

# Функциональный анализ

Курс Виденского И.В.

Осень 2023

# Оглавление

Оглавление	1
<b>I Метрические пространства</b>	<b>4</b>
<b>1 Введение</b>	<b>5</b>
1.1 Зачем изучать функциональный анализ . . . . .	6
<b>2 Метрические пространства</b>	<b>8</b>
2.1 Банаховы пространства . . . . .	11
2.2 Пространство ограниченных функций . . . . .	14
2.3 Пространство последовательностей с $\sup$ нормой . . . . .	16
2.4 Пространство $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке . . . . .	17
<b>3 Пространство суммируемых функций (Лебега <math>L^p</math>)</b>	<b>18</b>
3.1 Теория меры . . . . .	18
3.2 Классические неравенства . . . . .	21
3.3 Пространство Лебега . . . . .	23
3.4 Пространства $l_n^p, l^p$ . . . . .	27
3.5 Неполное нормированное пространство . . . . .	29
3.6 Пополнение метрического пространства . . . . .	31
3.7 Теорема о вложенных шарах . . . . .	36
3.8 Сепарабельные пространства . . . . .	38
3.9 Нигде не плотные множества . . . . .	44
3.10 Полные семейства элементов . . . . .	45
3.11 Полные и плотные множества в $L^p$ . . . . .	46
<b>4 Метрические компакты</b>	<b>53</b>
4.1 Относительно компактные множества в $C(K)$ . . . . .	60

<b>II</b>	<b>Линейные операторы</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Линейные операторы в линейных пространствах</b>	<b>68</b>
5.1	Линейные операторы в линейных пространствах . . . . .	68
5.2	Линейные операторы в нормированных пространствах . . . . .	71
5.3	Линейные функционалы . . . . .	78
5.4	Изоморфные линейные пространства . . . . .	83
5.5	Конечномерные пространства . . . . .	86
5.6	Конечномерные подпространства . . . . .	90
5.7	Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром . . . . .	93
5.8	Факторпространство . . . . .	96
<b>III</b>	<b>Гильбертовы пространства</b>	<b>99</b>
<b>6</b>	<b>Гильбертовы пространства</b>	<b>100</b>
6.1	Введение . . . . .	100
6.2	Пространство, сопряжённое к гильбертову . . . . .	117
6.3	Классические ряды Фурье . . . . .	119
<b>IV</b>	<b>Линейные функционалы</b>	<b>123</b>
<b>7</b>	<b>Геометрический смысл линейного функционала</b>	<b>124</b>
7.1	Продолжение линейного функционала . . . . .	126
7.2	Продолжение линейных функционалов в нормированном пространстве . . . . .	134
<b>8</b>	<b>Принцип равномерной ограниченности</b>	<b>139</b>
8.1	Применение принципа равномерной ограниченности к рядам Фурье . . . . .	145
<b>9</b>	<b>Теорема об открытом отображении</b>	<b>150</b>
9.1	Обратные операторы . . . . .	150
9.2	Открытые отображения . . . . .	154
9.3	Теорема об эквивалентных нормах и о замкнутом графике . . . . .	158
9.4	Примеры неограниченных операторов в банаховом пространстве . . . . .	161
<b>10</b>	<b>Сопряжённые пространства</b>	<b>164</b>
10.1	Сопряжённое пространство к $L^p$ . . . . .	164

10.2 Второе сопряжённое . . . . .	170
10.3 Слабая сходимость . . . . .	173
10.4 Слабая со * сходимость . . . . .	179
10.5 Сопряжённые операторы в нормированном пространстве	185
10.6 Сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве . .	188
<b>11 Спектр и резольвента оператора</b>	<b>193</b>
11.1 Компактные операторы . . . . .	200
11.2 Спектр компактного оператора . . . . .	203
11.3 Самосопряжённые операторы . . . . .	205
11.4 Компактные самосопряжённые операторы . . . . .	207
11.5 Интегральный оператор в $L^2$ . . . . .	213
11.6 Каноническое представление компактного оператора . .	215

# Часть I

## Метрические пространства

# Глава 1

## Введение

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет  $X$  — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над  $\mathbb{C}$  (или  $\mathbb{R}$ ). Есть непрерывные операции

1.  $(x, z) \rightarrow x + z \quad x, z \in X$
2.  $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть  $X, Y$  — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение  $A : X \rightarrow Y$

**Определение 1.1** (Линейное отображение).

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если  $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$ , то это линейная алгебра.

$$A : X \rightarrow X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ } \{u_j\}_{j=1}^n$$

$\lambda_j$  —  $j$ -е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

**Теорема 1.1** (Гильберт).  $X$  — гильбертово (сепарабельное) пространство.  $A = A^*, A : X \rightarrow X \Rightarrow \exists$  ОНБ из собственных векторов.

Если  $\dim Y = 1$ , т.е.  $Y = \mathbb{C}$  (или  $\mathbb{R}$ ), то  $A : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . В функциональном анализе же у нас  $X$  — пространство функций,  $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \rightarrow Y$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах  $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы-основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега  $L^p$ .

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

## 1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций  $C[a, b]$ , там введём норму  $|f| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Рассмотрим пространство многочленов  $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ . Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени  $n$  не может быть больше  $n$  корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно.  $0, 1, 2 = o(3)$ ;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида «Функциональный анализ»;
5. У. Рудин.



## Глава 2

# Метрические пространства

Начнём с того, что все знают, надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз возвращаться к метрическим пространствам, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов, который мы получим, это новое описание компакта в метрических пространствах. Оно будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в  $\mathbb{R}^n$  или в  $\mathbb{C}^n$  и обладают теми же полезными свойствами.

**Определение 2.1** (Метрика).  $X$  — множество.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho$  — **метрика**, если при  $\forall x, y, z \in X$  она обладает следующими свойствами

1.  $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2.  $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара.  $x \in X, r > 0$   
 $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$  — шар с радиусом  $r$ .  $\{B_r(x)\}_{r>0}$  — база окрестности в точке  $x$ .

$G$  — открытое, если  $\forall x \in G \exists r > 0 B_r(x) \subset G$ .

$F$  — замкнутое  $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$  — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутые множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность и  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

$(X, \rho)$  — метрическое пространство  $\Rightarrow (F$  — замкнутое  $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность и  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in F$  и  $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F))$

**Определение 2.2** (Фундаментальная последовательность).  
 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

**Замечание 2.1.**  $\exists x_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная

**Определение 2.3** (Полное метрическое пространство).  
 $(X, \rho)$  — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в  $X$

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

**Замечание 2.2** (о пользе полноты).  $F : X \rightarrow \mathbb{R}, (X, \rho)$  — метрическое пространство,  $F$  — непрерывная функция.

Стоит задача найти  $x_0 \in X$  т.ч.  $F(x_0) = 0$ . Алгоритм:  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0, \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ . Если  $(X, \rho)$  — полное, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ . А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

**Пример 2.1.**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  — полные.

**Пример 2.2.**  $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$  — неполное.

**Пример 2.3.**  $\mathbb{Q}$  — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что  $\mathbb{Q}$  — неполное.

**Определение 2.4** (ограниченное множество).  
 $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $A \subset X, A$  — ограниченное, если  

$$\exists R > 0 \exists x_0 \in X : A \subset B_R(x_0)$$

**Теорема 2.1** (Свойства фундаментальных последовательностей).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1.  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — ограниченная, т.е.  $\exists R > 0 \exists x_0 \in X \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_0)$
2.  $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  — подпоследовательность  $\Rightarrow (\exists a \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists a \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k})$
3.  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная последовательность действительных чисел,  $\forall k \in \mathbb{N} \varepsilon_k > 0 \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  — подпоследовательность  $\forall j \in \mathbb{N} (j > k \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k)$

*1 утверждение.* Возьмём  $\varepsilon = 1$ , тогда из фундаментальности  $\exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_N) < 1)$ .

Возьмём  $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$ . Единичка на всякий случай.

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_N)$ . □

*2 утверждение.* Возьмём  $\varepsilon > 0$ , тогда по фундаментальности  $\exists N \forall n, m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$ . Возьмём это  $N$ .

$\exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists n_k (n_k > N \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon)$ . Возьмём это  $n_k$ .

Возьмём некоторое  $m > N$ . Тогда  $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$  □

*3 утверждение.* Докажем по индукции:

$\varepsilon_1 : \exists n_1 \forall n, m \in \mathbb{N} ((n > n_1 \wedge m > n) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1)$ . Выберем  $n_1$ , тогда  $\forall m \in \mathbb{N} (m > n_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1)$ .

$\varepsilon_k$  : по индукции выбрали  $n_1, \dots, n_{k-1}, k \geq 2. \forall j \in (1 \dots k-1) \forall m \in \mathbb{N} (m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j)$ . Из фундаментальности исходной последовательности  $\exists n_k (n_k > n_{k-1} \wedge \forall m \in \mathbb{N} (m > n_k \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k))$  □

**Следствие 2.1.**  $(X, \rho), \{x_n\}$  — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

*Доказательство.* По 3 свойству при  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ .  $\square$

**Теорема 2.2** (О замкнутом подмножестве).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, тогда

1.  $(X, \rho)$  — полное,  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  — замкнутое  $\Rightarrow (Y, \rho)$  — полное
2.  $Y \subseteq X$ ,  $(Y, \rho)$  — полное  $\Rightarrow Y$  — замкнутое

*1 утверждение.* Доказательство следует прямо из определения. Значим, что  $Y$  — замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность.  $Y \subset X$ , пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} x_n \in Y$  — фундаментальная.  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X, X$  — полное  $\Rightarrow \exists x_0 \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  $Y$  — замкнутое, значит  $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$  — полное.  $\square$

*2 утверждение.* Второй пункт не труднее первого. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — произвольная фундаментальная последовательность в  $Y$ .

$Y$  — полное  $\Rightarrow \exists x_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$  — замкнутое из-за произвольности последовательности.  $\square$

## 2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

**Определение 2.5** (полунорма). Пусть  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Отображение  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется полунормой, если при  $\forall x, y \in X \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  (полуаддитивность)
2.  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

**Свойство 2.1.**  $p$  — полунорма  $\Rightarrow$

$$\forall x \in X (p(x) \geq 0 \wedge p(0) = 0)$$

*Доказательство.*  $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$ . Пусть  $x \in X \Rightarrow 0 = x + (-x) \Rightarrow p(0) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$   $\square$

**Определение 2.6** (Норма).  $X$  — линейное пространство,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $p$  — норма  $\Leftrightarrow (p \text{ — полунорма} \wedge (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0))$ . Будем обозначать  $\|x\| := p(x)$ .

$(X, \|\cdot\|)$  будем обозначать нормированное пространство, и при  $x, y \in X$   $\rho(x, y) := \|x - y\|$ . Тогда  $(X, \|\cdot\|)$  — метрическое пространство.

**Определение 2.7** (банахово пространство).  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

**Определение 2.8** (подпространство в алгебраическом смысле).  $X$  — линейное пространство,  $L \subset X$ .  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле  $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in L \forall \alpha, \beta \in K \alpha x + \beta y \in L$$

**Определение 2.9** (подпространство).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $L \subset X$ ,  $L$  — подпространство, если

1.  $L$  подпространство в алгебраическом смысле
2.  $L = \bar{L}$  ( $\bar{L}$  — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

**Определение 2.10** (Сходимость).

$$(X, \|\cdot\|) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  (\*), (\*) сходится, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$

(\*) сходится абсолютно, если  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$  сходится

В  $\mathbb{R}^n$  (или в  $\mathbb{C}^n$ ) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

**Теорема 2.3** (Критерий полноты нормированного пространства).  $(X, \|\cdot\|)$  - полное  $\Leftrightarrow$  из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

*Доказательство.* Предположим, что наше пространство полное ( $\Rightarrow$ ).  $(X, \rho)$  — полное,  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ сходится} \quad (**)$$

$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ . Цель такая: последовательность  $S_n$  — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (\*\*). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть  $\varepsilon > 0$ . По критерию Коши  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, p \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon)$ .

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная, } (X, \rho) \text{ — полное} \\ &\Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится} \end{aligned}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше  $\varepsilon$ .

Теперь ( $\Leftarrow$ ). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что

$$\begin{aligned} \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ — подпоследовательность } \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \text{ сходится} \\ \Rightarrow \text{последовательность } x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \text{ сходится} \end{aligned}$$

Но её последовательность частичных сумм — это в точности оригинальная подпоследовательность:

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists S \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = S$$

Далее из части 2 Теоремы 2.1

$$\exists S \in X \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$$

□

## 2.2. Пространство ограниченных функций

**Определение 2.11.** Пусть  $A$  — произвольное множество. Стандартное обозначение  $m(A)$  — множество всех ограниченных функций из него в  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$m(A) = \{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ и } \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty\}$$

$$f \in m(A) \Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

**Теорема 2.4.**  $(m(A), \|\cdot\|_\infty)$  — банахово пространство

*Доказательство.* Нужно проверить две вещи. Во-первых, что  $\|\cdot\|_\infty$  удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев — возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что  $\|\cdot\|_\infty$  удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in A} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$$\begin{aligned} \forall f, g \in m(A) \forall x \in A |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \Rightarrow \forall f, g \in m(A) \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Следующая аксиома нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall x \in A f(x) = 0 \text{ т.е. } f \text{ — нулевая функция}$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту.  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  — фундаментальная в  $m(A)$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$((m > N \wedge n > N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon) \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Берём  $\varepsilon, N$  из формулы выше, фиксируем  $x$ . Если для супремума есть неравенство, то и для  $x$  тем более.  $\forall x \in A ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$  — фундаментальная последовательность в  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ .

$$\Rightarrow \forall x \in A \exists L \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = L$$

$$\text{Определим } f : A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\begin{aligned} (n > N \wedge m > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \quad \text{пусть } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \end{aligned}$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что  $f$  — элемент  $A$ . Для  $n > N$  можем записать  $f$  как  $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$ .

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = \|(f - f_n) + f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in A} f$$

**Определение 2.12** (Топологический компакт). Множество  $K$  — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1.  $\forall \alpha \in A$   $G_\alpha$  — открытое множество и  $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n$  — конечная подпоследовательность :  $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$
2. Хаусдорфовость  $\forall x, y \in K (x \neq y \Rightarrow \exists U, V$  — открытые и  $x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset)$



**Определение 2.13.**  $C(K) = \{f \mid f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } f \text{ непрерывна}\}$

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

**Следствие 2.2.**  $K$  — топологический компакт  $\Rightarrow C(K)$  — банахово

*Доказательство.*  $C(K) \subset m(K)$ .  $C(K)$  — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что  $C(K)$  — замкнуто в  $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n \in C(K), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{K, n \rightarrow \infty} f \xRightarrow{\text{анализ}} f \in C(K) \Rightarrow C(K) \text{ замкнуто}$$

тогда  $m(K)$  — полное и  $C(K)$  — полное. □

## 2.3. Пространство последовательностей с sup нормой

**Определение 2.14.**  $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$  — полное. Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.

**Определение 2.15** ( $l^\infty$ ).

$$l^\infty = \{x = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in m(A), f : A \rightarrow \mathbb{C}, j \mapsto x_j$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

**Определение 2.16**  $(c, c_0)$ .

$$\begin{aligned} c &= \{x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{C} \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\} \\ c &\subset l^{\infty}, \|x\| = \|x\|_{\infty} = \sup \|X\| \\ c_0 &= \{x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^{\infty} \end{aligned}$$

$c, c_0$  — замкнутые подпространства в  $l^{\infty} \Rightarrow c, c_0$  — банаховы.

## 2.4. Пространство $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } \exists f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

**Определение 2.17** (норма  $n$ -ой производной).

$$\|f\|_{C^{(n)}[a, b]} = \max_{0 \leq k \leq n} \{\|f\|_{\infty}^{(k)}\}, f^{(0)} = f$$

**Теорема 2.5.**  $C^{(n)}[a, b]$  — банахово.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \{f_m\}_{m=1}^{\infty} &\text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b] \\ \varepsilon > 0 \exists N : (m > N \wedge q > N) &\Rightarrow \|f_m - f_q\|_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow \|f_m^{(k)} - f_q^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon \\ &k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\{f_m^{(k)}\}$  — фундаментальная в полном пространстве  $C[a, b]$

$$\Rightarrow \exists \varphi_k \in C[a, b], f_m^{(k)} \xrightarrow{[a, b]} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\xRightarrow{\text{Анализ}} (f_k^{(0)} \xrightarrow{[a, b]} \varphi_0 \wedge f_k' \xrightarrow{[a, b]} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)}$$

$$\Rightarrow \max \left\{ \left\| f_m^{(k)} - \varphi_0^{(k)} \right\|_{\infty} \right\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

а этот максимум это и есть  $\|f_m - \varphi_0\|_{C^{(n)}[a, b]}$

□

## Глава 3

# Пространство суммируемых функций (Лебега $L^p$ )

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

### 3.1. Теория меры

**Определение 3.1** (Мера).  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $X$  — множество,  $U$  —  $\sigma$ -алгебра подмножества  $X$

1.  $\emptyset \in U$
2.  $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3.  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$$

— мера, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$  (счетная аддитивность)

Предположения:

1.  $\mu$  — полная мера, то есть  $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U, \Rightarrow \mu B = 0)$

2.  $\mu$  —  $\sigma$ -конечна, то есть  $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из  $X$  в  $\mathbb{R}$  или в  $\mathbb{C}$  (не особо важно).

**Определение 3.2** (Измеримая функция).  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .  $f$  — измерима, если

$$\forall c \in \mathbb{R}, \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

В комплексном случае  $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}, f$  — измерима, если  $u, v$  — измеримы.

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент  $\sigma$ -алгебры  $e \in U$ ,  $\chi_e(x) = \begin{cases} 1 & x \in e \\ 0 & x \notin e \end{cases}$ . Множество простых функций определяется как

$$S = \left\{ g : g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}(x), c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U \right\}$$

$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k$  как интеграл от простой функции

**Определение 3.3** (Произвольно измеримая функция). Два случая: неотрицательная функция и произвольная

1.  $f(x)$  — измеримая,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x)$  — произвольно измеримая, если конечен

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu, 0 \leq g(x) \leq f(x), x \in X \right\}$$

2.  $f(x)$  не обязательно неотрицательная,  $f_+(x) = \max(f(x), 0), f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$ .  $f(x)$  — произвольно измеримая, если  $\int_X f_+ d\mu$  — конечен или  $\int_X f_- d\mu$  — конечен, тогда

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$$

Если  $f$  — измеримая,  $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

**Определение 3.4** (Множество суммируемых функций).  
 $L(X, \mu)$  — множество суммируемых функций =

$$\left\{ f : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примеры других мер (кроме мер Лебега)

**Пример 3.1.**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  — измеримо по Лебегу,  $\lambda$  — мера Лебега,  $w(x) \geq 0, x \in E$ ,  $w$  — измерима по Лебегу.

$e \subset E$ ,  $e$  — измеримо по Лебегу.  $\mu e = \int_e w(x) d\lambda$ ,  $w(x)$  — плотность меры  $\mu$

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточена на наборе точек и называется дискретной.

**Пример 3.2** ( $\delta$ -функция Дирака).  $X$  — множество ( $X \neq \emptyset$ ),  $a \in X$

$$e \subset X, \delta_a(e) = \begin{cases} 1 & a \in e \\ 0 & a \notin e \end{cases}$$

$\forall e, e \subset X, e$  — измеримо

**Пример 3.3** (Дискретная мера).  $X$  — бесконечное множество.  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$   
 $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}, h_j \in \mathbb{R}, h_j > 0$

$$E \subset X, \mu E = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \delta_{a_j}(E) = \sum_{\{j: a_j \in E\}} h_j$$

На пальцах:  $X$  — не более чем счётное множество, каждому элементу сопоставили вещественное число. Мера какого-то подмножества  $E$  — это сумма сопоставленных чисел элементов  $X$ , которые принадлежат  $E$ .

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрируемых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

### 3.2. Классические неравенства

**Теорема 3.1** (Неравенство Юнга).  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $q$  — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*Доказательство.* Пусть  $b$  — фиксировано,  $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$ . Хотим найти  $\min_{x \in [0, +\infty)} \varphi(x)$ . Для этого посмотрим, где производная обращается в 0.  $\varphi'(x) = x^{p-1} - b, \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$ . Таким образом,  $x_0$  — строгий локальный минимум.

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = -\frac{b^q}{q} \\ \left[ \left[ -\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \right] \right] \\ \varphi(x) &\geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК} \end{aligned}$$

□

**Замечание 3.1.** Равенство в неравенстве Юнга достигается только при  $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

**Теорема 3.2** (Неравенство Гельдера).  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $f, g$  — измеримые,  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

Если  $p = q = 2$ , то это «Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ.

*Доказательство.* Для начала отбросим какие-то простые случаи.  $A = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ . Если  $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$  почти всюду по  $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$  почти всюду по  $\mu$  (то есть  $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$ ). На

всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере  $\mu$

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\mu = 0 &\Rightarrow e = \{x : f(x) \neq 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\} \\ e &= \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu e = 0 \\ &\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Если  $A = +\infty$ , то (\*)

пусть  $0 < A < +\infty, 0 < B < +\infty$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы  $f$  умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с  $g$ . Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть  $x$  — фиксирован,  $a = |f(x)|, b = |g(x)| \xrightarrow{\text{п.Юнга}}$

$$\begin{aligned} |f_1(x)| \cdot |g_1(x)| &\leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu \\ &\Rightarrow \int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Умножаем на  $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$  □

**Теорема 3.3** (Неравенство Минковского).  $(X, U, \mu), f, g$  — измеримые,  $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left( \int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_C \leq \underbrace{\left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_A + \underbrace{\left( \int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_B \quad (*)$$

*Доказательство.* Сначала разберём простые случаи.  $p = 1, x$  — фиксирован.  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  проинтегрируем по  $X \Rightarrow (*)$  при  $p = 1$ . Теперь пусть  $p > 1$ . Если  $A = +\infty$ , или  $B = +\infty$ , или  $C = 0$ , то  $(*)$ .

Теперь же пусть  $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$ . Доказательство будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что  $C < +\infty$ .

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2 \max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$  при фиксированном  $x$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$ . Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left( \int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(p-1) \cdot q = (p-1) \cdot \frac{p}{p-1} = p \text{ и } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$$

$$C^p \leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} + \left( \int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

так как доказали, что  $C < +\infty$ , делим на  $C^{p(1-\frac{1}{p})} = \left( \int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}$

$$C^{p-p(1-\frac{1}{p})} \leq A + B$$

а это и есть  $C \leq A + B$

□

### 3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения  $L^\infty$  очень аккуратно с  $\mathcal{L}$  и  $L$  читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.



**Определение 3.5.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $\mathcal{L}(X, \mu)$  — пространство суммируемых функций.  $1 \leq p < +\infty$   $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in \mathcal{L}(X, \mu)\}$

$$f \in \mathcal{L}^p(X, \mu), \|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что  $\|f\|_p$  — это полунорма на  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ .  $c \in \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ).  $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$

$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  — неравенство Минковского

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  почти всюду по мере  $\mu$  на  $X$ .

**Пример 3.4.**  $L[0, 1], \lambda$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ .

функция Дирихле  $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$   $\int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0$ .

$N = \{f — измерима и f(x) = 0 \text{ п.в. на } X \text{ по } \mu\}$ .  $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$  (не зависит от  $p$ ).

Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфабриката (с полунормой):  $N$  — подпространство в  $\mathcal{L}^p$ ,  $L^p = \mathcal{L}^p / N$  — факторпространство.

$g, f \in L^p, f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  почти всюду по  $\mu$ .  $\bar{f}$  — класс эквивалентности,  $\bar{f} = \{g : f \sim g\}$ .

$\|\bar{f}\|_p := \|f\|$ , то есть можно взять любую функцию из класса эквивалентности.

$$\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \bar{f} = N = \bar{0} \Rightarrow$$

$\|\bar{f}\|_p$  — норма на  $L^p$ . Говорят, что  $f \in L^p$ , возьмём функцию из  $L^p$ , но имеют в виду, что возьмут класс эквивалентности, а из него возьмут функцию.

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим  $L^\infty(X, \mu)$  (существенно ограниченные функции).

**Определение 3.6** ( $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ ).  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ , если

$$\exists c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ п.в. на } X \text{ по } \mu$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы.  $\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0\}$  (существующий  $\sup$ , или на подлеме англосаксонском  $\text{ess sup}_X f$ )

**Свойство 3.1.**  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{x : f(x) > \|f\|_\infty\} = 0$

*Доказательство.*  $e = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, m \in \mathbb{N}$ .

$e_m = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$  по определению  $\text{ess sup}_X f$   
 $\Rightarrow e = \bigcup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$   $\square$

Покажем, что  $\|f\|_\infty$  — полунорма на  $\mathcal{L}^\infty$

$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

полуаддитивность есть по свойству 3.1

$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X \\ \Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ п.в. на } X \Leftrightarrow f \in N = \{f \text{ — измерима, } f(x) = 0 \text{ п.в. на } X\}$$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

**Теорема 3.4** (Фату).  $(X, U, \mu)$ ,  $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$  — измеримые,  $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C, C \text{ не зависит от } n \\ \Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилаь.

**Теорема 3.5** (полнота пространства Лебега).  $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$  — банаховы.

*Доказательство.* при  $1 \leq p < +\infty$  воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \leq C < +\infty$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_p = 0$ . Существует ли  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  почти всюду на  $X$ ?

Рассмотрим  $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$  возрастает  $\Rightarrow \exists \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$ . Возможно,  $\sigma(x) = +\infty$  для некоторых  $x$ .

$$\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \text{ и } \sigma_n(x)^p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma(x)^p \forall x \in X \stackrel{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq C^p$ . Самое главное, что мы из этого заключаем:  $\sigma(x) < +\infty$  п.в. на  $X$  по  $\mu$ .

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши:  $\exists N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon \Rightarrow \|S_m(x) - S_n(x)\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$

$$\int_X |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \text{ и } |S_m(x) - S_n(x)| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\stackrel{\text{Фату}}{\Rightarrow} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f - S_n\|_p \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S_n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$  и  $\|f - S_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .  
Теперь осталось рассмотреть случай  $p = \infty$ .  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальная,  $f_n \in L^\infty$ ,

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \bigcup_{n=1}^\infty e_n, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$  — ограниченная функция.  
 $m(X_1)$  — полное  $\Rightarrow \{f_n\}$  — фундаментальна в  $m(X_1) \Rightarrow \exists f \in m(X_1) \quad \sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Положим  $f(x) = 0$  если  $x \in e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^\infty} = 0 \quad \square$

### 3.4. Пространства $l_n^p, l^p$

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$ .

**Определение 3.7.**

$$l_n^p = \{\mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}\}$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Рассмотрим  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Возьмём дискретную меру  $\mu(j) = 1$  при  $1 \leq j \leq n, l_n^p = L^p(X, \mu)$ .  $f \in L^p(X, \mu), f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$  — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

**Теорема 3.6.**  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Пусть  $j$  — фиксировано,  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$  в  $l_n^p$ .

При  $p < +\infty$   $\|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$ . Так как  $\|x - x^{(m)}\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$ .

