0, L) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \square$$

Замечание 5.5. Если $\exists y_0 \in L : \|z - y_0\| = d$, то $x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} \Rightarrow \rho(x_0, L) = 1$

Следствие 5.10 (из замечания). $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$ — подпространство, $\dim L < +\infty$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus L, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) = 1$$

А это следствие нам понадобится несколько раз.

Следствие 5.11. $(X, \|\cdot\|), \{L_n\}_{n=1}^\infty, L_n$ — замкнутые подпространства. $L_n \subsetneq L_{n+1}, L_1 \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \in L_n, \rho(y_{n+1}, L_n) \geq \frac{1}{2}, \|y_n\| = 1$$

Доказательство. пусть $y_1 \in L_1, \|y_1\| = 1, L_1 \subsetneq L_2 \xrightarrow{\text{Лемма}} \exists y_2 \in L_2, \|y_2\| = 1. \rho(y_2, L_1) \geq \frac{1}{2}$ и так далее по индукции \square

Теорема 5.13 (Ф.Рисс). $(X, \|\cdot\|), B = \{x : \|x\| < 1\}. \bar{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$

$$\bar{B} \text{ — компакт} \Leftrightarrow \dim X < +\infty$$

Доказательство. \Leftarrow уже доказали

\Rightarrow

пусть $\dim X = \infty \Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — линейно независимы

$$L_n = \text{Lin} \{x_j\}_{j=1}^n, \dim L_n = n, L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\stackrel{\text{Сл.2}}{\Rightarrow} \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \|y_n\| = 1, \rho(y_n, L_{n-1}) > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\|y_n - y_m\| > \frac{1}{2} \forall n, m \Rightarrow \nexists \text{ фундаментальной подпоследовательности} \Rightarrow$$

$$\nexists \{y_{n_k}\} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \Rightarrow \bar{B} \text{ не компакт}$$

□

Вот так нам удалось установить, что если в пространстве единичный шар — компакт, то пространство конечномерное.

Теорема 5.14 (о продолжении линейного оператора). $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, $(Y, \|\cdot\|)$ — банахово, $L \subset X, L$ — подпространство в алгебраическом смысле

$$\bar{L} = X, A \in \mathcal{B}(L, Y) \Rightarrow \exists! V \in \mathcal{B}(X, Y) : \|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \|A\|_{\mathcal{B}(L, Y)}$$

Доказательство. Сначала мы должны распространить оператор, то есть определить, как он будет действовать на произвольный элемент X . Пусть $x \in X$.

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in L, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

$$\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}, Ax_n \in Y, \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная в } Y, \|Ax_n - Ax_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Раз последовательность имеет предел, то она фундаментальная. Значит мы не зря в условии требовали банаховость. Y — банахово, тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \in Y$

$$Vx := \lim_{n \rightarrow \infty} AX_n$$

надо убедиться, что определение корректно, то есть что предел не зависит от изначально выбранной последовательности:

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \\ z_n \in L \quad \|Ax_n - Az_n\| \leq \|A\| \underbrace{\|x_n - z_n\|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \end{aligned}$$

корректность проверена

$$\text{пусть } x \in L, \text{ пусть } x_n = x \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Vx = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax \Rightarrow V|_L = A$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow Vx = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \quad \|Vx\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \cdot \|x_n\| = \|A\| \|x\| \\ \Rightarrow \|V\| \leq \|A\| \\ \|V\| = \sup_{\{x \in X: \|x\|=1\}} \|Vx\| \geq \sup_{\{x \in L: \|x\|=1\}} \|Vx\| = \|A\| \\ \Rightarrow \|V\| = \|A\| \end{aligned}$$

□

Следующая конструкция, которая ранее упоминалась, это факторпространства.

5.8. Факторпространство

Определение 5.14 (класс эквивалентности). X — линейное пространство над \mathbb{C} , Y — подпространство. $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$

$$\begin{aligned} x \sim z \text{ если } x - z \in Y \\ \bar{x} = \{z : z = x + h, h \in Y\} \\ \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \\ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \bar{x} = \overline{\lambda x} \\ \varphi : X \Rightarrow X/Y \quad \varphi(x) = \bar{x} \end{aligned}$$

φ — линейное (канонический гомоморфизм).

Если пространство будет не замкнутым, то будут ненулевые элементы с нулевой нормой (те, что лежат в замыкании).

Определение 5.15. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, Y — замкнутое подпространство. $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$,

$$\|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \rho(x, Y)$$

Теорема 5.15. $(X, \|\cdot\|), Y$ — замкнутое подпространство \Rightarrow

1. $\|\bar{x}\|$ в X/Y удовлетворяет аксиомам нормы
2. $\varphi : X \rightarrow X/Y, \varphi(x) = \bar{x} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| = 1$
3. Если X — банахово, то X/Y — банахово

1.

$$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, x \in X$$

$$\|\lambda \bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|\lambda z\| = |\lambda| \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$$

$$\text{пусть } \bar{x}, \bar{u} \in X/Y, z \in \bar{x}, v \in \bar{u}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \|z + v\| \leq \|z\| + \|v\| \quad \forall z \in \bar{x}, \forall v \in \bar{u} \\ \Rightarrow \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| + \inf_{v \in \bar{u}} \|v\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{u}\| \end{aligned}$$

теперь проверяем в 0, тут как раз нужна замкнутость

$$\|\bar{x}\| = 0 \quad \|\bar{x}\| = \rho(x, Y) = 0 \Rightarrow x \in Y \Rightarrow \bar{x} = Y = \bar{0}$$

□

2. $\|\varphi(x)\| = \|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| \leq \|x\| \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| \leq 1$. По лемме о почти перпендикуляре, пусть $\varepsilon > 0 \exists x_0, \|x_0\| = 1$

$$\begin{aligned} \rho(x_0, Y) &> 1 - \varepsilon \Rightarrow \|\varphi(x_0)\| = \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon \\ \Rightarrow \|\varphi\| &= \sup_{\{x: \|x\|=1\}} \|\varphi(x)\| > 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 1 \end{aligned}$$

□

3. Воспользуемся критерием полноты: если сходится ряд из норм, то сходится и сам ряд. X/Y — полное?

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|\overline{x_n}\| < +\infty & \left(\stackrel{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} \text{сходится в } X/Y \right) \\ \|\overline{x_n}\| = \inf_{z \in \overline{x_n}} \|z\| & \Rightarrow \exists z_n \in \overline{x_n} : \|z_n\| \leq 2 \|\overline{x_n}\| \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < +\infty & X - \text{ банахово, и по критерию полноты } \Rightarrow \\ & \exists S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, s \in X \end{aligned}$$

рассмотрим частичные суммы

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S_n = \sum_{k=1}^n z_k, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \\ \varphi(s_n) = \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} \end{cases} \quad \varphi \text{ непрерывна } \Rightarrow \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = \varphi(s) \in X/Y \\ & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} \Rightarrow X/Y - \text{ банахово} \end{aligned}$$

□

Часть III

Гильбертовы пространства

Глава 6

Гильбертовы пространства

6.1. Введение

Кто-то говорил, что матобесам в курсе ФА надо читать только гильбертовы пространства. Но неизвестно, как жить без трех китов функционального анализа, которые нас ждут дальше :(. А вы бы хотели 32 лекции про гильбертовы пространства?

Определение 6.1. H — линейное пространство над \mathbb{C} . Скалярное произведение $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, $x, y \in H$, (x, y) — скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам

1. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in H$
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
3. $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (комплексное сопряжение)
4. $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

если H над \mathbb{R} , то 3 выглядит как $(y, x) = (x, y)$

Снабдим H нормой: $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ — норма, порожденная скалярным произведением. $(H, \|\cdot\|)$ называется предгильбертовым пространством.

Если $(H, \|\cdot\|)$ полное, то H — гильбертово.

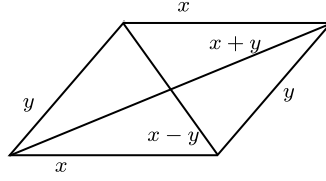


Рис. 6.1: Тождество параллелограмма

Свойство 6.1 (скалярное произведение). 1. $x, y \in H \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (неравенство К-Б)

2. $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы

3. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (тождество параллелограмма)

4. непрерывность (x, y) , то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$

2.

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\|^2 &= (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \bar{\lambda} (x, x) = |\lambda|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Кто не верит в тождество параллелограмма, может проверить сам

4.

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &\leq |(x, y) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x_n, y_n)| = \\ &= |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \\ &\leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y - y_n\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\leq M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \|y\| \Rightarrow \exists M : \|y_n\| \leq M$$

□

Пример 6.1.

$$l_n^2 = \{x : x = \{x_1, \dots, x_n\}, x_j \in \mathbb{C}\}, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, l_n^2 \text{ — гильбертово}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n), y_j \in \mathbb{C}, \overline{y_j} \text{ — комплексное сопряжение}$$

Пример 6.2 (l^2). $l^2 = \{x : x = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2} < +\infty\}$.
 $(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \overline{y_j}$. l^2 — гильбертово

Главый пример

Пример 6.3. (X, U, μ) — пространство с мерой. $L^2(X, \mu)$,

$$\|f\| = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$(f, g) = \int_X f(x) \cdot \overline{g(x)} d\mu, L^2(X, \mu) \text{ — полное, } \Rightarrow \text{ гильбертово}$$

Пример 6.4 (пространство Харди). H^2 — пространство Харди

$$H^2 = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

H^2 линейно изометрически изоморфно l^2 .

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \Rightarrow H^2 \text{ гильбертово}$$

Отметим, где f будет аналитической

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \\ &\Rightarrow R \geq 1 \end{aligned}$$

где R — радиус круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, f \in H^2 \Rightarrow f \text{ аналитическая в } \{z : |z| < 1\}$$

Теперь примеры предгильбертовых пространств

Пример 6.5. F — финитные последовательности.

$(x, y) \in F, (x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ (конечная сумма $F \subset l^2, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}$), $x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$. F — предгильбертово (не полное)

Пример 6.6. $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}\}$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, (f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

не полное \Rightarrow предгильбертово

Пример 6.7. $\mathcal{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{C}, n \geq 0\}$.

$q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k, (p, q) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{b_k}$ предгильбертово. \mathcal{P} — линейно изометрически изоморфно $F : p(x) \rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n) \in F$. Пополнение \mathcal{P} по этой норме до гильбертова пространства есть l^2 .

Пример 6.8. $\mathcal{P}, \mathcal{P} \subset C[a, b]$. $(p, q) = \int_a^b p(x) \overline{q(x)} dx$ — предгильбертово, пополнением \mathcal{P} будет $L^2(a, b)$ по мере Лебега.

Определение 6.2. H — гильбертово,

1. $x, y \in H, (x, y) = 0$, то $x \perp y$ (x ортогонален y)
2. $M \subset H, M$ — подмножество. Ортогональным дополнением к нему будем называть

$$M^\perp = \{y \in H : (y, x) = 0 \forall x \in M\}$$

Свойство 6.2. $M \subset H$ — гильбертово $\Rightarrow M^\perp$ — замкнутое подпространство

Доказательство.

$$\begin{aligned} & y, z \in M^\perp, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ пусть } x \in M \\ & (\lambda y + z, x) = \lambda \underbrace{(y, x)}_{=0} + \underbrace{(z, x)}_{=0} \Rightarrow \lambda y + z \in M^\perp \\ & \text{пусть } \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \in M^\perp, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \text{ пусть } x \in M \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(y_n, x)}_{=0} = (y_0, x) \Rightarrow (y_0, x) = 0 \Rightarrow y_0 \in M^\perp \end{aligned}$$

□

В гильбертовом пространстве всегда существует элемент наилучшего приближения, он ещё и единственный!

Теорема 6.1 (о существовании элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве). H — гильбертово, $M \subset H$, M — замкнутое подпространство, $\forall x \in H \Rightarrow \exists ! z \in M : \|x - z\| = \min_{h \in M} \|x - h\| = \rho(x, M)$

Для произвольного метрического пространства мы доказывали, что если есть конечномерное подпространство, то элемент существует. Доказательство начнём с простой леммы.

Лемма 6.1. H — гильбертово, замкнутое подпространство $M \subset H$. $x \in H \setminus M$, $u, v \in M$, $d = \inf_{h \in M} \|x - h\|$

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

Доказательство. Применим тождество параллелограмма к $(u - x)$, $(v - x)$

$$\|u - v\|^2 + \|u + v - 2x\|^2 = 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2)$$

тут 3 слагаемых из 4 участвуют в формулировке леммы, нужно оценить только второе слагаемое.

$$\|2x - u - v\| = 2 \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\| \geq 2d$$

$$\frac{u + v}{2} \in M \Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

□

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, M)$. Мы ещё не знаем, достигается ли расстояние, но знаем, что $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in M. \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$. План такой: мы докажем, что последовательность фундаментальная, значит, предел лежит в M и всё доказано.

воспользуемся леммой и устремим в получившемся неравенстве n, m к ∞

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &\stackrel{\text{лемма}}{\leq} 2(\underbrace{\|x - y_n\|^2}_{d^2} + \underbrace{\|x - y_m\|^2}_{d^2}) - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^\infty &\text{ — фундаментальная, } H \text{ — гильбертово} \Rightarrow \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= z, z \in M, \text{ т.к. } M \text{ замкнуто} \Rightarrow \\ d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - z\| \end{aligned}$$

теперь проверим единственность

$$\text{пусть } \|x - z\| = d, \|x - u\| = d \quad z, u \in M$$

воспользуемся ещё раз леммой

$$\Rightarrow \|z - u\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x - z\|^2}_{=d^2} + \underbrace{\|x - u\|^2}_{=d^2}) - 4d^2 = 0 \Rightarrow z = u$$

□

Теорема 6.2 (о проекции на подпространство). H — гильбертово, $M \subset H$, M — замкнутое подпространство

$$\forall x \in X \exists ! z, w : x = z + w, z \in M, w \in M^\perp$$

Этот элемент z как раз будет ближайшим элементом, который появился в предыдущей теореме.

Доказательство.

$$d := \rho(x, M) \quad \exists z \in M \quad \|x - z\| = d \quad w := x - z$$

проверим, что $w \perp M$; будем пользоваться тем, что для любой точки расстояние до M больше или равно d

$$\begin{aligned} \text{пусть } u \in M, u \neq 0 \forall t \in \mathbb{R} \quad z + tu \in M \\ d^2 \leq \|x - (z + tu)\|^2 = \|w - tu\|^2 = (w - tu, w - tu) = \underbrace{\|w\|^2}_{=d^2} - t(u, w) - t(w, u) + t^2 \|u\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

так как 2 и 3 слагаемое комплексно сопряжённые

$$t \cdot 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t^2 \|u\|^2$$

неравенство верно для любого вещественного t

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } t > 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t \|u\|^2 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \leq 0 \\ \text{пусть } t < 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \geq t \|u\|^2 \quad \forall t < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) = 0$$

$$\text{аналогично } \forall t \in \mathbb{R} \quad d^2 \leq \|x - (z + itu)\|^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(u, w) = 0$$

$$\Rightarrow (u, w) = 0, \text{ то есть } w \perp M \Rightarrow w \in M^\perp$$

осталось проверить единственность

$$\begin{aligned} \text{пусть } x = z + w, x = z_1 + w_1 \quad z, z_1 \in M, w, w_1 \in M^\perp \\ \Rightarrow u = \underbrace{z - z_1}_{\in M} = \underbrace{w_1 - w}_{\in M^\perp} \Rightarrow u \perp \Rightarrow (u, u) = 0 \\ \Rightarrow u = 0 \Rightarrow z = z_1, w = w_1 \end{aligned}$$

□

Определение 6.3. H — гильбертово, X, Y — замкнутые подпространства. $H = X \oplus Y$. H — ортогональная сумма подпространств X и Y , если

1. $\forall h \in H \exists x \in X, y \in Y : h = x + y$
2. $\forall x \in X, y \in Y (x, y) = 0$

Замечание 6.1.

X, Y — подпространства в H , $X \perp Y$, то есть $\forall x \in X, \forall y \in Y (x, y) = 0 \Rightarrow X \cap Y = \{0\}$.

Доказательство. $u \in X \cap Y \Rightarrow u \perp u \Rightarrow u = 0$

□

Замечание 6.2. Если $H = X \oplus Y$, то $\forall x \in H \exists !x \in X, \exists !y \in Y$ т.ч. $h = x + y$

Доказательство. Пусть $h = x + y, h = x_1 + y_1, x, x_1 \in X, y, y_1 \in Y \Rightarrow$
 $\underbrace{x - x_1}_{\in X} = \underbrace{y_1 - y}_{\in Y} \xrightarrow{\text{Зам.1}} x = x_1, y = y_1$

□

- Следствие 6.1.** 1. M — замкнутое подпространство $\Rightarrow H = M \oplus M^\perp$
2. M — замкнутое подпространство $\Rightarrow (M^\perp)^\perp = M$
3. Если $H = X \oplus Y$, X, Y — замкнутые $\Rightarrow Y = X^\perp$

Определение 6.4 (оператор ортогонального проектирования). H — гильбертово, M — замкнутое подпространство. Знаем, что $\forall x \in H \exists ! z \in M, w \in M^\perp : h = z + w$

$$P_M(h) := z$$

P_M — оператор ортогонального проектирования на M .

Хоть в определении об этом нигде не сказано, но хорошо помнить, что $\|h - z\| = \min_{y \in M} \|h - y\|$. На экзамене часто пристают с вопросом, откуда же взять этот z . $w = P_{M^\perp}(h)$.

Теорема 6.3 (критерий принадлежности оператора множеству ортогональных проекторов). Теорема будет состоять из 2 частей. Первая полегче, в ней опишем простые свойства ортогонального проектора. Вторая посложнее, и в ней будет собственно критерий.

1. M — замкнутое подпространство, $P := P_M \Rightarrow$
- a) $P \in \mathcal{B}(H)$
 - b) $P^2 = P$
 - c) $(Px, y) = (x, Py), \forall x, y \in H$ (по секрету, это самосопряжённость)
2. пусть оператор P удовлетворяет свойствам 1-3 $\Rightarrow M := P(H), M$ — замкнутое, $P = P_M$

1 часть. 1. Сначала проверим, что $P_M \in \text{Lin}(H, M)$

$$h \in H \Rightarrow \exists ! z \in M, w \in M^\perp : h = z + w$$

утверждается, что $P(h) = z$

$$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha h = \alpha z + \alpha w \quad \alpha z \in M, \alpha w \in M^\perp$$

по единственности разложения $\alpha z \Rightarrow$

$$P(\alpha h) = \alpha z$$

пусть $h_1 \in H \Rightarrow h_1 \in z_1 + w_1$ $z_1 \in M, w_1 \in M^\perp$

$$P(h_1) = z_1 \Rightarrow h + h_1 = \underbrace{(z + z_1) + (w + w_1)}_{\text{разложение единственно}} \quad z + z_1 \in M, w + w_1 \in M^\perp$$

$$\Rightarrow P(h + h_1) = z + z_1 = P(h) + P(h_1)$$

Теперь проверим непрерывность P

$$h = z + w, \quad z \perp w \Rightarrow (h, h) = (z, z) + (w, w)$$

$$\|h\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$$

$$z = P(h) \Rightarrow \|P(h)\|^2 \leq \|h\|^2 \Rightarrow P \in \mathcal{B}(H)$$

$$\|P\| \leq 1$$

$$\text{если } M \neq \{0\}, \exists x \in M, x \neq 0 \Rightarrow Px = x \Rightarrow \|P\| \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1$$

$$\Rightarrow \|P\| = 1$$

$$2. \quad x \in M \Rightarrow Px = x,$$

$$\text{пусть } y = Px \Rightarrow y \in M \Rightarrow \underbrace{Py}_{=y=Px} = P(Px) \Rightarrow P^2x = Px$$

3.

$$x, y \in H, P = P_m, Q = P_{M^\perp}$$

$$x = Px + Qx, y = Py + Qy$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) = (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

□

2 часть. $p \in \mathcal{B}(H), M := P(H), M$ — подпространство в алгебраическом смысле. План такой: проверим, что P совпадает с ортогональным проектором на M и что он отправляет ортогональное дополнение в 0. Проверим, что если $x \in M$, то $Px = x$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } x \in M \Rightarrow \exists y \in H : Py = x \Rightarrow P(Py) = Px \\ \text{по свойству ортогонального оператора } P^2 = P \Rightarrow P(Py) = Py = x \end{array} \right\} \Rightarrow x = Px$$

Проверим теперь замкнутость M

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = Px_0 \\ Px_n = x_n &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = Px_0 \Rightarrow x_0 = Px_0 \Rightarrow x_0 \in P(H) = M \end{aligned}$$

осталось убедиться, что оператор P отправляет в 0 ортогональное дополнение

$$\text{пусть } y \in M^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \|Py\|^2 &= (Py, Py) \stackrel{\text{самосопряжённость}}{=} (y, P(Py)) = (y, Py) \text{ т.к. } y \in M^{\perp}, Py \in M = 0 \\ &\Rightarrow Py = 0 \end{aligned}$$

□

Мы знаем, что оператор совпадает на M , а ортогональное дополнение отправляет в 0

$$\begin{aligned} h \in H &\Rightarrow h = z + w, z \in M, w \in M^{\perp} \\ &\Rightarrow P(z + w) = z \\ &P_m(z + w) = z \\ &\Rightarrow P = P_m \end{aligned}$$

Следствие 6.2 (ортогональный оператор на конечномерное подпространство). H — гильбертово, подпространство $M \subset H$, $\dim M = n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \{e_j\}_{j=1}^n &\text{ — ортонормированный базис} \\ (e_j, e_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}, x \in H, P_M(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \end{aligned}$$

Доказательство. $s_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, s_n \in M, w := x - s_n$. Проверим, что $w \in M^{\perp}$. Для этого проверим, что он ортогонален всем e_j

$$\begin{aligned} (s_n, e_k) &= \left(\sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, e_k \right) = (x, e_k) \\ &\Rightarrow (x - s_n, e_k) = 0 \Rightarrow (w, e_k) = 0 \forall k, 1 \leq k \leq n \\ &\Rightarrow w \perp M, \Rightarrow w \in M^{\perp} \Rightarrow P_M(x) = s_n \end{aligned}$$

□

Следствие 6.3 (критерий полноты системы элементов в гильбертовом пространстве). H — гильбертово, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in H$ (A — множество индексов)

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} &\Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = H \\ L &= \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}} \\ L = H &\Leftrightarrow L^\perp = \{0\} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0) \end{aligned}$$

□

Несмотря на то, что доказательство тривиальное, этот критерий полноты очень полезен.

Упражнения, которое когда-то давали в качестве задачи на 5 на экзамене

Утверждение 6.1. $l^2, L = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$.
Нужно доказать, что L — плотно в l^2

Утверждение 6.2. $z \in \mathbb{C}, |z| < 1, x_z = \{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\} \in l^2$.
 $\{z_n\}_{n=1}^\infty, |z_n| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ Нужно доказать, что $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$ — плотное семейство в l^2

Утверждение 6.3. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, |a| < 1$. Нужно доказать, что $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$ — плотное семейство в l^2

То, что $|a| < 1$ — очень важно. При равенстве утверждения неверны.

Определение 6.5 (коэффициент Фурье). H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система

$$(e_j, e_k) = 0 \text{ при } j \neq k$$

$$(e_k, e_k) = 1, \|e_k\| = 1$$

$$M_n = \{\alpha e_n | \alpha \in \mathbb{C}\}, \dim M_n = 1, P_{M_n}$$

$$x \in H, P_{M_n}(x) = (x, e_n)e_n$$

$$(x, e_n) \text{ — коэффициент Фурье}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n \text{ ряд Фурье по системе } \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Определение 6.6.

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональная система (ОС)

$$(e_j, e_k) = 0, j \neq k, e_n \neq 0$$

$$M_n = \{\alpha e_n : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$P_{M_n}(x) = \left(x, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right) \frac{e_n}{\|e_n\|} = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n$$

коэффициент Фурье по системе $\{e_n\}$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|(x, e_n)\|}{\|e_n\|^2} e_n$$

Когда мы пишем $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, мы подразумеваем бесконечномерность пространства. Если же вы возьмёте книжку Колмогорова, то гильбертово пространство в ней по определению бесконечномерное. Однако И.В. решил убрать это условие в своём курсе, Ввдь есть теория конечномерных банаховых пространств, где переходят к пределу и получают утверждения про бесконечномерные пространства. В общем: если вам попадётся кровожадный помощник на экзамене и вы скажете, что гильбертово пространство бесконечномерное, он спросит: «С какод стати?». Если не скажете — то он скажет, что вы даже не знаете определение, и вы в любом случае получите 2.

Следствие 6.4 (неравенство Бесселя). H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — О.Н.С., $x \in H \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \alpha_j \in \mathbb{C} \Rightarrow \\ \|h\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \\ L_n &= \mathcal{L} \{e_j\}_{j=1}^n, P_{L_n}(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \\ \|P_{L_n}\| &\leq 1 \Rightarrow \|P_{L_n}(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^n |(x, e_j)| &\leq \|x\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

Сейчас выясним, когда неравенство превращается в равенство, то есть когда можно узнать норму, вычислив эту сумму.

Теорема 6.4 (о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье). H — гильбертово, $x \in H$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — О.Н.С., тогда следующие условия равносильны

1. $x \in \overline{\mathcal{L} \{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$
2. $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$
3. $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ (равенство Парсеваля)

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$

По виду первое утверждение куда более слабое, чем второе. В первом

можно приблизить элемент сколько угодно хорошо какими-то элементами. Во втором же есть сходимость к какому-то ряду.

$$x \in H, x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}, \text{ пусть } \varepsilon > 0$$

$$\exists y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_n = \mathcal{L}\{e_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \rho(x, L_n) < \varepsilon \quad P_{L_n}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j}_{:= s_n}$$

$$\Rightarrow \|x - s_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon \quad L_n \subset L_{n+1} \Rightarrow$$

$$\|x - s_{n+1}\| \leq \|x - s_n\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall m \geq n \quad \|x - s_m\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$$

$$2 \Rightarrow 1 \text{ очевидно: } x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}}$$

$$2 \Rightarrow 3$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{ и по непрерывности скалярного произведения } \Rightarrow (x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, s_n) \Leftrightarrow$$

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

$$3 \Rightarrow 2$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \|x\|^2$$

$$w_n := x - s_n, \quad w_n \perp s_n \Rightarrow \|x\|^2 = \underbrace{\|s_n\|^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|^2} + \|w_n\|^2$$

$$\|s_n\|^2 = \sigma_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - s_n\| = 0$$

□

Следствие 6.5. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная О.Н.С \Rightarrow

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

Доказывать нечего, принадлежность линейной оболочке означает полноту.

Определение 6.7. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — базис (Шаудера), если

$$\forall x \in X \exists! \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \alpha_n \in \mathbb{C} : x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$$

Пример 6.9. $l^p, 1 \leq p < +\infty, e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$

$$x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n, \|x - s_n\|_{l^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$c_0, x \in c_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \quad \|x - s_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Упражнение: $c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\} \subset l^\infty$. Что тут будет базисом?

Замечание 6.3. Если в $(X, \|\cdot\|)$ есть базис, то X — сепарабельно.

Замечание 6.4 (Проблема Банаха, проблема базиса). Проблема Банаха, проблема базиса

X — нормированное сепарабельное $\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists$ базис

Собирались товарищи во Львове в кафе и выводили эти проблемы. Обычно математики любят сидеть в тишине, вот Банах любил сидеть в кафе. Вероятно, они там не только чай гоняли. Пер Энфлю в 1973 году дал ответ на этот вопрос: нет. Он предоставил множество контр-примеров. Да и вообще он знаменит своими контр-примерами. Сейчас в Америке где-то работает.

Следствие 6.6. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — полная О.Н.С. $\Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^\infty$ — базис в H

Доказательство.

$$x \in H \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

$$\text{проверяем единственность: пусть } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n, e_k) = (x, e_k)$$

$$\text{пусть } n \geq k \Rightarrow (\sigma_n, e_k) = \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = (x, e_k)$$

□

Теорема 6.5 (о существовании О.Н.Б. в сепарабельном гильбертовом пространстве). H — сепарабельное гильбертово пространство \Rightarrow

$$\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б.}$$

По секрету, если убрать сепарабельность, то базис будет несчётный. Какова размерность, такой и базис. Обычно, когда говорят о гильбертовом пространстве, подразумевают гильбертово сепарабельное.

Доказательство. Будем действовать в 2 этапа. Сепарабельность означает, что есть счётное всюду плотное множество, возьмём его: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 1 этап: по индукции выберем из него линейно независимую систему так, чтобы замыкание их линейной оболочки совпадало с замыканием линейной оболочки x_n . Оно будет полным и линейно-независимым. Потом применим к нему ортогонализацию Грама-Шмидта (а он ученик Гильберта, кстати)

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n_1-1} = 0, x_{n_1} \neq 0 \quad z_1 = x_{n_1}$$

$$L_1 = \mathcal{L}(z_1) = \{\alpha z_1 | \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2-1} \in L_1, x_{n_2} \notin L_1, z_2 = x_{n_2}, L_2 = \mathcal{L}(z_1, z_2)$$

$$\text{пусть выбрали } z_1, \dots, z_m$$

$$z_m = x_{n_m}, x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, x_{n_{m+1}} \notin L_m$$

$$z_{m+1} = x_{n_{m+1}}$$

как мы их выбираем?

$$\begin{aligned} \{z_j\}_{j=1}^{\infty} & \text{ — линейно независимы} \\ \mathcal{L}(z_j)_{j=1}^m = \mathcal{L}\{x_k\}_{k=1}^{n_m} \quad \forall m \Rightarrow \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \Rightarrow H = \overline{\mathcal{L}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}} \Rightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — полная} \end{aligned}$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{z_1}{\|z_1\|}, \text{ пусть } e_1, \dots, e_{n-1} \text{ — выбрали } \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{n-1} = \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{n-1} \\ L_n = \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^n, L_n \subsetneq L_{n+1} \quad e_n &= \frac{z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} = \frac{z_n - \sum_{j=1}^{n-1} (z_n, e_j) e_j}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} \Rightarrow \\ \{e_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — полная О.Н.С.} \Rightarrow \\ \{e_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — базис (Шаудера)} \end{aligned}$$

□

Теперь докажем, что все сепарабельные линейные пространства похожи друг на друга как две капли воды: не просто линейно изоморфны, а линейно изометрически изоморфно. Для конечномерных тоже верно, нужно только рассматривать пространства одинаковой размерности.

Теорема. Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства линейно изометрически изоморфны друг другу

Доказательство. H — гильбертово сепарабельное, $\dim H = \infty$. Мы обсуждали, что линейный изоморфизм — отношение эквивалентности, отношение изометричности — тоже. Поэтому линейный изометрический изоморфизм есть отношение эквивалентности. Поэтому вместо того, чтобы брать H_1, H_2 , возьмём H и l^2 и покажем, что они линейно изометрически изоморфны.

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — О.Н.Б. в } H \\ \varphi : H \rightarrow l^2 \quad x \in H \quad x & \mapsto \{(x, f_n)\}_{n=1}^{\infty} \\ \|x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |(x, f_n)|^2 \Rightarrow \|x\|_H = \|\varphi(x)\|_{l^2} \\ \varphi \in \text{Lin}(H, l^2) \text{ очевидно} & \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(H, l^2) \\ \varphi & \text{ — инъективен} \end{aligned}$$

проверим, что φ — сюръекция

$$\begin{aligned} & \text{пусть } y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \\ & s_n = \sum_{k=1}^n y_k f_k, s_n \in H, \text{ пусть } m > n \\ & \|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |y_k|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{s_n\} \text{ — фундаментальная} \\ & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, s = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f_k \Rightarrow \varphi(s) = y \end{aligned}$$

□

Замечание 6.5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, H — гильбертово пространство, $\dim H = m \Rightarrow H$ — линейно изометрически изоморфно l_m^2 .