При  $p = \infty$   $\|x - x^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}|$ . Так как  $\|x - x^{(m)}\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Теперь  $\Leftarrow$

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left( \sum_{j=1}^n |x_j - x_j^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{и} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

**Определение 3.8.**

$$l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ и } \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X = \mathbb{N}, \mu(j) = 1, \mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

**Замечание 3.2.**  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x^{(m)} \in l^p, \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$ . Например,  $\nrightarrow$  при  $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$

Пусть  $j$  фиксировано.  $\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0 \quad \|e_m - 0\|_p = 1 \quad \forall p, 1 \leq p \leq +\infty$ . В качестве упражнения доказать, что  $l^p$  — полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в  $l_2^p = \{(x, y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty\}$ . Для  $l_2^\infty$  норма определяется  $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

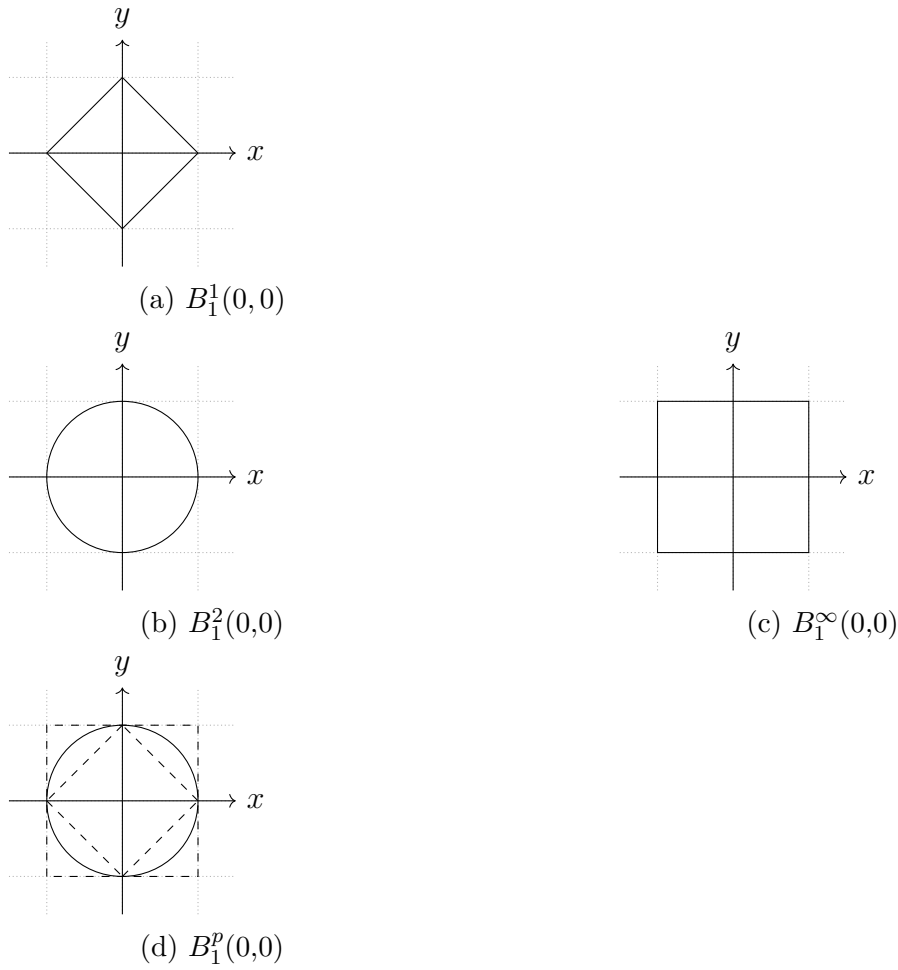


Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в  $l_2^p$

### 3.5. Неполное нормированное пространство

**Определение 3.9** (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x = \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p$   $1 \leq p \leq +\infty$ .  $(F, \|\cdot\|_p)$  — не полное,  $F$  — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором

члене.

$$x^{(m)} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in F$$

$$x = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad \|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно,  $F$  — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что  $\overline{F}$  в  $l^p = ?$  при  $p < +\infty$  и при  $p = \infty$ .

**Теорема 3.7.**  $C[a, b], \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$   
 $(C[a, b], \|\cdot\|) — не полное$

*Доказательство.* При  $p = 1, [a, b] = [-1, 1], f \in C[a, b], \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$ . Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1, 1]$$

$f_n$  — фундаментальная в  $(C[-1, 1], p = 1)$

Пусть  $m > n$ .

$$\int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Пусть  $\exists f \in C[-1, 1] : \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{потому что } \int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \forall n$$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0, 1], f \text{ непрерывна}, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1, 0] \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие}$$

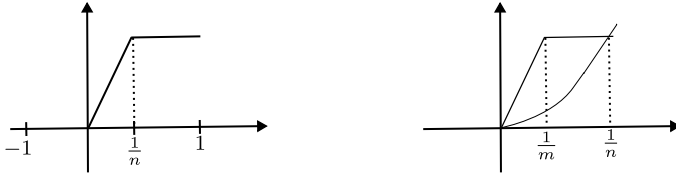


Рис. 3.2: Доказательство теоремы 3.7

□

### 3.6. Пополнение метрического пространства

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

**Определение 3.10.**

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

$\mathcal{P}$  (подпространство в алгебраическом смысле)  $\subset C[a, b]$ ,  $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$

$e^x \notin \mathcal{P}$ ,  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ,  $\Rightarrow p_n \xrightarrow{[a, b], n \rightarrow \infty} e^x$  это не многочлен, потому

что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станет тождественным 0.

$\Rightarrow \overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P} \ni e^x \Rightarrow \mathcal{P}$  — не замкнуто  $\Rightarrow \mathcal{P}$  — не полное.

$$\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$$

**Теорема 3.8** (Вейерштрасса, 1885).  $f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathcal{P}$  т.ч.  $\|f - p\| < \varepsilon$  (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \xrightarrow{G} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника



**Теорема 3.9** (Свойства метрики).  $(X, \rho)$  — метрическое

1.  $x, y, z, u \in X \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$  — непрерывная функция
3.  $A \subset X, A$  — подмножество,  $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$  — непрерывная функция от  $x$
4.  $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

*Доказательство.* 1.  $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$  Аналогично  $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \dots$  из всего  $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.  
 $\rho(x, y)$  — непрерывная?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

3.  $A \subset X, x, z \in X, |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$   
Пусть  $y \in A$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall y \in A \\ &\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z)$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что  $x$  и  $z$  ничем не отличаются, аналогично  $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

- 4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$  — метрические пространства.  $T : X \rightarrow Y$ .

**Определение 3.11** (Изометрическое вложение).

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

Обозначение:  $X \hookrightarrow Y$

**Определение 3.12** (Изометрия).  $T$  — изометрическое вложение,  $T(X) = Y$

**Определение 3.13** (Изометричность пространств).  $(X, \rho), (Y, d)$  изометричны, если  $\exists T : X \rightarrow Y, T$  — изометрия

**Свойство 3.2.**  $T$  — изометрическое вложение  $\Rightarrow T$  — инъективное, непрерывное

*Доказательство.*  $x, z \in X, T : X \rightarrow Y$ , пусть  $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$ . Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики.  $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(T_{x_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} = T_x$$

□

**Свойство 3.3.** Если  $T$  — изометрия, то  $\exists T^{-1}$  — изометрия.

**Свойство 3.4.** «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

**Определение 3.14** (Полношение м. пространства).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $(Z, d)$  — полное метрическое пространство.  $(Z, d)$  — полношение  $(X, \rho)$ , если существует  $T : X \rightarrow Z$

1.  $T$  — изометрическое вложение
2.  $\overline{T(X)} = Z$

**Замечание 3.3.** Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $(U, d)$  — полное метрическое пространство. Пусть  $\exists T : X \rightarrow U$  — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое  $Z$  построить. Возьмём замыкание образа.  $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$  — полношение  $X$ .

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть полношение.

**Теорема 3.10** (О полношении метрического пространства).  $(X, \rho)$  — метрическое  $\Rightarrow \exists$  полношение  $(Z, d)$

*Доказательство.* Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаментальных последовательностей, рассмотрением факторпространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.

Мы собираемся использовать  $m(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$\|f\|_{m(X)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$  — полное пространство.

Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея!  $\varphi : X \rightarrow m(X)$ . Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про  $X$ , от которого мы потом откажемся. Пусть  $X$  — ограниченное, то есть  $\exists M > 0$  т.ч.  $\forall x, y \in X \rho(x, y) \leq M$ . Единственная цель предположения — формула для  $\varphi$  будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.

$t \in X, t$  — фиксирован,  $f_t(x) = \rho(x, t)$ . При фиксированном  $t$  — это функция на  $X$ . Именно сюда наше отображение будет отображать  $t$ . Одной точке — целая функция, понятно?

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \mapsto f_t(x) \\ |f_t(x)| &\leq M \Rightarrow f_t \in m(X)\end{aligned}$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad \|f_t - f_s\|_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(x, t) - \rho(x, s)|$$

$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \leq \rho(t, s), \quad \text{Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$

то есть супремум достигается. Естественно, с таким же успехом можно было взять  $x = s$

$$\Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi — \text{изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение  $\varphi$ .  $X$  — любое метрическое пространство.  $a \in X$  — фиксированная точка.

$$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтобы попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \xrightarrow{(1)} \|f_t - f_s\|_\infty = \rho(s, t)$$

$$\text{Полношение } X: \overline{\varphi(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = Z, (Z, \|\cdot\|_\infty)$$

□

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

**Замечание 3.4.** Забегая далеко вперёд.  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $X^*$  — множество непрерывных линейных функционалов на  $X$ ,  $X^*$  — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение  $\pi : X \rightarrow \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}, \overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$  — пополнение  $X$ .

### 3.7. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $r > 0, x \in X$  Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

**Теорема 3.11** (О вложенных шарах).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $X$  — полное  $\Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \emptyset)$ .

По сравнению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$   $X$  — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная. Пусть  $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$  при  $n \geq N$ .

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ — полное} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

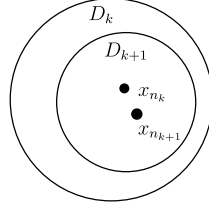
любое фиксированное  $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \forall n \geq m, D_m$  — замкнутое

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

$\Leftarrow$

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет.



Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ . По свойству 3 фундаментальных последовательностей, существует  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ ,  $\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ .  
 $D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho(y, x_{n_k}) &\leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \\ &\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k \end{aligned}$$

Мы взяли произвольный элемент из  $D_{k+1}$  и показали, что он принадлежит  $D_k$ , то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k=1}^\infty D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаментальных последовательностей из первой лекции  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  □

**Замечание 3.5.** В условиях теоремы пересечение вложенных шаров  $\bigcap_{n=1}^\infty D_n$  состоит из одной точки.

*Доказательство.* Пусть  $x \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n$ ,  $\Rightarrow \rho(x, x_n) < r_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. □

**Замечание 3.6.** Условие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  в теореме существенно.

**Пример 3.5** (Замкнутые множества).  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $F_n$  — замкнутое,  $F_{n+1} \subset F_n$ ,  $F_n \subset \mathbb{R}$ ,  $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$ ,  $F_n = [n, +\infty)$

**Пример 3.6** (По теореме).

$$X = [1, +\infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что  $\rho$  — метрика.  $x, y, z$

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальная,  $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} &\Rightarrow \left( \rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \wedge \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\ &x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_N &\Rightarrow (X, \rho) \text{ — полное} \end{aligned}$$

Полноту проверили.

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), n \in D_n. \text{ Пусть } x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

**Замечание 3.7** (Домашнее задание). Если  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово, то  $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_{n+1} \subset D_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$  (требование  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  лишнее)

### 3.8. Сепарабельные пространства

$(X, \rho)$  — метрическое пространство,

**Определение 3.15** ( $A$  плотно в  $C$ ).  $A \subset X, C \subset X$ .  $A$  плотно в  $C$ , если  $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall x \in C \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \rho(x, a) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 C \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a)$$

Любой элемент  $C$  можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из  $A$ .

**Определение 3.16** ( $A$  всюду плотно в  $X$ ).  $A$  — всюду плотно в  $X$ , если  $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для  $X$ , то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

**Определение 3.17** (Сепарабельное пространство).  $(X, \rho)$  — сепарабельное, если  $\exists E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \overline{E} = X$

**Теорема 3.12.**  $n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty,$

$l_n^p$  — сепарабельное

*Доказательство.*

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p\}$$

$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$  □

Знаем, что сходимость в  $l_n^p$  эквивалентна покоординатной сходимости, так что если что-то сходится в  $\mathbb{R}$ , а  $\mathbb{Q}$  всюду плотно в  $\mathbb{R}$ , то  $\mathbb{Q}^n$  всюду плотно в  $\mathbb{R}^n$

**Теорема 3.13.**  $F$  — финитные последовательности,  $1 \leq p \leq +\infty$

$(F, \|\cdot\|_p)$  — сепарабельно

*Доказательство.*  $(F, \|\cdot\|_p) = \bigcup_{n=1}^\infty l_n^p$  (если мы дополним нулями  $x$ )  
Тогда  $E = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots), x_j \in \mathbb{Q}\}$ . Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

**Теорема 3.14.**  $l^p, 1 \leq p < +\infty, c_0$  — сепарабельные

*Доказательство.* На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, \|\cdot\|_p), \overline{F}^{\|\cdot\|_p} \text{ (замыкание по норме)} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty$$

$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотное в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$

$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$



Почему любой элемент из  $l^p$  может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем (как я понимаю, когда у финитной последовательности набирается норма, достаточно близкая к норме элемента  $l^p$ ).  $\square$

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции:  $F$  — подпространство в алгебраическом смысле,  $F \subset l^\infty$ ,  $\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$

$$x_0 \in c_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

берем первые  $m$  координат и дополняем их нулями

$$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$

$$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{k > m} |x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Любой элемент из  $c_0$  является пределом последовательности элементов из  $F$  по норме  $\|\cdot\|_\infty$ .

Остаётся вопрос, почему  $c_0$  — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty, y^{(m)} \in c_0, y^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \text{ в } c_0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|y - y^{(m)}\|_\infty = 0 \quad y = \{y_n\}_{n=1}^\infty, \text{ хотим доказать } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

А это равномерная сходимость на множестве натуральных чисел. Здесь  $y$  и  $y_m$  — непрерывные функции на множестве натуральных чисел. То есть это тот случай, когда можно менять местами пределы (были такие умные теоремы в анализе)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение:  $c$  — сепарабельное,  $c \subset l^\infty$

**Теорема 3.15.**  $l^\infty$  — не сепарабельное

Всюду плотное  $\Leftrightarrow$  какой бы шарик из  $X$  мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества. Как доказывать несепарабельность? Построим гигантское, несчётное число непересекающихся шариков. И скажем, что если какое-то множество — всюду плотное, то в каждом из них должен быть представитель, а шарики-то не пересекаются, значит в каждом должен быть свой представитель. Значит, счётного всюду плотного — нет.

*Доказательство.* Рассмотрим специальные последовательности, состоящие только из нулей и единиц. Рассмотрим последовательность, являющуюся в точности характеристической функцией  $A$

$$A \subset \mathbb{N} \quad x_n^A = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

Для каждого набора натуральных чисел рассмотрим вот такую последовательность. Когда координата принадлежит множеству  $A$ , будет 1, иначе — 0. Например,  $A = \{2, 3\}$ ,  $x_n^A = \{0, 1, 1, 0, 0, \dots\}$ .

Мощность  $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$  — континуум ( $>$  счётное). Это и будут центры наших пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \neq C$$

$$x_n^A - x_n^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

всех нулей не бывает, поскольку множества не совпадают

$$\Rightarrow \|x^A - x^C\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^A - x_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктных шариков. Пусть  $E$  — всюду плотно в  $l^\infty \Rightarrow \forall A \subset \mathbb{N} \exists e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \quad \underbrace{\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

На пальцах:  $x^A \in l^\infty$ . Если есть какое-то всюду плотное множество, то его элемент должен лежать в любой окрестности (пусть  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ )  $x^A$ . Все  $x^A$  для  $\forall A \subset \mathbb{N}$  отделены друг от друга единицей. Это значит, что  $x^A, x^C, A \neq C$  не может обслуживать один  $e_I$ . Иначе  $\rho(x^A, x^C) \leq \rho(x^A, e_A) + \rho(x^C, e_C) < 1$ . То есть для каждого  $x^A$  он свой, а их несчётное количество.  $\square$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус.

**Теорема 3.16.**  $(X, \rho)$  — сепарабельное,  $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$  — сепарабельное.

*Доказательство.*  $\exists E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — всюду плотно в  $X$ ,  $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, Y) &= \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow \\ \exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) &= \rho(x_n, Y) \\ y_{n,k} \in Y, F = \{y_{n,k}\}_{n,k} &\text{ — счётное, } F \subset Y \end{aligned}$$

Проверим, что  $F$  — всюду плотно в  $Y$ . Пусть  $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$ . Из этого неравенства мы делаем вывод, что  $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$ . Значит,  $\exists k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

**Следствие 3.1.**  $X$  — бесконечное множество  $\Rightarrow m(X)$  — не сепарабельное.

*Доказательство.* Можно слово в слово повторить доказательство для  $l^{\infty}$ , но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\begin{aligned} \exists \{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j &\neq a_i \text{ при } i \neq j \\ Y = \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x &\neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty \\ Y \text{ изометрично } l^{\infty}, f \in Y, T(f) &= \{f(a_j)\}_{j=1}^{\infty} \in l^{\infty} \\ Y &\text{ — не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме} \\ m(X) &\text{ — не сепарабельно} \end{aligned}$$

□

**Теорема 3.17.**

$C[a, b]$  — сепарабельно

1 часть.

$$\begin{aligned} L = \{ \text{ломанные} \} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R} \\ L(x) - \text{ломанные} \\ L(x_k) = y_k, k = 0, 1, \dots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Отметим, что  $L$  — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будет счётным нет.

$$\begin{aligned} \text{пусть } f \in C[a, b], \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ \exists \{x_k\}_{k=0}^n - \text{разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta \\ y_k := f(x_k) \quad L(x) - \text{ломаная} \\ \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f - L\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{aligned}$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы  $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} E = \{L \in \mathcal{L}, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} - \text{счетное множество} \\ \begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow E - \text{всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a, b] \end{aligned}$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\} \quad \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \\ E = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{Q}\} \\ \begin{cases} \mathcal{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a, b] \end{aligned}$$

□

### 3.9. Нигде не плотные множества

**Определение 3.18.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $A \subset X$ ,  $A$  — **нигде не плотно** в  $X$ , если

$$\forall B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \bar{A} \Leftrightarrow \text{Int}(\bar{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\begin{aligned} \forall r > 0, x \in X \quad B_r(x) \ni B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \Leftrightarrow \forall r > 0, x \in X, D_r(x) \ni D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \end{aligned}$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.

**Определение 3.19** (множество первой категории).  $M \subset X, (X, \rho)$ .  $M$  — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

$M$  — **множество второй категории**, если  $M$  нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

**Теорема 3.18** (Бэр, о категориях).  $(X, \rho)$  — полное  $\Rightarrow X$  — множество второй категории.

*Доказательство.* Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство  $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $M_j$  — нигде не плотно в  $X$ ,  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ . Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит  $X$  и не принадлежит  $E$ . Это и будет означать, что  $X$  невозможно представить в виде такого объединения.

$$\begin{aligned} x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\} \\ M_1 \text{ — нигде не плотно} \Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \emptyset \\ r_1 < 1 \end{aligned}$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству  $M_2$ , которое тоже нигде не плотно

$$\exists D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \emptyset$$

$$r_2 < \frac{1}{2}$$

и так далее  $\left\{ \begin{array}{l} \{D_n\}_{n=1}^\infty, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n} \end{array} \right.$  по теореме о вложенных шарах  $\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall n \Rightarrow x \notin E$   $\square$

### 3.10. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

**Определение 3.20** (Линейная оболочка).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Рассмотрим семейство  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство элементов,  $x_\alpha \in X$ .

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Определение 3.21** (Полное семейство).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — **полное семейство**, если  $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = X$ . То есть линейная оболочка всюду плотна в  $X$ .

**Пример 3.7.**  $C[a, b]$ ,  $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$  — полное семейство в  $C[a, b]$ , так как  $\mathcal{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ ,  $\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$

**Пример 3.8.**  $l^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $c_0$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots), \{e_n\}_{n=1}^\infty \text{ — полное семейство}$$

$$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F \text{ — финитная последовательность}$$

Упражнение: что будет полным семейством в  $c$ ?

**Утверждение 3.1.**  $(X, \|\cdot\|)$  - нормированное пространство. В нём существует  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — полное семейство

$X$  — сепарабельное

*Доказательство.* Рассмотрим линейную оболочку  $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^\infty = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\}$ .  $\bar{L} = X$ .

$$E = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\right\} \text{ — счётное всюду плотное}$$

$$(L \subset \bar{E} \wedge \bar{L} = X) \Rightarrow \bar{E} = X$$

□

**Замечание 3.8.**  $l^\infty, E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$ .  $\bar{E} = l^\infty$ ,  $E$  — не счётное.

### 3.11. Полные и плотные множества в $L^p$

Сначала небольшое замечание.  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой  $e \in U$  — измеримые множества,  $\chi_e(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$  — характеристическая функция.  $\chi \in L^\infty(X, \mu)$ ,  $\forall e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \leq p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

**Теорема 3.19.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой  $\Rightarrow$

$$\{\chi_e\}_{e \in U} \text{ — полное семейство в } L^\infty(X, \mu)$$

$$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty} \text{ — полное семейство в } L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

**Теорема 3.20** (Лебег).  $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — измеримые,  $\varphi(x) = \int_X \varphi(x) d\mu < +\infty$ ,  $|h_n(x)| \leq \varphi(x)$  п.в. на  $X$

$$h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в. по } \mu} h(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

*Доказательство.* Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе.  $f$  — измеримая,  $f(x) \geq 0, x \in X$ . Рассмотрим разбиение множества  $X$ , а по нему построим соответствующую простую функцию

$$n \in \mathbb{N} \quad e_k = \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, k = 0, 1, \dots, n^2 - 1$$

$$e_{n^2} = \{x : f(x) \geq n\} \Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \emptyset (k \neq j)$$

Теперь построим измеримые функции, они же будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k}(x) \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

Теперь все готово, чтобы обсудить случай  $L^\infty$ . Пусть  $f \in L^\infty(X, \mu) \Rightarrow n \geq \|f\|_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$  для п.в.  $x \in X$   
 $\Rightarrow \|f - g_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}$   
 $\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}}$

Посмотрим теперь, что происходит с конечными  $p$ . Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty & |f(x) - g_n(x)|^p \leq |f(x)|^p \\ g_n(x) \xrightarrow[\text{п.в.}]{} f(x) & \Rightarrow |f(x) - g_n(x)|^p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{Лебег}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$



все, что надо — убедиться, что мера конечная. Покажем, что  $f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) \geq \frac{k}{n}, x \in e_k &\Rightarrow \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \int_{e_k} \left( \frac{k}{n} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{k}{n} (\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty \\ &\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}} \end{aligned}$$

Теперь покажем, что для произвольных  $f$  рассуждение тоже верно. Рассмотрим замыкание линейное оболочка

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f : X \rightarrow \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0 \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right. &\Rightarrow \\ \forall f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} & \\ (p = \infty \forall e, p < +\infty, \mu e < +\infty) & \end{aligned}$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве  $l^\infty$

$$\begin{aligned} \text{Следствие 3.2. } l^\infty, A \subset \mathbb{N}, x^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, x_n^A = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases} \Rightarrow \\ \{x^A\}_{A \subset \mathbb{N}} &\text{ — полное семейство в } l^\infty \end{aligned}$$

*Доказательство.*  $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}, A$  — измеримо

$$\chi_A = x^A \Rightarrow \{x^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

**Теорема 3.21.**  $(\mathbb{R}^n, U, \lambda), \lambda$  — классическая мера Лебега.  $U$  — измеримые по Лебегу множества.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} &\text{ — множество ячеек} \\ \Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} &\text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

*Доказательство.* Собираемся приблизить элемент  $\chi_e$  линейной комбинацией характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани.  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ .  
 $\lambda(e) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon$ .  
 $e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset$  при  $k \neq j$ .

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k$$

$$\Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon$$

$$\|\chi_e - \chi_B\|_p \leq \|\chi_e - \chi_A\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p \leq$$

$$\left( \int_{A \setminus e} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{A \setminus B} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_B = \sum_{k=1}^N \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in \mathcal{R}}$$

$$\left\{ \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} = L^p \right. \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} = L^p, 1 \leq p < +\infty$$

$$\left. \chi_e \in \mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \right\}$$

□

**Следствие 3.3.**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  — измеримые по Лебегу,  $1 \leq p < +\infty$

$\Rightarrow L^p(E, \lambda)$  — сепарабельные

( $\lambda$  — мера лебега)

*Доказательство.* Докажем, что  $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$  — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, координаты которых рациональны. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\begin{aligned} \Delta \in \mathcal{R} \quad \text{пусть } \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \exists \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon \\ \Rightarrow \|\chi_{\Delta_0} - \chi_{\Delta}\|_p = \|\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}\|_p = \left( \int_{\Delta_0 \setminus \Delta} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{R} \quad \chi_{\Delta} \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in R_0}} \end{aligned}$$

$R_0$  — полное счётное семейство  $\Rightarrow$  [[утверждение 3.1]]  $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$  — сепарабельное.

$$\begin{aligned} E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ — измеримое}, f \in L^p(E, \lambda) \\ \text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \\ \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельно} \end{aligned}$$

□

**Определение 3.22.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $\mu$  — **борелевская мера**, если  $(G \text{ — открытое} \Rightarrow G \in U)$

$\beta$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества.  $\beta$  — **борелевские множества**, то есть  $\beta \subset U$ .

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

**Замечание 3.9.** Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, f$  — непрерывная  $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty)), c \in \mathbb{R}, (c, +\infty)$  — открытое в  $\mathbb{R}$ . Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз  $f$  открыт в  $X \Rightarrow f$  — измеримая по  $\mu$ , если  $\mu$  — борелевская.

**Замечание 3.10.**  $\lambda$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $\lambda$  — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

**Определение 3.23** (регулярная мера).  $(X, U, \mu)$ ,  $(X, \rho)$ ,  $\mu$  — борелевская.  $\mu$  — **регулярная мера**, если  $\forall e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu F\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

**Замечание 3.11.**  $\lambda$ -мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойства друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

**Теорема 3.22.**  $(X, U, \mu)$ ,  $(X, \rho)$ ,  $\mu$  — регулярная мера  $\Rightarrow$  непрерывные функции плотны в  $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

$$\overline{C(X) \cap L^p(X, \mu)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(X, \mu)$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$  — полное семейство.

пусть  $e \in U$ ,  $\mu e < +\infty$ , пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu$  — регулярная  $\Rightarrow \exists F \subset e \subset G$ ,  $F$  — замкнутое,  $G$  — открытое.  $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Когда мы попадем в  $X \setminus G$ , она будет равна нулю. Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю.

$\rho(x, A)$  — непрерывная функция  $\forall A \subset X$  (теорема 3.9).  $X \setminus G$  — замкнутое,  $F$  — замкнутое. Если  $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0 \forall x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall x \in X \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Понятно, что модуль  $\varphi(x)$  совпадает с характеристической функцией множества  $e$ .

$$\begin{aligned}
 |\chi_e(x) - \varphi(x)| &\leq 1 \quad \forall x \in X \\
 \chi_e(x) - \varphi(x) &= 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G \\
 \Rightarrow \|\chi_e - \varphi\|_p &= \left( \int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
 &\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\
 &\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{\|\cdot\|_p}
 \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что  $\chi_e(x)$  может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоит отметить, что  $\mu G < \mu e + \varepsilon < +\infty$   $\int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu G \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

## Глава 4

# Метрические компакты

Топологический компакт: из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**Утверждение 4.1** (из топологии). 1.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$ ,  $K$  — компакт  $\Leftrightarrow K$  — счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in K$$

2.  $K$  — компакт  $\Rightarrow K$  — ограниченное замкнутое множество.

**Пример 4.1.**  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  — компакт  $\Leftrightarrow K$  — ограниченное, замкнутое

**Замечание 4.1.** НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ из того, что  $K$  — ограниченное замкнутое, не следует, что  $K$  — компакт

**Замечание 4.2.**  $l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \right\}$

$D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  — ограниченное, замкнутое

$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, 0, \dots)$ ,  $n \neq m \quad \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$  — не фундаментальная. Тогда  $\nexists \lim_{j \rightarrow \infty} e_{n_j} \Rightarrow D$  — не компакт.

Ещё одно *напоминание*, кто такие относительно компактные множества.

**Определение 4.1** (относительный компакт).  $(X, \rho), A \subset X, A$  — относительно компактно, если  $\overline{A}$  — компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит  $A$ . А в компакте предел обязательно лежит в  $A$ .

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В  $\mathbb{R}^n$  мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

**Определение 4.2** ( $\varepsilon$ -сеть).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $A \subset X, \varepsilon > 0$   
 $F$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ , если

$$\begin{aligned} \forall a \in A \exists f \in F : \rho(a, f) < \varepsilon \\ (\Leftrightarrow \forall a \in A B_{\varepsilon}(a) \cap F \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f \in F} B_{\varepsilon}(f)) \end{aligned}$$

**Определение 4.3.**  $A$  — вполне ограниченное множество, если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах вполне ограниченных — как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность — одно и то же. А проверять вполне ограниченность — гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим  $\varepsilon$ -сеть и всё!

**Замечание 4.3.**  $(X, \rho), A$  — вполне ограниченное  $\Rightarrow A$  — ограничено.

**Пример 4.2.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = l_n^2$   $A \subset \mathbb{R}^n$ .  $A$  — ограниченное  $\Leftrightarrow A$  вполне ограниченное

*Доказательство.*  $A$  — ограниченное  $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$

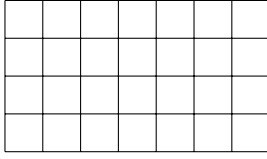


Рис. 4.1: классный поясняющий рисунок

$A \subset Q = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$  Как же построить  $\varepsilon$ -сеть?  
Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $Q = \bigcup Q_j$ ,  $l$  — сторона  $Q_j$

$$\text{diam } Q_j = \sup_{x, y \in Q_j} \rho(x, y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$F$  — вершины  $Q_j$  —  $\varepsilon$ -сеть

□

Убедимся в пространстве  $l^2$

**Пример 4.3.**  $D \subset l^2, D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  Убедимся, что  $D$  — не вполне ограниченное.