6.2. Пространство, сопряжённое к гильбертову

Опишем все непрерывные функционалы в гильбертовом пространстве H .

Теорема (Ф.Рисс, общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве). H — гильбертово. Опишем набор линейных функционалов: покажем, что он непрерывный. Вторая часть будет утверждать, что других нет.

1. $y \in H, y$ — фиксирован. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} f_y : H &\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, y) \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H \end{aligned}$$

2. $f \in H^* \Rightarrow \exists ! y \in H : f = f_y$, то есть $f(x) = (x, y) \quad \forall x \in H$

1 часть.

$f_y \in \text{Lin}(H, \mathbb{C})$ — очевидно из свойств скалярного произведения

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &= |(x, y)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} \leq \|y\|_H \end{aligned}$$

проведём тривиальное отбрасывание тривиальных случаев

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow f_y = 0 \quad \|f_y\| = 0 \\ \text{пусть } y \neq 0 \quad \|f_y\| &= \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|f_y(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\| \\ &\Rightarrow \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H \end{aligned}$$

□

2 часть. Намёк, откуда брать y : мы знаем, что $f_y(x) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \{y\}^\perp$. Сначала рассмотрим и отбросим тривиальный случай: пусть $f(x) = 0$, то есть $f(x) = 0 \forall x \in H \Rightarrow$ пусть $y = 0, f = f_0$. Теперь пусть $f \neq 0, N = \text{Ker } f (N = f^{-1}(0)) \Rightarrow n \subsetneq H, f$ — непрерывный $\Rightarrow N$ — замкнутое подпространство. Значит, существует нетривиальное ортогональное дополнение N^\perp , то есть $N^\perp \neq \{0\}$, пусть $x_0 \in N^\perp, x_0 \neq 0$

$$, v = \frac{x_0}{f(x_0)}, f(x_0) \neq 0, f(v) = 1, f(v) = \frac{1}{f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1$$

установим следующую вещь: $\dim N^\perp = 1$, то есть все элементы дополнения кратны v ; вообще, это очевидно, гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма, помните такую скороговорку из алгебры? но сейчас докажем аккуратно

$$\begin{aligned} \text{пусть } u \in N^\perp \quad \alpha &:= f(u) \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \\ \Rightarrow f(u - \alpha v) &= 0 \Rightarrow u - \alpha v \in N \\ u, v \in N^\perp &\Rightarrow u - \alpha v \in N^\perp \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow f(u - \alpha v) &= 0 \\ u, v \in N^\perp \end{aligned}} \right\} u - \alpha v = 0 \Rightarrow u = \alpha v \\ \forall u \in N^\perp f(u) &= \alpha \Rightarrow u = \alpha v \\ u = \alpha v &\Rightarrow f(u) = \alpha \end{aligned}$$

v уже почти то, что нам надо, но мы его ещё должны нормировать, чтобы не отправлять те же элементы в 0, что и f ; найдём $\beta : f_{\beta v}(v) = 1 = f(v)$

$$f_{\beta v}(v) = (v, \beta v) = \overline{\beta} \|v\|^2 = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\|v\|^2}$$

$$y = \frac{v}{\|v\|^2}$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in H, x &= h + \alpha v, h \in N, \alpha v \in N^\perp \\ f(x) &= \alpha, f_y(x) = \alpha \Rightarrow f = f_y \end{aligned}$$

Всё, что осталось проверить, это единственность:

$$\begin{aligned} f_y = f_z &\Rightarrow (x, y) = (x, z) \forall x \in H \\ &\Rightarrow (x, y - z) = 0 \forall x \in H \Rightarrow y - z = 0 \end{aligned}$$

□

Замечание 6.6. Рассмотрим отображение $C : H \rightarrow H^*, C(y) = f_y$. Во-первых, с суммой всё в порядке: $C(y + z) = f_{y+z} = f_y + f_z = C(y) + C(z)$. А с умножением на комплексное число уже не всё хорошо: пусть $\alpha \in \mathbb{C}, C(\alpha y) = f_{\alpha y}, f_{\alpha y}(x) = \overline{\alpha}(x, y) = \overline{\alpha}f_y(x), C(\alpha y) = \overline{\alpha}C(y)$, то есть умножение не совсем линейное. Но $\|C(y)\|_{H^*} = \|y\|_H, C$ — **антилинейный изометрический изоморфизм**. Удобно думать, что сопряжённое к гильбертову пространство — это оно само. Говорят: $H^* = H$, а имеют в виду это взаимно-однозначное соответствие $C(H) = H^*$. Это очень просто, но фантастически удобно: сопряжённое — это оно само, но за удобство надо платить: α переходит в $\overline{\alpha}$.

Пример 6.10. Есть $l^2, (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, x, y \in l^2$. Как устроены все линейные функционалы в пространстве последовательностей l^2 ? $f \in (l^2)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^2 : f(x) = (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Пример 6.11. $(X, \mu), L^2(X, \mu), (f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$

$$F \in (L^2(X, \mu))^* \Rightarrow \exists ! g \in L^2(X, \mu) : F(f) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

Посмотрим сейчас чуть-чуть, как эта теория применяется к классическим рядам Фурье, которые были у нас в анализе.

6.3. Классические ряды Фурье

Как сходятся ряды Фурье в L^2 по мере Лебега?

Пример 6.12.

$$L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] \text{ по мере Лебега } dx, (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Для того, чтобы что-то утверждать, нам понадобится второй вариант теоремы Вейерштрасса: но доказывать мы его не будем.

Теорема (Вейерштрасса). $f \in \tilde{C}_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] (f \in C[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi))$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$\|f - T\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

то есть существует многочлен, который приближает нашу функцию с точностью до ε

Теорема 6.6. $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ — полная О.С. в $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos(mx) dx = 0 (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin(mx) dx = 0 (n \neq m)$$

$\Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ортонормированная система

мы уже доказали, что $C[-\pi, \pi]$ плотно в $L^2[-\pi, \pi]$ по мере Лебега, то есть любую функцию из L^2 можно приблизить сколь угодно хорошо, найдя такую функцию g , что разность интегралов будет меньше ε , но g в отличие от f — 2π -периодическая

$\Rightarrow \tilde{C}[-\pi, \pi]$ плотно в $L^2[-\pi, \pi]$

$$\exists g \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \exists \delta > 0 : g(x) = f(x), x \in [-\pi, \pi - \delta]$$

$\Rightarrow \tilde{C}[-\pi, \pi]$ плотно в $L^2[-\pi, \pi]$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L^2[-\pi, \pi] \exists g \in \tilde{C}[-\pi, \pi], \|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$$

по теореме Вейерштрасса $\exists T = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$

$$\|g - T\|_{\infty} < \varepsilon \Rightarrow \|g - T\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < (\varepsilon^2 \cdot 2\pi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f - T\|_2 < \varepsilon(1 + \sqrt{2\pi}) \Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\} — полная$$

□

Следствие 6.7. Пусть $f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Теперь что же значит $f(x)$ разлагается в свой ряд Фурье?

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Rightarrow$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (*)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ в смысле } (*)$$

Пример 6.13. $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], f \in L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], f = u + iv$

$$u, v \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\} - \text{ОНБ}$$

Пример 6.14. $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} - \text{полная О.С.}$

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, (e^{inx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), n \neq 0$$

$$c_0 = a_0$$

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = S_n x$$

$$\|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} - \text{полная система}$$

Пример 6.15. $L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi], \{\cos nx\}_{n=0}^{+\infty} - \text{полная О.С.}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 & f \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi], \text{ пусть } f(-x) = f(x), x \in (0, \pi] \\
 & f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi], b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 \\
 & \|f - S_n(f)\|_{L^2[-\pi, \pi]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \left\| f - \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

□

Прощаемся с гильбертовыми пространствами.

Часть IV

Линейные функционалы

Глава 7

Геометрический смысл линейного функционала

Линейное пространство, без нормы, без топологии, может, уже даже в алгебре доказывали такую теорему.

Теорема 7.1. X — линейное пространство над \mathbb{C} (\mathbb{R})

1. $f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), f \neq 0, L = \text{Ker } f \Rightarrow$

$$\dim(X/L) = 1$$

$\text{codim } L := \dim(X/L)$ — коразмерность, не то чтобы мы будем этим пользоваться, просто сообщение по секрету

2. пусть $L \subset X, L$ — подпространство, такое что $\dim(X/L) = 1$.
1. $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow \exists ! f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), L = \text{Ker } f, f(x_0) = 1$

Поскольку образ одномерен, это и означает, что фактор по ядру имеет такую же размерность, а образ у нас это \mathbb{C}

1 утверждение. Пусть $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow f(x_0) \neq 0, v = \frac{x_0}{f(x_0)} \Rightarrow f(v) = 1$

$$(X/L) = \{\bar{x}\}_{x \in X}, \bar{x} = \{x + y | y \in L\}$$

возьмём какой-то $x \in X, \alpha := f(x), f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha$

$$\Rightarrow f(x - \alpha v) = 0 \Rightarrow x - \alpha v \in L \Rightarrow \bar{x} = \alpha \bar{v}$$

$$\Rightarrow \dim(X/L) = 1$$

□

2 утверждение.

$$(X/L) = \{\bar{x}\}_{x \in X} \dim(X/L) = 1 \Rightarrow \forall x \in X \exists \alpha \in \mathbb{C} : \bar{x} = \alpha \bar{x}_0$$

определим $f : X \rightarrow \mathbb{C}$

установили, что $\forall x \exists \alpha \in \mathbb{C} : \bar{x} = \alpha \bar{x}_0, f(x) := \alpha \Rightarrow f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$

$$f(x_0) = 1$$

$$\text{пусть } f(x) = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \cdot \bar{x}_0 = \bar{0} = L \Rightarrow x \in L \Rightarrow$$

$$\text{Ker } f = L$$

Проверим единственность:

$$\text{пусть } g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), \text{Ker } g = L, g(x_0) = 1$$

$$\forall x \in X \ x = y + \alpha x_0 \text{ где } y \in L, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha, g(x) = \alpha$$

□

докажем теперь что-то с функционалами для нормированного пространства

Теорема 7.2 (норма линейного функционала). $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. $f \in X^*, f \neq 0, L = \text{Ker } f, f(x_0) = 1 \Rightarrow \|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$

Доказательство.

$$L = f^{-1}(0) \Rightarrow L \text{ — замкнутое}$$

$$d = \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|$$

$$1 = f(x_0) = f(x_0 - y) \Rightarrow |f(x_0 - y)| \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y\| \ \forall y \in L$$

$$\Rightarrow 1 \leq \|f\| \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| = \|f\| \cdot d \Rightarrow \frac{1}{d} \leq \|f\|$$

Получили неравенство в одну сторону. Теперь в другую:

$$x \notin L \Rightarrow f(x) \neq 0, f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1, f(x_0) = 1 \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x}{f(x)} - x_0\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{f(x)} - x_0 = y, y \in L$$

$$\Rightarrow \frac{x}{f(x)} = x_0 - (-y) \Rightarrow \left\| \frac{x}{f(x)} \right\| = \|x_0 - (-y)\| \geq d$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{d} \cdot \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \frac{1}{d}$$

Вот и получили, что было обещано: $\|f\| = \frac{1}{d}$

□

Замечание 7.1. В условиях теоремы, $M = f^{-1}(1)$, тогда $M = x_0 + L$, $\rho(x_0, L) = \rho(0, M)$. Вместо того, чтобы рассматривать ядро, можно рассматривать такое «сдвинутое ядро». Подпространство L можно сдвинуть на вектор, это довольно очевидно, не будем это доказывать.

7.1. Продолжение линейного функционала

Новый раздел, в котором наконец появится существенная теорема, до этого были так...

Будет задан функционал с дополнительным условием, и мы будем продолжать его на всё пространство так, чтобы условие сохранилось. Нам понадобится не только анализ, но и математическая логика, в частности, лемма Цорна. Поскольку нам никто её не рассказывал, придётся её рассказать. Нам понадобится индукция: но не обычная, ведь у нас какие-то гигантские пространства, переход от n к $n+1$ нам ничем не поможет, нужен более хитрый трюк.

Определение 7.1 (частично упорядоченное множество). \mathcal{P} **частично упорядоченное множество**, если $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, $(a, b) \in \mathcal{R}$, то есть $a \leq b$. \mathcal{R} — порядок, если выполнены аксиомы

1. $\forall a \in \mathcal{P}, (a, a) \in \mathcal{R}$, то есть $a \leq a$ (рефлексивность)
2. если $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ (транзитивность)
3. если $(a \leq b \wedge b \leq a)$, то $a = b$ (антисимметричность)

важно, что не для всех элементов определён порядок, а для каких-то

Определение 7.2 (линейно упорядоченное множество). \mathcal{P} — частично упорядоченное, $A \subset \mathcal{P}$, A — линейно упорядочено, если $\forall a, b \in A, a \leq b$ или $b \leq a$

Определение 7.3 (верхняя грань множества). $A \subset \mathcal{P}$, x — верхняя грань для A , если $a \leq x \forall a \in A$

Определение 7.4 (максимальный элемент множества). y — максимальный элемент в \mathcal{P} , если $y \leq a \Rightarrow y = a$. Максимальный в том смысле, что больше него не существует, но таких максимумом может быть хоть миллион, и они между собой не сравнимы.

Лемма (Цорн). Если в \mathcal{P} любое линейно упорядоченное множество имеет верхнюю грань, то в \mathcal{P} есть максимальный элемент

Аксиома (Выбора). $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}, B_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \exists C = \{b_\alpha : b_\alpha \in B_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Если есть алгоритм выбора элементов из множества, то пользуемся им, без этой аксиомы.

Для общего развития: Аксиома Выбора \Leftrightarrow Лемма Цорна.
Закончили с ликбезом по теории множеств.

Определение 7.5 (выпуклый функционал). X — линейное пространство над \mathbb{C} (\mathbb{R}). $p : x \rightarrow \mathbb{R}, p$ — выпуклый функционал, если

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$
2. $p(tx) = tp(x) \forall t \geq 0$

Замечание 7.2. p — полунома, тогда $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow p$ — выпукльный функционал

Считается, что весь линейный функциональный анализ стоит на трёх китах, и мы дошли до Кита №1.

Теорема 7.3 (Хан-Банах, о продолжении линейного функционала в вещественном пространстве). X — линейное пространство над \mathbb{R} , $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, p — выпуклый функционал. $L \subset X$, L — подпространство, $f \in \text{Lin}(L, \mathbb{R})$, $f(x) \leq p(x) \forall x \in L$ (говорят f подчинён p)

$$\exists g \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}), g(x) = f(x), x \in L \quad g(x) \leq p(x) \forall x \in X$$

Тут очень важно, что пространство вещественное, у нас будет другая теорема для комплексного. Эта теорема всё время возникает, мы ей либо по умолчанию пользуемся, либо следствиями из неё.

Доказательство будет состоять из 2 частей. Первая: — естественная часть МА, покажем, что существует функционал, продлённый на одну размерность больше и который совпадает с f на подпространстве. Во второй части продлим на всё X , там нам и понадобится это логическое жульничество.

Доказательство.

$$f \in \text{Lin}(L, \mathbb{R}), z \in X \setminus L$$

$$L_1 = \mathcal{L}(L, z) = \{x + tz : t \in \mathbb{R}, x \in L\}$$

докажем, что $\exists f_1 \in \text{Lin}(L, \mathbb{R}) : f_1|_L = f, f_1(y) \leq p(y) \forall y \in L_1$; мы можем распорядиться только значением f_1

$$f_1(z) = c \quad c \in \mathbb{R}, \text{ выберем «с» так, как надо}$$

$$y = x + tz \in L_1 \Rightarrow f_1(y) = f(x) + tc$$

хотим доказать $f(x) + tc \leq p(x + tz) \forall t \in \mathbb{R}$, и, так как можно из функционала выносить только положительные числа, это эквивалентно

$$\begin{cases} f(x) + tc \leq p(x + tz) & t > 0 \\ f(x) - tc \leq p(x - tz) & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) & \forall t, \frac{x}{t} \in L \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \leq p\left(\frac{x}{t} - z\right) & \forall t, \frac{x}{t} \in L \end{cases} \Leftrightarrow x \in L$$

$$u = \frac{x}{t}, u \in L, v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} f(u) + c &\leq p(u + z) \\ f(v) - c &\leq p(v - z) \end{aligned} \right] \Leftrightarrow$$

$$f(v) - p(v - z) \leq c \leq p(u + z) - f(u), u, v \in L$$

если такое c есть, все хорошо, а если нет — ужасно

$$\text{обозначим } A = \{f(v) - p(v - z) : v \in L\} \subset \mathbb{R}, B = \{p(u + z) - f(u) : u \in L\} \subset \mathbb{R}$$

проверим, что $\forall a \in A, \forall b \in B a \leq b$. это и будет означать, что между этими множествами и есть какой-то элемент (из-за полноты вещественной прямой)

$$f(v) - p(v - z) \leq p(u + z) - f(u) \Leftrightarrow$$

$$f(v) + f(u) \leq p(u + z) + p(v - z)$$

$$f(v) + f(u) = f(u + v) \leq p(u + v) \text{ из-за выпуклости } p \leq p(u + z) + p(v - z), u + v \in L$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f_1(z) = c \Rightarrow f_1(y) \leq p(y) \forall y \in L_1, f_1|_L = f$$

итак, мы продолжили функционал на размерность+1, и если бы было сепарабельное или банахово пространство, мы бы ограничились обычной индукцией, увеличивая размерность на 1, и по непрерывности пришли бы к пределу, и замыкание было бы всем X . Но раз у нас всего этого нет, мы будем пользоваться леммой Цорна, которая по всем кардиналам эквивалентна трансфинитной индукции. Что же у нас тут будет частично упорядоченным множеством? Рассмотрим все возможные продолжения линейного функционала, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{P} = \{(M, h)\}$$

где $L \subset M$ — подпространство X , $h \in \text{Lin}(M, \mathbb{R})$, $h_L = f, h(x) \leq p(x) \forall x \in M$. Докажем, что $\exists M = x$, то есть $(X, h) \in \mathcal{P}$. Раз в множестве \mathcal{P} есть максимальный элемент, то он равен M , вот такой краткий план.

Как определяется частичный порядок в \mathcal{P} ? $(M_1, h_1) \leq (M_2, h_2)$, если $M_1 \subset M_2, h_{2M_1} = h_1$

$\{(M_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — линейно упорядоченное множество.

Построим верхнюю грань:

$$M_0 = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha, h_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

пусть $x \in M_0 \Rightarrow \exists \alpha \in A : x \in M_\alpha, h_0(x) := h_\alpha(x)$ и то, и другое определение требует обоснования корректности, ведь объединение подпространств не обязано быть подпространством (на вещественной плоскости: объединение 2 прямых, проходящих через 0 — непонятно, что вообще такое). Проверим, что M_0 — подпространство

$$\text{пусть } x, y \in M_0 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in A : x \in M_\alpha, y \in M_\beta$$

вспоминаем про линейный порядок

$$(M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta) \text{ или } (M_\beta, h_\beta) \leq (M_\alpha, h_\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta) &\Rightarrow M_\alpha \subset M_\beta \Rightarrow x \in M_\beta \Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_\beta \\ &\Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_0 \Rightarrow M_0 \text{ подпространство} \end{aligned}$$

проверим корректность определения h_0 , то есть что оно не должно зависеть от того, возьмём мы α или β

пусть $x \in M_0$, пусть $x \in M_\alpha, x \in M_\beta$, пусть $(M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta)$ или наоборот

$$\Rightarrow h_\alpha(x) = h_\beta(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h_0(x) = h_\alpha(x) \\ h_0(x) = h_\beta(x) \end{array} \right] \text{ корректное определение}$$

$$h_0(x) \leq p(x) \forall x \in M_0 \text{ (очевидно)} \Rightarrow (M_0, h_0) \in \mathcal{P}$$

$$\alpha \in A \quad (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_0, h_0) \text{ — верхняя грань}$$

теперь, когда мы рассмотрели произвольное линейное упорядоченное множество и доказали, что у него есть верхняя грань, мы можем применить лемму Цорна

$$\Rightarrow \text{ в } \mathcal{P} \exists \text{ максимальный элемент } (M, h) \in \mathcal{P} \\ \text{ пусть } m \subsetneq X \exists z \in X \setminus M, M_1 = \text{Lin}(M, z)$$

построим, как в первой части продолжение $(M_1, f_1) \in \mathcal{P}$

$$(M, h) \leq (M_1, f_1), M \subsetneq M_1 \text{ противоречит максимальной } (M, h) \\ \Rightarrow M = x, (M, h) \text{ — искомое продолжение}$$

□

Прежде, чем рассказать комплексный аналог, сначала применение вещественного случая.

Теорема 7.4 (обобщённый предел ограниченной последовательности).

$$l_{\mathbb{R}}^{\infty} = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}, \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\} \\ \Rightarrow \exists F \in \mathcal{B}(l^{\infty}, \mathbb{R}) = (l^{\infty})^* \\ \forall x \in l^{\infty} \underline{\lim} x_n \leq F(x) \leq \overline{\lim} x_n$$

в частности, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, то $F(x) = x_0$

То есть каждой ограниченности сопоставляется число, причём это отображение линейное.

Доказательство.

$$x \in l^{\infty}, p(x) := \overline{\lim} x_n, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$$

откуда же берётся неравенство треугольника, которое фигурирует в выпуклости. когда в детстве мы доказывали такое неравенство, оно даже в Демидовиче есть:

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$$

напоминание, как это доказывается через альтернативное определение верхнего предела

$$a_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}, a_n \text{ убывают, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a = \overline{\lim} x_n.$$

$$b_n = \sup_{k \geq 0} \{y_{n+k}\}, b_n \text{ убывают к } b, b = \overline{\lim} y_n.$$

$$c_n = \sup_{k \geq 0} \{x_{n+k} + y_{n+k}\}, c_n \text{ убывают к } c = \overline{\lim} (x_n + y_n)$$

$$\text{пусть } k \geq 0 \quad x_{n+k} + y_{n+k} \leq a_n + b_n \quad \forall k \Rightarrow c_n \leq a_n + b_n \Rightarrow c \leq a + b$$

Вот мы доказали, что это функционал

$$c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\}$$

$$g : c \Rightarrow \mathbb{R} \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C \Rightarrow g(x) = x_0$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq p(x) = \overline{\lim} x_n$$

$$\text{по теореме Хана-Банаха } \exists F : l^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) \leq p(x)$$

$$F(x) = g(x) = x_0, \text{ если } x \in c$$

$$x \in l^{\infty}, p(-x) = \overline{\lim} (-x_n) = -\underline{\lim} x_n$$

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = -\underline{\lim} x_n \Rightarrow F(x) \geq \underline{\lim} x_n$$

В формулировке обещалось $\|F\| = 1$. мы можем взять $x = (1, 1, 1, \dots)$

$$F(x) = 1, \|x\|_{\infty} = 1 \Rightarrow \|F\| \geq 1$$

$$\forall x \quad |F(x)| \leq \overline{\lim} x_n \leq \sup x_n = \|x\|_{\infty} \Rightarrow \|F\| \leq 1$$

□

Хочется последнее неравенство записать в более общем случае.

$$F(x) = 1, \|x\|_{\infty} = 1 \Rightarrow \|F\| \geq 1$$

$$\forall x \quad |F(x)| \leq \overline{\lim} x_n \leq \sup x_n = \|x\|_{\infty} \Rightarrow \|F\| \leq 1$$

Утверждение 7.1. 1. X — линейное, $p(x)$ — выпуклый функционал, $f \in \text{Lin}(X, \mathbb{R})$

$$f(x) \leq p(x) \Rightarrow f(x) \geq -p(-x)$$

2. если $p(x)$ полунорма, $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

Доказательство. 1. $f(x) \leq p(x) \Rightarrow f(-x) \leq p(-x) \Rightarrow -f(x) \leq p(-x) \Rightarrow f(x) \geq -p(x)$

2. p — полунорма $\Rightarrow p(-x) = p(x) \Rightarrow -p(x) \leq f(x) \leq p(x) \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

□

еперь, как было обещано, вариант теоремы продолжения линейного функционала для комплексного случая.

Теорема 7.5 (Баненблюст-Собчик, продолжение линейного функционала в комплексном линейном пространстве). X над \mathbb{C} . В вещественном случае предполагали что p — выпуклый функционал, теперь предполагаем чуть большее: $p : X \rightarrow \mathbb{R}, p$ — полунорма, $L \subset X$ — подпространство, $f \in \text{Lin}(L, \mathbb{C})$. Второе отличие состоит в том, что мы говорим $|f(x)| \leq p(x) \forall x \in L \Rightarrow$

$$\exists g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), g|_L = f, |g(x)| \leq p(x) \forall x \in X$$

Доказательство. Мы будем использовать доказательство для вещественного случая изо всех сил. Проведём овеществление X , то есть X над \mathbb{R} , $x, y \in X, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ax + by \in X$, то есть забудем на какое-то время, что X над \mathbb{C} .

$$f(x) = u(x) + iv(x), u, v : L \Rightarrow \mathbb{R}$$

Проверим, что $u, v \in \text{Lin}(L, \mathbb{R})$, а также покажем что между ними существует связь. Потом применим к u теорему Хана-Банаха, а там, глядишь, и получится то, что требовалось

$$\left. \begin{aligned} y \in X \Rightarrow f(y) &= u(y) + iv(y) \\ \Rightarrow f(x) + f(y) &= u(x) + u(y) + i(v(x) + v(y)) \\ f(x + y) &= u(x + y) + iv(x + y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$u(x + y) = u(x) + u(y) \quad v(x + y) = v(x) + v(y)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{пусть } a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(ax) &= u(ax) + iv(ax) \\ f(ax) &= af(x) = a(u(x) + iv(x)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(ax) = a(u(x)), v(ax) = av(x)$$

проверили, что они линейные функционалы в вещественном случае. оказывается, они еще и связаны между собой особым образом

$$\begin{aligned} f(ix) &= if(x) \\ u(ix) + iv(ix) &= i(u(x) + iv(x)) \Rightarrow v(x) = -u(-ix) \end{aligned}$$

перед тем, как применять теорему Хана-Банаха проверим, чего меньше этот функционал

$$u(x) \leq |u(x)| \leq |f(x)| \leq p(x) \text{ при } x \in L$$

применяем теорему Хана-Банаха к u

$$\exists \varphi \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}), \varphi|_L = u, \varphi(x) \leq p(x) \forall x \in X$$

на всякий случай отметим, что $|\varphi(x)| \leq p(x)$ так как p — полунорма, вдруг пригодится

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= -\varphi(ix) \Rightarrow \psi \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}) \quad x \in X \\ g(x) &:= \varphi(x) + i\psi(x), g|_L = f \Rightarrow g \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

g линейный в вещественном смысле. Остаётся проверить что он линейный в комплексном случае (можно вынести i) и что он подчинён p . Проверяем, что $g(ix) = ig(x)$

$$\begin{aligned} g(ix) &= \varphi(ix) + i(-\varphi(-x)) = \varphi(-ix) + i\varphi(x) = i(\varphi(x) - i\varphi(ix)) = \\ &= i(\varphi(x) + i\psi(x)) = ig(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$. Теперь проверяем подчинённость

$$\text{пусть } x \in X \quad g(x) \in \mathbb{C} \Rightarrow g(x) = re^{i\theta}, r \geq 0 \Rightarrow$$

такой трюк: воспользуемся линейностью g

$$\begin{aligned} g(xe^{-i\theta}) &= r \\ r &= g(xe^{-i\theta}) = \varphi(xe^{-i\theta}) + i\psi(xe^{-i\theta}) \end{aligned}$$

вспоминем, что p — полунорма

$$\begin{aligned} \Rightarrow r &= \varphi(xe^{-i\theta}) \leq p(xe^{-i\theta}) = |e^{-i\theta}| \cdot p(x) = p(x) \\ |g(x)| &= r \leq p(x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

□

7.2. Продолжение линейных функционалов в нормированном пространстве

В этой части абсолютно все равно, пространство над \mathbb{R} или же \mathbb{C}

Теорема 7.6 (Хан-Банах). $(X, \|\cdot\|)$ над \mathbb{R} или \mathbb{C} , теперь всё равно. $L \subset X, L$ — подпространство в алгебраическом смысле, $f \in L^*(L^* = \mathcal{B}(L, \mathbb{C})) \Rightarrow$

$$\exists g \in X^*, g|_L = f, \|g\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$$

Мы уже отмечали, что при продолжении норма может только увеличиться, но в условиях этой теоремы норму же удаётся сохранить.

Доказательство. Если $f = 0$, то $g = 0$ и так далее

$$\text{пусть } f \neq 0, M := \|f\|_{L^*}, p(x) := M \cdot \|x\|, x \in X$$

$\Rightarrow p$ — норма (\Rightarrow полунорма \Rightarrow выпуклый функционал)

$$\text{пусть } x \in L \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_{L^*} \cdot \|x\| = p(x) \text{ (условие подчинения)}$$

Теперь применяем теорема Хана-Банаха, если X над \mathbb{R} или Б-Сопчика, если X над \mathbb{C}

$$\begin{aligned} & \exists g \in \text{Lin}(X, \mathbb{R})(\text{Lin}(X, \mathbb{R})) \\ & g|_L = f, \quad |g(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X \\ & \Rightarrow |g(x)| \leq M \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow \|g\|_{X^*} \leq M \\ & \Rightarrow \|g\|_{X^*} \leq \|f\|_{L^*} \\ & (\|g\|_{X^*} = \sup_{\{x \in X: \|x\| \leq 1\}} |g(x)| \geq \sup_{\{x \in L: \|x\| \leq 1\}} |f(x)| = \|f\|_{L^*}) \\ & \Rightarrow \|g\|_{X^*} = \|f\|_{L^*} \end{aligned}$$

□

Следствие 7.1 (о достаточном числе линейных функционалов).
 $(X, \|\cdot\|), x_0 \in X \Rightarrow \exists g \in X^*, \|g\| = 1, g(x_0) = \|x_0\|$, при этом

$$\|x_0\| = \max \{h(x_0) : h \in X^*, \|h\| \leq 1\}$$

Доказательство. Если $x_0 = 0$, то $\forall g \in X^*, \|g\| = 1 \Rightarrow g(0) = 0$.

Пусть $x_0 \neq 0, L = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{C}\}$

$$\begin{aligned} & f : L \rightarrow \mathbb{C} \quad f(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\| \Rightarrow f \in \text{Lin}(L, \mathbb{C}) \\ & |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| \Rightarrow \|f\| = \sup_{\alpha \neq 0} \frac{|f(\alpha x_0)|}{\|\alpha x_0\|} = 1 \Rightarrow \|f\|_{L^*} = 1 \end{aligned}$$

по теореме Хана-Банаха для нормированного пространства

$$\begin{aligned} \exists g \in X^*, \|g\| = 1, g|_L = f \Rightarrow f(x_0) = f(x_0) = \|x_0\| \\ \text{пусть } h \in X^*, \|h\| \leq 1 \Rightarrow |h(x_0)| \leq \|h\| \cdot \|x_0\| \leq \|x_0\| \\ \Rightarrow \|x_0\| \geq \sup_{\{h \in X^*: \|h\| \leq 1\}} |h(x_0)|, \text{ но } \exists g, \|g\| = 1, g(x_0) = |x_0| \\ \Rightarrow |x_0| = \max_{\{h \in X^*: \|h\| \leq 1\}} \{h(x_0)\} \end{aligned}$$

в этом смысле и много, то есть есть такой, на котором максимум достигается \square

Замечание 7.3. $f \in X^* \Rightarrow \|f\| = \sup_{\{x \in X: \|x\| \leq 1\}}$, то есть максимум может не достигаться

Пример 7.1.

$$\begin{aligned} C[-1, 1] = X, \varphi(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ G_\varphi(f) = \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx \quad G_\varphi \in (C[-1, 1])^* \\ \|G_\varphi\| = \int_{-1}^1 |\varphi(x)| dx = 2 \end{aligned}$$

В качестве упражнения доказать, что $\nexists f \in C[-1, 1], \|f\| \leq 1, |G(f)| = 2$

Следствие 7.2 (расстояние от элемента до подпространства).
($X, \|\cdot\|$), $L \subset X, L = \overline{L}$ — подпространство

$$\begin{aligned} x_0 \in X, d = \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| \Rightarrow \\ \exists g \in X^*, \|g\| = 1, g|_L = 0, g(x_0) = d, \text{ при этом} \\ d = \max \{|h(x_0)|, h \in X^*, \|h\| \leq 1, h|_L = 0\} \end{aligned}$$

Это следствие полезно для решения экстремальных задач: от инфимума можно перейти к максимуму и решать другую задачу.