*Доказательство.*

$$\{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots), n \neq m, \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F = \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$$\Rightarrow \forall n \exists f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n), f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F \Rightarrow F \text{ — не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для  $l^\infty$



**Пример 4.4.**  $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^2$ . Проверим, что  $\Pi$  — вполне ограничено. пусть  $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^k} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}\}$$

Если мы забудем про нули, то можем думать, что  $\Pi^*$  лежит в  $\mathbb{R}^n$ , и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное.  $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Pi^*$  — ограниченное  $\Rightarrow$  вполне ограниченное  $\Rightarrow \exists F \subset \Pi^*$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть. Докажем, что  $F$  —  $2\varepsilon$ -сеть для  $\Pi$ .

$$\begin{aligned} x \in \Pi &\Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)}_z \\ \|z\|_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* &\Rightarrow \exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \\ \|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 &\leq \|y - f\|_2 + \|z\|_2 < 2\varepsilon \\ &\Rightarrow \Pi \text{ — вполне ограничено} \end{aligned}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве  $l^p$ . Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

- Свойство 4.1.**
1.  $A$  — вполне ограничено  $\Rightarrow \overline{A}$  — вполне ограничено
  2.  $A \subset Y \subset X$ ,  $A$  — вполне ограничено в  $X$   $\Rightarrow A$  — вполне ограниченное в  $Y$ .
  3.  $A$  — вполне ограничено  $\Rightarrow (A, \rho)$  — сепарабельно.

*1 свойство.*  $A \subset X, \varepsilon > 0$ .  $F$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ . Проверим, что  $F$  —  $(2\varepsilon)$ -сеть для  $\overline{A}$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in \overline{A} &\Rightarrow \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \rho(x, f) \leq \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

*2 свойство.* Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность.  $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$

—  $\varepsilon$ -сеть для  $A, x_k \in X$

$A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$ , если  $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset$ , то пусть  $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$  (если  $= \emptyset$ , то не будем выбирать)

Мы найдем  $\varepsilon$ -сеть из точек множества  $A$ , тогда она точно будет обслуживать и  $Y$ . Как же и куда сдвигать точки?

$$E = \{y_k\}_{k=1}^n$$

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \exists x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \\ &\rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \\ &E \text{ — } (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A \end{aligned}$$

□

$\exists$  свойство.  $n \in \mathbb{N}, F_n$  —  $(\frac{1}{n})$ -сеть для  $A, F_n$  — конечное.

$$F \text{ (счетное) } = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ — плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

**Лемма 4.1** (о разбиении).  $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0. F$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A \Rightarrow$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n \quad A = \bigcup_{j=1}^n C_j \quad C_j \cap C_k = \emptyset, j \neq k, \text{diam } C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \emptyset$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F &= \{x_k\}_{k=1}^n, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k) \\ C_1 &= A \cap B_\varepsilon(x_1) \\ C_2 &= (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1 \\ C_k &= A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j \right) \quad k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

если  $C_k = \emptyset$ , то забудем о нём.  $C_k \subset B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \text{diam } C_k \leq 2\varepsilon$

□

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

**Теорема 4.1** (Хаусдорф).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  — компакт  $\Leftrightarrow$

1.  $A$  — полное, то есть  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$  — фундаментальная  $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2.  $A$  — вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, пытаясь вытянуть.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$A$  — компакт,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная,  $x_n \in A$ .

$A$  — компакт  $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$ . Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$  — полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, и среди них существует конечное подпокрытие.

пусть  $\varepsilon > 0$   $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a)$  и  $A$  — компакт  $\Rightarrow \exists \{a_j\}_{j=1}^n, a_j \in A$ :

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon}(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^n \text{ — } \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы.

$\Leftarrow$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$ . Собираемся применять лемму о разбиении.  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ .

По лемме  $\exists \left\{C_j^{(1)}\right\}_{j=1}^{N_1}$ .  $A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \text{diam } C_j^{(1)} \leq 1$ . Когда-то в детстве мы занимались бесконечным делением пополам и доказывали, что из ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся. Тут будем делать то же самое — разбивать на конечное число  $C_j$  до посинения.  $\exists j : C_j^{(1)}$  содержит бесконечное число элементов  $\{x_n\}$ .

$$A_1 := C_j^{(1)}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists \left\{ C_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\text{diam } C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

поскольку  $x_n$  бесконечного много, а  $C_j$  конечное число

$\exists 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}$  содержит бесконечное количество элементов в  $x_n$

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \text{diam}_{A_m} \leq \frac{1}{2^m}$$

$A_m$  содержит бесконечное число элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} (*)$

$$x_{n_1} \in A_1$$

теперь нам важно, что из-за  $(*)$  существует не какой-то  $n_2$ , а  $n_2 > n_1$

$$\exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. } (*)$$

и так далее  $\exists n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \text{diam } A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  — фундаментальная и  $A$  — полное

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

а это и была наша мечта: доказать что у какой-то последовательности есть подпоследовательность с пределом в  $A$   $\square$

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компакте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

**Следствие 4.1.**  $(X, \rho)$  — метрическое,  $A \subset X$ .

1.  $A$  — относительно компактно  $\Rightarrow A$  вполне ограничено
2.  $(X, \rho)$  — полное,  $A$  — относительно компактно  $\Leftrightarrow A$  вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

*1 утверждение.*  $A$  — относительно компактно,  $\Rightarrow \bar{A}$  — компакт, тогда по теореме Хаусдорфа  $\bar{A}$  — вполне ограничено,  $A \subset \bar{A} \Rightarrow A$  вполне ограничено.  $\square$

2 утверждение.  $\Leftarrow$

$(X, \rho)$  — полное,  $A$  — вполне ограничено, тогда по свойству 4.1 ( $\bar{A}$  — вполне ограничено и  $\bar{A}$  — замкнутое в  $X \Rightarrow \bar{A}$  — полное)  $\Rightarrow$  по теореме Хаусдорфа  $\bar{A}$  компакт  $\Rightarrow A$  — относительно компактно.

$\Rightarrow$  сторону это как раз первая часть.  $\square$

Оказывается, можно вместо конечных  $\varepsilon$ -сетей можно утверждать чуть большее.

**Следствие 4.2.**  $(X, \rho)$  — полное,  $A \subset X$ . Если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  относительно компактная  $\varepsilon$ -сеть, то  $A$  — относительно компактно

*Доказательство.* пусть  $\varepsilon > 0, F$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .  $F$  — относительно компактно  $\Rightarrow F$  вполне ограничено,  $\exists E$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $F \Rightarrow E$  —  $(2\varepsilon)$ -сеть для  $A \Rightarrow A$  — вполне ограничено  $\Rightarrow A$  — относительно компактно.  $\square$

## 4.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

**Определение 4.4.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт.  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ — непрерывная}\}$ ,  $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$ .  $\Phi \subset C(K)$ ,  $\Phi$  — **равностепенно непрерывно**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \Phi, \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$EC$  — equicontinuous.

Равностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что  $\delta$  не зависит от  $f$ , но от  $\varepsilon$ , конечно, зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на диффурах:

**Теорема 4.2** (Асколи-Арцелла).  $K$  — компакт,  $(K, \rho)$ ,  $\Phi \subset C(K)$ .  $\Phi$  — относительно компактно  $\Leftrightarrow$

1.  $\Phi$  — ограниченное в  $C(K)$
2.  $\Phi$  — равностепенно непрерывно ( $\Phi \in EC$  equicontinuous)

*Доказательство.* С самого начала отметим, что  $C(K)$  — полное. Вместо проверки относительной компактности  $\Phi$  будем проверять вполне ограниченность.

$\Rightarrow$

$\Phi$  — относительно компактно  $\Rightarrow \Phi$  — вполне ограничено  $\Rightarrow \Phi$  — ограничено, то есть  $\exists M \geq 0$  т.ч.  $\|f\| \leq M \forall f \in \Phi \Leftrightarrow \forall x \in K, \forall f \in \Phi |f(x)| \leq M$

Пусть  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\varphi_j\}_{j=1}^n$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $\Phi$ .  $\varphi_j \in C(K) \Rightarrow \varphi_j$  — равномерно непрерывна

$\exists \delta_j > 0 \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j, \delta > 0$$

пусть  $f \in \Phi \Rightarrow \exists j : \|f - \varphi_j\| < \varepsilon$  то есть

надо оценить этот модуль через неравенство треугольника; справа, очевидно, будет 3 слагаемых

$$\max_{x \in K} |f(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x, y \in K, \rho(x, y) < \delta, |f(x) - f(y)| &\leq \underbrace{|f(x) - \varphi_j(x)|}_{< \varepsilon} + \\ &+ \underbrace{|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|}_{< \varepsilon \text{ так как } \delta \leq \delta_j} + |\varphi_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

мы и проверили равностепенную непрерывность. Тривиальная часть доказательства закончена.

$\Leftarrow$

$\Phi$  — ограничено  $\Rightarrow \exists M > 0 : f \in \Phi \Rightarrow \|f\| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M \forall x \in K$ . Надо по определению построить конечную  $\varepsilon$ -сеть в множестве непрерывных функций. Но мы воспользуемся двумя облегчающими хитростями:

1.  $\Phi \subset C(K)$ , а  $C(K) \subset m(K)$ , и если множество имеет  $\varepsilon$ -сеть в большем пространстве, то в меньшем и подавно. Более того, сеть можно построить из элементов меньшего множества. Мы выберем ограниченные функции.
2. выберем относительно компактную  $\varepsilon$ -сеть в  $m(K)$  вместо конечной в  $C(K)$ , и этого будет достаточно.

$$\varepsilon > 0 \quad \Phi \subset C(K) \subset m(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C}, \sup_{x \in K} |f(x)| < +\infty\}$$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta \text{ из определения } (EC)$$

применим к этой парочке лемму о разбиении  $(K, \rho), \delta > 0$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n, \text{diam } C_j < \delta, K = \bigcup_{j=1}^n C_j, C_j \cap C_i = \emptyset (j \neq i), C_j \neq \emptyset$$

$$\Psi = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\} \subset m(K), y_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n$$

$$g \in \Psi, \|g\|_\infty = \sup_{x \in K} |g(x)| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$F : l_n^\infty \rightarrow \Psi, F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

Мы выяснили, что  $F$  биекция, изометрия, линейное.

$Q = \{y = (y_1, \dots, y_n), |y_j| \leq M\}$  полидиск, что бы это пока не значило

$Q$  — компакт,  $F$  — непрерывна  $\Rightarrow F(Q)$  — компакт в  $m(K)$

$$E := F(Q), E = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x), |y_j| \leq M \right\}$$

вот у нас есть компакт  $E$ , и мы собираемся проверить, что он и будет  $\varepsilon$ -сетью для  $\Phi$ . Будет полезно в каждом множестве выбрать по точке. Пусть  $x_j \in C_j, f \in \Phi, y_j := f(x_j)$ .

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x), g \in E, |y_j| \leq M$$

Пусть  $x \in K \Rightarrow \exists j, x \in C_j \Rightarrow g(x) = f(x_j) \Rightarrow$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ т.к. } \rho(x, x_j) < \delta (\text{по выбору } \delta)$$

Вот это и то, что было обещано.  $E$  — компактная  $\varepsilon$ -сеть.  $\square$

**Замечание 4.4.** Условия теоремы не зависимы.

**Пример 4.5.**  $C[0, 1]. f_n(x) = x^2 + n, \{f_n\}$  — равностепенно непрерывны, но  $\{f_n\}$  не ограничено.

**Пример 4.6.**  $C[0, 1], f_n(x) = x^n. \{f_n\}$  — ограничены, но не равностепенно непрерывны.

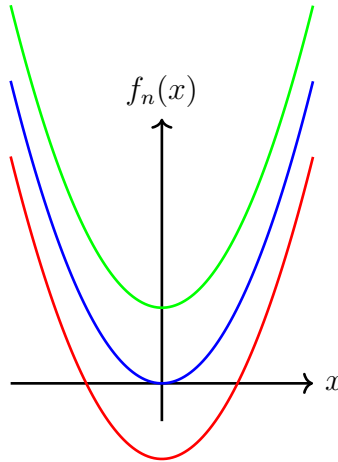


Рис. 4.2: Пример 4.5

**Теорема 4.1** (достаточные условия равностепенной непрерывности).  $(K, \rho)$  — компакт,  $\Phi \subset C(K)$ . Сначала какие-то абстрактные множества, потом будут более конкретные.

1. Если  $\exists M > 0, \alpha > 0, \beta > 0$  такие что

$$\forall f \in \Phi (\forall x, y \in K \rho(x, y) < \beta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M(\rho(x, y))^\alpha \\ \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

2.  $C[a, b], \Phi \subset C[a, b]$ , пусть  $\exists L > 0$

$$\forall f \in \Phi \exists f'(x), x \in (a, b), |f'(x)| \leq L \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

3. чуть более общий случай.  $K \subset G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  — компакт,  $G$  — открытое.

$$\exists L > 0 : \forall f \in \Phi, \exists \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq L (1 \leq j \leq n), \forall x \in G \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

4. про аналитические функции, предполагать можно будет гораздо меньшее.  $K \subset G \subset \mathbb{C}$ ,  $G$  — открытое,  $K$  — компакт.

$$\exists L > 0, f \in \Phi, f \text{ аналитическая в } G, \exists f'(x), \underbrace{|f(x)|}_{\text{ТУТ}} \leq L, \forall x \in G$$

ТУТ НЕ ПРОИЗВОДНАЯ, НА ЭКЗАМЕНЕ ЧАСТО ОШИБАЮТСЯ!!!!



Аналитичность — фантастическое свойство, в отличие от, например, дифференцируемости. Именно из-за неё ТАМ как раз и не производная.

1. Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $x, y \in K$ , пусть  $\rho(x, y) < \delta < \beta$ ,  $\delta(\varepsilon) = ?$ .

$$\begin{aligned} f \in \Phi &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\rho(x, y)^\alpha < M\delta^\alpha \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \delta(\varepsilon) &= \min \left\{ \beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \end{aligned}$$

□

Будем сводить остальные доказательства к первому пункту, находя  $M, \alpha, \beta$ . Второй пункт теперь совсем лёгкий.

2.  $\Phi \subset C[a, b]$ ,  $x, y \in [a, b]$ ,  $f \in \Phi$ . Для оценки разности  $f(x) - f(y)$  воспользуемся теоремой Лагранжа.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(c)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f'(c)||x - y| \leq L|x - y| \\ M &= L, \alpha = 1, (\beta - \forall) \stackrel{1}{\Rightarrow} \Phi \in (EC) \end{aligned}$$

□

3. Пусть  $z, y \in K$  такие что  $[z, y] \subset G$ ,  $f \in \Phi$  Оценим разность  $f(y) - f(z)$ .

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] &\rightarrow [y, z] \\ \Gamma(t) &= ty + (1 - t)z, \Gamma(0) = z, \Gamma(1) = y \end{aligned}$$

опять можем воспользоваться теоремой Лагранжа

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0)) = (f(\Gamma(c)))'_t \\ (f(\Gamma(t)))'_t &= (f(ty + (1 - t)z))'_t = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots)(y_j - z_j) \end{aligned}$$

$$|f(\Gamma(t))'| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} L\sqrt{n} \left( \sum_{j=1}^n (y_j - z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{n}\rho(y, z)$$

Если выбрать  $\beta$  достаточно маленьким, то наш отрезок будет лежать в этом компакте.  $F = \mathbb{R}^n \setminus G$  — замкнутое,  $\rho(x, F)$  — непрерывная функция в  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho(x, F)$  непрерывна на  $K \Rightarrow \exists x_0 \in K, \rho(x_0, F) = \min_{x \in K} \rho(x, F)$

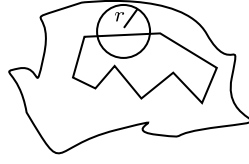


Рис. 4.3: Утопленность компакта

$$\begin{aligned}
 x_0 \notin F &\Rightarrow \rho(x_0, F) > 0, r := \rho(x_0, F) \\
 \forall x \in K \quad B_r(x) &\subset G, \beta = r \\
 \rho(x, y) < r &\Rightarrow y \in B_r(x) \subset G \Rightarrow \\
 &\text{отрезок } [x, y] \subset B_r(x) \subset G \\
 &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{n}\rho(x, y)
 \end{aligned}$$

$z$  и  $y$ , которые с самого начала были выбраны вместо  $x$  и  $y$ , чтобы не смущаться из-за  $dx$ , обратно превратились в  $x$  и  $y$ , все же поняли?

На пальцах: наш компакт настолько утоплен в  $G$ , что если мы возьмём шарик радиуса  $r$ , то шарик всё ещё лежит в  $G$ .  $\square$

4. Букву  $r$ , которую мы нашли в предыдущем пункте, будем изо всех сил использовать.  $K \subset G \subset \mathbb{C}$ . В 3 пункте выяснили, что  $\exists r > 0 : B_r(x) \subset G \forall x \in K, \beta = \frac{r}{3}$ .

$$\begin{aligned}
 x, y \in K, \rho(x, y) < \beta, \gamma &= \{\zeta \in \mathbb{C} : |x - \zeta| = 2\beta\} \\
 f &\in \Phi
 \end{aligned}$$

разницу собираемся оценивать с помощью формулы Коши, поэтому никакие производные и не нужны!!!

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \\
 f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta \\
 f(x) - f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{x - y}{(\zeta - x)(\zeta - y)} d\zeta
 \end{aligned}$$

оцениваем самым грубом образом, отправляя модули под интегралы

$$|f(\zeta)| \leq L, |\zeta - x| = 2\beta, |\zeta - y| \geq \beta$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2\pi} L \cdot |x - y| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{(2\beta) \cdot \beta} = |x - y| L \frac{(2\beta) \cdot 2\pi}{(2\pi)(2\beta)\beta} = \\ &= \frac{L}{\beta} |x - y| \end{aligned}$$

и в обозначениях 1 пункта получаем  $M = \frac{L}{\beta}, \alpha = 1, \beta = \frac{r}{3}, \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$   $\square$

Перед тем, как мы покинем относительно компакты, пара упражнений, которые на экзамене спрашивали в качестве задачи на 5.

**Утверждение 4.2.**  $1 \leq p < +\infty$ .  $\Phi \subset l^p, \Phi$  — относительно компактно  $\Leftrightarrow$

1.  $\Phi$  — ограничено в  $l^p$

2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in \Phi, \left( \sum_{j=N+1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

**Утверждение 4.3.**  $\Phi \subset c_0, \Phi$  — относительно компактно  $\Leftrightarrow$

1.  $\Phi$  — ограничено

2.  $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Phi \sup_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Мы сейчас находимся на перепутье функционального анализа. Можно отправиться в гильбертовы пространства, в линейные операторы или еще куда-то. Изучить-то придётся всё, но мы начинаем линейные операторы.

# **Часть II**

## **Линейные операторы**

## Глава 5

# Линейные операторы в линейных пространствах

Первый параграф про линейные пространства будет совсем простой, здесь будут самые тривиальные свойства, следующие из линейности.

### 5.1. Линейные операторы в линейных пространствах

**Определение 5.1** (Линейный оператор).  $X, Y$  — линейны над  $k$  ( $k = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).  $A : X \rightarrow Y$ ,  $A$  — **линейный оператор**, если

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az, \quad x, z \in X, \alpha, \beta \in k$$

$\text{Lin}(X, Y)$  — множество линейных операторов из  $X$  в  $Y$ . Также нам понадобится линейное пространство над  $k$

$$\alpha \in k, A \in \text{Lin}(X, Y), (\alpha A)(x) := \alpha Ax, \mathbf{0}(x) = 0 \text{ (0 в пространстве } Y) \\ A, B \in \text{Lin}(X, Y), (A + B)(x) := Ax + Bx$$

Если  $X = Y$ , пишем только  $\text{Lin}(X)$ .

**Пример 5.1** (интегральный оператор).  $C[a, b], k(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$

$$f \in C[a, b], (\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt \\ (\mathcal{K}f)(s) \in C[a, b], \mathcal{K} \in \text{Lin}(C[a, b])$$

**Пример 5.2** (оператор дифференцирования).  $X = C^{(1)}[0, 1] = \{f : f' \in C[0, 1]\}$ ,  $Y = C[0, 1]$ .  $f \in X, D(f) = f', D \in \text{Lin}(X, Y)$

**Пример 5.3** (оператор вложения).  $l^1 \subset l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \sum_{n=1}^\infty |x_n| < +\infty, x \in l^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow x \in l^2$

$$Ax = x, A \text{ оператор вложения } l^1 \xrightarrow{A} l^2$$

$$\forall 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty \Rightarrow l^{p_1} \xrightarrow{A} l^{p_2}, Ax = x$$

$$A \in \text{Lin}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

**Пример 5.4** (оператор, но не линейный).  $X$  — линейное пространство,  $x_0 \in X, x_0 \neq 0, Ax = x + x_0 \Rightarrow A$  — не линейный.

Перед тем, как доказывать теорему, еще одно небольшое определение.

**Определение 5.2** (Выпуклое множество).  $B \subset X, X$  — линейное пространство.  $B$  — **выпуклое**, если

$$\forall x, z \in B, \forall t, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx + (1 - t)z \in B$$

то есть отрезок, соединяющий любые две точки, полностью лежит в этом множестве

**Теорема 5.1** (простейшие свойства линейного оператора).  $X, Y$  — линейные пространства над  $k$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ),  $A \in \text{Lin}(X, Y)$

1.  $L \subset X, L$  — подпространство в  $X \Rightarrow A(L)$  — подпространство в  $Y$  (образ подпространства — подпространство)
2.  $M \subset Y, M$  — подпространство в  $Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(M)}_{\text{прообраз}}$  — подпространство в  $X$
3.  $B \subset X, B$  — выпуклое  $\Rightarrow A(B)$  — выпуклое в  $Y$
4.  $C \subset Y, C$  — выпуклое  $\Rightarrow A^{-1}(C)$  — выпуклое в  $X$
5. пусть  $A$  — биекция  $\Rightarrow A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$

Все 5 свойств доказывать не будем, покажем только несколько и скажем, что остальные доказываются аналогично.

1.  $L$  — подпространство,  $y, v \in A(L), \alpha \in k$ . Наша мечта — проверить ( $\stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha y + v \in A(L)$ ), не обязательно писать  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$\Rightarrow \exists x, u \in L : (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \\ \alpha x + u \in L \Rightarrow A(\alpha x + u) \in A(L) \Rightarrow \alpha y + v \in A(L)$$

□

3 проверяется тютелька в тютельку как 1, а 2 — как 4, поэтому проверим 4.

4.  $C$  — выпуклое,  $x, u \in A^{-1}(C), 0 \leq t \leq 1$ .

$$(y := Ax \wedge v := Au) \quad y, v \in C \Rightarrow ty + (1 - t)v \in C \\ A(tx + (1 - t)u) = tAx + (1 - t)Au = ty + (1 - t)v \in C \\ \Rightarrow tx + (1 - t)u \in A^{-1}(C) \Rightarrow A^{-1}(C) \text{ выпуклое}$$

□

5.  $y, v \in Y \Rightarrow x = A^{-1}y, u = A^{-1}v \Rightarrow (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow$

$$\text{пусть } \alpha \in k, \quad A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \Rightarrow \\ \alpha x + u = A^{-1}(\alpha y + v) = \alpha A^{-1}y + A^{-1}v \Rightarrow \\ A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

□

**Определение 5.3** (Ядро линейного оператора).  $A \in \text{Lin}(X, Y)$

$$\text{Ker } A = \{x \in X : Ax = 0\} \text{ — ядро } A$$

$$\text{Im } A = \{y \in Y : \exists x : Ax = y\} = A(X) \text{ — образ } A$$

**Следствие 5.1.**  $X, Y$  — линейные пространства,  $\Rightarrow \text{Ker } A$  — подпространство в  $X$ ,  $\text{Im } A$  — подпространство в  $Y$ .

**Определение 5.4** (произведение операторов).  $X, Y, Z$  — линейные пространства

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

$$A \in \text{Lin}(X, Y), B \in \text{Lin}(Y, Z), C = BA, C(x) := B(Ax), x \in X \Rightarrow \\ C \in \text{Lin}(X, Z), C \text{ — произведение } BA$$

Всё самое тривиальное для операторов в линейных пространствах мы вспомнили

## 5.2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы в нормированных пространствах — главный объект, который изучает функциональный анализ.

**Определение 5.5** (Ограниченный оператор).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$ .  $A$  — **ограниченный**, если  $\forall C \subset X, C$  — ограниченное  $\Rightarrow A(C)$  — ограниченное в  $Y$ .

Оказывается, для операторов ограниченность эквивалентна непрерывности. Казалось бы, ограниченность сильно слабее, но если к ней добавить линейность, то будет аж непрерывность.

Обычно если в теореме 2 свойства, то говорят «если и только если», а если условий несколько, то говорят «равносильность». Подлые англосаксы говорят Following Conditions are Equivalent.

**Теорема 5.2** (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$ . Следующие условия равносильны (СУР) (FCE)

1.  $A$  непрерывен в точке 0
2.  $A$  непрерывен  $\forall x \in X$
3.  $\exists C > 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \forall x \in X$
4.  $A$  ограниченный
5.  $\exists r > 0 A(B_r(0))$  — ограниченное множество в  $Y$ .

Доказательство очень простое, и, конечно, строится на линейности

$1 \Rightarrow 2$ .  $A$  непрерывен в точке 0. Пусть  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$  ( $A(0) = 0$ ). утверждается, что те же самые  $\varepsilon$  и  $\delta$  подходят.

пусть  $x_0 \in X$ , проверим, что  $A$  непрерывен в  $x_0$   
пусть  $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

□



$2 \Rightarrow 1$  очевидно

$1 \Rightarrow 3$ . Пусть  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} z \in X, z \neq 0 \quad x = \frac{z}{\|z\|} \cdot \delta \Rightarrow \|x\| = \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \|A\left(\frac{z}{\|z\|} \cdot \delta\right)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\| \text{ т.е. } C = \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned}$$

□

$3 \Rightarrow 4$ .  $B \subset X$ ,  $B$  — ограниченное, то есть  $\exists M > 0 : (\forall x \in B \|x\| < M) \xrightarrow{3} \|Ax\| \leq C\|x\| \leq CM \forall x \in B \Rightarrow \{A(B)\}$  — ограниченное. □

$4 \Rightarrow 5$  очевидно ( $B_r(0)$  — ограниченное)

$5 \Rightarrow 1$ .  $\exists R > 0 A(B_r^X(0)) \subset B_R^Y(0)$

$$\|x\| < r \Rightarrow \|Ax\| < R$$

непрерывность в 0 означает

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad \|x\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

$$\|z\| < \varepsilon \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow \|z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\| < r \Rightarrow \|A\left(z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\right)\| < R \Rightarrow \|Az\| < \varepsilon$$

□

$$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$$

$$\underbrace{\mathcal{B}(X, Y)}_{\text{bounded}} = \{A \in \text{Lin}(X, Y) \text{ и } A \text{ — ограниченный}\}$$

С помощью теоремы, которую мы только что доказали, введём норму в этом пространстве.

**Определение 5.6** (норма оператора).  $A \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\|A\| = \inf\{C : C > 0 \wedge \|Ax\| \leq C\|x\| \forall x \in X\}$$

то бишь точная нижняя грань множества величин, на которые наш оператор увеличивает норму элемента.

Раз мы так объявили норму, то надо проверять аксиомы нормы.

**Утверждение 5.1.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y)$

1.  $\forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$  (то есть  $\inf$  в определении нормы  $= \min$ )
2.  $\|A\|$  удовлетворяет аксиомам нормы

*Доказательство.*  $x$  — фиксирован, по определению  $\inf \Rightarrow \forall C > \|A\|, \|Ax\| \leq C\|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ . Был фиксирован, теперь любой, первое утверждение доказано. Теперь второе.

$\alpha \in k, \alpha \neq 0, x \in X, x$  — фиксирован

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \|(\alpha A)(x)\| &= \|\alpha \cdot Ax\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| \end{aligned} \quad (*)$$

Очевидное замечание по слёзной просьбе двух студенток, которые ничего не понимали. Если мы докажем  $\|Ax\| \leq M\|x\| \forall x \in X$ , то  $\|A\| \leq M$ . Применим (\*) к оператору  $\alpha A$  и константе  $\frac{1}{\alpha}$

$$\Rightarrow \left\| \frac{1}{\alpha}(\alpha A) \right\| \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha A\| \Rightarrow$$

сократим константы слева и домножим обе части на  $|\alpha|$

$$\begin{aligned} |\alpha| \cdot \|A\| &\leq \|\alpha A\| \\ \Rightarrow \|\alpha A\| &= |\alpha| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

$A, B \in \mathcal{B}(X, Y), x \in X$

$$\begin{aligned} \|(A+B)(x)\| &= \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = \\ &= (\|A\| + \|B\|)\|x\| \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Как только есть какая-то константа, то настоящая норма меньше или равна этой константы.  $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0. \Rightarrow Ax = 0 \forall x \in X \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \|A\|$  — настоящая норма  $\square$

**Теорема 5.3** (вычисление нормы непрерывного оператора).

$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow$

$$\|A\| = \underbrace{\sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \|Ax\|}_a = \underbrace{\sup_{\{\|x\| < 1\}} \|Ax\|}_b = \underbrace{\sup_{\{\|x\|=1\}} \|Ax\|}_c = \underbrace{\sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_d$$

*Доказательство.* Очевидно  $a \geq b, a \geq c, d \geq c$ . Докажем  $\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|, \|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$ .