Доказательство. Если $x_0 \in L$, то $d = 0, \exists g|_L = 0, \|g\| = 1$ (если $L \neq X$)

$$\begin{aligned} \text{пусть } x_0 \in X \setminus L, M = \mathcal{L}(L, x_0) = \{\alpha x_0 + y : \alpha \in \mathbb{C}, y \in L\} \\ f : M \rightarrow \mathbb{C}, f(\alpha x_0 + y) := \alpha \Rightarrow \forall y \in L f(y) = 0 \\ f^{-1}(0) = L, f \in \text{Lin}(M, \mathbb{C}), \|f\| = \frac{1}{d} \end{aligned}$$

это уже вычислили в геометрическом смысле линейного функционала

$$\begin{aligned} &\text{так как } f(x_0) = 1 \\ f_1 = df, &\Rightarrow \|f_1\|_{M^*} = 1, f_1(x_0) = d \end{aligned}$$

по теорему Хана-Банаха для нормированного пространства

$$\exists g \in X^*, \|g\|_{X^*} = 1, g|_M = f_1 \Rightarrow g(x_0) = d, g|_L = f|_L = 0$$

это первая часть утверждения следствия

$$\begin{aligned} &\text{пусть } h \in X^*, \|h\| \leq 1, h(y) = 0 \forall y \in L \Rightarrow \\ |h(x_0)| &= |h(x_0) - y| \leq \|h\| \cdot \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L \Rightarrow \\ &|h(x_0)| \leq d \Rightarrow \\ \sup\{|h(x_0)| : \|h\| \leq 1, h|_L = 0\} &\leq d, \text{ но } \exists g \Rightarrow \\ d &= \max\{|h(x_0)| : \|h\| \leq 1, h|_L = 0\} \end{aligned}$$

□

Замечание 7.4. Следствие 1 — частный случай следствия 2 при $L = \{0\}$. На экзамене можно рассказать только второе следствие, отметив, что первое является его частным случаем

Следствие 7.3 (критерий полноты системы элементов в нормированном пространстве). $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $x_\alpha \in X$, A — множество индексов, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — полное семейство в $X \Leftrightarrow$ если $f \in X^*$, $f(x_\alpha) = 0, \alpha \in A \Rightarrow f = 0$

Критерий проверять гораздо проще, чем определение.

Доказательство. \Rightarrow

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) = 0, L = \mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}, x \in L &\Rightarrow \\ x = \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k} &\Rightarrow f(x) = 0 \\ \text{пусть } z \in X, y_n \in L \exists \{y_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z, f &\text{ — непрерывная} \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(z) &\Rightarrow f(z) = 0 \\ &\Rightarrow f = 0 \end{aligned}$$

←

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} & \text{ — полная} \Leftrightarrow \bar{L} = X \\ \text{пусть } L \subsetneq X & \Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus \bar{L} \stackrel{\text{Сл.2}}{\Rightarrow} \exists g \in X^* \\ g|_L = 0, g(x_0) & = d(x_0, \bar{L}) \neq 0 \quad d = \rho(x_0, \bar{L}) \\ g(x_\alpha) & = 0 \quad \forall \alpha, g \neq 0 \end{aligned}$$

□

Наконец, с помощью последнего следствия докажем такую теорему

Теорема 7.7. $(X, \|\cdot\|)$. Если X^* сепарабельно, то X — сепарабельно

Доказательство.

$$\exists \{f_n\}$$

вспомним, что $\|f_n\| = \sup_{x \in X: \|x\|=1} |f_n(x)|$

$$\Rightarrow \exists x_n, \|x_n\| = 1 \quad \|f_n\| \geq |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$$

проверим, что $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — полная в X

пусть $f \in X^*, f(x_n) = 0 \Rightarrow \exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\| = 0 \quad \underbrace{(f - f_{n_k})(x_{n_k})}_{=|f_{n_k}(x_{n_k})|} \geq \frac{1}{2} \|f_{n_k}\| \leq \|f - f_{n_k}\| \cdot \underbrace{\|x_{n_k}\|}_{=1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\| = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\stackrel{\text{Сл.3}}{\Rightarrow} \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ — полная}$$

$$(E = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_k, c_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}) \text{ — счётное всюду плотное в } X)$$

□

Глава 8

Принцип равномерной ограниченности

Принцип равномерной ограниченности, тут будет много теорем, они все связаны с первой, а всё вместе это второй кит линейного функционального анализа.

Теорема 8.1 (принцип равномерной ограниченности). $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$ — нормированное, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\forall x \in X \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < +\infty \Rightarrow \exists M > 0 : \|U_\alpha\| \leq M \forall \alpha \in A$$

Причём тут равномерность?

$$\begin{aligned} \|U_\alpha\| &= \sup_{\{x \in X : \|x\| \leq 1\}} \|U_\alpha x\| \\ \sup_{\alpha \in A} \sup_{\{x \in X : \|x\| \leq 1\}} \|U_\alpha x\| &< +\infty \end{aligned}$$

предполагаем для одного икса, а оказывается, что можно взять \sup по единичной сфере, а потом ещё раз взять \sup , и это фантастически полезно и в то же время странно. Начнём с простой леммы.

Лемма 8.1. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — нормированные

$$U \in \text{Lin}(X, Y), \exists \varepsilon > 0, R > 0, a \in X :$$

$$U(B_\varepsilon(a)) \subset \overline{B_R(0)} \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\|U\| \leq \frac{2R}{\varepsilon}$$

Новизна этой простой леммы состоит в том, что не обязательно брать шар в точке 0, суть остаётся такой же, но чуть-чуть ухудшается норма.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } z \in X, \|z\| < \varepsilon, a \in B_\varepsilon(a), a + z \in B_\varepsilon(a) \\ & z = (a + z) - a \Rightarrow \|Uz\| \leq \|U(a + z)\| + \|U(a)\| \leq R + R = 2R \\ & \text{пусть } x \in X, x \neq 0, \|x\| < 1 \Rightarrow \|\varepsilon x\| < \varepsilon \Rightarrow \|U(\varepsilon x)\| \leq 2R \Rightarrow \|Ux\| \leq \frac{2R}{\varepsilon} \\ & \|U\| = \sup_{\{x \in X: \|x\| \leq 1\}} \|Ux\| \leq \frac{2R}{\varepsilon} \end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы. Вспомним теорему Бэра о категориях: полное метрическое пространство нельзя представить как счётное объединение всюду плотных множеств.

$$\begin{aligned} & n \in \mathbb{N}, D_n = \{y \in Y : \|y\| \leq n\} \\ & \Rightarrow U_\alpha^{-1}(D_n) \text{ — замкнутое множество в } X, \alpha \in A \\ & E_n = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(D_n), E_n \text{ — замкнутое} \end{aligned}$$

Проверим, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$$\begin{aligned} & \text{пусть } x \in X \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < +\infty \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \\ & \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < n \Rightarrow x \in U_\alpha^{-1}(D_n) \forall \alpha \in A \\ & \Rightarrow x \in E_n \\ & X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, X \text{ — банахово, } E_n \text{ — замкнутые} \Rightarrow \end{aligned}$$

по теореме Бэра о категориях \Rightarrow

$$\begin{aligned} & \exists n_0 : \text{Int}(E_{n_0}) \neq \emptyset, \text{ то есть} \\ & \exists B_\varepsilon(a) \subset E_{n_0} = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(D_{n_0}) \Rightarrow \\ & U_\alpha(B_\varepsilon(a)) \subset D_{n_0} \text{ по лемме} \Rightarrow \|U_\alpha\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \forall \alpha \in A \end{aligned}$$

□

Следствие 8.1 (Принцип фиксации особенности). X — банахово, Y — нормированное, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\text{пусть } \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| = +\infty \Rightarrow \exists x_0 \in X : \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha(x_0)\| = +\infty$$

Утверждение 8.1. В условиях следствия $E = \{x \in X : \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| = +\infty\}$. Доказать, что

1. E — всюду плотно в X
2. $X \subset E$ — множество первой категории

Определение 8.1 (сильный предел).

$$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \{U_n\}_{n=1}^\infty, U_n \in \text{Lin}(X, Y)$$

Если $\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux$, то U — **поточечный** (или **сильный**) предел $\{U_n\}$. Обозначение $U = \text{s-lim } U_n$ ($s = \text{strong}$)

Он хоть и сильный, но куда слабее сходимости по норме. Отметим простые свойства:

1. $U_n \in \text{Lin}(X, Y) \Rightarrow U \in \text{Lin}(X, Y)$
2. Если $U_n, U \in \mathcal{B}(X, Y), \lim_{n \rightarrow \infty} U - U_n = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux \quad \forall x \in X$$

$$2. \|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|U - U_n\|}_{\rightarrow 0} \cdot \|x\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux \quad \square$$

Замечание 8.1. $U = \text{s-lim } U_n \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|U - U_n\| = 0$

Пример, где поточечный предел существует и равен нулю, а предела по норме не существует

Пример 8.1.

$$\begin{aligned}
 X = l^1 &= \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, \|x\|_l = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right\} \\
 f_n : l^1 &\rightarrow \mathbb{C} \quad f_n \in (l^1)^* \quad f_n(x) = x_n, \|f_n\| = 1 \\
 x \in l^1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in l^1 \\
 0 &= s\text{-}\lim f_n, \text{ но } \|f_n - 0\| = \underbrace{\|f_n\|}_{n \neq 0} = 1
 \end{aligned}$$

Пример 8.2. H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис.

$$\begin{aligned}
 x \in H, x &= \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \\
 \Rightarrow \forall x \in H \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n x &= x, Ix = x \quad \forall x \in H (I — тождественный) \\
 &\Rightarrow I = s\text{-}\lim S_n \\
 (I - S_n)(e_{n+1}) &= I(e_{n+1}) = e_{n+1} \Rightarrow \|I - S_n\| = 1 \\
 \|I - S_n\| &\not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Несмотря на то, что сильная сходимость слабее сходимости по норме, иногда оказывается, что сильный предел является непрерывным оператором.

Теорема 8.2. $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$ — нормированное $U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$, пусть $U = s\text{-}\lim U_n \Rightarrow$

$$U \in \mathcal{B}(X, Y), \|U\| \leq \underline{\lim} \|U_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U_n\| < +\infty$$

Доказательство. Собираемся из всех сил использовать принцип равномерной ограниченности. $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) \Rightarrow \sup_n \|U_n x\| < +\infty$. По принципу $\Rightarrow \sup_n \|U_n\| < +\infty$

$$\text{пусть } b = \underline{\lim} \|U_n\| \Rightarrow \exists \{U_{n_k}\} : b = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k}\|$$

$$\text{пусть } x \in X \Rightarrow Ux = \lim_{k \rightarrow \infty} U_{n_k}(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \|Ux\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k} x\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k}\| \cdot \|x\| = b \|x\| \quad \forall x \in X \\
 &\Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y), \|U\| \leq b
 \end{aligned}$$

□

Замечание 8.2. $U = s\text{-}\lim U_n$, возможно $\|U\| < \underline{\lim} \|U_n\|$

Пример 8.3. $f_n : l^1 \rightarrow \mathbb{C}, f_n(x) = x_n, 0 = s\text{-}\lim f_n, \|f_n\| = 1 \forall n. \|0\| = 0$

Теорема 8.3 (Банах-Штейнгауз, критерий существования сильного предела). X, Y — банахово, $U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$. Для того чтобы существовал $s\text{-}\lim U_n$, необходимо и достаточно

1. $\exists M > 0 : \|U_n\| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\exists E \subset X, E$ полное, то есть $\overline{\mathcal{L}(E)} = X$. $\{U_n x\}$ — фундаментальная для $\forall x \in E$

Существует множество вариантов этой теоремы, и все они по-своему полезные, поэтому у нас будет очень много замечаний потом

Доказательство. \Rightarrow пусть $U = s\text{-}\lim U_n$, мы уже доказали, что $\sup_n \|U_n\| < +\infty$, а второе утверждение очевидно

\Leftarrow

Пусть $x \in \mathcal{L}(E)$, то есть $x = \sum_{k=1}^N c_k x_k, c_k \in \mathbb{C}, x_k \in E$

$$\|U_n(x) - U_m(x)\| \leq \sum_{k=1}^N |c_k| \cdot \|U_n x_k - U_m x_k\| \Rightarrow \{U_n x\} \text{ — фундаментальная}$$

Пусть $x \in X$, проверим, что $\{U_n x\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна

$$\begin{aligned} x \in X, \varepsilon > 0 \quad \exists z \in \mathcal{L}(E), \|x - z\| < \varepsilon \\ \exists N \in \mathbb{N}, n, m > N \Rightarrow \|U_n z - U_m z\| < \varepsilon \\ \|U_n x - U_m x\| &\leq \underbrace{\|U_n x - U_n z\|}_{\leq \|U_n\| \cdot \|x - z\| \leq M\varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_m z\|}_{\varepsilon} + \underbrace{\|U_m z - U_m x\|}_{\leq M\varepsilon} \\ &< \varepsilon(2M + 1) \Rightarrow \{U_n x\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальна} \\ Y \text{ банахово} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x \forall x \in X \Rightarrow \exists U = s\text{-}\lim U_n \end{aligned}$$

□

Замечание 8.3. 1. $\Rightarrow X$ — банахово, Y — нормированное

2. $\Leftarrow Y$ — банахово, X — нормированное

3. В условии 2 теоремы можно сформулировать 2':

$$\exists E \subset X, \overline{\mathcal{L}(E)} = X, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x$$

Заплатим жестокую цену за такую теорему: раньше U не было, оно появлялось, критерий существования всё-таки, а здесь же мы предположим сразу непрерывность этого U

Теорема 8.4 (Банах-Штейнгаус). X — банахово, Y — нормированное, $U_n \in \mathcal{B}(X, Y), U \in \mathcal{B}(X, Y)$
 $u = s\text{-}\lim U_n \Leftrightarrow$

1. $\sup_n \|U_n\| \leq M < +\infty$
2. $\exists E \subset X, \overline{\mathcal{L}(E)} = X, \forall x \in E \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x$

Доказательство. \Rightarrow очевидно
 \Leftarrow

$$\forall x \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x$$

пусть $x \in X, \varepsilon > 0 \exists z \in \mathcal{L}(E), \|x - z\| < \varepsilon, \exists N : n \geq N \Rightarrow \|Uz - U_n z\| < \varepsilon$

$$\|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|Ux - Uz\|}_{\leq \|U\| \cdot \|x - z\| \leq \|U\| \varepsilon} + \underbrace{\|Uz - U_n z\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_n x\|}_{\|U_n\| \cdot \|x - z\| \leq M \varepsilon}$$

мы тут сразу пользуемся тем, что U — непрерывный оператор и у него есть норма

$$\leq \varepsilon(1 + \|U\| + M) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux \quad \forall x \in X$$

□

Маленькая историческая байка из серии «Мифы и легенды из жизни Банаха» о встрече Банаха и Штейнгауза. Банах чудесным образом родился, никто не знает его мать, имя ему досталось от отца Стефана его крестили и оставили (Банах — это фамилия женщины, которая заботилась о нём с трехдневного возраста). В школе Банах интересовался только математикой, но рядом не оказалось никого, кто сказал бы ему идти на математический факультет, а ведь в Варшаве был хороший университет, преподавал там ученик Гаусса. В итоге Банах закончил что-то вроде политеха, издали интересовавшись математикой. И вот, началась первая мировая война, Банаха не взяли в армию, а Штейнгауза взяли, но потом отослали обратно.

Штейнгауз как-то шёл по улице и услышал, как 2 человека наке что-то обсуждают, а доносятся от них умные типа «Мера Лебега», Штейнгауз обратился к ним: «Предмет вашей учебной беседы настолько интересен!». И начал он им навешивать всякую математическую лапшу на уши. Через несколько дней Банах решил какую-то задачку, и Штейнгауз у себя на дому устраивает встречу математиков, они даже собирались организовать вчетвером краковское математическое общество, но сам он потом уехал во Львов, перетасил туда Банаха. Банах устроился работать в какой-то из университетов и стал ликвидировать свою математическую безграмотность. Штейнгауз же потом говорил, что главный его вклад в функциональный анализ — это открытие Банаха.

8.1. Применение принципа равномерной ограниченности к рядам Фурье

Пусть $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$. Волна означает $f(-\pi) = f(\pi)$

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt$$

$$\text{где } D_n(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \text{ — ядро Дирихле}$$

$$S_n(e^{ikx}) = e^{ikx} \text{ если } n \geq k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(e^{ikx}) = e^{ikx}$$

$$If = f, I \text{ — тождественный в } \tilde{C}[-\pi, \pi]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(e^{ikx}) = I(e^{ikx}) = e^{ikx} \Rightarrow$$

$\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — полная система в $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ по теореме Вейерштрасса

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f), \text{ при } f = e^{ikx} \text{ или } f \in \mathcal{L}e^{ikx}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Теорема 8.5. 1. $\exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ т.ч. $S_n(f, x)$ не сходятся равномерно, более того $\sup_n \|S_n(f, x)\|_{\infty} = +\infty$ (Лебег, 1906)

2. пусть $x_0 \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ т.ч. не $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_0)$, более того $\sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$ (Дю Буа Реймонд, 1886)

Для доказательства будем применять следствия из принципа равномерной ограниченности. Если S_n вычислять на базисе e^{ikx} , то сходимость будет, но теорему Банаха-Штейнгауза нельзя применять, потому что нет ограниченности по норме оператора S_n

Доказательство теоремы Лебега. Проверим, что $\sup_n \|S_n\|_{\mathcal{B}(\tilde{C}[-\pi, \pi])} = \infty$

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad S_n \in \text{Lin}(\tilde{C}[-\pi, \pi])$$

$$f \in \tilde{C}[-\pi, \pi], x \in [-\pi, \pi]$$

мы уже вычисляли норму интегрального оператора в пространстве непрерывных функций

$$\|S_n\| = \max_{x \in [-\pi, \pi]} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)| dt$$

цель ближайших вычислений: проверить, что при $n \rightarrow \infty$ норма стремится к ∞ . Сначала проверим, что она не зависит от x

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)| dt = [[\tau = x-t, d\tau = -dt]] = - \int_{x+\pi}^{x-\pi} |D_n(\tau)| d\tau = [[D_n - 2\pi\text{-периодическая}]]$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\tau)| d\tau = [[\text{чётная}]] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{\sin(\frac{\tau}{2})} d\tau \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})|}{\tau} d\tau = \\ & [[x \geq \sin x \quad v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dv}{v}]] = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq \\ & [[v \in [(k-1)\pi, k\pi] \Rightarrow v \leq k\pi \Rightarrow \frac{1}{v} \geq \frac{1}{k\pi}]] \\ & \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}_{\sigma_n} \geq \frac{2}{\pi^2} \sigma_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [k, k+1] &\Rightarrow k \leq x \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \sigma_n &= 1 + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \\ &\Rightarrow \|S_n\| \geq \frac{2}{\pi^2} \end{aligned}$$

как используем принцип фиксации особенности? Есть последовательность операторов S_n . При фиксированном f она стремится к $S_n(f)$. Мы оценили снизу норму и доказали, что она стремится к бесконечности. Если норма операторов не ограничена, то в нашем банаховом пространстве непрерывны 2π -периодических функций найдется такой элемент, на котором норма не ограничена, значит там тем более не может быть равномерной сходимости. \square

Доказательство теоремы Дю Буа Реймонда. Вместо линейных операторов теперь рассмотрим линейные функционалы. x_0 — фиксирована, $S_n(f, x_0)$ — линейные функционалы. $S_n(f, x_0) : \tilde{C}[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Там же, где мы вычисляли норму интегрального оператора, мы вычисляли норму линейного функционала (ссылку)

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x_0 - t) dt \\ \text{норма функционала } \|S_n\|_{(\tilde{C}[-\pi, \pi])^*} &= \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x_0 - t)| dt \stackrel{\text{Лебег}}{=} \\ &= \|S_n\| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln n \Rightarrow \sup_n \|S_n(f, x_0)\|_{(\tilde{C}[-\pi, \pi])^*} = +\infty \end{aligned}$$

по принципу фиксации особенности

$$\Rightarrow \exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] : \sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$$

\square

Замечание 8.4. Пусть $E \subset [-\pi, \pi]$, E — счётное $\Rightarrow \exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \forall x_0 \in E \sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$

Замечание 8.5. $\exists f \in L^1[-\pi, \pi] \forall x \in [-\pi, \pi]$ не $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x)$

Этот пример построил Колмогоров в 1926 году, а в 1923 построил такую функцию, у которой почти всюду не $\exists \lim$. Колмогоров был учеником Лузина. А он предъявил такую гипотезу

Замечание 8.6 (Гипотеза Лузина, 1923). $f \in L^2[-\pi, \pi] \Rightarrow S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Шведский математик Карлесон В 22 года подумал улучшить пример Колмогорова. Поехал в Америку на семинар по тригонометрическим рядам, там рассказал Зигмунду, как собирается опровергать гипотезу Лузина. А тот его всячески поощрял. Весь мир тогда считал, что гипотеза неверна.

Вот он несколько лет мучился и подумал, что функция, которую он пытается построить, не существует. Так и оказалось. На международном математическом конгрессе в 1966 Карлесон показал, что гипотеза верна. Колмогоров вышел, пожал ему руку и сказал, что это главный результат математического анализа за весь XX век.

Лемма 8.2 (Риман-Лебег). $f \in {}^1[-\pi, \pi]$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$$

Доказательство. Будем думать, что $c_n \in \text{Lin}(L^1, \mathbb{C})$ — линейный функционал. При фиксированном $f c_n$ — конкретное число

$$\begin{aligned} f \in L^1 \quad |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \\ \Rightarrow c_n &\in (L^1)^*, \|c_n\|_{(L^1)^*} \leq \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

$\{\chi_{[a,b)}\}$ — полное семейство в $L^1[-\pi, \pi]$, $-\pi \leq a < b \leq \pi$

$$\begin{aligned} c_n(\chi_{[a,b)}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b)}(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-inx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inb} - e^{-ina}}{-in} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|c_n(\chi_{[a,b)})| \leq \frac{2}{2\pi n} = \frac{1}{\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$c_n(\chi_{[a,b)}) \longrightarrow 0(\chi_{[a,b)}) \Rightarrow$$

по теореме Банаха-Штейнгауза $\forall f \in L^1 \quad c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

□

Глава 9

Теорема об открытом отображении

9.1. Обратные операторы

X, Y — нормированные пространства, $A \in \text{Lin}(X, Y)$. Уравнение $Ax = y$, где y — дано, A — дан, x — неизвестное. Когда для $\forall y \in Y \exists !x \in X$ т.ч. $Ax = y \Rightarrow A$ — биекция, то есть $\exists A^{-1}$.

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \exists !x_n : Ax_n = y_n$$

Было бы хорошо, чтобы $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, Ax = y$, то есть A^{-1} — непрерывен. Когда \exists непрерывный A^{-1} ?

Третий кит линейного функционального анализа будет как раз касаться обратных операторов. Понятно, что самый хороший оператор, который можно представить — это тождественный, у него есть обратный, это он сам и есть. Вопрос такой: насколько можно отодвинуться от тождественного оператора, чтобы он остался обратимым?

Теорема 9.1.

X — банахово, $Ix = x, \forall x \in X$

пусть $A \in \mathcal{B}(X), \|A\| < 1 \Rightarrow$

$\exists (I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, при этом

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k (A^0 = I)$$

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Доказательство. X — банахово $\Rightarrow \mathcal{B}(X)$ — банахово. Был у нас критерий полноты, поэтому проверим, что ряд из норм сходится

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{B}(X) &\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \\ \Rightarrow \|A^k\| &\leq \|A\|^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|} \Rightarrow \exists S = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, S \in \mathcal{B}(X) \\ S_n = \sum_{k=0}^n A^k &\Rightarrow \|S_n\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \Rightarrow \|S\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \end{aligned}$$

проверим, что $S = (I - A)^{-1}$

$$\begin{aligned} S_n(I - A) &= (I + A + A^2 + \dots + A^n)(I - A) = \\ &= (I - A) + (A - A^2) + \dots + (A^n - A^{n+1}) = I - A^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A^{n+1}\| &\leq \|A\|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I - A) &= S(I - A) \Rightarrow S(I - A) = I \\ (I - A)S_n &= S_n(I - A) = I - A^{n+1} \Rightarrow \text{при } n \rightarrow \infty \\ (I - A)S &= I \Rightarrow S(I - A)^{-1} \end{aligned}$$

□

Замечание 9.1. $\dim X < +\infty$, $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $AB = I \Rightarrow B = A^{-1}$.
Если $\dim X = +\infty$, то нет

$$\begin{aligned} X &= l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ S(x) &= (0, x_1, x_2, \dots) \quad \|S\| = 1, S \in \mathcal{B}(l^2) (S - \text{shift}) \\ T(x) &= (x_2, x_3, x_4, \dots), \|T\| = 1 \\ (TS)(x) &= x \Rightarrow TS = I \\ \nexists S^{-1} &\text{ так как } S(l^2) \subsetneq l^2 \\ \text{то есть } \nexists T^{-1}, T &\text{ не инъективен} \end{aligned}$$

Так что когда речь идёт о бесконечномерном пространстве, мы не зря проверили, что $AB = I, BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$.

Применим эту теорему для общего случая, но сначала будет удобно ввести определение

Определение 9.1. X, Y — нормированные

$$\text{In}(X, Y) = \{A \in \mathcal{B}(X, Y) : \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)\}$$

Теорема 9.1 (множество обратных операторов открыто). X — банахово, Y — нормированное

1.

$$A \in \text{In}(X, Y) \\ B \in \mathcal{B}(X, Y) \quad \|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow B \in \text{In}(X, Y) \text{ и при этом}$$

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|AB\| \cdot \|A^{-1}\|} \quad (1)$$

$$\|A^{-1} - \|B^{-1}\|\| \leq \frac{\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|AB\| \cdot \|A^{-1}\|} \quad (2)$$

2. $\varphi : \text{In}(X, Y) \rightarrow \text{In}(Y, X) \quad \varphi(A) := A^{-1} \Rightarrow \varphi$ непрерывное

1.

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| < 1$$

$\|W\| < 1$ по теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному

$$\Rightarrow \exists (I - W)^{-1}, \|(I - W)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|W\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}$$

$$W = A^{-1}(A - B) = I - A^{-1}B \Rightarrow I - W = A^{-1}B$$

$$B = A \cdot (A^{-1}B), \exists A^{-1}, \exists (A^{-1}B)^{-1} \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$B^{-1} = (A^{-1}B)^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\|B^{-1}\| \leq \|(A^{-1}B)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|} \quad (1)$$

□

Сейчас будет фантастический алгебраический трюк:

2.

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \Rightarrow$$

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| \cdot \|B^{-1}\| \leq \frac{\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}$$

□

Замечание 9.2. Как мы можем истолковать первое утверждение?

$$B_{\frac{1}{\|A^{-1}\|}}(A) \subset \text{In}(X, Y)$$

Как только есть обратимый, оператор, тогда шарик с центром в этом операторе и таким радиусом будет лежать в в множестве непрерывных операторов

Замечание 9.3.

$$\varphi(A) = A^{-1} \quad \varphi(B) = B^{-1}$$

$$\|\varphi(A) - \varphi(B)\| = \|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}$$

пусть A фиксирован $\lim_{B \rightarrow A} \|B - A\| = 0 \Rightarrow \lim_{B \rightarrow A} \|\varphi(A) - \varphi(B)\| = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi$ непрерывное

9.2. Открытые отображения

Определение касается только банаховых пространств, но дадим его в общем случае для произвольных топологических пространств

Определение 9.2 (открытое отображение). $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ — топологические пространства. $U : X \rightarrow Y, U$ — отображение. U — открытое, если $\forall G \subset X, G$ — открытое $\Rightarrow U(G)$ — открыто в Y

Замечание 9.4. U — непрерывное, G — открытое $\Leftrightarrow (\forall G \subset Y \Rightarrow U^{-1}(G)$ открыт)

Пример 9.1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x \Rightarrow f(-\pi, \pi) = [-1, 1], f$ не льковылье

Пример 9.2. $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f$ — непрерывное, f — открытое, так как $\exists f^{-1}$ — непрерывное

Открытость отображение, если есть обратный, означает непрерывность обратного отображения. Так и отметим в общем виде

Утверждение 9.1. $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ — топологические пространства, $U : X \rightarrow Y, U$ — биекция
 U — открытое $\Leftrightarrow U^{-1}$ — непрерывно

Доказательство.

$$V := U^{-1} \quad X \xrightarrow{U} Y \quad X \xleftarrow{V} V$$

$$W = U(G) \quad G = V(W) \quad W = V^{-1}(G)$$

U — открытое $\Leftrightarrow (G$ — открыто $\Rightarrow W = U(G)$ — открыто). V — непрерывно $\Leftrightarrow (G$ — открыто $\Rightarrow V^{-1}(G) = W$ — открыт) \square

Утверждение 9.2 (критерий открытости линейного оператора). $(X, \|\cdot\|, (Y, \|\cdot\|))$ — нормированные. $U \in \text{Lin}(X, Y)$, U — открытое $\Leftrightarrow \exists r > 0 B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$ (то есть $0 \in \text{Int}(U(B_1(0)))$)

Доказательство. \Rightarrow

U — открытое, $U(0) = 0$, $B_1^X(0)$ — открытое $\Rightarrow U(B_1^X(0))$ — открытое.
 $0 \in U(B_1^X(0)) \Rightarrow \exists r > 0 B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$

\Leftarrow

Пусть $G \subset X$, G — открытое, $x_0 \in G \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exists R > 0 \quad B_R^X(x_0) &\subset G \\ \Rightarrow B_{rR}^Y(0) &\subset U(B_R^X(0)) \end{aligned}$$

Проверим, что $U(x_0)$ — внутренняя точка $U(G)$

$$\begin{aligned} \underbrace{U(x_0) + B_{rR}^Y(0)}_{=B_{rR}^Y(U(x_0))} &\subset U(x_0) + U(B_R^X(0)) = \\ &= U(B_R(x_0)) \subset U(G) \end{aligned}$$

\square

Перед тем, как доказывать главную теорему, ещё одно утверждение

Утверждение 9.3 (необходимое условие открытости линейного оператора). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ нормированные

$$U \in \text{Lin}(X, Y), U \text{ — открытое} \Rightarrow U(X) = Y$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \exists r > 0 \ B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0)) &\Rightarrow B_{rn}^Y(0) \subset U(B_n^X(0)), n \in \mathbb{N} \\ \text{пусть } y \in Y &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \|y\| < nr \Rightarrow \\ y \in B_{rn}(0) &\subset U(B_n^X(0)) \subset U(X) \end{aligned}$$

□

Вот и кит №3.

Теорема (Банах, об открытом отображении). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — банаховы, $U \in \mathcal{B}(X, Y)$. Если $U(X) = Y$, то U — открытое

Почему это кит? Потому что это очень полезный факт, на который постоянно хочется ссылаться.