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \quad \forall x, \|x\| \leq 1 \Rightarrow \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow a \leq \|A\|$$

Доказали  $\|A\| \geq a$ .

$$\text{Пусть } \varepsilon > 0, z \in X, z \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)} \right\| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

$$\begin{aligned} \left\| A \left( \frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)} \right) \right\| &\leq b \Rightarrow \|Az\| \leq b(1+\varepsilon)\|z\| \quad \forall z \in X \\ &\Rightarrow \|A\| \leq b(1+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|A\| \leq b \end{aligned}$$

Получаем  $\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|$ , закончили с первой цепочкой неравенств.

$$\text{Пусть } x \neq 0 \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow d = \sup_{\{x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

$$\text{пусть } z \in X, z \neq 0, \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| A \left( \frac{z}{\|z\|} \right) \right\| \leq c \Rightarrow \|Az\| \leq c\|z\| \quad \forall z \in X$$

$c$  — супремум по единичной сфере

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq c \\ \|A\| &\geq d \geq c \geq \|A\| \end{aligned}$$

□

**Пример 5.5.**  $C[a, b], h(x) \in C[a, b]$  — фиксированная функция.  $f \in C[a, b], M_h(f) := h(x) \cdot f(x)$ .

$$M_h \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Проверим, что он непрерывен и сосчитаем его норму.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|M_h(f)\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} |h(x) \cdot f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \\ &\Rightarrow M_h \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

получили непрерывность; раз есть общая константа, не зависящая от  $f$ , то мы получаем и оценку для нормы

$$\begin{aligned} \chi_{[a, b]}(x) &= 1 \quad \forall x \in [a, b], \chi_{[a, b]} \in C[a, b], \|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1 \\ \|M_h\| &\geq \|M_h(f)\| \quad \forall f, \|f\| = 1 \Rightarrow \|M_h\| \geq \|M_h(\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \\ &\Rightarrow \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} = \|h\|_\infty \end{aligned}$$

□

Теперь посмотрим на оператор дифференцирования, это очень важный пример.

**Пример 5.6.**  $Y = C[a, b], X = \{f : \exists f' \in C[a, b]\}, 0 \leq a \leq b$

$X \subset Y, X$  — подпространство  $Y$ , то есть

$$\|f\|_X = \|f\|_Y = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$D(f) = f' \Rightarrow D \in \text{Lin}(X, Y),$$

$$D(x^n) = nx^{n-1} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|D(x^n)\|}{\|x^n\|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{nb^{n-1}}{b^n} = +\infty$$

при таком определении нормы оператор дифференцирования  $D$  не непрерывен.

**Пример 5.7.**  $Y = C[a, b], X = C^{(1)}[a, b]$

$$\|f\|_X = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

$$D(f) = f' \quad \|D(f)\| = \|f'\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} = 1 \cdot \|f\|_X$$

$$\Rightarrow D \in \mathcal{B}(X, Y), \|D\| \leq 1$$

В зависимости от того, как мы определим норму в пространстве, один и тот же оператор может оказаться как непрерывным, так и не непрерывным.

**Теорема 5.4** (вложение пространств в  $l^p$ ). Пусть  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ .  $x \in l^{p_1}$ . Рассмотрим оператор вложения  $Ax = x \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), \|A\| = 1$ .

*Доказательство.* То, что он линейный, мы уже обсуждали, это очевидно. Удобно будет рассматривать последовательности из единичной сферы.  $x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{C}$ .  $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$ . Возьмём не просто последовательность из  $l^{p_1}$ , но и такую, что  $\|x\|_{p_1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} = 1 \quad Ax = x$ .

$$\begin{aligned} & \Rightarrow |x_n| \leq 1 \Rightarrow (|x_n|^{p_2}) < |x_n|^{p_1} \\ \|Ax\|_{p_2} &= \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_2}} = 1 \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \\ \|A\| &= \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \leq 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \leq 1 \quad \text{при } p_2 < +\infty \\ & \text{теперь } p_2 = +\infty \|x\|_{p_1} = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

потому что сумма в какой-то степени  $\geq$  супремума

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| &\leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \\ A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \quad \|A\| &\leq 1 \end{aligned}$$

если  $e_1 = (1, 0, \dots)$ ,  $\|e_1\|_p = 1 \forall p : 1 \leq p \leq +\infty$

$$\|A\| = \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \geq \|Ae_1\|_{p_2} = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1 \quad \forall p_1 < p_2$$

□

Посмотрим теперь на похожую теорему для больших пространств  $L^p$ .

**Теорема 5.5** (вложение пространств в  $L^p(\mu)$  для конечной меры).  $(X, U, \mu), 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty, \mu(X) < +\infty$ . Рассмотрим  $f \in L^{p_2}, Af = f \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1})$ .  $\|A\| = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}, (\frac{1}{\infty} = 0)$

*Доказательство.* Начнём с самого простого случая. То есть что называлось существенно ограниченными функциями.  $p_2 = \infty, f \in L^\infty(\mu), |f(x)| \leq \|f\|_\infty$  п.в. для  $x \in X$  по  $\mu$ .

$$\|Af\|_{p_1} = \|f\|_{p_1} = \left( \int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|f\|_\infty \left( \int_X d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$$

Вот у нас получилась константа, которая обслуживает все функции  $f$ . Тогда, во-первых, оператор непрерывен, а во-вторых, это и есть оценка для нормы

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &\in \mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1}), \|A\| \leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1}} \\ \text{пусть } p_2 < +\infty, f &\in L^{p_2}, \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} = \|f\|_{p_2} \\ \|Af\|_{p_1} &= \|f\|_{p_1} = \left( \int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \stackrel{\text{н. Гёльдера}}{\leq} \left[ \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X \mathbb{1}^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p_1}} = \\ p &= \frac{p_2}{p_1}, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2} \\ &= \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot (\mu(X))^{(1 - \frac{p_1}{p_2}) \frac{1}{p_1}} = \|f\|_{p_2} (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \\ \Rightarrow A &\in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1}), \|A\| \leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

Почти всё готово. Мы оценили норму сверху, и утверждается, что на самом деле имеет место равенство. На какой пробной функции получить неравенство с другой стороны? Наверное, все уже догадались. Раз есть  $\sup$ , то мы можем подставить какую-то конкретную функцию.  $p_2 < +\infty, \chi_X(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|_{p_1}}{\|f\|_{p_2}} \geq \frac{\|A(\chi_X)\|_{p_1}}{\|\chi_X\|_{p_2}} = \frac{(\int_X \chi_X^{p_1} d\mu)^{\frac{1}{p_1}}}{(\int_X \chi_X^{p_2} d\mu)^{\frac{1}{p_2}}} = \\ &= \frac{(\mu(X))^{\frac{1}{p_1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{p_2}}} = \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

если  $p_2 = \infty, \|\chi_X\|_\infty = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1})} \geq \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$

□

Позже вычислим норму интегрального оператора, который часто встречается в анализе и в матфизике.

**Теорема 5.6** (полнота пространства операторов, действующих в банахово пространство).  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $(Y, \|\cdot\|)$  — банахово  $\Rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$  — банахово.

*Доказательство.* Тут без хитростей. По определению возьмём фундаментальную последовательность и покажем, что у нее есть предел. Сначала надо добыть оператор, который будет претендентом на

звание предела.  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная,  $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Пусть  $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$ .  $x \in X, x$  — фиксирован,  $\Rightarrow \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon \|x\|$ . Тогда  $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная в  $Y, Y$  — банахово  $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \in Y, Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \text{ поточечный предел}$$

$$\lim — \text{линейная} \Rightarrow A \in \text{Lin}(X, Y)$$

$$x — \text{фиксирован} \quad \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|, \text{ пусть } m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow A_n - A \in \mathcal{B}(X, Y), \|A_n - A\| \leq \varepsilon \Rightarrow A = (A - A_n) + A_n \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

Поговорим немного о линейных функционалах. Вы только не думайте, что мы покидаем линейные операторы, это всё-таки главный объект изучения функционального анализа.

### 5.3. Линейные функционалы

**Определение 5.7** (линейный функционал).  $X$  — линейное пространство над  $k$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).  $\text{Lin}(X, k)$  — линейные функционалы на  $X$

**Определение 5.8** (сопряжённое пространство).  $(X, \|\cdot\|), X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$  (или же  $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ ) — сопряжённое пространство.  $X^*$  — линейные **НЕПРЕРЫВНЫЕ** функционалы.

Про непрерывность надо помнить. На экзамене часто спрашивают, что такое сопряжённое пространство, и не могут выпытать непрерывность. Что делают с такими студентами? Выгоняют.

**Следствие 5.2.**  $(X, \|\cdot\|), f \in X^* \Rightarrow$

$$\|f\| = \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\| < 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\|=1\}} |f(x)| = \sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

**Следствие 5.3.**  $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow X^* — банахово$

*Доказательство.*  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  — полные  $\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$  — банахово ( $\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  — банахово).  $\square$

**Пример 5.8.**  $X = l^p, (1 \leq p \leq +\infty), i \in \mathbb{N}$  — фиксированное число

$$\begin{aligned} x \in l^p &\Rightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, f(x) := x_i \Rightarrow f \in X^*, \|f\| = 1 \\ |f(x)| = |x_i| &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1 \cdot \|x\|_p \text{ при } 1 \leq p < +\infty \text{ и} \\ &\leq \sup_n \|x_n\| = 1 \cdot \|x\|_{\infty} \text{ при } p = +\infty \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = X^*, \|f\| \leq 1 \\ \|f\| &= \sup_{\{\|x\|=1\}} |f(x)| \geq |f(e_i)| = 1 \end{aligned}$$

Со временем мы сочитаем, что такое сопряженное пространство к  $l^p$  для конечных  $p$ . По секрету, это  $l^q$ , где  $p$  и  $q$  — сопряжены.

**Пример 5.9.**  $C(K) = \{f \mid f : K \rightarrow \mathbb{C} \text{ и } f \text{ непрерывная}\}, x_0 \in K, K$  — компакт. Почему всегда рассматривается компакт? Потому что на компакте функция достигает свой максимум, и иначе непонятно, как норму вводить.

$f \in C(K), G(f) := f(x_0) \Rightarrow G \in X^*, \|G\| = 1$  (функционал значения в точке, подлые англосаксы говорят point evaluation)

$$\begin{aligned} G &\in \text{Lin}(C(K), \mathbb{C}) \\ f \in C(K), |G(f)| &= |f(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{C(K)} \Rightarrow \\ G &\in X^*, \|G\| \leq 1 \\ \begin{cases} \chi_K(x) = 1, \chi_K \in C(K), \|\chi_K\| = 1, \chi_K(x_0) = 1 \\ \Rightarrow \|G\| = \sup_{\{\|f\|=1\}} |G(f)| \geq |G(\chi_K)| = 1 \end{cases} &\Rightarrow \|G\| = 1 \end{aligned}$$

Когда-то мы опишем пространство непрерывных функций, но доказывать, почему оно так выглядит, не будем, ибо это очень сложно, и придётся просто поверить в это описание. Сейчас докажем теорему про норму интегрального оператора в  $C[a, b]$ . Мы ей даже когда-то нескоро воспользуемся.



**Теорема 5.7.**  $C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывная}\}$ . Ядро интегрального оператора  $:= k(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$ , пусть  $f \in C[a, b]$ .

$$(\mathcal{K}f)(s) := \int_a^b k(s, t)f(t)dt \quad \text{при } s \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|\mathcal{K}\| = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)|dt$$

Доказательство начнём с важной леммы, помогающей вычислить норму линейного функционала. Когда мы сосчитаем норму линейного функционала, то будет очень нетрудно применить это для вычисления нормы линейного оператора.

**Лемма 5.1.**  $\varphi(t) \in C[a, b], \varphi$  — фиксирована.  $f \in C[a, b], G(f) := \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \Rightarrow G \in (C[a, b])^*, \|G\| = \int_a^b |\varphi(t)|dt$ .

*Доказательство леммы.* Оценка сверху совершенно тривиальна.  $f \in C[a, b]$

$$\begin{aligned} |G(f)| &= \left| \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)||\varphi(t)|dt \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \cdot \int_a^b |\varphi(t)|dt = \\ &= \|f\|_\infty \int_a^b |\varphi(t)|dt \Rightarrow \end{aligned}$$

$$G \in (C[a, b])^*, \|G\| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt$$

Теперь оценка  $\|G\|$  снизу. Сначала тривиальные замечания. Если  $\varphi(t) \geq 0 \forall t \in [a, b]$ , то  $\chi_{[a, b]}(x) \equiv 1$

$$|G(\chi_{[a, b]})| = \left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| = \int_a^b \varphi(t)dt$$

Если  $\varphi(t) \leq 0 \forall t \in [a, b]$  — то же самое.

$$g(t) = \text{sign } \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \varphi(t) > 0 \\ -1 & \varphi(t) < 0 \\ 0 & \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

$G(g) = \int_a^b |\varphi(t)|dt$ , но  $g \notin C[a, b]$ . До сих пор мы всегда находили пробную функцию, на котором достигался  $\sup$ , а здесь такого элемента

нет. Поэтому будем приближать  $\varphi$  непрерывными функциями с точностью до  $\varepsilon$ , вот такая идея.

Пусть  $\varepsilon > 0, \varphi \in C[a, b] \Rightarrow \varphi$  — равномерно непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 \mid s - t \mid < \delta \Rightarrow \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \quad a \leq s, t \leq b$$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, t_k - t_{k-1} < \delta$ .

Рассмотрим  $\{\Delta_j\}_{j=1}^n$ .  $\Delta_j$  — интервалы  $[t_{k-1}, t_k]$ . Нумерация будет не по порядку, как сперва может показаться, а совершенно другая, и она никак не будет зависеть от расположения на отрезке. Разобьём интервалы на 2 сорта. Первый — где функция положительна или отрицательна, то есть не меняет знак. Второй — где меняет знак или обращается в 0.  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  — те интервалы, на которых  $\varphi(t) > 0, t \in \Delta_j$  или  $\varphi(t) < 0, t \in \Delta_j$  ( $1 \leq j \leq r$ )

$\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$  — те интервалы, для которых  $\exists s \in \Delta_j : \varphi(s) = 0, n \geq j > r$

пусть  $t \in \Delta_j, j > r \Rightarrow \exists s \in \Delta_j, \varphi(s) = 0 \Rightarrow$

$$\mid \varphi(t) \mid = \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \Rightarrow \int_{\Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt < \varepsilon \mid \Delta_j \mid$$

$$\Rightarrow \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt \leq \varepsilon \left( \sum_{j=r+1}^n \mid \Delta_j \mid \right) \leq \varepsilon(b-a)$$

$$h(t) = \begin{cases} \text{sign } \varphi(t), t \in \Delta_j & 1 \leq j \leq r \\ \text{линейная на } \Delta_j & j > r \\ \text{если } [a, t_1] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(a) = 0 \\ \text{если } [t_{n-1}, b] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(b) = 0 \end{cases} \quad h \in C[a, b], \mid h(t) \mid \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 \|G\| &= \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| \geq |G(h)| = \left| \int_a^b h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |h(t)| |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2 \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|G\| \geq \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

□

Главной частью доказательства теоремы было доказательство леммы. Вернёмся к теореме.

*Доказательство.* Оценим сначала норму оператора сверху.  $(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$ ,  $f \in C[a, b]$ .  $M = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)| dt$ . Мы как раз хотим показать, что норма оператора будет равна  $M$ .

$$|(\mathcal{K}f)(s)| \leq \int_a^b |k(s, t)| |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(s, t)| dt \leq M \|f\|_\infty$$

$$\|\mathcal{K}f\|_\infty = \max_s |\mathcal{K}f(s)| \leq M \cdot \|f\| \quad \forall f \in C[a, b] \Rightarrow \mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b])$$

$$\|K\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq M$$

Теперь оценим  $\|\mathcal{K}\|$  снизу.

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \int_a^b |k(s, t)| dt \Rightarrow g \in C[a, b] \Rightarrow \\
 \exists s_0 \quad g(s_0) &= \max g(s) \Rightarrow g(s_0) = M
 \end{aligned}$$

применим к произвольной непрерывной функции оператор

$$f \in C[a, b], \|(\mathcal{K}f)(s)\|_\infty = \max_{a \leq s \leq b} |\mathcal{K}f(s)| \geq |(\mathcal{K}f)(s_0)| = \left| \int_a^b k(s_0, t) f(t) dt \right| = |G(f)|$$

где  $\varphi(t) = k(s_0, t)$ ,  $G(f) = \int_a^b k(s_0, t)f(t)dt$ .

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} \|\mathcal{K}(f)\| \geq \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| = \|G\|_{(C[a,b])^*} \stackrel{\text{лемма}}{=}$$

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt = M \Rightarrow \|K\| = M$$

□

От сопряжённых пространств мы не уходим, а наоборот, углубляемся в них.

## 5.4. Изоморфные линейные пространства

**Определение 5.9** (изоморфность пространств).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $(Y, \|\cdot\|)$  — **линейно изоморфны**, если  $\exists A \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ .  $A$  — **линейный изоморфизм**

**Замечание 5.1.** «Изоморфность» — отношение эквивалентности на множестве нормированных пространств.

Когда можно сказать, что два пространства изоморфны?

**Теорема 5.8** (критерий линейного изоморфизма).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $(Y, \|\cdot\|)$ ,  $A \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $A(X) = Y$  (то есть  $A$  — сюръекция).  
 $A$  — линейный изоморфизм  $\Leftrightarrow$  пусть  $0 < c_1 < c_2 < +\infty$  т.ч.  
 $c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \leq c_2 \|x\|$ ,  $\forall x \in X$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(X, Y) &\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, c_2 = \|A\| \\ \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) &\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| \quad \forall y \in Y \\ \text{пусть } x \in X, y = Ax &\Rightarrow \|A^{-1}(Ax)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow \\ &\frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \quad c_1 = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$\|Ax\| \leq c_2 \|x\| \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y) (\|A\| \leq c_2)$ . Теперь проверим, что  $A$  — инъекция. С помощью неравенства снизу мы сейчас как раз выведем,

что образы различных иксов различны. Пусть  $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$

$$0 = \|A(x_1 - x_2)\| \geq c \|x_1 - x_2\| \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow A - \text{биекция} \\ \Rightarrow [[\text{свойство 5 линейных операторов}]] \exists A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

$$\begin{cases} c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in X \\ \text{пусть } y \in Y, x = A^{-1}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_1 \|A^{-1}y\| \leq \|y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{c_1} \|y\| \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \left( \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_1} \right)$$

□

Раз нам предстоит потом долгий разговор про обратные операторы, сразу отметим некоторое следствия из доказательства теоремы, чтобы не возвращаться к нему потом.

**Следствие 5.4** (из доказательства теоремы).  
( $X, \|\cdot\|$ ), ( $Y, \|\cdot\|$ ),  $A \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $A(X) = Y$

$$\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \exists c > 0 : \|Ax\| \geq c \|x\| \quad \forall x \in X$$

*Доказательство.* Следует из доказательства теоремы. □

Часто бывает, что на одном и том же пространстве определены две различные нормы. Какие же нормы будут называться эквивалентными?

**Определение 5.10.**  $X$  — линейное пространство,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  — две нормы на  $X$ .  $\|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0$$

По-другому можно сказать, что топологии, которые задают эти нормы, одинаковые:  $\Leftrightarrow G \subset X, G$  — открытое в  $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow G$  — открытое в  $(X, \|\cdot\|_2)$

**Следствие 5.5.**  $X$  — линейное,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  — нормы на  $X$ .  $\|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 \leq +\infty$  т.ч.

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

хотя в определении не утверждалось, что одну норму можно оценить через другую

*Доказательство.*  $X = (X, \|\cdot\|_1), Y = (X, \|\cdot\|_2)$  — как бы 2 разных пространства, но на одном множестве. Рассмотрим оператор  $Ix = x$ . Ясно, что  $I \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $I$  — биекция,  $I^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$ . Что означает, что  $\|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2$ ?  $\Leftrightarrow I, I^{-1}$  непрерывны  $\Leftrightarrow I$  — линейный изоморфизм  $X$  и  $Y$   $\xLeftrightarrow{\text{т.критерий линейного изоморфизма}}$   $c_1 \|x\|_1 \leq \underbrace{\|Ix\|_2}_{\|x\|_2} \leq c_2 \|x\|_1$

□

Не очень скоро мы получим обобщение этой теоремы. Окажется, что если пространство банахово в обеих нормах, то только одно из последних неравенств влечёт другое.

**Утверждение 5.2.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — линейно изоморфны. Пусть  $X$  — банахово, тогда  $Y$  — банахово.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} A : X &\rightarrow Y & A \in \mathcal{B}(X, Y) & A \text{ — линейный изоморфизм} \\ A^{-1} : Y &\rightarrow X & A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \end{aligned}$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная в } Y \quad x_n = A^{-1}y_n$$

$$\|x_n - x_m\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\| \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальная в } X$$

теперь применяем наш, слава богу, непрерывный оператор

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Ax_0 \Rightarrow$$

$Y$  полное

□

## 5.5. Конечномерные пространства

**Определение 5.11** (Размерность пространства).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$ . Если  $\exists n$  линейно независимых элементов в  $X$ , и  $\forall (n+1)$  элементов линейно зависимы, то  $\dim X = n$

**Определение 5.12.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} \exists n$  линейно независимых элементов, то  $X$  — **бесконечномерное**

**Теорема 5.9.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — линейные пространства над  $\mathbb{C}$ ,  $\dim X = \dim Y = n$ .

$\Rightarrow X$  линейно изоморфно  $Y$

*Доказательство.* Поскольку мы обсудили, что изоморфность — отношение эквивалентности, то можно зафиксировать

$$X = l_n^2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}, \|x\| = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } Y$$

$$A : l_n^2 \rightarrow Y, A(e_j) = f_j$$

утверждается, что это и будет линейный изоморфизм

$$x \in l_n^2, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j f_j, A \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$$

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j f_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|f_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_{l_n^2}} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M}$$

мы оценили норму оператора  $A$

$$\Rightarrow \|Ax\|_Y \leq \|x\|_{l_n^2} \cdot M \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|A\| \leq M$$

$$g(x) := \|Ax\| \text{ — функция на } l_n^2 \Rightarrow g(x) \text{ — непрерывна на } l_n^2$$

Теперь рассмотрим эту функцию не на всём пространстве, а на единичной сфере  $S = \{x \in l_n^2, \|x\|_2 = 1\}$  — компакт в  $l_n^2$ .

$x \in S, g(x) > 0, g$  непрерывная на компакте  $S \Rightarrow$

$$\exists x_0 \in S, g(x_0) = \min_{x \in S} g(x), r = g(x_0), r > 0$$

пусть  $x \in l_n^2, x \neq 0 \quad \frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq r \Rightarrow$

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq r \Rightarrow \|Ax\| \geq r \|x\| \quad \forall x \in l_n^2$$

$\Rightarrow A$  — линейный изоморфизм

□

**Следствие 5.6.**  $(X, \|\cdot\|), \dim X = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1.  $X$  — банахово
2.  $K \subset X, K$  — относительно компактно  $\Leftrightarrow K$  — ограничено
3.  $K \subset X, K$  — компакт  $\Leftrightarrow K$  — ограничено и замкнуто

Мы когда-нибудь выясним, что если в пространстве единичный шар — компакт, то это пространство конечномерное.

*Доказательство.* 1.  $l_n^2$  — полное,  $X$  — линейно изоморфно  $l_n^2$  и по утверждению 5.2  $\Rightarrow X$  банахово

2.  $A \in \mathcal{B}(l_n^2, X), A^{-1} \in \mathcal{B}(X, l_n^2), A, A^{-1}$  — непрерывны. А непрерывное отображение переводит компакты в компакты, относительные компакты в относительные компакты. Описание компактов в  $l_n^2$  мы знаем.

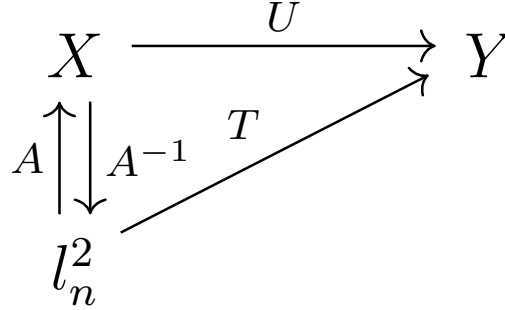
3. аналогично 2

□

**Теорема 5.10.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \dim X = n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \text{Lin}(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$$





*Доказательство.* Рассмотрим сначала частный случай, потом сведём произвольный случай к частному. Пусть  $T \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$ .

$$e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$$

$$x \in l_n^2, x = \{x_j\}_{j=1}^n, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow Tx = \sum_{j=1}^n x_j T e_j$$

оцениваем норму простейшим образом

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|T e_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_M \leq \|x\|_2 \cdot M$$

2 множитель не зависит от  $x$ , и раз получилась независимая константа, то оператор непрерывен

$$\Rightarrow T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|T\| \leq M$$

теперь произвольный случай, пусть  $U \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $\dim X = n$

$A$  — линейный изоморфизм

$$\begin{aligned} T &= UA \in \text{Lin}(l_n^2, Y) \stackrel{\text{доказали}}{\Rightarrow} T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y) \\ \Rightarrow U &= TA^{-1} \quad A, A^{-1} \text{ непрерывны} \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y) \end{aligned}$$

□

**Следствие 5.7.**  $(X, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2), \dim X = n < +\infty$

$$\Rightarrow \|\cdot\|_1 \text{ эквивалентна } \|\cdot\|_2$$

*Доказательство.*  $(X, \|\cdot\|_1), Y = (X, \|\cdot\|_2)$

$$\begin{cases} Ix = x \Rightarrow I \in \text{Lin}(X, Y) \xrightarrow{\text{теорема}} I \in \mathcal{B}(X, Y) \\ I^{-1}x = x \quad I^{-1} : Y \rightarrow X \Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \end{cases} \Rightarrow \|\cdot\|_1 \equiv \|\cdot\|_2$$

$$(\Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 : c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1)$$

Если последовательность сходится в одной норме, то под действием непрерывного оператора сходится и в другой.  $\square$

Последнее, что хочется сказать в этом параграфе

**Теорема 5.11.**  $(X, \|\cdot\|), \dim X = n < +\infty \Rightarrow$   
 $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \quad \dim X^* = n$

*Доказательство.*

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

$$\text{пусть } \{e_j\}_{j=1}^n \text{ — базис } X, x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$f_j(x) = x_j, f_j : X \rightarrow \mathbb{C}, f_j \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

проверим  $\{f_j\}_{j=1}^n$  базис в  $X^*$

$$\begin{aligned} f \in X^*, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow f(x) &= \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \alpha_j = f(e_j) \\ \Rightarrow f(x) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) \quad \forall x \in X \\ \Rightarrow f &= \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \end{aligned}$$

Проверим, что  $\{f_j\}_{j=1}^n$  линейно независимы

$$\text{пусть } \sum_{j=1}^n c_j f_j = 0, \text{ то есть } 0(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

$$\begin{aligned} f_j(e_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n c_j f_j \right)}_{=0}(e_k) = c_k \Rightarrow c_k = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^n &\text{ — базис в } X^* \end{aligned}$$



Теперь мы расстаёмся с конечномерными пространствами.

## 5.6. Конечномерные подпространства

Начнём с некоторого общего определения, которое касается метрических пространств.