Доказательство будет в 2 этапа. Сначала докажем лемму

Лемма 9.1 (Редукция). X — банахово, Y — нормированное. Пусть $\exists r > 0, B_r^Y \subset \overline{U(B_1^X(0))}$ (замыкание)

$$\Rightarrow B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$$

Доказательство леммы. Поскольку U — линейное, то мы можем умножать на любую константу.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad B_{\frac{r}{2^k}}^Y(0) &\subset \overline{U(B_{\frac{1}{2^k}}^X(0))} \\ \text{пусть } y \in Y, \|y\| &< \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Построим $x, \|x\| < 1$ т.ч. $Ux = y$. Будем его строить постепенно, сначала x_1, x_2, \dots , и их сумма даст нам x

$$y \in B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{2}}^x(0))} \Rightarrow \exists x_1, \|x_1\| < \frac{1}{2}$$

$\|y - U(x_1)\|$ может быть меньше, чем всё, что угодно, мы возьмём $\frac{r}{4}$

$$\|y - U(x_1)\| < \frac{r}{4}, y - Ux_1 \in B_{\frac{r}{4}}^Y(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{4}}^x(0))}$$

$$\Rightarrow \exists x_2, \|x_2\| < \frac{1}{4}, \|y - Ux_1 - Ux_2\| < 2\frac{r}{2^3} \text{ и так далее}$$

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \|x_k\| < \frac{1}{2^k}, \|y - Ux_1 - \dots - Ux_k\| < \frac{r}{2^{k+1}}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|}_{\text{сходится}} < 1, [[\text{ банаховость } X]] \Rightarrow$$

$$\exists x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, x \in X, \|x\| < 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - US_n\| = 0 \Rightarrow y = Ux, (U - \text{непрерывный})$$

□

Доказательство теоремы.

$$B = B_1^X(0) \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB, U(X) = Y \Rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(nB)$$

$$Y - \text{банахово} [[\text{т. Бэра о категориях}]] \Rightarrow \exists n_0 : \text{Int}(\overline{U(n_0 B)}) \neq \emptyset$$

$$U - \text{линейный} \Rightarrow \exists y_0 \in \text{Int}(\overline{U(B)}) \Rightarrow$$

$$\exists r > 0 \quad B_r(y_0) \subset \overline{U(B)}$$

чтобы воспользоваться леммой, нам нужно заменить y_0 на 0

$$\begin{aligned}
 & \text{пусть } z \in Y, \|z\| < r, y_0 + z \in \overline{U(B)} \\
 & B - \text{симметричное множество, т.е. } x \in B \Rightarrow -x \in B \Rightarrow \\
 & \overline{U(B)} - \text{симметричное, т.е. } y_0 \in \overline{U(B)} \Rightarrow -y_0 \in \overline{U(B)} \\
 & z = (y_0 + z) + (-y_0) \in \overline{U(B)} + \overline{U(B)} \subset \overline{U(2B)} \\
 & \Rightarrow B_r^Y(0) \subset \overline{U(2B)} \Rightarrow B_{\frac{r}{2}}^Y \subset \overline{U(B)} \\
 & [[\text{лемма о редукции}]] \Rightarrow B_{\frac{r}{4}}^Y(0) \subset U(B) [[\text{критерий открытости}]] \Rightarrow \\
 & U \text{ открыт}
 \end{aligned}$$

□

Особенно часто применяется следствие, когда U — биекция

Теорема (Банах, об обратном отображении). X, Y — банаховы, $U \in \mathcal{B}(X, Y), U$ — биекция \Rightarrow

$$U^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) (\text{то есть } U^{-1} \text{ непрерывен})$$

Эта теорема нам пригодится, когда будем говорить о спектрах.

9.3. Теорема об эквивалентных нормах и о замкнутом графике

Когда мы говорили о нормах, нам обещалась некоторая сногсшибательная теорема, которую мы сейчас и докажем.

Теорема 9.2. X — линейное пространство, \exists две нормы на X , т.ч. $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ — банаховы. Пусть $\exists C > 0 : \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \forall x \in X$. Как бы это не могло показаться чудовищно странным, но существует и оценка в другую сторону

$$\Rightarrow \exists c_1 > 0 : \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \forall x \in X$$

Доказательство. Как мы уже делали, когда рассматривали 2 пространства с эквивалентными нормами, рассмотрим $X = (X, \|\cdot\|_1), Y = (X, \|\cdot\|_2)$

$$\begin{aligned}
 Ix = x, I \in \text{Lin}(X, Y), I - \text{биекция} & \Rightarrow \|Ix\|_2 \leq C \|x\|_1 \Rightarrow I \in \mathcal{B}(X, Y), \|I\| \leq C \\
 [[\text{т. Банаха об обратном отображении}]] & \Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \forall x \in X
 \end{aligned}$$

□

Определение 9.3 (график). X, Y — нормированные, над $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. $X \times Y$ — линейное нормированное

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1), \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

$U : X \rightarrow Y, U$ — отображение $G_U = \{(x, Ux)\}_{x \in X}$ — график U

U — замкнутое отображение, если G_U — замкнутое множество

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Ux_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow y_0 = Ux_0 \right) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lim x_n = x_0 \\ \lim Ux_n = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_0 = Ux_0$$

Посмотрим, как связаны замкнутость и непрерывность. Мы убедимся, что замкнутость это более слабое утверждение (меньше), чем непрерывность.

Замечание 9.5. U — непрерывное $\Rightarrow U$ — замкнутое

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n = y_0$
3. $Ux_0 = y_0$

U непрерывен $\Leftrightarrow 1 \Rightarrow 2 + 3$; U замкнутое $\Leftrightarrow 1 + 2 \Rightarrow 3$

Есть множество примеров, где проверка замкнутости гораздо легче проверки непрерывности. И бывает иногда удобно, что эти условия равносильны.

Теорема (о замкнутом графике). X, Y — банаховы, $U \in \text{Lin}(X, Y), U$ — замкнут $\Rightarrow U$ непрерывен

Доказательство. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$. Новая норма на X : $\|x_1\| = \|x\|_X \|Ux\|_Y$. Аксиомы нормы очевидны.

Проверим, что $(X, \|\cdot\|_1)$ — банахово по определению

$$\begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальная в } (X_1, \|\cdot\|_1), \text{ то есть} \\ \underbrace{\|x_m - x_n\|_1}_{\xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0} = \|x_m - x_n\|_X + \|Ux_m - Ux_n\|_Y \\ \Rightarrow \lim_{m,n \rightarrow 0} X = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Имеем дело с фундаментальными последовательностями в банаховом пространстве

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} &\Rightarrow \exists x_0 \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ &\lim_{m,n \rightarrow 0} \|Ux_m - Ux_n\|_Y = 0 \Rightarrow \exists y_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n = y_0 \end{aligned} \right\} \text{ замкнуто} \\ \Rightarrow Ux_0 = y_0 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_0\|_X + \|Ux_n - Ux_0\|_Y) = 0 \\ \Rightarrow (X, \|\cdot\|_1) \text{ — банахово} \\ \Rightarrow \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Ux\|_Y = \|x\|_1 \\ [[\text{теорема об эквивалентных нормах}]] \Rightarrow \\ \exists c_0 \quad \|x\|_X + \|Ux\|_Y \leq C \|x\|_X \Rightarrow \|Ux\|_Y \leq C \|x\|_X \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y) \end{aligned}$$

□

Естественно, требуются примеры, когда есть замкнутость, но нет непрерывности.

Замечание 9.6. X, Y — нормированные, $U \in \text{Lin}(X, Y)$, $U \not\rightarrow U$ — непрерывный.

У нас было не так много не непрерывных операторов: например, оператор дифференцирования, им и воспользуемся.

Пример 9.3.

$$\begin{aligned} D(f) = f', Y = C[-1, 1], X \subset Y, X = \{f : f' \in C[-1, 1]\} \\ \|f\|_X = \|f\|_Y = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \\ D(x^n) = nx^{n-1}, \|D(x^n)\| = n, \|x^n\| = 1 \Rightarrow \sup_{\|f\|=1} \|D(f)\| = +\infty \\ \Rightarrow D \text{ не непрерывен} \end{aligned}$$

это воспоминание о не непрерывности. Почему же он замкнут?

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in X, f_n \xrightarrow{X} f, D(f_n) \xrightarrow{Y} g \stackrel{?}{\Rightarrow} [[\text{замкнутость}]] D(f) = g$$

когда-то в анализе доказали

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{[-1,1]} f \\ f'_n \xrightarrow{[-1,1]} g \end{array} \right\} \Rightarrow g = f', \text{ то есть } D(f) = g \Rightarrow D \text{ замкнут}$$

Теорему о замкнутости графика нельзя применять, потому что X — не полное. Более того, $\overline{X} = Y$

9.4. Примеры неограниченных операторов в банаховом пространстве

Заодно ещё раз вспомним лемму Цорна, чтобы мы не думали, что это была экзотика для доказательства теоремы Хана-Банаха, а вполне рабочий инструмент, когда мы хотим пострить максимальный элемент в бесконечных множествах, где обычная индукция не помогает.

Определение 9.4 (алгебраический базис). X — линейное пространство над \mathbb{C} (или \mathbb{R}). $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — **алгебраический базис** (базис Гамеля), если $\forall x, x = \sum_{j=1}^n c_j x_{\alpha_j}$ такое представление единственно.

В конечномерном пространстве разницы с предыдущим определением базиса нет. Но в бесконечномерных пространствах на конечное представление надежды нет.

Теорема 9.3. X — линейное пространство \Rightarrow в $X \exists$ базис Гамеля.

Доказательство. План такой: мы возьмём максимальное линейно-независимое множество и назовём его максимальным элементом, потом применим лемму Цорна. Когда мы говорим о линейной независимости, речь идёт только о конечных комбинациях

$$\mathcal{P} = \{Y : Y \subset x, Y \text{ — линейно независимое } \}$$

порядок $Y \leq Z$, если $Y \subset Z, Y, Z \in \mathcal{P}$

для того, чтобы применить лемму Цорна, нужно установить, что в любом линейно упорядоченном множестве есть верхняя грань

$\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — линейно упорядоченное множество, то есть

$$\forall \alpha, \beta \text{ либо } Y_\alpha \subset Y_\beta \text{ или } Y_\beta \subset Y_\alpha$$

$$Y_0 = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \Rightarrow Y_0 \text{ — верхняя грань для } \{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

$[[\text{лемма Цорна}]] \Rightarrow \text{в } \mathcal{P} \exists \text{ максимальный элемент } Z$

проверим, что $\mathcal{L}(Z) = X$. Допустим $\exists x_0 \in X \setminus \mathcal{L}(Z)$

$$Y = x_0 \cup Z \Rightarrow Y \subset \mathcal{P}, Z \leq Y, Z \neq Y$$

противоречие $\Rightarrow Z$ — базис Гамеля

□

С помощью этого базиса построим примеры, если их вообще можно назвать примерами, ведь они будут совсем-совсем неявными.

Пример 9.4. X — банахово, $\dim X = \infty$, пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — базис Гамеля

$$\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}, \lambda_\alpha \in \mathbb{C} \quad \sup_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| = +\infty$$

$$U : X \rightarrow X, U(x_\alpha) = \lambda_\alpha \cdot x_\alpha$$

по линейности продолжим

$$x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n c_j x_{\alpha_j} \quad U(x) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$$

$$U \in \text{Lin}(X), \sup_{\alpha \in A} \frac{\|U(x_\alpha)\|}{\|x_\alpha\|} = \sup_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| = +\infty \Rightarrow U \notin \mathcal{B}(X)$$

Пример не очень явный, но, тем не менее, вот такие ужасы. Теперь пусть будет не непрерывный линейный функционал.

Пример 9.5. X — банахово, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — базис Гамеля, $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}, \sup_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| = +\infty$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \quad f(x_\alpha) = \lambda_\alpha \cdot \|x_\alpha\|$$

продолжим по линейности

$$\Rightarrow f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), \sup_{\alpha} \frac{|f(x_\alpha)|}{\|x_\alpha\|} = +\infty \Rightarrow f \notin X^*$$

Пример 9.6.

$$l^2, \{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$$

$\mathcal{P}9 \{Y \subset l^2, E = \{e_n\}_{n=1}^\infty\}, E \subset Y, Y$ — линейно независимое

\exists максимальный элемент

$\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — базис Гамеля

$\mathbb{N} \subset A, \lambda_n = n$, то есть

$f(e_n) = n, f(e_\alpha) = \lambda_\alpha, \lambda_\alpha \in \mathbb{C}, \lambda_\alpha$ — любое

$\sup_n |f(e_n)| = +\infty \Rightarrow f \notin (l^2)^\infty$ при $\alpha \neq n$

Глава 10

Сопряжённые пространства

10.1. Сопряженное пространство к L^p

На самом деле, в этой части всё докажем только для l , для L только простую часть.

Напоминание о том, что мы думаем о мерах: (X, U, μ) — пространство с мерой, μ — σ -конечная, то есть $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$. μ — полная мера, то есть если $A \subset U, \mu A = 0$, то $\forall B \subset A \Rightarrow B \in U, \mu(B) = 0$

Теорема 10.1 (сопряжение к $L^p(X, U, \mu)$). 2 случая, во втором очень важно, что бесконечность не включается!

1. $1 \leq p \leq +\infty$

$$g \in L^q(X, \mu) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$g \text{ — фиксирована, } h \in L^p, F_g(h) := \int_X h(x)g(x)d\mu \Rightarrow F_g \in (L^p)^*$$

$$\|F_g\| = \|g\|_{L^q}$$

2. $1 \leq p < +\infty, F \in (L^p)^* \Rightarrow \exists ! g \in L^q \text{ т.ч. } F = F_g$

1 утверждение. Ну тут совсем легко. $Fg \in \text{Lin}(L^p, \mathbb{C})$ — очевидно, просто потому что интеграл — линейное действие. Теперь, как его оценить?

$$g \in L^q, h \in L^p, |F_g(h)| = \left| \int_X hgd\mu \right| \leq [[\text{Гельдер}]] \|h\|_p \|g\|_q \quad \forall h \in L^p$$

мы уже отмечали, что неравенство верно даже для бесконечных p и q

$$\Rightarrow F_g \in (L^p)^*, \|F_g\| \leq \|g\|_q$$

чтобы получить неравенство в другую сторону, предъявим так называемую пробную функцию, на которой будет выполняться неравенство. Пусть сначала $1 < p \leq +\infty \Rightarrow 1 \leq q < +\infty$

$$U(x) := \begin{cases} \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} |g(x)|^{q-1} & g(x) \neq 0 \\ 0 & g(x) = 0 \end{cases}, \overline{g(x)} - \text{комплексное сопряжение}$$

Проверим, что $U \in L^p$, чтобы к нему что-то применять

$$\begin{aligned} |U(x)|^p &= |g(x)|^{p(q-1)} = [(q-1)p = q \left(1 - \frac{1}{q}\right) p = q \cdot \frac{1}{p} \cdot p = q] |g|^q \\ &\Rightarrow \left(\int_X |U|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow U \in L^p \\ F_g(U) &= \int_X g(x) \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} |g(x)|^{q-1} d\mu = \int_X |g|^q d\mu = \|g\|_q^q \\ \|F_g\| &= \sup_{h \in L^p, h \neq 0} \frac{\|F_g(h)\|}{\|h\|_p} \geq \frac{|F_g(U)|}{\|U\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} \\ &\Rightarrow \|F_g\| \geq \|g\|_q \Rightarrow \|F_g\| = \|g\|_{L^q} \end{aligned}$$

Теперь пусть $p = 1, q = \infty$. Опять хотим оценить снизу норму линейного функционала

$$\begin{aligned} \text{если } \|g\|_\infty = 0, \text{ то } g = 0 \text{ п.в.} &\Rightarrow F_g = 0, \|F_g\| = 0 \\ \text{пусть } \|g\|_\infty > 0, \text{ пусть } c > 0 &\|g\|_\infty > c > 0 \\ A = \{x \in X : |g(x)| \geq c\} &\Rightarrow \mu(A) > 0 \end{aligned}$$

Вот, наконец, где нам потребуется σ -конечность. Почему вообще существует такое множество A ?

$$\begin{aligned}
 & \text{пусть } e \subset A, 0 < \mu e < +\infty \text{ т.к. } X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty \\
 \Rightarrow A &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap X_j), e_j = A \cap X_j \Rightarrow \mu e_j < +\infty, \text{ если бы } \mu e_j = 0 \forall j, \text{ то } \mu A = 0 \\
 &\Rightarrow \exists e = e_j \quad 0 < \mu e < +\infty, e \subset A \\
 U(x) &= \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} \chi_e(x) \\
 F_g(U) &= \int_X g(x) \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} \chi_e(x) d\mu = \int_e |g(x)| d\mu \geq c\mu(e) \\
 U \in L^1, \|U\|_1 &= \int_X |U(x)| d\mu = \int_e d\mu = \mu(e) \\
 \|F_g\| &\geq \frac{|F_g(U)|}{\|U\|_1} \geq \frac{c\mu(e)}{\mu(e)} = c \forall c, 0 < c < \|g\|_{\infty} \\
 &\Rightarrow \|F_g\| \geq \|g\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

□

Вторая, главная часть, без доказательства. Разве что скажем пару слов про единственность

$$\begin{aligned}
 F_g = F_v &\Rightarrow F_{g-v} = 0 \Rightarrow \int_X h(gv) d\mu = 0 \forall h \in L^p \\
 \|F_{g-v}\| &= \|g-v\|_p = 0 \Rightarrow g = v \text{ п.в., то есть } g = v \text{ в } L^p
 \end{aligned}$$

Для доказательства второй части нам не хватает одной теоремы из теории меры, а именно теоремы Никодима, который как раз сидел с Банахом на лавочке, когда мимо них проходил Штейнгауз, но у нас нет времени её доказывать.