**Определение 5.13.**  $(X, \rho)$  — метрическое,  $Y \subset X, x_0 \in X, \rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_0, y)$ . Если  $\exists y_0 \in Y$  т.ч.  $\rho(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0)$ , то  $y_0$  — **элемент наилучшего приближения** для  $x_0$  в  $Y$

Возникают вопросы, существует ли он, и если да, то единственный ли? Тривиальное замечание

**Замечание 5.2.** Если  $Y$  компактно, то  $\exists y_0 \in Y : f(y) = \rho(x_0, y), f(y)$  непрерывна на  $Y$ .  $\exists y_0, f(y_0) = \min_{y \in Y} f(y)$

теперь мы имеем дело с конечномерным подпространством

**Теорема 5.12.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $L \subset X$ .  $L$  — подпространство (в алгебраическом смысле),  $\dim L = n < +\infty \Rightarrow$

1.  $L$  — замкнутое
2.  $\forall x_0 \in X \exists y_0 \in L$  — элемент наилучшего приближения

1. Естественно, о компактности никакой речи быть не может, но конечномерность нам поможет. Во-первых, мы уже отмечали, что все конечномерные пространства — полные. Ещё мы доказывали линейную изоморфность. Таким образом,  $L$  — полное. А ещё в самом начале мы обсуждали, что если есть полное подмножество метрического пространства, то оно автоматически оказывается замкнутым. □

2.

$$\text{пусть } x_0 \in X \setminus L \quad \rho(x_0, L) = d > 0$$

$$\rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| \Rightarrow \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in L$$

План такой: мы докажем что последовательность ограниченная, значит, она относительно компактная, и из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, а так как  $L$  замкнуто, то предел будет лежать в  $L$ . Для оценки воспользуемся неравенством треугольника

$$\begin{aligned} d < \|x_0 - y_n\| &\leq d + \frac{1}{n} \{y_n\}_{n=1}^\infty \text{ ограничена в } L \\ \dim L < +\infty &\Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^\infty \text{ относительно компактна} \Rightarrow \\ \exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} &= y_0, L \text{ — замкнуто} \Rightarrow y_0 \in L \\ d \leq \|x_0 - y_{n_k}\| &\leq d + \frac{1}{n_k} \Rightarrow \text{при } k \rightarrow \infty \|x_0 - y_0\| = d \end{aligned}$$

□

**Замечание 5.3.**  $\dim L < +\infty$ , элемент наименьшего приближения может быть не единственным.

**Пример 5.10** ( $l_2^\infty$ ).  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ .  $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq 0\}$ .  $(\cdot)$  — элемент наилучшего приближения, единственный

Если допустить  $k = 0$ , то все точки будут лежать на одном и том же расстоянии от  $(x_1, y_1)$ .  $\forall x \in [x_1 - y_1, x_1 + y_1], y = 0 \forall (\cdot)$  — элемент наилучшего приближения

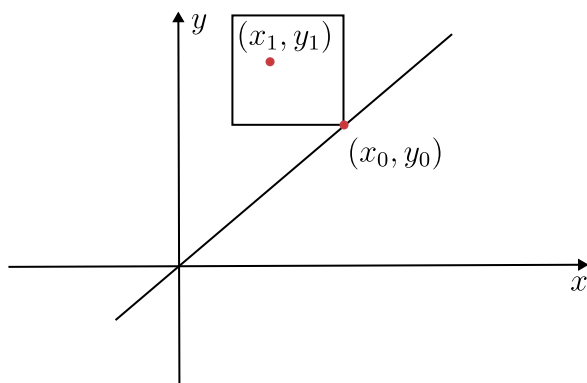
**Пример 5.11** ( $l_2^1$ ).  $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ ,  $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq \pm 1\}$ , тогда  $\exists$  единственный элемент наилучшего приближения. Если же  $L = \{y = x\}$ , все точки отрезка — элементы наилучшего приближения

**Пример 5.12** ( $l_2^2$ ).  $l_2^2 = \{(x, y) : \|(x, y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}\} \forall L \exists !$  элемент наилучшего приближения, при  $1 < p < +\infty$  аналогично

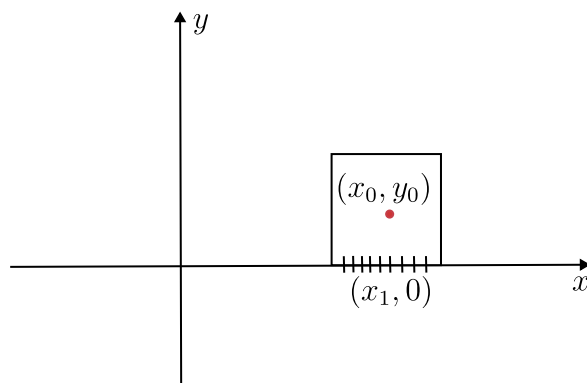
**Следствие 5.8** (про многочлены).  $C_{\mathbb{R}}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &= \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\} \\ E_n(f) &= \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty \\ \Rightarrow \exists p_0 \text{ т.ч. } E_n(f) &= \|f - p_0\|_\infty \end{aligned}$$

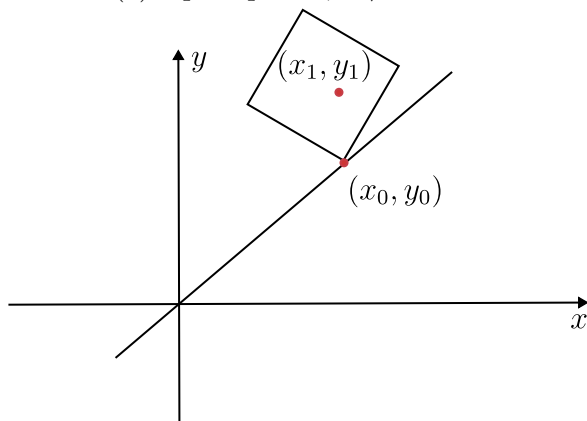
$p_0$  носит торжественное название многочлена наилучшего приближения



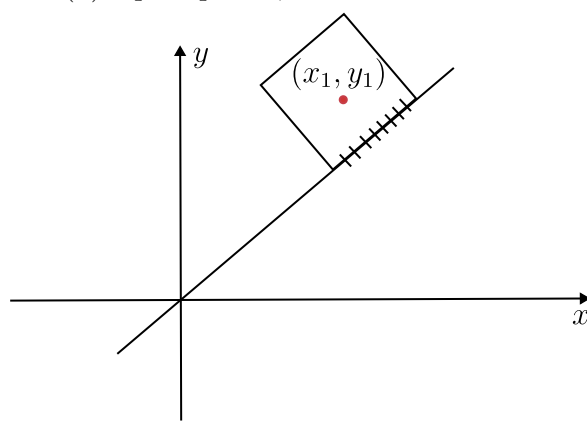
(a) Пример 5.10,  $k \neq 0$



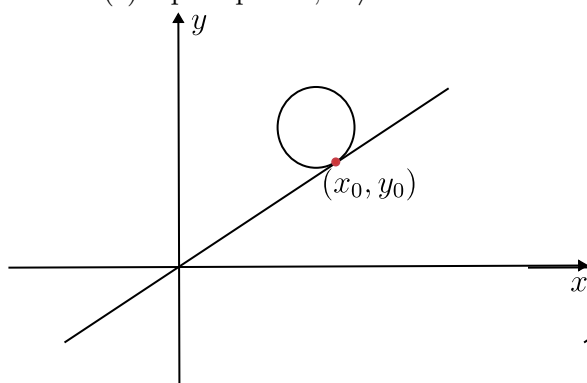
(b) Пример 5.10,  $k = 0$



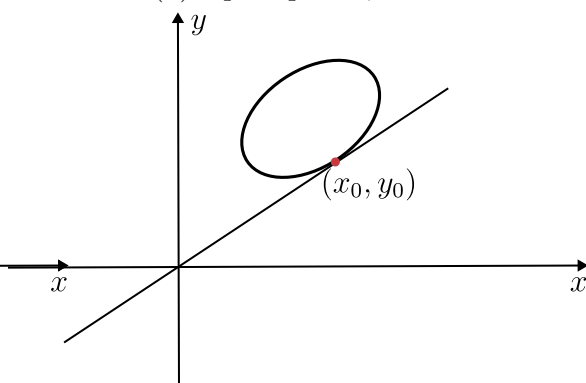
(c) Пример 5.11,  $k \neq \pm 1$



(d) Пример 5.11,  $k = 1$



(e) Пример 5.12,  $l_2^2$



(f) Пример 5.12,  $1 < p < +\infty$

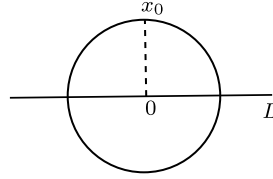


Рис. 5.2: Почти перпендикуляр

*Доказательство.*  $\dim \mathcal{P}_n = n + 1 \Rightarrow \exists p_0$  □

**Замечание 5.4.**  $\exists!$   $p_0$ , так как  $p_0(x) = 0$  только в  $n$  точках. В пространстве непрерывных функций единичный шар устроен совершенно кошмарно, хотя норма устроена похожим образом на  $l^\infty$ . В шаре полно отрезков.

## 5.7. Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром

**Лемма 5.2** (Ф.Рисс, о почти перпендикуляре).  $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$  — замкнутое подпространство,  $0 < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists x_0, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

На рисунке 5.2 показано, причём тут «почти перпендикуляр». Хотелось, чтобы  $x_0$ , был элемент на расстоянии 1, но 1 обеспечить нельзя, а  $1 - \varepsilon$  — можно.

*Доказательство.*

$$z \in X \setminus L, d = \rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\| \Rightarrow \exists y_0 \in L : d \leq \|z - y_0\| < d(1 + \varepsilon)$$

$$x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \|x_0\| = 1$$

оценим норму разности

$$\text{пусть } y \in L \quad \|x_0 - y\| = \left\| \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \left\| \underbrace{z - y_0 - y}_{\geq d} \right\| \geq \frac{d}{d(1 + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

$$\forall y \in L \Rightarrow \rho(x_0, L) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \square$$

**Замечание 5.5.** Если  $\exists y_0 \in L : \|z - y_0\| = d$ , то  $x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} \Rightarrow \rho(x_0, L) = 1$

**Следствие 5.9** (из замечания).  $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$  — подпространство,  $\dim L < +\infty$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus L, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) = 1$$

А это следствие нам понадобится несколько раз.

**Следствие 5.10.**  $(X, \|\cdot\|), \{L_n\}_{n=1}^\infty, L_n$  — замкнутые подпространства.  $L_n \subsetneq L_{n+1}, L_1 \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \in L_n, \rho(y_{n+1}, L_n) \geq \frac{1}{2}, \|y_n\| = 1$$

*Доказательство.* пусть  $y_1 \in L_1, \|y_1\| = 1, L_1 \subsetneq L_2 \xRightarrow{\text{Лемма}} \exists y_2 \in L_2, \|y_2\| = 1, \rho(y_2, L_1) \geq \frac{1}{2}$  и так далее по индукции  $\square$

**Теорема 5.13** (Ф.Рисс).  $(X, \|\cdot\|), B = \{x : \|x\| < 1\}. \bar{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$

$$\bar{B} \text{ — компакт} \Leftrightarrow \dim X < +\infty$$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  уже доказали

$\Rightarrow$

пусть  $\dim X = \infty \Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — линейно независимы

$$L_n = \text{Lin} \{x_j\}_{j=1}^n, \dim L_n = n, L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\stackrel{\text{Сл.2}}{\Rightarrow} \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \|y_n\| = 1, \rho(y_n, L_{n-1}) > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\|y_n - y_m\| > \frac{1}{2} \forall n, m \Rightarrow \nexists \text{ фундаментальной подпоследовательности} \Rightarrow$$

$$\nexists \{y_{n_k}\} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \Rightarrow \overline{B} \text{ не компакт}$$

□

Вот так нам удалось установить, что если в пространстве единичный шар — компакт, то пространство конечномерное.

**Теорема 5.14** (о продолжении линейного оператора).  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $(Y, \|\cdot\|)$  — банахово,  $L \subset X, L$  — подпространство в алгебраическом смысле

$$\overline{L} = X, A \in \mathcal{B}(L, Y) \Rightarrow \exists! V \in \mathcal{B}(X, Y) : \|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \|A\|_{\mathcal{B}(L, Y)}$$

*Доказательство.* Сначала мы должны распространить оператор, то есть определить, как он будет действовать на произвольный элемент  $X$ . Пусть  $x \in X$ . Всюду плотность означает в точности следующее:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in L, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

$$\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}, Ax_n \in Y, \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная в } Y, \|Ax_n - Ax_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Раз последовательность имеет предел, то она фундаментальная. Значит мы не зря в условии требовали банаховость.  $Y$  — банахово, тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \in Y$

$$Vx := \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$$

надо убедиться, что определение корректно, то есть что предел не зависит от изначально выбранной последовательности:

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x &\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \\ z_n \in L \quad \|Ax_n - Az_n\| &\leq \|A\| \underbrace{\|x_n - z_n\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \end{aligned}$$



корректность проверена

пусть  $x \in L$ , пусть  $x_n = x \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Vx = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax \Rightarrow V|_L = A$

$$\begin{aligned} \text{пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow Vx &= \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| &= \|x\| \quad \|Vx\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \cdot \|x_n\| = \|A\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|V\| \leq \|A\| \\ \|V\| &= \sup_{\{x \in X: \|x\|=1\}} \|Vx\| \geq \sup_{\{x \in L: \|x\|=1\}} \|Vx\| = \|A\| \\ &\Rightarrow \|V\| = \|A\| \end{aligned}$$

□

Следующая конструкция, которая ранее упоминалась, это факторпространства.

## 5.8. Факторпространство

**Определение 5.14** (класс эквивалентности).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $Y$  — подпространство.  $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$

$$\begin{aligned} x \sim z \text{ если } x - z &\in Y \\ \bar{x} &= \{z : z = x + h, h \in Y\} \\ \bar{x} + \bar{y} &= \overline{x + y} \\ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \bar{x} &= \overline{(\lambda x)} \\ \varphi : X &\rightarrow X/Y \quad \varphi(x) = \bar{x} \end{aligned}$$

$\varphi$  — линейное (канонический гомоморфизм).

Если пространство будет не замкнутым, то будут ненулевые элементы с нулевой нормой (те, что лежат в замыкании).

**Определение 5.15.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $Y$  — замкнутое подпространство.  $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$ ,

$$\|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \rho(x, Y)$$

**Теорема 5.15.**  $(X, \|\cdot\|), Y$  — замкнутое подпространство  $\Rightarrow$

1.  $\|\bar{x}\|$  в  $X/Y$  удовлетворяет аксиомам нормы
2.  $\varphi : X \rightarrow X/Y, \varphi(x) = \bar{x} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| = 1$
3. Если  $X$  — банахово, то  $X/Y$  — банахово

1.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, x \in X \\ \|\lambda \bar{x}\| &= \inf_{z \in \bar{x}} \|\lambda z\| = |\lambda| \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\| \\ \text{пусть } \bar{x}, \bar{u} \in X/Y, z \in \bar{x}, v \in \bar{u} \\ \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \|z + v\| \leq \|z\| + \|v\| \quad \forall z \in \bar{x}, \forall v \in \bar{u} \\ \Rightarrow \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| + \inf_{v \in \bar{u}} \|v\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{u}\| \end{aligned}$$

теперь проверяем в 0, тут как раз нужна замкнутость

$$\|\bar{x}\| = 0 \quad \|\bar{x}\| = \rho(x, Y) = 0 \Rightarrow x \in Y \Rightarrow \bar{x} = Y = \bar{0}$$

□

2.  $\|\varphi(x)\| = \|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| \leq \|x\| \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| \leq 1$ . По лемме о почти перпендикулярности, пусть  $\varepsilon > 0 \exists x_0, \|x_0\| = 1$

$$\begin{aligned} \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon \Rightarrow \|\varphi(x_0)\| = \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon \\ \Rightarrow \|\varphi\| = \sup_{\{x: \|x\|=1\}} \|\varphi(x)\| > 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 1 \end{aligned}$$

□

3. Воспользуемся критерием полноты: если сходится ряд из норм, то сходится и сам ряд.  $X/Y$  — полное?

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{x}_n\| < +\infty \left( \stackrel{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n \text{ сходится в } X/Y \right) \\ \|\bar{x}_n\| = \inf_{z \in \bar{x}_n} \|z\| \Rightarrow \exists z_n \in \bar{x}_n : \|z_n\| \leq 2 \|\bar{x}_n\| \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < +\infty, X \text{ — банахово, и по критерию полноты} \Rightarrow \\ \exists S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, S \in X \end{aligned}$$

рассмотрим частичные суммы

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S_n = \sum_{k=1}^n z_k, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \\ \varphi(S_n) = \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} \end{cases} \quad \varphi \text{ непрерывна} \Rightarrow \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(S_n) = \varphi(S) \in X/Y \\ & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} \Rightarrow X/Y \text{ — банахово} \end{aligned}$$

□

## Часть III

# Гильбертовы пространства

## Глава 6

# Гильбертовы пространства

### 6.1. Введение

Кто-то говорил, что матобесам в курсе ФА надо читать только гильбертовы пространства. Но неизвестно, как жить без трех китов функционального анализа, которые нас ждут дальше :(. А вы бы хотели 32 лекции про гильбертовы пространства?

**Определение 6.1.**  $H$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ . Скалярное произведение  $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x, y \in H$ ,  $(x, y)$  — скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам

1.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in H$
2.  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
3.  $(y, x) = \overline{(x, y)}$  (комплексное сопряжение)
4.  $(x, x) \geq 0$ ,  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

если  $H$  над  $\mathbb{R}$ , то 3 выглядит как  $(y, x) = (x, y)$

Снабдим  $H$  нормой:  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  — норма, порожденная скалярным произведением.  $(H, \|\cdot\|)$  называется предгильбертовым пространством.

Если  $(H, \|\cdot\|)$  полное, то  $H$  — гильбертово.

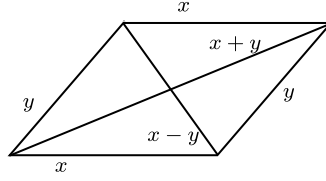


Рис. 6.1: Тождество параллелограмма

**Свойство 6.1** (скалярное произведение). 1.  $x, y \in H \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  (неравенство К-Б)

2.  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  удовлетворяет аксиомам нормы

3.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  (тождество параллелограмма)

4. непрерывность  $(x, y)$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$

2.

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\|^2 &= (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \bar{\lambda} (x, x) = |\lambda|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Кто не верит в тождество параллелограмма, может проверить сам

4.

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &\leq |(x, y) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x_n, y_n)| = \\ &= |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \\ &\leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y - y_n\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\leq M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \|y\| \Rightarrow \exists M : \|y_n\| \leq M$$

□

**Пример 6.1.**

$$l_n^2 = \{x : x = \{x_1, \dots, x_n\}, x_j \in \mathbb{C}\}, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, l_n^2 \text{ — гильбертово}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n), y_j \in \mathbb{C}, \overline{y_j} \text{ — комплексное сопряжение}$$

**Пример 6.2** ( $l^2$ ).  $l^2 = \{x : x = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2} < +\infty\}$ .  
 $(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \overline{y_j}$ .  $l^2$  — гильбертово

Главый пример

**Пример 6.3.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $L^2(X, \mu)$ ,

$$\|f\| = \left( \int_X |f(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$(f, g) = \int_X f(x) \cdot \overline{g(x)} d\mu, L^2(X, \mu) \text{ — полное, } \Rightarrow \text{ гильбертово}$$

**Пример 6.4** (пространство Харди).  $H^2$  — пространство Харди

$$H^2 = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

$H^2$  линейно изометрически изоморфно  $l^2$ .

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \Rightarrow H^2 \text{ гильбертово}$$

Отметим, где  $f$  будет аналитической

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \\ &\Rightarrow R \geq 1 \end{aligned}$$

где  $R$  — радиус круга сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, f \in H^2 \Rightarrow f \text{ аналитическая в } \{z : |z| < 1\}$$

Теперь примеры предгильбертовых пространств

**Пример 6.5.**  $F$  — финитные последовательности.

$(x, y) \in F, (x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$  (конечная сумма  $F \subset l^2, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}, x_{N+k} = 0 \ k \in \mathbb{N}$ ).  $F$  — предгильбертово (не полное)

**Пример 6.6.**  $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}\}$

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, (f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

не полное  $\Rightarrow$  предгильбертово

**Пример 6.7.**  $\mathcal{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{C}, n \geq 0\}$ .

$q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k, (p, q) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{b_k}$  предгильбертово.  $\mathcal{P}$  — линейно изометрически изоморфно  $F : p(x) \rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n) \in F$ . Пополнение  $\mathcal{P}$  по этой норме до гильбертова пространства есть  $l^2$ .

**Пример 6.8.**  $\mathcal{P}, \mathcal{P} \subset C[a, b]. (p, q) = \int_a^b p(x) \overline{q(x)} dx$  — предгильбертово, пополнением  $\mathcal{P}$  будет  $L^2(a, b)$  по мере Лебега.

**Определение 6.2.**  $H$  — гильбертово,

1.  $x, y \in H, (x, y) = 0$ , то  $x \perp y$  ( $x$  ортогонален  $y$ )
2.  $M \subset H, M$  — подмножество. Ортогональным дополнением к нему будем называть

$$M^{\perp} = \{y \in H : (y, x) = 0 \ \forall x \in M\}$$

**Свойство 6.2.**  $M \subset H$  — гильбертово  $\Rightarrow M^{\perp}$  — замкнутое подпространство

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} & y, z \in M^{\perp}, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ пусть } x \in M \\ & (\lambda y + z, x) = \lambda \underbrace{(y, x)}_{=0} + \underbrace{(z, x)}_{=0} \Rightarrow \lambda y + z \in M^{\perp} \\ & \text{пусть } \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in M^{\perp}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \text{ пусть } x \in M \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(y_n, x)}_{=0} = (y_0, x) \Rightarrow (y_0, x) = 0 \Rightarrow y_0 \in M^{\perp} \end{aligned}$$

□



В гильбертовом пространстве всегда существует элемент наилучшего приближения, он ещё и единственный!

**Теорема 6.1** (о существовании элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве).  $H$  — гильбертово,  $M \subset H$ ,  $M$  — замкнутое подпространство,  $\forall x \in H \Rightarrow \exists ! z \in M : \|x - z\| = \min_{h \in M} \|x - h\| = \rho(x, M)$

Для произвольного метрического пространства мы доказывали, что если есть конечномерное подпространство, то элемент существует. Доказательство начнём с простой леммы.

**Лемма 6.1.**  $H$  — гильбертово, замкнутое подпространство  $M \subset H$ .  $x \in H \setminus M$ ,  $u, v \in M$ ,  $d = \inf_{h \in M} \|x - h\|$

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

*Доказательство.* Применим тождество параллелограмма к  $(u - x)$ ,  $(v - x)$

$$\|u - v\|^2 + \|u + v - 2x\|^2 = 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2)$$

тут 3 слагаемых из 4 участвуют в формулировке леммы, нужно оценить только второе слагаемое.

$$\|2x - u - v\| = 2 \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\| \geq 2d$$

$$\frac{u + v}{2} \in M \Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

□

*Доказательство.* Обозначим  $d = \rho(x, M)$ . Мы ещё не знаем, достигается ли расстояние, но знаем, что  $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in M. \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$ . План такой: мы докажем, что последовательность фундаментальная, значит, предел лежит в  $M$  и всё доказано.

воспользуемся леммой и устремим в получившемся неравенстве  $n, m$  к  $\infty$

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &\stackrel{\text{лемма}}{\leq} 2(\underbrace{\|x - y_n\|^2}_{d^2} + \underbrace{\|x - y_m\|^2}_{d^2}) - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^\infty &\text{ — фундаментальная, } H \text{ — гильбертово} \Rightarrow \\ &\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z, z \in M, \text{ т.к. } M \text{ замкнуто} \Rightarrow \\ &d = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - z\| \end{aligned}$$

теперь проверим единственность

$$\text{пусть } \|x - z\| = d, \|x - u\| = d \quad z, u \in M$$

воспользуемся ещё раз леммой

$$\Rightarrow \|z - u\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x - z\|^2}_{=d^2} + \underbrace{\|x - u\|^2}_{=d^2}) - 4d^2 = 0 \Rightarrow z = u$$

□

**Теорема 6.2** (о проекции на подпространство).  $H$  — гильбертово,  $M \subset H$ ,  $M$  — замкнутое подпространство

$$\forall x \in H \exists ! z, w : x = z + w, z \in M, w \in M^\perp$$

Этот элемент  $z$  как раз будет ближайшим элементом, который появился в предыдущей теореме.

*Доказательство.*

$$d := \rho(x, M) \quad \exists z \in M \quad \|x - z\| = d \quad w := x - z$$

проверим, что  $w \perp M$ ; будем пользоваться тем, что для любой точки расстояние до  $M$  больше или равно  $d$

$$\begin{aligned} &\text{пусть } u \in M, u \neq 0 \forall t \in \mathbb{R} \quad z + tu \in M \\ d^2 &\leq \|x - (z + tu)\|^2 = \|w - tu\|^2 = (w - tu, w - tu) = \underbrace{\|w\|^2}_{=d^2} - t(u, w) - t(w, u) + t^2 \|u\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

так как 2 и 3 слагаемое комплексно сопряжённые

$$t \cdot 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t^2 \|u\|^2$$

неравенство верно для любого вещественного  $t$

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } t > 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t \|u\|^2 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \leq 0 \\ \text{пусть } t < 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \geq t \|u\|^2 \quad \forall t < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) = 0$$

$$\text{аналогично } \forall t \in \mathbb{R} \quad d^2 \leq \|x - (z + itu)\|^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(u, w) = 0$$

$$\Rightarrow (u, w) = 0, \text{ то есть } w \perp M \Rightarrow w \in M^\perp$$

осталось проверить единственность

$$\begin{aligned} \text{пусть } x = z + w, x = z_1 + w_1 \quad z, z_1 \in M, w, w_1 \in M^\perp \\ \Rightarrow u = \underbrace{z - z_1}_{\in M} = \underbrace{w_1 - w}_{\in M^\perp} \Rightarrow u \perp u \Rightarrow (u, u) = 0 \\ \Rightarrow u = 0 \Rightarrow z = z_1, w = w_1 \end{aligned}$$

□

**Определение 6.3.**  $H$  — гильбертово,  $X, Y$  — замкнутые подпространства.  $H = X \oplus Y$ .  $H$  — ортогональная сумма подпространств  $X$  и  $Y$ , если

1.  $\forall h \in H \exists x \in X, y \in Y : h = x + y$
2.  $\forall x \in X, y \in Y (x, y) = 0$

**Замечание 6.1.**

$X, Y$  — подпространства в  $H$ ,  $X \perp Y$ , то есть  $\forall x \in X, \forall y \in Y (x, y) = 0 \Rightarrow X \cap Y = \{0\}$ .

*Доказательство.*  $u \in X \cap Y \Rightarrow u \perp u \Rightarrow u = 0$

□

**Замечание 6.2.** Если  $H = X \oplus Y$ , то  $\forall h \in H \exists !x \in X, \exists !y \in Y$  т.ч.  $h = x + y$

*Доказательство.* Пусть  $h = x + y, h = x_1 + y_1, x, x_1 \in X, y, y_1 \in Y \Rightarrow$   
 $\underbrace{x - x_1}_{\in X} = \underbrace{y_1 - y}_{\in Y} \xrightarrow{\text{Зам.1}} x = x_1, y = y_1$

□

- Следствие 6.1.** 1.  $M$  — замкнутое подпространство  $\Rightarrow H = M \oplus M^\perp$
2.  $M$  — замкнутое подпространство  $\Rightarrow (M^\perp)^\perp = M$
3. Если  $H = X \oplus Y$ ,  $X, Y$  — замкнутые  $\Rightarrow Y = X^\perp$

**Определение 6.4** (оператор ортогонального проектирования).  $H$  — гильбертово,  $M$  — замкнутое подпространство. Знаем, что  $\forall h \in H \exists ! z \in M, w \in M^\perp : h = z + w$

$$P_M(h) := z$$

$P_M$  — оператор ортогонального проектирования на  $M$ .

Хоть в определении об этом нигде не сказано, но хорошо помнить, что  $\|h - z\| = \min_{y \in M} \|h - y\|$ . На экзамене часто пристают с вопросом, откуда же взять этот  $z$ .  $w = P_{M^\perp}(h)$ .

**Теорема 6.3** (критерий принадлежности оператора множеству ортогональных проекторов). Теорема будет состоять из 2 частей. Первая полегче, в ней опишем простые свойства ортогонального проектора. Вторая посложнее, и в ней будет собственно критерий.