Теорема (Сопряжённое пространство к l^p). 2 случая, во втором очень важно, что бесконечность не включается!

1.

$$1 \leq p \leq +\infty, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y \in l^q, y \text{ — фиксирован}$$

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p \quad F_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \Rightarrow F_y \in (l^p)^*$$

$$\|F_y\| = \|y\|_q$$

$$2. \quad 1 \leq p < +\infty, F \in (l^p)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^q : F = F_y$$

1 утверждение.

$$F_y \in \text{Lin}(l^p, \mathbb{C})$$

$$|F_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq [\text{Гельдер}] \|x\|_p \|y\|_q \Rightarrow F_y \in (l^p)^*, \|F_y\| \leq \|y\|_q$$

□

2 утверждение.

$$F \in (l^p)^*, 1 \leq p < +\infty, \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — базис в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

$$e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$$

$$y_n := F(e_n)$$

$$x \in l^p \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, S_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x \Rightarrow [[F \text{ непрерывен}]] \lim_{n \rightarrow \infty} F(S_n) = F(x)$$

$$F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \Rightarrow F = F_y$$

осталось проверить 2 вещи: $y \in l^q$ и $\|F\| \geq \|y\|_q$. Пробные последовательности, которые мы будем брать тут, будут напоминать пробные функции, которые мы брали в предыдущей теореме

$$n \in \mathbb{N} \quad x^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} |y_k|^{q-1} e_k \text{ при } 1 < p < +\infty \Rightarrow q < +\infty$$

$$\|x^{(n)}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$F(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} \cdot |y_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q$$

как обычно, когда вычисляем норму линейного функционала

$$\|f\| \geq \frac{|f(x^{(n)})|}{\|x^{(n)}\|_p} = \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y \in l^q, \|F\| \geq \|y\|_q$$

если $p = 1, q = \infty, \|F\| \geq |F(e_n)| = |y_n| \quad \forall n \Rightarrow y \in l^\infty$

$$\|F\| \geq \|y\|_\infty$$

□

Это замечание нужно было сделать про L^p , но сделаем его тогда сразу и для l^p

Замечание 10.1.

$$1 \leq p \leq +\infty$$

$$T : l_q \rightarrow (l^p)^* \quad y \in l^q$$

$$T(y) = F_y$$

Если $1 \leq p < +\infty$, то T — линейный изометрический изоморфизм. Говорят $(l^p)^* = l^q$, а имеют в виду $T(l^q) = (l^p)^*$

$$p = \infty, T(l^1) \subsetneq (l^\infty)^*$$

T — изометрическое вложение

То же самое для L^p :

$$(X, U, \mu), T : L^q \rightarrow (L^p)^* \quad T(g) = F_g$$

Если $1 \leq p < +\infty$, T — линейный изометрический изоморфизм. Говорят $(L^p)^* = L^q$. Если $p = \infty$, $T(L^1) \subsetneq (L^\infty)^*$ — изометрическое вложение

Вспомним, что такое c_0

$$c_0 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{C}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}, c_0 \subset l^\infty$$

Теорема 10.2 (сопряжённое к c_0). 1. $F_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \Rightarrow F_y \in (c_0)^*, \|F_y\| = \|y\|_1$
 2. $F \in (c_0)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^1$ т.е. $F = F_y$

1 утверждение.

$$\begin{aligned} |F_y(x)| &= \left| \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \sum_{n=1}^\infty |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_1 \\ &\Rightarrow F_y \in (c_0)^*, \|F_y\| \leq \|y\|_1 \end{aligned}$$

Это повторение доказательства для l^p где $p = \infty$ □

2 утверждение.

$$F \in (c_0)^* \quad \{e_n\}_{n=1}^\infty \text{ — базис в } c_0, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$$

$$y_n := F(e_n) \quad x \in c_0, x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x, F \text{ — непрерывный} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(S_n) = F(x)$$

$$F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \Rightarrow F = F_y$$

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} e_k \Rightarrow x^{(n)} \in c_0 \quad \|x^{(n)}\|_\infty = 1$$

$$\Rightarrow F(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} = \sum_{k=1}^n |y_k|$$

$$\|F\| \geq |F(x^{(n)})| = \sum_{k=1}^n |y_k| \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in l^1$$

$$\|F\| \geq \|y\|_1 \Rightarrow \|F\| = \|y\|_1$$

□

Замечание 10.2.

$$y \in l^1, T : l^1 \rightarrow (c_0)^*$$

$$T(y) = F_y$$

T — линейный изометрический изоморфизм

Говорят $(c_0)^* = l^1$

$$c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\}$$

Упражнение:

Утверждение 10.1. требуется доказать

1. $y = \{y_n\}_{n=0}^{+\infty} \in l^1 \Rightarrow F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n, F_y \in (c)^*$
2. $F \in c^* \Rightarrow \exists ! y \in l^1, y = \{y_n\}_{n=0}^{+\infty} : F = F_y$

Чтобы получился базис, нужно, чтобы был какой-то e_0 помимо e_n и нужно понять, как определять этот дополнительный элемент, подумайте чуть-чуть.

10.2. Второе сопряжённое

Определение 10.1.

$$X^{**} = (X^*)^*, \text{ то есть } X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C}) \text{ или } \mathcal{B}(X^*, \mathbb{R})$$

Есть каноническое вложение $\pi : X \rightarrow X^{**}$. Пусть $x \in X$ — фиксирован. Посмотрим, как этот фиксированный x порождает множество линейных функционалов на множестве линейных функционалов на X

$$\text{пусть } f \in X^* \quad G_x(f) := f(x)$$

$$\pi(x) := G_x, \text{ то есть } (\pi(x))(f) := f(x)$$

Теорема 10.3 (каноническое вложение X во второе сопряжённое). $(X, \|\cdot\|), \pi : X \rightarrow X^{**} \Rightarrow$

$$\pi \in \mathcal{B}(X, X^{**}), \|\pi(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X (\Rightarrow \|\pi\| = 1)$$

Доказательство. Проверим, что при фиксированном $x, \pi(x) \in X^{**}$ есть линейность:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C}, f \in X^* \quad & (\pi(x))(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \pi(x)(f) \\ f, g \in X^* \Rightarrow \pi(x)(f + g) &= (f + g)(x) = f(x) + g(x) = (\pi(x))(f) + (\pi(x))(g) \\ & \Rightarrow \pi(x) \in \text{Lin}(X^*, \mathbb{C}) \\ f \in X^* \quad & |(\pi(x))(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \quad \forall f \Rightarrow \pi(x) \in (X^*)^* \\ & \|\pi(x)\| \leq \|x\| \end{aligned}$$

вспомним следствие из теоремы Хана-Банаха о достаточном числе линейных функционалов

$$\begin{aligned} \exists g \in X^*, \|g\| = 1, g(x) &= \|x\| \\ \|\pi(x)\| \geq |(\pi(x))(g)| &= |g(x)| = \|x\| \\ \Rightarrow \|\pi(x)\| &= \|x\|_X \Rightarrow \|\pi\| = 1 \end{aligned}$$

□

Вложение это как раз потому, что это отображение сохраняет норму.

Следствие, которое когда-то было обещано:

Следствие 10.1. $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow \overline{\pi(X)}^{X^{**}} = Y \Rightarrow$
 Y — пополнение X

Появляюстя теперь некоторые особенно хорошие банаховы пространства

Определение 10.2 (рефлексивное пространство). Если $\pi(X) = X^{**}$, то X — рефлексивное пространство

Следствие 10.2. X — рефлексивное $\Rightarrow X$ — банахово

У нас были симметричные формулы для нормы элемента и для нормы линейного функционала, но всё-таки они отличались тем, что

в норме функционала мы ставили \sup , а в рефлексивном пространстве этого делать не надо.

Следствие 10.3. X — рефлексивное $\Rightarrow \|f\| = \max_{\{ \|x\|=1 \}} |f(x)|$

Доказательство. известно, что

$$\|x\| = \max_{\{ \|f\|=1 \}} |f(x)|, \|f\| = \sup_{\{ \|x\|=1 \}} |f(x)|$$

$$\begin{aligned} f \in X^* \Rightarrow \|f\| &= \max_{\{ \varphi \in X^{**}: \|\varphi\|=1 \}} |\varphi(f)| = [[\text{рефлексивность}]] \\ &= \max_{\{ \pi(x), \|x\|=1 \}} |(\pi(x))(f)| = \max_{\{ \|x\|=1 \}} |f(x)| \end{aligned}$$

□

Пример 10.1. $1 < p < +\infty, L^p$ — рефлексивные, $(L^p)^* \cong L^q, (L^q)^* \cong L^p$

Пример 10.2. H — гильбертово, H — рефлексивное, H^* — сопряженное линейно изоморфно H , H^{**} — линейно изометрически изоморфно H

Пример 10.3. $L^1, L^\infty, l^1, l^\infty, c_0, C$ — не рефлексивны. Мы доказали, что $l^1 \subset (l^\infty)^*, l^\infty$ — не сепарабельно $\Rightarrow (l^\infty)^*$ — не сепарабельно

Единственный пример, когда мы реально можем сосчитать дважды сопряженное

Пример 10.4. $(c_0)^* = l^1, (l^1)^* = l^\infty \Rightarrow (c_0)^{**} = l^\infty$

10.3. Слабая сходимость

Когда-то давно деткам рассказывали, что такое слабая топология, но лектора отговорили это делать, поэтому будет только слабая сходимость.

Определение 10.3. $(X, \|\cdot\|), \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in X, x_0 \in X$

$$x_0 = \text{w-lim } x_n \text{ если } \forall f \in X^* \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

w = weak

Отметим его простейшие свойства

Свойство 10.1. 1. Если $\exists \text{ w-lim } x_n$, то он единственный

2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - x_n\| = 0$, то $x_0 = \text{w-lim } x_n$ (как раз почему слабая сходимости слабее сходимости по норме)

1.

пусть $x_0 = \text{w-lim } x_n, y_0 = \text{w-lim } x_n \Rightarrow \forall f \in X^* \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(y_0)$

[[по следствию о достаточном числе линейных функционалов]]

$$\begin{aligned} \exists g \in X^*, \|g\| = 1 \quad g(x_0 - y_0) &= \|x_0 - y_0\| \\ g(x_0) = g(y_0) &\Rightarrow \|x_0 - y_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 \end{aligned}$$

□

2. Пусть $f \in X^*, |f(x_0) - f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \underbrace{\|x_0 - x_n\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

$f(x_0)$

□

Воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза чтобы получить критерий слабой сходимости.

Теорема 10.4 (критерий слабой сходимости).
 $(X, \|\cdot\|), \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in X$

$$x_0 = \text{w-lim } x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty \\ E \subset X^*, E \text{ — полное семейство, т.е. } \overline{\mathcal{L}(E)} = X^* \end{cases}$$

$$f \in E \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Доказательство. Пока у нас нет никаких отображений, не говоря уже о том, что в теореме Банаха-Штейнгауза была куча нормированных пространств. К чему будет применять критерий? Тут нам и пригодится π

$$\pi : X \rightarrow X^{**}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi(x_n))(f) = \pi(x_0)(f)$$

когда-то мы доказывали, что пространство линейных операторов $\text{Lin}(X, Y)$, где Y — банахово, тоже будет банаховым

$$\begin{aligned}
 x_0 = \text{w-lim } x_n &\Leftrightarrow \pi(x_0) = \text{s-lim } \pi(x_n) \Leftrightarrow \\
 [[\pi(x) : X^* \rightarrow \mathbb{C} \quad X^*, \mathbb{C} \text{ — банаховы, теорема Банаха-Штейнгауза}]] \\
 \left\{ \begin{aligned} &\sup_n \|\pi(x_n)\| < +\infty \\ &E \subset X^*, \overline{\mathcal{L}E} = X^*, \forall f \in E \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi(x_n))(f) = (\pi(x_0))(f) \end{aligned} \right. &\Leftrightarrow \\
 \left\{ \begin{aligned} &\sup_n \|\pi(x_n)\| < +\infty \\ &\forall f \in E, \overline{\mathcal{L}(E)} = X^*, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

□

Теорема 10.5 (слабая сходимость в конечномерном пространстве). $(X, \|\cdot\|), \dim X < +\infty \Rightarrow$

$$x_0 = \text{w-lim } x^{(n)} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - x^{(n)}\| = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 &\text{пусть } \dim X = m, \{e_j\}_{j=1}^m \text{ — базис в } X \\
 x \in X, x = \sum_{j=1}^m x_j e_j, \|x\|_\infty &:= \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| \quad x_0 = \text{w-lim } x^{(n)} \quad x^{(n)} = \sum_{j=1}^m x_j^{(n)} e_j \quad x_0 = \sum_{j=1}^m (x_0)_j e_j \\
 f_j(x) &:= x_j, f_j \in X^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_j(x^{(n)}) = f_j(x_0) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} &= (x_0)_j \Rightarrow \|x_0 - x^{(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

когда-то мы доказывали, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны

$$\Rightarrow \|x_0 - x^{(n)}\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Теперь, господа, какое-то странное определение-обозначение для того, чтобы забыть про π и писать X, X^*

$$\begin{aligned}
 x &\in X, f \in X^* \\
 \langle f, x \rangle &:= f(x) \\
 \langle x, f \rangle &:= f(x)
 \end{aligned}$$

Например, $1 < p < +\infty, f \in L^p, y \in L^q, \langle f, y \rangle = \int_X f y d\mu$. Одна компонента — функция, другая — линейный функционал, и может быть наоборот

Теорема 10.6 (слабая сходимость в $l^p, 1 < p < +\infty$).

$$x^{(n)} \in l^p, x = \text{w-lim } x^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|x^{(n)}\| < \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = x_j \quad j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Доказательство.

$$x^{(n)} = \left\{ x_j^{(n)} \right\}_{j=1}^{\infty}, (l^p)^* = l^q, E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l^q, e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ \overline{\mathcal{L}(E)} = l^q$$

В l^q мы выберем базис. Рассмотрим действие f на произвольном элементе

$$x \in l^p \quad e_n \in l^q \Rightarrow e_n \in (l^p)^* \\ \langle e_n, x \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (e_n)_j x_j = x_n, \langle e_m, x \rangle = x_m$$

применим критерий

$$x = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|x^{(n)}\|_p < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_j, x^{(n)} \rangle = \langle e_j, x \rangle \quad \forall j \end{cases} \quad 2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} =$$

□