1.  $M$  — замкнутое подпространство,  $P := P_M \Rightarrow$
- a)  $P \in \mathcal{B}(H)$
  - b)  $P^2 = P$
  - c)  $(Px, y) = (x, Py), \forall x, y \in H$  (по секрету, это самосопряжённость)
2. пусть оператор  $P$  удовлетворяет свойствам 1–3  $\Rightarrow M := P(H), M$  — замкнутое,  $P = P_M$

*1 часть.* 1. Сначала проверим, что  $P_M \in \text{Lin}(H, M)$

$$h \in H \Rightarrow \exists ! z \in M, w \in M^\perp \quad h = z + w$$

утверждается, что  $P(h) = z$

$$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha h = \alpha z + \alpha w \quad \alpha z \in M, \alpha w \in M^\perp$$

по единственности разложения  $\alpha z \Rightarrow$

$$P(\alpha h) = \alpha z$$

$$\text{пусть } h_1 \in H \Rightarrow h_1 = z_1 + w_1 \quad z_1 \in M, w_1 \in M^\perp$$

$$P(h_1) = z_1 \Rightarrow h + h_1 = \underbrace{(z + z_1) + (w + w_1)}_{\text{разложение единственно}} \quad z + z_1 \in M, w + w_1 \in M^\perp$$

$$\Rightarrow P(h + h_1) = z + z_1 = P(h) + P(h_1)$$

Теперь проверим непрерывность  $P$

$$h = z + w, \quad z \perp w \Rightarrow (h, h) = (z, z) + (w, w)$$

$$\|h\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$$

$$z = P(h) \Rightarrow \|P(h)\|^2 \leq \|h\|^2 \Rightarrow P \in \mathcal{B}(H)$$

$$\|P\| \leq 1$$

$$\text{если } M \neq \{0\}, \exists x \in M, x \neq 0 \Rightarrow Px = x \Rightarrow \|P\| \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1$$

$$\Rightarrow \|P\| = 1$$

$$2. \quad x \in M \Rightarrow Px = x,$$

$$\text{пусть } x \notin M, y = Px \Rightarrow y \in M \Rightarrow \underbrace{Py}_{=y=Px} = P(Px) \Rightarrow P^2x = Px$$

3.

$$x, y \in H, P = P_M, Q = P_{M^\perp}$$

$$x = Px + Qx, y = Py + Qy$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) = (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

□

2 часть.  $P \in \mathcal{B}(H), M := P(H), M$  — подпространство в алгебраическом смысле. План такой: проверим, что  $P$  совпадает с ортогональным проектором на  $M$  и что он отправляет ортогональное дополнение в 0. Проверим, что если  $x \in M$ , то  $Px = x$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } x \in M \Rightarrow \exists y \in H : Py = x \Rightarrow P(Py) = Px \\ \text{по свойству ортогонального оператора } P^2 = P \Rightarrow P(Py) = Py = x \end{array} \right\} \Rightarrow x = Px$$

Проверим теперь замкнутость  $M$

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = Px_0 \\ Px_n = x_n &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = Px_0 \Rightarrow x_0 = Px_0 \Rightarrow x_0 \in P(H) = M \end{aligned}$$

осталось убедиться, что оператор  $P$  отправляет в 0 ортогональное дополнение

$$\text{пусть } y \in M^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \|Py\|^2 &= (Py, Py) \stackrel{\text{самосопряжённость}}{=} (y, P(Py)) = (y, Py) \text{ т.к. } y \in M^{\perp}, Py \in M = 0 \\ &\Rightarrow Py = 0 \end{aligned}$$

□

Мы знаем, что оператор совпадает на  $M$ , а ортогональное дополнение отправляет в 0

$$\begin{aligned} h \in H &\Rightarrow h = z + w, z \in M, w \in M^{\perp} \\ &\Rightarrow P(z + w) = z \\ &P_M(z + w) = z \\ &\Rightarrow P = P_M \end{aligned}$$

**Следствие 6.2** (ортогональный оператор на конечномерное подпространство).  $H$  — гильбертово, подпространство  $M \subset H$ ,  $\dim M = n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \{e_j\}_{j=1}^n &\text{ — ортонормированный базис} \\ (e_j, e_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}, x \in H, P_M(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \end{aligned}$$

*Доказательство.*  $s_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, s_n \in M, w := x - s_n$ . Проверим, что  $w \in M^{\perp}$ . Для этого проверим, что он ортогонален всем  $e_j$

$$\begin{aligned} (s_n, e_k) &= \left( \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, e_k \right) = (x, e_k) \\ &\Rightarrow (x - s_n, e_k) = 0 \Rightarrow (w, e_k) = 0 \forall k, 1 \leq k \leq n \\ &\Rightarrow w \perp M, \Rightarrow w \in M^{\perp} \Rightarrow P_M(x - s_n) = 0 \Rightarrow P_M(x) = P(s_n) = s_n \end{aligned}$$

□

**Следствие 6.3** (критерий полноты системы элементов в гильбертовом пространстве).  $H$  — гильбертово,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}, x_\alpha \in H$  ( $A$  — множество индексов)

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} &\Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = H \\ L &= \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}} \\ L = H &\Leftrightarrow L^\perp = \{0\} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0) \end{aligned}$$

□

Несмотря на то, что доказательство тривиальное, этот критерий полноты очень полезен.

Упражнения, которые когда-то давали в качестве задачи на 5 на экзамене

**Утверждение 6.1.**  $l^2, l = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$ .  
Нужно доказать, что  $L$  — плотно в  $l^2$

**Утверждение 6.2.**  $z \in \mathbb{C}, |z| < 1, x_z = \{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\} \in l^2$ .  
 $\{z_n\}_{n=1}^\infty, |z_n| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  Нужно доказать, что  $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$  — плотное семейство в  $l^2$

**Утверждение 6.3.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, |a| < 1$ . Нужно доказать, что  $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$  — плотное семейство в  $l^2$

То, что  $|a| < 1$  — очень важно. При равенстве утверждения неверны.

**Определение 6.5** (коэффициент Фурье).  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ортонормированная система

$$(e_j, e_k) = 0 \text{ при } j \neq k$$

$$(e_k, e_k) = 1, \|e_k\| = 1$$

$$M_n = \{\alpha e_n | \alpha \in \mathbb{C}\}, \dim M_n = 1, P_{M_n}$$

$$x \in H, P_{M_n}(x) = (x, e_n)e_n$$

$$(x, e_n) \text{ — коэффициент Фурье}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n \text{ ряд Фурье по системе } \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$$

**Определение 6.6.**

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ортогональная система (ОС)

$$(e_j, e_k) = 0, j \neq k, e_n \neq 0$$

$$M_n = \{\alpha e_n : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$P_{M_n}(x) = \left( x, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right), \frac{e_n}{\|e_n\|} = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n$$

коэффициент Фурье по системе  $\{e_n\}$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n$$

Когда мы пишем  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ , мы подразумеваем бесконечномерность пространства. Если же вы возьмёте книжку Колмогорова, то гильбертово пространство в ней по определению бесконечномерное. Однако И.В. решил убрать это условие в своём курсе, ведь есть теория конечномерных банаховых пространств, где переходят к пределу и получают утверждения про бесконечномерные пространства. В общем: если вам попадётся кровожадный помощник на экзамене и вы скажете, что гильбертово пространство бесконечномерное, он спросит: «С какой стати?». Если не скажете — то вы услышите, что даже не знаете определение, и вы в любом случае получите 2.



**Следствие 6.4** (неравенство Бесселя).  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — О.Н.С.,  $x \in H \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \alpha_j \in \mathbb{C} \Rightarrow \\ \|h\|^2 &= \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \\ L_n &= \mathcal{L} \{e_j\}_{j=1}^n, P_{L_n}(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \\ \|P_{L_n}\| &\leq 1 \Rightarrow \|P_{L_n}(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

Сейчас выясним, когда неравенство превращается в равенство, то есть когда можно узнать норму, вычислив эту сумму.

**Теорема 6.4** (о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье).  $H$  — гильбертово,  $x \in H, \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — О.Н.С., тогда следующие условия равносильны

1.  $x \in \overline{\mathcal{L} \{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$
2.  $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$
3.  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$  (равенство Парсеваля)

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$

По виду первое утверждение куда более слабое, чем второе. В первом

можно приблизить элемент сколько угодно хорошо какими-то элементами. Во втором же есть сходимость к какому-то ряду.

$$x \in H, x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}, \text{ пусть } \varepsilon > 0$$

$$\exists y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_n = \mathcal{L}\{e_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \rho(x, L_n) < \varepsilon \quad P_{L_n}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j}_{:= S_n}$$

$$\Rightarrow \|x - S_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon \quad L_n \subset L_{n+1} \Rightarrow$$

$$\|x - S_{n+1}\| \leq \|x - S_n\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall m \geq n \quad \|x - S_m\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x$$

$$2 \Rightarrow 1 \text{ очевидно: } x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}}$$

$$2 \Rightarrow 3$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \text{ и по непрерывности скалярного произведения } \Rightarrow (x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, S_n) \Leftrightarrow$$

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

$$3 \Rightarrow 2$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \|x\|^2$$

$$w_n := x - S_n, \quad w_n \perp S_n \Rightarrow \|x\|^2 = \underbrace{\|S_n\|^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|^2} + \|w_n\|^2$$

$$\|S_n\|^2 = \sigma_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - S_n\| = 0$$

□

**Следствие 6.5.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — полная О.Н.С

$\Rightarrow$

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

Доказывать нечего, принадлежность линейной оболочке означает полноту.

**Определение 6.7.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис (Шаудера), если

$$\forall x \in X \exists! \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \alpha_n \in \mathbb{C} : x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$$

**Пример 6.9.**  $l^p, 1 \leq p < +\infty, e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$

$$x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n, \|x - S_n\|_{l^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$c_0, x \in c_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \quad \|x - S_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Упражнение:  $c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\} \subset l^\infty$ . Что тут будет базисом?

**Замечание 6.3.** Если в  $(X, \|\cdot\|)$  есть базис, то  $X$  — сепарабельно.

**Замечание 6.4** (Проблема Банаха, проблема базиса).

$X$  — нормированное сепарабельное  $\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists$  базис

Собирались товарищи во Львове в кафе и выводили эти проблемы. Обычно математики любят сидеть в тишине, нот вот Банах любил сидеть в кафе. Вероятно, они там не только чай гоняли. Пер Энфлю в 1973 году дал ответ на этот вопрос: нет. Он предоставил множество контр-примеров. Да и вообще он знаменит своими контр-примерами. Сейчас в Америке где-то работает.

**Следствие 6.6.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полная О.Н.С.  $\Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис в  $H$

*Доказательство.*

$$x \in H \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

проверяем единственность: пусть  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \alpha_n \in \mathbb{C}$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n, e_k) = (x, e_k)$$

$$\text{пусть } n \geq k \Rightarrow (\sigma_n, e_k) = \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = (x, e_k)$$

□

**Теорема 6.5** (о существовании О.Н.Б. в сепарабельном гильбертовом пространстве).  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство  $\Rightarrow$

$$\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б.}$$

По секрету, если убрать сепарабельность, то базис будет несчётный. Какова размерность, такой и базис. Обычно, когда говорят о гильбертовом пространстве, подразумевают гильбертово сепарабельное.

*Доказательство.* Будем действовать в 2 этапа. Сепарабельность означает, что есть счётное всюду плотное множество, возьмём его:  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . 1 этап: по индукции выберем из него линейно независимую систему так, чтобы замыкание её линейной оболочки совпадало с замыканием линейной оболочки  $x_n$ . Она будет полной и линейно-независимой. 2 этап: применим к ней ортогонализацию Грама-Шмидта (а он ученик Гильберта, кстати).

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n_1-1} = 0, x_{n_1} \neq 0 \quad z_1 = x_{n_1}$$

$$L_1 = \mathcal{L}(z_1) = \{\alpha z_1 | \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2-1} \in L_1, x_{n_2} \notin L_1, z_2 = x_{n_2}, L_2 = \mathcal{L}(z_1, z_2)$$

пусть выбрали  $z_1, \dots, z_m$

$$z_m = x_{n_m}, x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, x_{n_{m+1}} \notin L_m$$

$$z_{m+1} = x_{n_{m+1}}$$

как мы их выбираем?

$$\begin{aligned} \{z_j\}_{j=1}^{\infty} & \text{ — линейно независимы} \\ \mathcal{L}(z_j)_{j=1}^m = \mathcal{L}\{x_k\}_{k=1}^{n_m} \quad \forall m \Rightarrow \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \Rightarrow H = \overline{\mathcal{L}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}} \Rightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — полная} \end{aligned}$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} e_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|}, \text{ пусть } e_1, \dots, e_{n-1} & \text{ — выбрали } \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{n-1} = \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{n-1} \\ L_n = \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^n, L_n \subsetneq L_{n+1} \quad e_n = \frac{z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} &= \frac{z_n - \sum_{j=1}^{n-1} (z_n, e_j) e_j}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} \Rightarrow \end{aligned}$$

$e_n$  так выбрали такими, потому что они всегда будут лежать в ортогональном дополнении  $L_{n-1}$  по теореме о проекции на подпространство

$$\begin{aligned} \{e_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — полная О.Н.С.} \Rightarrow \\ \{e_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — базис (Шаудера)} \end{aligned}$$

□

Теперь докажем, что все сепарабельные линейные пространства похожи друг на друга как две капли воды: не просто линейно изоморфны, а линейно изометрически изоморфно. Для конечномерных тоже верно, нужно только рассматривать пространства одинаковой размерности.

**Теорема.** Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства линейно изометрически изоморфны друг другу

*Доказательство.*  $H$  — гильбертово сепарабельное,  $\dim H = \infty$ . Мы обсуждали, что линейный изоморфизм — отношение эквивалентности, отношение изометричности — тоже. Поэтому линейный изометрический изоморфизм есть отношение эквивалентности. Поэтому вместо того, чтобы брать  $H_1, H_2$ , возьмём  $H$  и  $l^2$  и покажем, что они линейно изометрически изоморфны.

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — О.Н.Б. в } H \\ \varphi : H \rightarrow l^2 \quad x \in H \quad x \mapsto \{(x, f_n)\}_{n=1}^{\infty} \\ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, f_n)|^2 \Rightarrow \|x\|_H = \|\varphi(x)\|_{l^2} \\ \varphi \in \text{Lin}(H, l^2) \text{ очевидно} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(H, l^2) \\ \varphi & \text{ — инъективен} \end{aligned}$$

проверим, что  $\varphi$  — сюръекция

$$\begin{aligned} & \text{пусть } y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \\ & S_n = \sum_{k=1}^n y_k f_k, S_n \in H, \text{ пусть } m > n \\ & \|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |y_k|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{S_n\} \text{ — фундаментальная} \\ & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s, s = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f_k \Rightarrow \varphi(s) = y \end{aligned}$$

□

**Замечание 6.5.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $H$  — гильбертово пространство,  $\dim H = m \Rightarrow H$  — линейно изометрически изоморфно  $l_m^2$ .

## 6.2. Пространство, сопряжённое к гильбертову

Опишем все непрерывные функционалы в гильбертовом пространстве  $H$ .

**Теорема** (Ф.Рисс, общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве).  $H$  — гильбертово. Опишем набор линейных функционалов: покажем, что он непрерывный. Вторая часть будет утверждать, что других нет.

1.  $y \in H, y$  — фиксирован. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} f_y : H &\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, y) \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H \end{aligned}$$

2.  $f \in H^* \Rightarrow \exists ! y \in H : f = f_y$ , то есть  $f(x) = (x, y) \quad \forall x \in H$

1 часть.

$f_y \in \text{Lin}(H, \mathbb{C})$  — очевидно из свойств скалярного произведения

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &= |(x, y)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} \leq \|y\|_H \end{aligned}$$

проведём тривиальное отбрасывание тривиальных случаев

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow f_y = 0 \quad \|f_y\| = 0 \\ \text{пусть } y \neq 0 \quad \|f_y\| &= \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|f_y(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\| \\ &\Rightarrow \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H \end{aligned}$$

□

2 часть. Намёк, откуда брать  $y$ : мы знаем, что  $f_y(x) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \{y\}^\perp$ . Сначала рассмотрим и отбросим тривиальный случай: пусть  $f(x) = 0$ , то есть  $f(x) = 0 \forall x \in H \Rightarrow$  пусть  $y = 0, f = f_0$ .

Теперь пусть  $f \neq 0, N = \text{Ker } f$  ( $N = f^{-1}(0)$ )  $\Rightarrow N \subsetneq H, f$  — непрерывный  $\Rightarrow N$  — замкнутое подпространство. Значит, существует нетривиальное ортогональное дополнение  $N^\perp$ , то есть  $N^\perp \neq \{0\}$ , пусть  $x_0 \in N^\perp, x_0 \neq 0$

$$v = \frac{x_0}{f(x_0)}, f(x_0) \neq 0, f(v) = \frac{1}{f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1$$

установим следующую вещь:  $\dim N^\perp = 1$ , то есть все элементы дополнения кратны  $v$ ; вообще, это очевидно, гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма, помните такую скороговорку из алгебры? Но сейчас докажем аккуратно

$$\begin{aligned} \text{пусть } u \in N^\perp \quad \alpha := f(u) \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \\ \Rightarrow f(u - \alpha v) = 0 \Rightarrow u - \alpha v \in N \\ \left. \begin{aligned} u, v \in N^\perp \Rightarrow u - \alpha v \in N^\perp \end{aligned} \right\} \Rightarrow u - \alpha v = 0 \Rightarrow u = \alpha v \end{aligned}$$

$\forall u \in N^\perp$  мы знаем 2 вещи:  $f(u) = \alpha \Rightarrow u = \alpha v$  и  $u = \alpha v \Rightarrow f(u) = \alpha$ ;  $v$  уже почти то, что нам надо, но мы его еще должны нормировать, чтобы не отправлять те же элементы в 0, что и  $f$ ; найдём  $\beta : f_{\beta v}(v) = 1 = f(v)$

$$f_{\beta v}(v) = (v, \beta v) = \bar{\beta} \|v\|^2 = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\|v\|^2}$$

$$y = \frac{v}{\|v\|^2}$$

пусть  $x \in H, x = h + \alpha v, h \in N, \alpha v \in N^\perp, y \perp h$  (так как  $v \perp h$ )

$$f(x) = \underbrace{f(h)}_0 + f(\alpha v) = \alpha, f_y(x) = \underbrace{f_y(h)}_0 + f(\alpha v) = \alpha \Rightarrow f = f_y$$

Всё, что осталось проверить, это единственность:

$$\begin{aligned} f_y = f_z &\Rightarrow (x, y) = (x, z) \forall x \in H \\ &\Rightarrow (x, y - z) = 0 \forall x \in H \Rightarrow y - z = 0 \end{aligned}$$

□

**Замечание 6.6.** Рассмотрим отображение  $C : H \rightarrow H^*, C(y) = f_y$ . Во-первых, с суммой всё в порядке:  $C(y + z) = f_{y+z} = f_y + f_z = C(y) + C(z)$ . А с умножением на комплексное число уже не всё хорошо: пусть  $\alpha \in \mathbb{C}, C(\alpha y) = f_{\alpha y}, f_{\alpha y}(x) = (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y) = \bar{\alpha}f_y(x), C(\alpha y) = \bar{\alpha}C(y)$ , то есть умножение не совсем линейное. Но  $\|C(y)\|_{H^*} = \|y\|_H$ ,  $C$  — **антилинейный изометрический изоморфизм**. Удобно думать, что сопряжённое к гильбертову пространство — это оно само. Говорят:  $H^* = H$ , а имеют в виду это взаимно-однозначное соответствие  $C(H) = H^*$ . Это очень просто, но фантастически удобно: сопряжённое — это оно само, но за удобство надо платить:  $\alpha$  переходит в  $\bar{\alpha}$ .

**Пример 6.10.** Есть  $l^2, (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n, x, y \in l^2$ . Как устроены все линейные функционалы в пространстве последовательностей  $l^2$ ?  $f \in (l^2)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^2 : f(x) = (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ .

**Пример 6.11.**  $(X, \mu), L^2(X, \mu), (f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$

$$F \in (L^2(X, \mu))^* \Rightarrow \exists ! g \in L^2(X, \mu) : F(f) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

Посмотрим сейчас чуть-чуть, как эта теория применяется к классическим рядам Фурье, которые были у нас в анализе.

### 6.3. Классические ряды Фурье

Как сходятся ряды Фурье в  $L^2$  по мере Лебега?

**Пример 6.12.**

$$L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] \text{ по мере Лебега } dx, (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Для того, чтобы что-то утверждать, нам понадобится второй вариант теоремы Вейерштрасса, но доказывать мы его не будем.



**Теорема** (Вейерштрасса).  $f \in \tilde{C}_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$  ( $f \in C[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$\|f - T\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

То есть существует многочлен, который приближает нашу функцию с точностью до  $\varepsilon$ .

**Теорема 6.6.**  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$  — полная О.С. в  $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$

*Доказательство.* Будем считать, что ортогональность посчитали в анализе

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 (n \neq m)$$

$$\Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ — ортогональная система}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\pi}, \frac{\cos nx}{\pi} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ — ортонормированная система}$$

мы уже доказали (теорема 3.22), что  $C[-\pi, \pi]$  плотно в  $L^2[-\pi, \pi]$  по мере Лебега, то есть любую функцию из  $L^2$  можно приблизить сколь угодно хорошо, найдя такую функцию  $g$ , что разница интегралов будет меньше  $\varepsilon$ , но  $g$ , в отличие от  $f$ ,  $2\pi$ -периодическая

$$\exists g \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \quad \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\exists \delta > 0 : g(x) = f(x), x \in [-\pi, \pi - \delta]$$

$$\Rightarrow \tilde{C}[-\pi, \pi] \text{ плотно в } L^2[-\pi, \pi]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L^2[-\pi, \pi] \exists g \in \tilde{C}[-\pi, \pi], \|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$$

по теореме Вейерштрасса  $\exists T = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$

$$\|g - T\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|g - T\|_2 = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < (\varepsilon^2 \cdot 2\pi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f - T\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - T\|_2 < \varepsilon(1 + \sqrt{2\pi}) \Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\} \text{ — полная}$$

□

**Следствие 6.7.** Пусть  $f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$ . Коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Теперь что же значит  $f(x)$  разлагается в свой ряд Фурье?

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Rightarrow$$

$$\left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (*)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ в смысле } (*)$$

**Пример 6.13.**  $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], f \in L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], f = u + iv$

$$u, v \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\} \text{ — ОНБ}$$

**Пример 6.14.**  $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ — полная О.С.}$

$$\begin{aligned}
 (f, g) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, (e^{inx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = [[e^{ix} - 2\pi\text{-периодическая}]] \\
 &= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases} \\
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), n \neq 0 \\
 c_0 &= a_0 \\
 \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx} &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = S_n(x) \\
 \|f - S_n\|_2 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ — полная система}
 \end{aligned}$$

**Пример 6.15.**  $L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi], \{\cos nx\}_{n=0}^{+\infty}$  — полная О.С.

*Доказательство.*

$f \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ , продолжим её симметричным образом, пусть  $f(-x) = f(x), x \in (0, \pi]$   
 $f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$

у нас под интегралом в коэффициентах  $b_k$  получится нечётная функция, поэтому  $b_k$  будут равны нулю

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 \\
 \|f - S_n(f)\|_{L^2[-\pi, \pi]} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \left\| f - \left( a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

□

Прощаемся с гильбертовыми пространствами.

# **Часть IV**

## **Линейные функционалы**

## Глава 7

# Геометрический смысл линейного функционала

Линейное пространство, без нормы, без топологии, может, уже даже в алгебре доказывали такую теорему.

**Теорема 7.1.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ )

1.  $f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), f \neq 0, L = \text{Ker } f \Rightarrow$

$$\dim(X/L) = 1$$

$\text{codim } L := \dim(X/L)$  — коразмерность, не то чтобы мы будем этим пользоваться, просто сообщение по секрету

2. пусть  $L \subset X, L$  — подпространство, такое что  $\dim(X/L) = 1$ .  
1.  $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow \exists ! f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), L = \text{Ker } f, f(x_0) = 1$

Поскольку образ одномерен, это и означает, что фактор по ядру имеет такую же размерность, а образ у нас это  $\mathbb{C}$

*1 утверждение.* Пусть  $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow f(x_0) \neq 0, v = \frac{x_0}{f(x_0)} \Rightarrow f(v) = 1$

$$(X/L) = \{\bar{x}\}_{x \in X}, \bar{x} = \{x + y | y \in L\}$$

возьмём какой-то  $x \in X, \alpha := f(x), f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha$

$$\Rightarrow f(x - \alpha v) = 0 \Rightarrow x - \alpha v \in L \Rightarrow \bar{x} = \alpha \bar{v}$$

$$\Rightarrow \dim(X/L) = 1$$

□

2 утверждение.

$$(X/L) = \{\bar{x}\}_{x \in X} \dim(X/L) = 1 \Rightarrow \forall x \in X \exists \alpha \in \mathbb{C} : \bar{x} = \alpha \bar{x}_0$$

определим  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$

установили, что  $\forall x \exists \alpha \in \mathbb{C} : \bar{x} = \alpha \bar{x}_0, f(x) := \alpha \Rightarrow f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$

$$f(x_0) = 1$$

$$\text{пусть } f(x) = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \cdot \bar{x}_0 = \bar{0} = L \Rightarrow x \in L \Rightarrow$$

$$\text{Ker } f = L$$

Проверим единственность:

$$\text{пусть } g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), \text{Ker } g = L, g(x_0) = 1$$

$$\forall x \in X \ x = y + \alpha x_0 \text{ где } y \in L, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha, g(x) = \alpha$$

□

докажем теперь что-то с функционалами для нормированного пространства

**Теорема 7.2** (норма линейного функционала).  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство.  $f \in X^*, f \neq 0, L = \text{Ker } f, f(x_0) = 1 \Rightarrow \|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$

*Доказательство.*

$$L = f^{-1}(0) \Rightarrow L \text{ — замкнутое}$$

$$d = \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|$$

$$1 = f(x_0) = f(x_0 - y) \Rightarrow |f(x_0 - y)| \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y\| \ \forall y \in L$$

$$\Rightarrow 1 \leq \|f\| \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| = \|f\| \cdot d \Rightarrow \frac{1}{d} \leq \|f\|$$

Получили неравенство в одну сторону. Теперь в другую:

$$x \notin L \Rightarrow f(x) \neq 0, f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1, f(x_0) = 1 \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x}{f(x)} - x_0\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{f(x)} - x_0 = y, y \in L$$

$$\Rightarrow \frac{x}{f(x)} = x_0 - (-y) \Rightarrow \left\| \frac{x}{f(x)} \right\| = \|x_0 - (-y)\| \geq d$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{d} \cdot \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \frac{1}{d}$$

Вот и получили, что было обещано:  $\|f\| = \frac{1}{d}$

□

**Замечание 7.1.** В условиях теоремы,  $M = f^{-1}(1)$ , тогда  $M = x_0 + L$ ,  $\rho(x_0, L) = \rho(0, M)$ . Вместо того, чтобы рассматривать ядро, можно рассматривать такое «сдвинутое ядро». Подпространство  $L$  можно сдвинуть на вектор, это довольно очевидно, не будем это доказывать.

## 7.1. Продолжение линейного функционала

Новый раздел, в котором наконец появится существенная теорема, до этого были так...

Будет задан функционал с дополнительным условием, и мы будем продолжать его на всё пространство так, чтобы условие сохранилось. Нам понадобится не только анализ, но и математическая логика, в частности, лемма Цорна. Поскольку нам никто её не рассказывал, придётся провести ликбез. Нам понадобится индукция: но не обычная, ведь у нас какие-то гигантские пространства, переход от  $n$  к  $n+1$  нам ничем не поможет, нужен более хитрый трюк.

**Определение 7.1** (частично упорядоченное множество).  $\mathcal{P}$  **частично упорядоченное множество**, если  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ,  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , то есть  $a \leq b$ .  $\mathcal{R}$  — порядок, если выполнены аксиомы

1.  $\forall a \in \mathcal{P}, (a, a) \in \mathcal{R}$ , то есть  $a \leq a$  (рефлексивность)
2. если  $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$  (транзитивность)
3. если  $(a \leq b \wedge b \leq a)$ , то  $a = b$  (антисимметричность)

важно, что не для всех элементов определён порядок, а для каких-то

**Определение 7.2** (линейно упорядоченное множество).  $\mathcal{P}$  — частично упорядоченное,  $A \subset \mathcal{P}$ ,  $A$  — линейно упорядочено, если  $\forall a, b \in A, a \leq b$  или  $b \leq a$

**Определение 7.3** (верхняя грань множества).  $A \subset \mathcal{P}$ ,  $x$  — верхняя грань для  $A$ , если  $a \leq x \forall a \in A$

**Определение 7.4** (максимальный элемент множества).  $y$  — максимальный элемент в  $\mathcal{P}$ , если  $y \leq a \Rightarrow y = a$ . Максимальный в том смысле, что больше него не существует, но таких максимумов может быть хоть миллион, и они между собой не сравнимы.

**Лемма (Цорн).** Если в  $\mathcal{P}$  любое линейно упорядоченное множество имеет верхнюю грань, то в  $\mathcal{P}$  есть максимальный элемент

**Аксиома (Выбора).**  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}, B_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \exists C = \{b_\alpha : b_\alpha \in B_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Если есть алгоритм выбора элементов из множества, то пользуемся им, без этой аксиомы.

Для общего развития: Аксиома Выбора  $\Leftrightarrow$  Лемма Цорна.  
Закончили с ликбезом по теории множеств.

**Определение 7.5** (выпуклый функционал).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ ).  $p : x \rightarrow \mathbb{R}, p$  — выпуклый функционал, если

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$
2.  $p(tx) = tp(x) \forall t \geq 0$

**Замечание 7.2.**  $p$  — полунома, тогда  $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow p$  — выпуклый функционал

Считается, что весь линейный функциональный анализ стоит на трёх китах, и мы дошли до Кита №1.

**Теорема 7.3** (Хан-Банах, о продолжении линейного функционала в вещественном пространстве).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p$  — выпуклый функционал.  $L \subset X$ ,  $L$  — подпространство,  $f \in \text{Lin}(L, \mathbb{R})$ ,  $f(x) \leq p(x) \forall x \in L$  (говорят  $f$  подчинён  $p$ )

$$\exists g \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}), g(x) = f(x), x \in L \quad g(x) \leq p(x) \forall x \in X$$

Тут очень важно, что пространство вещественное, у нас будет другая теорема для комплексного. Эта теорема всё время возникает, мы ей либо по умолчанию пользуемся, либо следствиями из неё.



Доказательство будет состоять из 2 частей. Первая — естественная часть МА: покажем, что существует функционал, продлённый на одну размерность больше и который совпадает с  $f$  на подпространстве. Во второй части продлим на всё  $X$ , там нам и понадобится это логическое жульничество.

*Доказательство.*

$$f \in \text{Lin}(L, \mathbb{R}), z \in X \setminus L$$

$$L_1 = \mathcal{L}(L, z) = \{x + tz : t \in \mathbb{R}, x \in L\}$$

докажем, что  $\exists f_1 \in \text{Lin}(L_1, \mathbb{R}) : f_1|_L = f, f_1(y) \leq p(y) \forall y \in L_1$ ; мы можем распоряжаться только значением  $f_1$

$$f_1(z) = c \quad c \in \mathbb{R}, \text{ выберем «с» так, как надо}$$

$$y = x + tz \in L_1 \Rightarrow f_1(y) = f(x) + tc$$

хотим доказать  $f(x) + tc \leq p(x + tz) \forall t \in \mathbb{R}$ , напомним 2 неравенства для положительных и отрицательных  $c$  соответственно, потому что из функционала выносить можно только положительные числа

$$\begin{cases} f(x) + tc \leq p(x + tz) & t > 0 \\ f(x) - tc \leq p(x - tz) & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) & \forall t > 0 \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \leq p\left(\frac{x}{t} - z\right) & \forall t > 0 \end{cases}, \frac{x}{t} \in L \Leftrightarrow x \in L$$

$$u = \frac{x}{t}, u \in L, v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) + c \leq p(u + z) \\ f(v) - c \leq p(v - z) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(v) - p(v - z) \leq c \leq p(u + z) - f(u), u, v \in L$$

если такое  $c$  есть, все хорошо, а если нет — ужасно

$$\text{обозначим } A = \{f(v) - p(v - z) : v \in L\} \subset \mathbb{R}, B = \{p(u + z) - f(u) : u \in L\} \subset \mathbb{R}$$

проверим, что  $\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq b$ . Это и будет означать, что между этими множествами и есть какой-то элемент (из-за полноты вещественной прямой)

$$f(v) - p(v - z) \leq p(u + z) - f(u) \Leftrightarrow f(v) + f(u) \leq p(u + z) + p(v - z)$$

$$f(v) + f(u) = f(u + v) \leq [[u + v \in L]]p(u + v) \text{ [[выпуклость } p]] \leq p(u + z) + p(v - z)$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f_1(z) = c \Rightarrow f_1(y) \leq p(y) \forall y \in L_1, f_1|_L = f$$

итак, мы продолжили функционал на размерность+1, и если бы было сепарабельное или банахово пространство, мы бы ограничились обычной индукцией, увеличивая размерность на 1, и по непрерывности пришли бы к пределу, и замыкание было бы всем  $X$ . Но раз у нас всего этого нет, мы будем пользоваться леммой Цорна, которая по всем кардиналам эквивалентна трансфинитной индукции. Что же у нас тут будет частично упорядоченным множеством? Рассмотрим все возможные продолжения линейного функционала, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{P} = \{(M, h)\}$$

где  $L \subset M$  — подпространство  $X$ ,  $h \in \text{Lin}(M, \mathbb{R})$ ,  $h|_L = f$ ,  $h(x) \leq p(x) \forall x \in M$ . Докажем, что  $\exists M = X$ , то есть  $(X, h) \in \mathcal{P}$ . Раз в множестве  $\mathcal{P}$  есть максимальный элемент, то он равен  $X$ , вот такой краткий план.

Как определяется частичный порядок в  $\mathcal{P}$ ?  $(M_1, h_1) \leq (M_2, h_2)$ , если  $M_1 \subset M_2$ ,  $h_2|_{M_1} = h_1$

$\{(M_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  — линейно упорядоченное множество. Построим верхнюю грань:

$$M_0 = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha, h_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

пусть  $x \in M_0 \Rightarrow \exists \alpha \in A : x \in M_\alpha, h_0(x) := h_\alpha(x)$  и то, и другое определение требует обоснования корректности, ведь объединение подпространств не обязано быть подпространством (на вещественной плоскости: объединение 2 прямых, проходящих через 0 — непонятно, что вообще такое). Проверим, что  $M_0$  — подпространство

$$\text{пусть } x, y \in M_0 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in A : x \in M_\alpha, y \in M_\beta$$

вспоминаем про линейный порядок

$$(M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta) \text{ или } (M_\beta, h_\beta) \leq (M_\alpha, h_\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta) &\Rightarrow M_\alpha \subset M_\beta \Rightarrow x \in M_\beta \Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_\beta \\ &\Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_0 \Rightarrow M_0 \text{ подпространство} \end{aligned}$$

проверим корректность определения  $h_0$ , то есть что оно не должно зависеть от того, возьмём мы  $\alpha$  или  $\beta$

пусть  $x \in M_0$ , пусть  $x \in M_\alpha, x \in M_\beta$ , пусть  $(M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta)$  или наоборот

$$\Rightarrow h_\alpha(x) = h_\beta(x) \Rightarrow \left. \begin{aligned} h_0(x) &= h_\alpha(x) \\ h_0(x) &= h_\beta(x) \end{aligned} \right\}$$

$h_\alpha(x) = h_\beta(x)$ , потому что если выберем для  $h_0$   $h_\beta$ , то по определению  $h_\beta|_{M_\alpha} = h_\alpha$ . В итоге  $h_0$  определено корректно, одно другому не противоречит

$$h_0(x) \leq p(x) \forall x \in M_0 \text{ (очевидно)} \Rightarrow (M_0, h_0) \in \mathcal{P}$$

$$\alpha \in A \quad (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_0, h_0) \text{ — верхняя грань}$$

теперь, когда мы рассмотрели произвольное линейное упорядоченное множество и доказали, что у него есть верхняя грань, мы можем применить лемму Цорна

$$\Rightarrow \text{ в } \mathcal{P} \exists \text{ максимальный элемент } (M, h) \in \mathcal{P}$$

$$\text{ пусть } M \subsetneq X \exists z \in X \setminus M, M_1 = \text{Lin}(M, z)$$

построим как в первой части продолжение  $(M_1, f_1) \in \mathcal{P}$

$$(M, h) \leq (M_1, f_1), M \subsetneq M_1 \text{ противоречит максимальной } (M, h)$$

$$\Rightarrow M = X, (M, h) \text{ — искомое продолжение}$$

□

Прежде, чем рассказать комплексный аналог, сначала применение вещественного случая.

**Теорема 7.4** (обобщённый предел ограниченной последовательности).

$$l_{\mathbb{R}}^{\infty} = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}, \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

$$\Rightarrow \exists F \in \mathcal{B}(l^{\infty}, \mathbb{R}) = (l^{\infty})^*$$

$$\forall x \in l^{\infty} \underline{\lim} x_n \leq F(x) \leq \overline{\lim} x_n$$

в частности, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , то  $F(x) = x_0$

То есть каждой ограниченности сопоставляется число, причём это отображение линейное.

*Доказательство.*

$$x \in l^{\infty}, p(x) := \overline{\lim} x_n, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$$

откуда же берётся неравенство треугольника, которое фигурирует в выпуклости? Когда-то в детстве мы доказывали такое неравенство, оно даже в Демидовиче есть

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}x_n + \overline{\lim}y_n$$

напоминание, как это доказывается через альтернативное определение верхнего предела

$$a_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}, a_n \text{ убывают к } a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a = \overline{\lim}x_n.$$

$$b_n = \sup_{k \geq 0}\{y_{n+k}\}, b_n \text{ убывают к } b, b = \overline{\lim}y_n.$$

$$c_n = \sup_{k \geq 0}\{x_{n+k} + y_{n+k}\}, c_n \text{ убывают к } c = \overline{\lim}(x_n + y_n)$$

$$\text{пусть } k \geq 0 \quad x_{n+k} + y_{n+k} \leq a_n + b_n \quad \forall k \Rightarrow c_n \leq a_n + b_n \Rightarrow c \leq a + b$$

напоминание закончилось

Вот мы доказали, что это функционал

$$c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\}$$

$$g : c \rightarrow \mathbb{R} \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c \Rightarrow g(x) = x_0$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq p(x) := \overline{\lim}x_n$$

по теореме Хана-Банаха  $\exists F : l^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) \leq p(x)$

$$F(x) = g(x) = x_0, \text{ если } x \in c$$

$$x \in l^{\infty}, p(-x) = \overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}x_n$$

почему это так? представьте последовательность, у которой два предела: нижний — 1, верхний — 2, проотрицаем последовательность, получим пределы в -1 и -2, её верхний предел -1 это как раз нижний предел исходной последовательности

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = -\underline{\lim}x_n \Rightarrow F(x) \geq \underline{\lim}x_n$$

В формулировке обещалось  $\|F\| = 1$ . мы можем взять  $x = (1, 1, 1, \dots)$

$$F(x) = 1, \|x\|_{\infty} = 1 \Rightarrow \|F\| \geq 1$$

$$\forall x \quad |F(x)| \leq \overline{\lim}x_n \leq \sup x_n = \|x\|_{\infty} \Rightarrow \|F\| \leq 1$$

□

Хочется последнее неравенство записать в более общем случае.

**Утверждение 7.1.** 1.  $X$  — линейное,  $p(x)$  — выпуклый функционал,  $f \in \text{Lin}(X, \mathbb{R})$

$$f(x) \leq p(x) \Rightarrow f(x) \geq -p(-x)$$

2. если  $p(x)$  полунорма,  $f(x) \leq p(x) \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

*Доказательство.* 1.  $f(x) \leq p(x) \Rightarrow f(-x) \leq p(-x) \Rightarrow -f(x) \leq p(-x) \Rightarrow f(x) \geq -p(-x)$

2.  $p$  — полунорма  $\Rightarrow p(-x) = p(x) \Rightarrow -p(x) \leq f(x) \leq p(x) \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

□

Теперь, как было обещано, вариант теоремы продолжения линейного функционала для комплексного случая.

**Теорема 7.5** (Боненблуст-Собчик, продолжение линейного функционала в комплексном линейном пространстве).  $X$  над  $\mathbb{C}$ . В вещественном случае предполагали что  $p$  — выпуклый функционал, теперь предполагаем чуть большее:  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p$  — полунорма,  $L \subset X$  — подпространство,  $f \in \text{Lin}(L, \mathbb{C})$ . Второе отличие состоит в том, что мы говорим  $|f(x)| \leq p(x) \forall x \in L \Rightarrow$

$$\exists g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), g|_L = f, |g(x)| \leq p(x) \forall x \in X$$

*Доказательство.* Мы будем использовать доказательство для вещественного случая изо всех сил. Проведём овеществление  $X$ , то есть  $X$  над  $\mathbb{R}$ ,  $x, y \in X$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ax + by \in X$ , то есть забудем на какое-то время, что  $X$  над  $\mathbb{C}$ .

$$f(x) = u(x) + iv(x), u, v : L \rightarrow \mathbb{R}$$

Проверим, что  $u, v \in \text{Lin}(L, \mathbb{R})$ , а также покажем что между ними существует связь. Потом применим к  $u$  теорему Хана-Банаха, а там, глядишь, и получится то, что требовалось

$$\begin{aligned} y \in X &\Rightarrow f(y) = u(y) + iv(y) \\ \Rightarrow f(x) + f(y) &= u(x) + u(y) + i(v(x) + v(y)) \\ f(x+y) &= u(x+y) + iv(x+y) \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \quad v(x+y) = v(x) + v(y)$$

пусть  $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(ax) = u(ax) + iv(ax)$

$$\left. \begin{aligned} f(ax) &= af(x) = a(u(x) + iv(x)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(ax) = a(u(x)), v(ax) = av(x)$$

проверили, что они линейные функционалы в вещественном случае. оказывается, они еще и связаны между собой особым образом

$$\begin{aligned} f(ix) &= if(x) \\ u(ix) + iv(ix) &= i(u(x) + iv(x)) \Rightarrow v(x) = -u(ix) \end{aligned} \quad (*)$$

перед тем, как применять теорему Хана-Банаха проверим, чего меньше этот функционал

$$u(x) \leq |u(x)| \leq |f(x)| \leq p(x) \text{ при } x \in L$$

применяем теорему Хана-Банаха к  $u$

$$\exists \varphi \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}), \varphi|_L = u, \varphi(x) \leq p(x) \forall x \in X$$

на всякий случай отметим, что  $|\varphi(x)| \leq p(x)$  так как  $p$  — полунорма, вдруг пригодится. По аналогии с (\*) определим  $\psi$

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= -\varphi(ix) \Rightarrow \psi \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}) \quad x \in X \\ g(x) &:= \varphi(x) + i\psi(x), g|_L = f \Rightarrow g \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$g$  линейный в вещественном смысле. Остаётся проверить что он линейный в комплексном случае (можно вынести  $i$ ) и что он подчинён  $p$ . Проверяем, что  $g(ix) = ig(x)$

$$\begin{aligned} g(ix) &= \varphi(ix) + i(-\varphi(-x)) = \varphi(ix) + i\varphi(x) = i(\varphi(x) - i\varphi(ix)) = \\ &= i(\varphi(x) + i\psi(x)) = ig(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$ . Теперь проверяем подчинённость

$$\text{пусть } x \in X \quad g(x) \in \mathbb{C} \Rightarrow g(x) = re^{i\theta}, r \geq 0 \Rightarrow$$

такой трюк: воспользуемся линейностью  $g$

$$\begin{aligned} g(xe^{-i\theta}) &= r \\ r = g(xe^{-i\theta}) &= \varphi(xe^{-i\theta}) + i\psi(xe^{-i\theta}) \end{aligned}$$

слева у нас вещественное число, а справа комплексное, значит, комплексная часть справа равна нулю. Ещё вспоминаем, что  $p$  — полунорма, и можно вынести модуль любого числа

$$\begin{aligned} \Rightarrow r = \varphi(xe^{-i\theta}) &\leq p(xe^{-i\theta}) = |e^{-i\theta}| \cdot p(x) = p(x) \\ |g(x)| = r &\leq p(x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

□

## 7.2. Продолжение линейных функционалов в нормированном пространстве

В этой части абсолютно все равно, пространство над  $\mathbb{R}$  или же  $\mathbb{C}$

**Теорема 7.6** (Хан-Банах).  $(X, \|\cdot\|)$  над  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ .  $L \subset X$ ,  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле,  $f \in L^*(L^* = \mathcal{B}(L, \mathbb{C})) \Rightarrow$

$$\exists g \in X^*, g|_L = f, \|g\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$$

Мы уже отмечали, что при продолжении норма может только увеличиться, но в условиях этой теоремы норму же удаётся сохранить.

*Доказательство.* Если  $f = 0$ , то  $g = 0$  и так далее

$$\text{пусть } f \neq 0, M := \|f\|_{L^*}, p(x) := M \cdot \|x\|, x \in X$$

$\Rightarrow p$  — норма ( $\Rightarrow$  полунорма  $\Rightarrow$  выпуклый функционал)

$$\text{пусть } x \in L \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_{L^*} \cdot \|x\| = p(x) \text{ (условие подчинения)}$$

Теперь применяем теорему Хана-Банаха, если  $X$  над  $\mathbb{R}$ , или Боненблуста-Собчика, если  $X$  над  $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} & \exists g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}) \text{ (Lin}(X, \mathbb{R})\text{)} \\ & g|_L = f, \quad |g(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X \\ & \Rightarrow |g(x)| \leq M \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow \|g\|_{X^*} \leq M \\ & \Rightarrow \|g\|_{X^*} \leq \|f\|_{L^*} \\ & \left( \|g\|_{X^*} = \sup_{\{x \in X: \|x\| \leq 1\}} |g(x)| \geq \sup_{\{x \in L: \|x\| \leq 1\}} |f(x)| = \|f\|_{L^*} \right) \\ & \Rightarrow \|g\|_{X^*} = \|f\|_{L^*} \end{aligned}$$

□

**Следствие 7.1** (о достаточном числе линейных функционалов).  
( $X, \|\cdot\|$ ),  $x_0 \in X \Rightarrow \exists g \in X^*, \|g\| = 1, g(x_0) = \|x_0\|$ , при этом

$$\|x_0\| = \max \{h(x_0) : h \in X^*, \|h\| \leq 1\}$$

*Доказательство.* Если  $x_0 = 0$ , то  $\forall g \in X^*, \|g\| = 1 \Rightarrow g(0) = 0$  (при линейном отображении 0 переходит в 0 всегда).

Пусть  $x_0 \neq 0, L = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{C}\}$

$$\begin{aligned} & f : L \rightarrow \mathbb{C} \quad f(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\| \Rightarrow f \in \text{Lin}(L, \mathbb{C}) \\ & |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| \Rightarrow \|f\| = \sup_{\alpha \neq 0} \frac{|f(\alpha x_0)|}{\|\alpha x_0\|} = 1 \Rightarrow \|f\|_{L^*} = 1 \end{aligned}$$

по теореме Хана-Банаха для нормированного пространства

$$\begin{aligned} & \exists g \in X^*, \|g\| = 1, g|_L = f \Rightarrow g(x_0) = f(x_0) = \|x_0\| \\ & \text{пусть } h \in X^*, \|h\| \leq 1 \Rightarrow |h(x_0)| \leq \|h\| \cdot \|x_0\| \leq \|x_0\| \\ & \Rightarrow \|x_0\| \geq \sup_{\{h \in X^*: \|h\| \leq 1\}} |h(x_0)|, \text{ но } \exists g, \|g\| = 1, g(x_0) = \|x_0\| \\ & \Rightarrow \|x_0\| = \max_{\{h \in X^*: \|h\| \leq 1\}} \{h(x_0)\} \end{aligned}$$

в этом смысле и много, то есть есть такой, на котором максимум достигается □

**Замечание 7.3.**  $f \in X^* \Rightarrow \|f\| = \sup_{\{x \in X: \|x\| \leq 1\}} |f(x)|$ , то есть максимум может не достигаться



**Пример 7.1.**

$$C[-1, 1] = X, \varphi(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$G_\varphi(f) = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)dx \quad G_\varphi \in (C[-1, 1])^*$$

$$\|G_\varphi\| = \int_{-1}^1 |\varphi(x)| dx = 2$$

Мы показывали, что норма такого функционала всегда будет больше  $2 - \varepsilon \forall \varepsilon$

В качестве упражнения доказать, что  $\nexists f \in C[-1, 1], \|f\| \leq 1, |G(f)| = 2$ .

**Следствие 7.2** (расстояние от элемента до подпространства).  
( $X, \|\cdot\|$ ),  $L \subset X, L = \bar{L}$  — подпространство

$$x_0 \in X, d = \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| \Rightarrow$$

$$\exists g \in X^*, \|g\| = 1, g|_L = 0, g(x_0) = d, \text{ при этом}$$

$$d = \max \{|h(x_0)|, h \in X^*, \|h\| \leq 1, h|_L = 0\}$$

Это следствие полезно для решения экстремальных задач: от инфимума можно перейти к максимуму и решать другую задачу.

*Доказательство.* Если  $x_0 \in L$ , то  $d = 0, \exists g|_L = 0, \|g\| = 1$  (если  $L \neq X$ )

$$\text{пусть } x_0 \in X \setminus L, M = \mathcal{L}(L, x_0) = \{\alpha x_0 + y : \alpha \in \mathbb{C}, y \in L\}$$

$$f : M \rightarrow \mathbb{C}, f(\alpha x_0 + y) := \alpha \Rightarrow \forall y \in L f(y) = 0$$

$$f^{-1}(0) = L, f \in \text{Lin}(M, \mathbb{C}), f(x_0) = 1, \|f\| = \frac{1}{d}$$

это уже вычислили в геометрическом смысле линейного функционала

$$f_1 = df \Rightarrow \|f_1\|_{M^*} = 1, f_1(x_0) = d$$

по теореме Хана-Банаха для нормированного пространства

$$\exists g \in X^*, \|g\|_{X^*} = 1, g|_M = f_1 \Rightarrow g(x_0) = d, g|_L = f|_L = 0$$

это была первая часть утверждения следствия

$$\begin{aligned} & \text{пусть } h \in X^*, \|h\| \leq 1, h(y) = 0 \forall y \in L \Rightarrow \\ & |h(x_0)| = |h(x_0 - y)| \leq \|h\| \cdot \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L \Rightarrow \\ & |h(x_0)| \leq d \Rightarrow \\ & \sup\{|h(x_0)| : \|h\| \leq 1, h|_L = 0\} \leq d, \text{ но } \exists g \Rightarrow \\ & d = \max\{|h(x_0)| : \|h\| \leq 1, h|_L = 0\} \end{aligned}$$

□

**Замечание 7.4.** Следствие 1 — частный случай следствия 2 при  $L = \{0\}$ . На экзамене можно рассказать только второе следствие, отметив, что первое является его частным случаем

**Следствие 7.3** (критерий полноты системы элементом в нормированном пространстве).  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство,  $x_\alpha \in X$ ,  $A$  — множество индексов,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — полное семейство в  $X \Leftrightarrow$  если  $f \in X^*, f(x_\alpha) = 0, \alpha \in A \Rightarrow f = 0$

Критерий проверять гораздо проще, чем определение.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$$f(x_\alpha) = 0, L = \mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}, x \in L \Rightarrow$$

$$x = \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k} \Rightarrow f(x) = 0$$

пусть  $z \in X, y_n \in L \exists \{y_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z$  (полнота),  $f$  — непрерывная  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) &= f(z) \Rightarrow f(z) = 0 \\ &\Rightarrow f = 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полная} \Leftrightarrow \overline{L} = X$$

$$\text{пусть } \overline{L} \subsetneq X \Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus \overline{L} \stackrel{\text{Сл. 2}}{\Rightarrow} \exists g \in X^*$$

$$\underline{g|_{\overline{L}}} = 0 (\Rightarrow g = 0), g(x_0) = \rho(x_0, \overline{L}) \neq 0 \quad d = \rho(x_0, \overline{L})$$

$$\text{но } \underline{g(x_\alpha) = 0 \forall \alpha}, g \neq 0$$

□

Наконец, с помощью последнего следствия докажем такую теорему

**Теорема 7.7.**  $(X, \|\cdot\|)$ . Если  $X^*$  сепарабельно, то  $X$  — сепарабельно

*Доказательство.*

$\exists \{f_n\}, f_i \in X^*$  — плотная система в  $X^*$

вспомним, что  $\|f_n\| = \sup_{\{x \in X: \|x\|=1\}} |f_n(x)|$

$$\Rightarrow \exists x_n, \|x_n\| = 1 \quad \|f_n\| \geq |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$$

проверим, что  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — полная в  $X$

возьмём произвольный линейный функционал  $f$  и предположим, что он обращается в 0 на всех  $x_n$

пусть  $f \in X^*, f(x_n) = 0$

плотность  $\{f_n\} \Rightarrow \exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\| = 0$$

$$\underbrace{|(f - f_{n_k})(x_{n_k})|}_{=|f_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{1}{2} \|f_{n_k}\|} \leq \|f - f_{n_k}\| \cdot \underbrace{\|x_{n_k}\|}_{=1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\| = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\stackrel{\text{Сл.3}}{\Rightarrow} \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ — полная}$$

$$(E = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_k, c_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ — счётное всюду плотное в } X)$$

□

## Глава 8

# Принцип равномерной ограниченности

Принцип равномерной ограниченности, тут будет много теорем, они все связаны с первой, а всё вместе это второй кит линейного функционального анализа.

**Теорема 8.1** (принцип равномерной ограниченности).  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\forall x \in X \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < +\infty \Rightarrow \exists M > 0 : \|U_\alpha\| \leq M \forall \alpha \in A$$

Причём тут равномерность?

$$\begin{aligned} \|U_\alpha\| &= \sup_{\{x \in X : \|x\| \leq 1\}} \|U_\alpha x\| \\ \sup_{\alpha \in A} \sup_{\{x \in X : \|x\| \leq 1\}} \|U_\alpha x\| &< +\infty \end{aligned}$$

предполагаем для одного икса, а оказывается, что можно взять  $\sup$  по единичной сфере, а потом ещё раз взять  $\sup$ , и это фантастически полезно и в то же время странно. Начнём с простой леммы.

**Лемма 8.1.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — нормированные

$$U \in \text{Lin}(X, Y), \exists \varepsilon > 0, R > 0, a \in X :$$

$$U(B_\varepsilon(a)) \subset \overline{B_R(0)} \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\|U\| \leq \frac{2R}{\varepsilon}$$

Новизна этой простой леммы состоит в том, что не обязательно брать шар в точке 0, суть остаётся такой же, но чуть-чуть ухудшается норма.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} & \text{пусть } z \in X, \|z\| < \varepsilon, a \in B_\varepsilon(a), a + z \in B_\varepsilon(a) \\ & z = (a + z) - a \Rightarrow \|Uz\| \leq \|U(a + z)\| + \|U(a)\| \leq R + R = 2R \\ & \text{пусть } x \in X, x \neq 0, \|x\| < 1 \Rightarrow \|\varepsilon x\| < \varepsilon \Rightarrow \|U(\varepsilon x)\| \leq 2R \Rightarrow \|Ux\| \leq \frac{2R}{\varepsilon} \\ & \|U\| = \sup_{\{x \in X: \|x\| \leq 1\}} \|Ux\| \leq \frac{2R}{\varepsilon} \end{aligned}$$

□

*Доказательство теоремы.* Вспомним теорему Бэра о категориях (3.18): полное метрическое пространство нельзя представить как счётное объединение нигде не плотных множеств.

$$\begin{aligned} & n \in \mathbb{N}, D_n = \{y \in Y : \|y\| \leq n\} \\ & \Rightarrow U_\alpha^{-1}(D_n) \text{ — замкнутое множество в } X, \alpha \in A \\ & E_n = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(D_n), E_n \text{ — замкнутое} \end{aligned}$$

Проверим, что  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$$\begin{aligned} & \text{пусть } x \in X \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < +\infty \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \\ & \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < n \Rightarrow x \in U_\alpha^{-1}(D_n) \forall \alpha \in A \\ & \Rightarrow x \in E_n \\ & X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, X \text{ — банахово, } E_n \text{ — замкнутые} \Rightarrow \end{aligned}$$

по теореме Бэра о категориях

$$\begin{aligned} & \exists n_0 : \text{Int}(E_{n_0}) \neq \emptyset, \text{ то есть} \\ & \exists B_\varepsilon(a) \subset E_{n_0} = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(D_{n_0}) \Rightarrow \\ & U_\alpha(B_\varepsilon(a)) \subset D_{n_0} \text{ по лемме} \Rightarrow \|U_\alpha\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \forall \alpha \in A \end{aligned}$$

□

**Следствие 8.1** (Принцип фиксации особенности).  $X$  — банахово,  $Y$  — нормированное,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\text{пусть } \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| = +\infty \Rightarrow \exists x_0 \in X : \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha(x_0)\| = +\infty$$

Предлагается доказать следующее утверждение

**Утверждение 8.1.** В условиях следствия  $E = \{x \in X : \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| = +\infty\}$ . Доказать, что

1.  $E$  — всюду плотно в  $X$
2.  $X \setminus E$  — множество первой категории

**Определение 8.1** (сильный предел).

$$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \{U_n\}_{n=1}^\infty, U_n \in \text{Lin}(X, Y)$$

Если  $\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux$ , то  $U$  — **поточечный** (или сильный) предел  $\{U_n\}$ . Обозначение  $U = \text{s-lim } U_n$  ( $s = \text{strong}$ )

Он хоть и сильный, но куда слабее сходимости по норме.  
Отметим простые свойства:

1.  $U_n \in \text{Lin}(X, Y) \Rightarrow U \in \text{Lin}(X, Y)$
2. Если  $U_n, U \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - U_n\| = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux \quad \forall x \in X$$

(из сходимости по норме следует поточечная сходимость)

$$2. \|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|U - U_n\|}_{\rightarrow 0} \cdot \|x\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux \quad \square$$

**Замечание 8.1.**  $U = \text{s-lim } U_n \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|U - U_n\| = 0$

Пример, где поточечный предел существует и равен нулю, а предела по норме не существует

**Пример 8.1.**

$$\begin{aligned}
 X = l^1 &= \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right\} \\
 f_n : l^1 &\rightarrow \mathbb{C} \quad f_n \in (l^1)^* \quad f_n(x) = x_n, \|f_n\| = 1 \\
 x \in l^1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in l^1 \\
 0 &= s\text{-}\lim f_n, \text{ но } \|f_n - 0\| = \underbrace{\|f_n\|}_{\neq 0} = 1
 \end{aligned}$$

**Пример 8.2.**  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ортонормированный базис.

$$\begin{aligned}
 x \in H, x &= \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \\
 \Rightarrow \forall x \in H \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= x, Ix = x \quad \forall x \in H \quad (I — \text{тождественный}) \\
 &\Rightarrow I = s\text{-}\lim S_n \\
 (I - S_n)(e_{n+1}) &= I(e_{n+1}) = e_{n+1} \Rightarrow \|I - S_n\| = 1 \\
 \|I - S_n\| &\not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Несмотря на то, что сильная сходимость слабее сходимости по норме, иногда оказывается, что сильный предел является непрерывным оператором.

**Теорема 8.2.**  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|)$  — нормированное  $U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ , пусть  $U = s\text{-}\lim U_n \Rightarrow$

$$U \in \mathcal{B}(X, Y), \|U\| \leq \underline{\lim} \|U_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U_n\| < +\infty$$

*Доказательство.* Собираемся из всех сил использовать принцип равномерной ограниченности.  $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) \Rightarrow \sup_n \|U_n x\| < +\infty$ . По принципу  $\Rightarrow \sup_n \|U_n\| < +\infty$

$$\text{пусть } b = \underline{\lim} \|U_n\| \Rightarrow \exists \{U_{n_k}\} : b = \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k}\|$$

$$\text{пусть } x \in X \Rightarrow Ux = \lim_{k \rightarrow \infty} U_{n_k}(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \|Ux\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k} x\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k}\| \cdot \|x\| = b \|x\| \quad \forall x \in X \\
 &\Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y), \|U\| \leq b
 \end{aligned}$$

□

**Замечание 8.2.**  $U = \text{s-lim } U_n$ , возможно  $\|U\| < \underline{\lim} \|U_n\|$

**Пример 8.3.**  $f_n : l^1 \rightarrow \mathbb{C}, f_n(x) = x_n, 0 = \text{s-lim } f_n, \|f_n\| = 1 \forall n. \|0\| = 0$

**Теорема 8.3** (Банах-Штейнгауз, критерий существования сильного предела).  $X, Y$  — банахово,  $\{U_n\}, U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Для того чтобы существовал  $\text{s-lim } U_n$ , необходимо и достаточно

1.  $\exists M > 0 : \|U_n\| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$
2.  $\exists E \subset X, E$  полное (то есть  $\overline{\mathcal{L}(E)} = X$ ), и для него  $\{U_n x\}$  — фундаментальная для  $\forall x \in E$

Существует множество вариантов этой теоремы, и все они по-своему полезные, поэтому у нас будет очень много замечаний потом

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  пусть  $U = \text{s-lim } U_n$ , мы уже доказали, что  $\sup_n \|U_n\| < +\infty$ , а второе утверждение очевидно.

$\Leftarrow$

Пусть  $x \in \mathcal{L}(E)$ , то есть  $x = \sum_{k=1}^N c_k x_k, c_k \in \mathbb{C}, x_k \in E$ . Проверим, что для  $x \in \mathcal{L}(E)$   $U(x)$  — фундаментальная

$$\|U_n(x) - U_m(x)\| \leq \sum_{k=1}^N |c_k| \cdot \|U_n x_k - U_m x_k\| \Rightarrow \{U_n x\} \text{ — фундаментальная}$$

Пусть  $x \in X$ , проверим, что  $\{U_n x\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна

$$\begin{aligned} x \in X, \varepsilon > 0 \quad \exists z \in \mathcal{L}(E), \|x - z\| < \varepsilon \\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n, m > N \Rightarrow \|U_n z - U_m z\| < \varepsilon \\ \|U_n x - U_m x\| &\leq \underbrace{\|U_n x - U_n z\|}_{\leq \|U_n\| \cdot \|x - z\| \leq M\varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_m z\|}_{\varepsilon} + \underbrace{\|U_m z - U_m x\|}_{\leq M\varepsilon} \\ &< \varepsilon(2M + 1) \Rightarrow \{U_n x\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальна} \\ Y \text{ банахово} &\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x \forall x \in X \Rightarrow \exists U = \text{s-lim } U_n \end{aligned}$$

□

**Замечание 8.3.** 1.  $\Rightarrow X$  — банахово,  $Y$  — нормированное (чтобы доказать вправо нам хватало только этих условий)

2.  $\Leftarrow Y$  — банахово,  $X$  — нормированное (в обратную же сторону мы пользовались банаховостью  $Y$ )



3. В условии 2 теоремы можно сформулировать 2':

$$\exists E \subset X, \overline{\mathcal{L}(E)} = X, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x$$

Заплатим жестокую цену за такую теорему: раньше  $U$  не было, оно появлялось, критерий существования всё-таки, а здесь же мы предположим сразу непрерывность этого  $U$

**Теорема 8.4** (Банах-Штейнгауз).  $X$  — банахово,  $Y$  — нормированное,  $U_n \in \mathcal{B}(X, Y), U \in \mathcal{B}(X, Y)$   
 $U = s\text{-}\lim U_n \Leftrightarrow$

1.  $\sup_n \|U_n\| \leq M < +\infty$
2.  $\exists E \subset X, \overline{\mathcal{L}(E)} = X, \forall x \in E \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = U(x)$

За счёт существования и непрерывности этого  $U$  можно будет распространить условие 2 на всё  $X$ , не используя банаховость  $Y$  (от нее мы и отказались).

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  очевидно  
 $\Leftarrow$

$$\forall x \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x \text{ (очевидно)}$$

пусть  $x \in X, \varepsilon > 0 \exists z \in \mathcal{L}(E), \|x - z\| < \varepsilon, \exists N : n \geq N \Rightarrow \|Uz - U_n z\| < \varepsilon$

вот в чём разница, вместо фундаментальности оцениваем такую разность

$$\|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|Ux - Uz\|}_{\leq \|U\| \cdot \|x - z\| \leq \|U\| \varepsilon} + \underbrace{\|Uz - U_n z\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_n x\|}_{\|U_n\| \cdot \|x - z\| \leq M \varepsilon}$$

мы тут сразу пользуемся тем, что  $U$  — непрерывный оператор и у него есть норма

$$\leq \varepsilon(1 + \|U\| + M) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x = Ux \forall x \in X$$

□

Маленькая историческая байка из серии «Мифы и легенды из жизни Банаха» о встрече Банаха и Штейнгауза. Банах чудесным образом родился, никто не знает его мать, имя ему досталось от отца Стефана

его крестили и оставили (Банах — это фамилия женщины, которая заботилась о нём с трехдневного возраста). В школе Банах интересовался только математикой, но рядом не оказалось никого, кто сказал бы ему идти на математический факультет, а ведь в Варшаве был хороший университет, преподавал там ученик Гаусса. В итоге Банах закончил что-то вроде политеха, издали интересовавшись математикой. И вот, началась первая мировая война, Банаха не взяли в армию, а Штейнгауза взяли, но потом отослали обратно.

Штейнгауз как-то шёл по улице и услышал, как 2 человека на скамейке что-то обсуждают, а доносятся от них умные слова типа «мера Лебега», Штейнгауз обратился к ним: «Предмет вашей учебной беседы настолько интересен!». И начал он им навешивать всякую математическую лапшу на уши. Через несколько дней Банах решил какую-то задачку, и Штейнгауз у себя на дому устраивает встречу математиков, они даже собирались организовать вчетвером краковское математическое общество, но сам он потом уехал во Львов, перетащил туда Банаха. Банах устроился работать в какой-то из университетов и стал ликвидировать свою математическую безграмотность. Штейнгауз же потом говорил, что главный его вклад в функциональный анализ — это открытие Банаха.

## 8.1. Применение принципа равномерной ограниченности к рядам Фурье

Пусть  $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ . Волна означает  $f(-\pi) = f(\pi)$

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

$$\text{где } D_n(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \text{ — ядро Дирихле}$$

если вместо  $f$  подставить  $e^{ikx}$ , то все члены в сумме, кроме одного, занулятся из-за ортогональности такой системы

$$S_n(e^{ikx}) = e^{ikx} \text{ если } n \geq k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(e^{ikx}) = e^{ikx}$$

$$If = f, I \text{ — тождественный в } \tilde{C}[-\pi, \pi]$$

при фиксированном  $k$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(e^{ikx}) = I(e^{ikx}) = e^{ikx} \Rightarrow$$

$$\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ — полная система в } \tilde{C}[-\pi, \pi] \text{ по теореме Вейерштрасса}$$

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f), \text{ при } f = e^{ikx} \text{ или } f \in \mathcal{L}e^{ikx}_{k \in \mathbb{Z}}$$

**Теорема 8.5** (Лебег, 1906).  $\exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$  т.ч.  $S_n(f, x)$  не сходится равномерно, более того  $\sup_n \|S_n(f, x)\|_\infty = +\infty$  (Лебег, 1906)

Для доказательства будем применять следствия из принципа равномерной ограниченности. Если  $S_n$  вычислять на базисе  $e^{ikx}$ , то сходимость будет, но теорему Банаха-Штейнгауза нельзя применять, потому что нет ограниченности по норме оператора  $S_n$

*Доказательство.* Проверим, что  $\sup_n \|S_n\|_{B(\tilde{C}[-\pi, \pi])} = \infty$

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad S_n \in \text{Lin}(\tilde{C}[-\pi, \pi])$$

$$f \in \tilde{C}[-\pi, \pi], x \in [-\pi, \pi]$$

мы уже вычисляли норму интегрального оператора в пространстве непрерывных функций

$$\|S_n\| = \max_{x \in [-\pi, \pi]} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)| dt$$

цель ближайших вычислений: проверить, что при  $n \rightarrow \infty$  норма стремится к  $\infty$ . Сначала проверим, что она не зависит от  $x$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)| dt = [[\tau = x-t, d\tau = -dt]] = - \int_{x+\pi}^{x-\pi} |D_n(\tau)| d\tau =$$

$$[[D_n - 2\pi\text{-периодическая}]] = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\tau)| d\tau = [[\text{чётная}]]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{\sin(\frac{\tau}{2})} d\tau \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})\tau|}{\tau} d\tau =$$

$$[[x \geq \sin x \quad v = \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \Rightarrow \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dv}{v}]] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq$$

про половинку намеренно забыли

$$\begin{aligned}
 & [[v \in [(k-1)\pi, k\pi] \Rightarrow v \leq k\pi \Rightarrow \frac{1}{v} \geq \frac{1}{k\pi}]] \\
 & \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}_{\sigma_n} \geq \frac{2}{\pi^2} \sigma_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty \\
 & x \in [k, k+1] \Rightarrow k \leq x \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \Rightarrow \\
 & \sigma_n = 1 + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \\
 & \Rightarrow \|S_n\| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln n
 \end{aligned}$$

как используем принцип фиксации особенности? Есть последовательность операторов  $S_n$ . При фиксированном  $f$  она стремится к  $S_n(f)$ . Мы оценили снизу норму и доказали, что она стремится к бесконечности. Если норма операторов не ограничена, то в нашем банаховом пространстве непрерывных  $2\pi$ -периодических функций найдется такой элемент, на котором норма не ограничена, значит там тем более не может быть равномерной сходимости.  $\square$

**Теорема 8.6** (Дю Буа Реймонд, 1886). Пусть  $x_0 \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$  т.ч. не  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_0)$ , более того  $\sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$

*Доказательство.* Вместо линейных операторов теперь рассмотрим линейные функционалы.  $x_0$  — фиксирована,  $S_n(f, x_0)$  — линейные функционалы.  $S_n(f, x_0) : \tilde{C}[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ . Там же, где мы вычисляли норму интегрального оператора, мы вычисляли норму линейного функционала

$$\begin{aligned}
 S_n(f, x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x_0 - t) dt \\
 \text{норма функционала } \|S_n\|_{(\tilde{C}[-\pi, \pi])^*} &= \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x_0 - t)| dt \stackrel{\text{Лебег}}{=} \\
 &= \|S_n\| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln n \Rightarrow \sup_n \|S_n(f, x_0)\|_{(\tilde{C}[-\pi, \pi])^*} = +\infty
 \end{aligned}$$

по принципу фиксации особенности

$$\Rightarrow \exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] : \sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$$

□

**Замечание 8.4.** Пусть  $E \subset [-\pi, \pi]$ ,  $E$  — счётное  $\Rightarrow \exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \forall x_0 \in E \sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$

**Замечание 8.5.**  $\exists f \in L^1[-\pi, \pi] \forall x \in [-\pi, \pi]$  не  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x)$

Этот пример построил Колмогоров в 1926 году, а в 1923 построил такую функцию, у которой почти всюду не  $\exists \lim$ . Колмогоров был учеником Лузина. А он предъявил такую гипотезу

**Замечание 8.6** (Гипотеза Лузина, 1923).  $f \in L^2[-\pi, \pi] \Rightarrow S_n(f, x) \rightarrow f(x)$  почти всюду на  $[-\pi, \pi]$ .

Шведский математик Карлесон в 22 года подумал улучшить пример Колмогорова. Поехал в Америку на семинар по тригонометрическим рядам, там рассказал Зигмунду, как собирается опровергать гипотезу Лузина. А тот его всячески поощрял. Весь мир тогда считал, что гипотеза неверна.

Вот он несколько лет мучился и подумал, что функция, которую он пытается построить, не существует. Так и оказалось. На международном математическом конгрессе в 1966 Карлесон показал, что гипотеза верна. Колмогоров вышел, пожал ему руку и сказал, что это главный результат математического анализа за весь XX век.

**Лемма 8.2** (Риман-Лебег).  $f \in L^1[-\pi, \pi]$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$$

*Доказательство.* Будем думать, что  $c_n \in \text{Lin}(L^1, \mathbb{C})$  — линейный функ-

ционал. При фиксированном  $f$   $c_n$  — конкретное число

$$\begin{aligned}
 f \in L^1 \quad |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \\
 \Rightarrow c_n &\in (L^1)^*, \|c_n\|_{(L^1)^*} \leq \frac{1}{2\pi} \\
 \{\chi_{[a,b]}\} &\text{ — полное семейство в } L^1[-\pi, \pi], -\pi \leq a < b \leq \pi \\
 c_n(\chi_{[a,b]}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b]}(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-inx} dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inb} - e^{-ina}}{-in} \Rightarrow \\
 |c_n(\chi_{[a,b]})| &\leq \frac{2}{2\pi n} = \frac{1}{\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
 c_n(\chi_{[a,b]}) &\longrightarrow 0(\chi_{[a,b]}) = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

у нас есть ограниченность  $c_n$  (1) и сходимость  $c_n$  на полном множестве (2) к оператору 0, тогда по теореме Банаха-Штейнгауза ([вариант 2](#))

$$\forall f \in L^1 \quad c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

## Глава 9

# Теорема об открытом отображении

### 9.1. Обратные операторы

$X, Y$  — нормированные пространства,  $A \in \text{Lin}(X, Y)$ . Уравнение  $Ax = y$ , где  $y$  — дано,  $A$  — дан,  $x$  — неизвестное. Когда для  $\forall y \in Y \exists !x \in X$  т.ч.  $Ax = y$ ? Ответ очевиден: когда  $A$  — биекция, то есть  $\exists A^{-1}$ .

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \exists !x_n : Ax_n = y_n$$

Было бы хорошо, чтобы  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ , и ещё хорошо было бы, если  $Ax = y$ , то есть если бы  $A^{-1}$  был непрерывен. Когда же  $\exists$  непрерывный  $A^{-1}$ ? На самом деле, это вопрос, которым естественно интересоваться.

Третий кит линейного функционального анализа будет как раз касаться обратных операторов. Понятно, что самый хороший оператор, который можно представить — это тождественный, у него есть обратный, это он сам и есть. Вопрос такой: насколько можно отодвинуться от тождественного оператора, чтобы он остался обратимым?

**Теорема 9.1.**

$X$  — банахово,  $Ix = x, \forall x \in X$

пусть  $A \in \mathcal{B}(X), \|A\| < 1 \Rightarrow$

$\exists (I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ , при этом

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \quad (A^0 = I)$$

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

*Доказательство.*  $X$  — банахово  $\Rightarrow \mathcal{B}(X)$  — банахово (мы уже отмечали, что множество непрерывных операторов из  $X$  в  $Y$ , где  $Y$  банахово, тоже будет банахово). Был у нас критерий полноты, поэтому проверим, что ряд из норм сходится

$$A, B \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\Rightarrow \|A^k\| \leq \|A\|^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k =$$

как геометрическая прогрессия из чисел меньше единицы

$$= \frac{1}{1 - \|A\|}$$

есть банаховость, есть абсолютно сходящийся ряд, значит сходится и сам ряд

$$\Rightarrow \exists S = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, S \in \mathcal{B}(X)$$

заодно отметим, что мы получили такие неравенства

$$S_n = \sum_{k=0}^n A^k \Rightarrow \|S_n\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \Rightarrow \|S\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

проверим, что  $S = (I - A)^{-1}$ . Проверка будет ровно такая, как для суммы геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} \text{честно умножим } S_n(I - A) &= (I + A + A^2 + \dots + A^n)(I - A) = \\ &= (I - A) + (A - A^2) + \dots + (A^n - A^{n+1}) = I - A^{n+1} \quad (*) \end{aligned}$$



$$\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I \quad (**)$$

перейдем теперь в неравенстве (\*) к пределу

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I - A) = S(I - A) \text{ [[перейдем к пределу в (**)] ]} \Rightarrow S(I - A) = I$$

но для бесконечномерного пространства этого недостаточно. Чтобы было достаточно:

$$(I - A)S_n = \text{[[коммутируют как степени } A\text{]]} S_n(I - A) = I - A^{n+1} \Rightarrow \text{при } n \rightarrow \infty \\ (I - A)S = I \Rightarrow S = (I - A)^{-1}$$

теперь у нас есть  $AB = I, BA = I$ , значит, всё □

**Замечание 9.1.**  $\dim X < +\infty, A, B \in \mathcal{B}(X), AB = I \Rightarrow B = A^{-1}$ .  
Если  $\dim X = +\infty$ , то нет

**Пример 9.1.**

$$X = l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, \|x\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ S(x) = (0, x_1, x_2, \dots) \quad \|S\| = 1, S \in \mathcal{B}(l^2) (S - \text{shift})$$

рассмотрим оператор, который будет сдвигать в другую сторону, то есть  $x_1$  он будет выбрасывать

$$T(x) = (x_2, x_3, x_4, \dots), \|T\| = 1$$

и тут теперь важно, в какой последовательности мы применяем операторы

$$(TS)(x) = x \Rightarrow TS = I \\ \nexists S^{-1} \text{ так как } S(l^2) \subsetneq l^2 (S - \text{не сюръекция}) \\ \text{точно так же } \nexists T^{-1}, T \text{ не инъективен}$$

Так что когда речь идёт о бесконечномерном пространстве, мы не зря проверили, что  $AB = I, BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$ .

Применим эту теорему для общего случая, но сначала будет удобно ввести определение

**Определение 9.1.**  $X, Y$  — нормированные

$$\text{In}(X, Y) = \{A \in \mathcal{B}(X, Y) : \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)\}$$

**Теорема 9.1** (множество обратимых операторов открыто).  $X$  — банахово,  $Y$  — нормированное

1.

$$A \in \text{In}(X, Y) \\ B \in \mathcal{B}(X, Y) \quad \|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow B \in \text{In}(X, Y) \text{ и при этом}$$

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|} \quad (1)$$

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|} \quad (2)$$

2.  $\varphi : \text{In}(X, Y) \rightarrow \text{In}(Y, X) \quad \varphi(A) := A^{-1} \Rightarrow \varphi$  непрерывное

1.

$$W := A^{-1}(A - B) \in \mathcal{B}(X)$$

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| < 1$$

$\|W\| < 1$  по теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному

$$\Rightarrow \exists (I - W)^{-1}, \|(I - W)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|W\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}$$

$$W = A^{-1}(A - B) = I - A^{-1}B \Rightarrow I - W = A^{-1}B$$

$$B = A \cdot (A^{-1}B), \exists A^{-1}, \exists (A^{-1}B)^{-1} \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$B^{-1} = (A^{-1}B)^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\|B^{-1}\| \leq \|(A^{-1}B)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|} \quad (1)$$

□

Сейчас будет фантастический алгебраический трюк:

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \Rightarrow$$

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| \cdot \|B^{-1}\| \leq \frac{\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|} \quad (2)$$

**Замечание 9.2.** Как мы можем истолковать первое утверждение?

$$B_{\frac{1}{\|A^{-1}\|}}(A) \subset \text{In}(X, Y)$$

Как только есть обратимый оператор, тогда шарик с центром в этом операторе и таким радиусом будет лежать в множестве непрерывных операторов.

2.

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= A^{-1} \quad \varphi(B) = B^{-1} \\ \|\varphi(A) - \varphi(B)\| &= \|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}\end{aligned}$$

а что такое непрерывность?

пусть  $A$  фиксирован  $\lim_{B \rightarrow A} \|B - A\| = 0 \Rightarrow \lim_{B \rightarrow A} \|\varphi(A) - \varphi(B)\| = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \varphi$  непрерывное

□

## 9.2. Открытые отображения

Определение касается только банаховых пространств, но дадим его в общем случае для произвольных топологических пространств

**Определение 9.2** (открытое отображение).  $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$  — топологические пространства.  $U : X \rightarrow Y, U$  — отображение.  $U$  — открытое, если  $\forall G \subset X, G$  — открытое  $\Rightarrow U(G)$  — открыто в  $Y$

Отметим, что в общем виде непрерывность с открытостью не связана.

**Замечание 9.3.**  $U$  — непрерывное,  $G$  — открытое  $\Leftrightarrow (\forall G \subset Y \Rightarrow U^{-1}(G)$  открыт)

Из непрерывности не следует открытость!

**Пример 9.2.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x \Rightarrow f(-\pi, \pi) = [-1, 1], f$  не открытое

**Пример 9.3.**  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f$  — непрерывное,  $f$  — открытое, так как  $\exists f^{-1}$  — непрерывное

Открытость отображения, если есть обратное, означает непрерывность обратного отображения. Так и отметим в общем виде

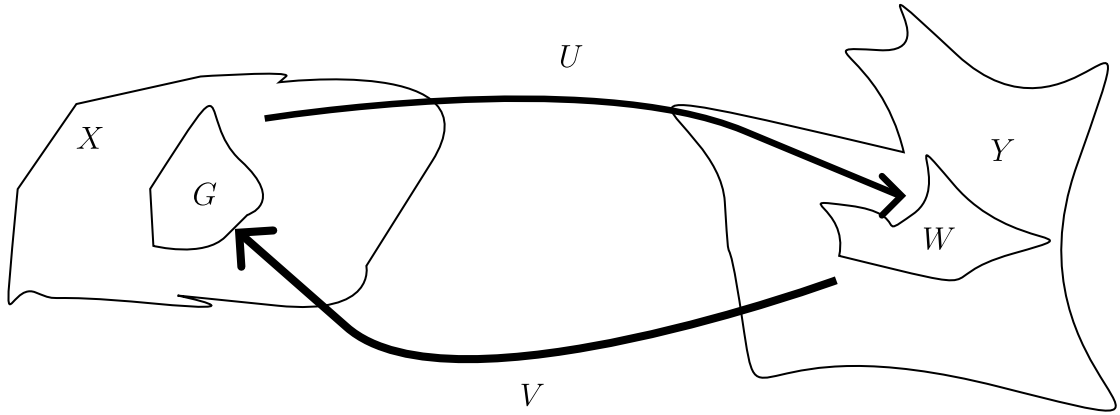


Рис. 9.1: Утверждение 9.1

**Утверждение 9.1.**  $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$  — топологические пространства,  $U : X \rightarrow Y, U$  — биекция  
 $U$  — открытое  $\Leftrightarrow U^{-1}$  — непрерывно

*Доказательство.*

$$V := U^{-1} \quad X \xrightarrow{U} Y \quad X \xleftarrow{V} Y$$

$$W = U(G) \quad G = V(W) \quad W = V^{-1}(G)$$

$U$  — открытое  $\Leftrightarrow (G$  — открыто  $\Rightarrow W = U(G)$  — открыто).  $V$  — непрерывно  $\Leftrightarrow (G$  — открыто  $\Rightarrow V^{-1}(G) = W$  — открыт)  $\square$

**Утверждение 9.2** (критерий открытости линейного оператора).  $(X, \|\cdot\|, (Y, \|\cdot\|))$  — нормированные.  $U \in \text{Lin}(X, Y), U$  — открытое  $\Leftrightarrow \exists r > 0 \ B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$  (то есть  $0 \in \text{Int}(U(B_1(0)))$ )

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$U$  — открытое,  $U(0) = 0$  из-за линейности,  $B_1^X(0)$  — открытое  $\Rightarrow U(B_1^X(0))$  — открытое.  $0 \in U(B_1^X(0)) \Rightarrow \exists r > 0 \ B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$

$\Leftarrow$

Пусть  $G \subset X, G$  — открытое,  $x_0 \in G \Rightarrow$

$$\exists R > 0 \quad B_R^X(x_0) \subset G$$

поскольку отображение линейное, можем 1 поменять на  $R$  в том, что нам дано

$$\Rightarrow B_{rR}^Y(0) \subset U(B_R^X(0))$$

Проверим, что  $U(x_0)$  — внутренняя точка  $U(G)$

$$\begin{aligned} \underbrace{U(x_0) + B_{rR}^Y(0)}_{=B_{rR}^Y(U(x_0))} &\subset U(x_0) + U(B_R^X(0)) = \\ &= U(B_R(x_0)) \subset U(G) \end{aligned}$$

□

Перед тем, как доказывать главную теорему, ещё одно утверждение

**Утверждение 9.3** (необходимое условие открытости линейного оператора).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  нормированные

$$U \in \text{Lin}(X, Y), U \text{ — открытое} \Rightarrow U(X) = Y$$

*Доказательство.* Хотим показать, что любой элемент из  $Y$  покрывается образом какого-то шара.

$$\begin{aligned} \exists r > 0 \ B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0)) &\Rightarrow B_{rn}^Y(0) \subset U(B_n^X(0)), n \in \mathbb{N} \\ \text{пусть } y \in Y &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \|y\| < nr \Rightarrow \\ y \in B_{rn}(0) &\subset U(B_n^X(0)) \subset U(X) \end{aligned}$$

□

При каких-то обстоятельствах это необходимое условие оказывается иногда и достаточным.

Вот и кит №3.

**Теорема** (Банах, об открытом отображении).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — банаховы,  $U \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Если  $U(X) = Y$ , то  $U$  — открытое

Почему это кит? Потому что это очень полезный факт, на который постоянно хочется ссылаться.

Доказательство будет в 2 этапа. Сначала докажем лемму

**Лемма 9.1** (Редукция).  $X$  — банахово,  $Y$  — нормированное,  $U \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Пусть  $\exists r > 0, B_r^Y(0) \subset \overline{U(B_1^X(0))}$  (замыкание)

$$\Rightarrow B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$$

*Доказательство леммы.* Поскольку  $U$  — линейное, то мы можем умножать на любую константу.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad B_{\frac{r}{2^k}}^Y(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{2^k}}^X(0))}$$

пусть  $y \in Y, \|y\| < \frac{r}{2}$

Построим  $x, \|x\| < 1$  т.ч.  $Ux = y$ . Будем его строить постепенно, сначала  $x_1, x_2, \dots$ , и их сумма даст нам  $x$

$$y \in B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{2}}^X(0))} \Rightarrow \exists x_1, \|x_1\| < \frac{1}{2}$$

$\|y - U(x_1)\|$  может быть меньше, чем всё, что угодно, мы возьмём  $\frac{r}{4}$

$$\begin{aligned} \|y - U(x_1)\| &< \frac{r}{4}, y - Ux_1 \in B_{\frac{r}{4}}^Y(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{4}}^X(0))} \\ \Rightarrow \exists x_2, \|x_2\| &< \frac{1}{4}, \|y - Ux_1 - Ux_2\| < \frac{r}{2^3} \text{ и так далее} \\ \{x_k\}_{k=1}^\infty, \|x_k\| &< \frac{1}{2^k}, \|y - Ux_1 - \dots - Ux_k\| < \frac{r}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|}_{\text{сходится}} < 1, [[\text{банаховость } X]] \Rightarrow$$

$$\exists x = \sum_{k=1}^\infty x_k, x \in X, \|x\| < 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - US_n\| = 0 \Rightarrow y = Ux, (U \text{ — непрерывный})$$

□

*Доказательство теоремы.*

$$B = B_1^X(0) \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB, U(X) = Y \Rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(nB)$$

$Y$  — банахово [[т. Бэра о категориях]]  $\Rightarrow \exists n_0 : \text{Int}(\overline{U(n_0 B)}) \neq \emptyset$

$U$  — линейный  $\Rightarrow \exists y_0 \in \text{Int}(\overline{U(B)}) \Rightarrow$

$$\exists r > 0 \quad B_r(y_0) \subset \overline{U(B)}$$

чтобы воспользоваться леммой, нам нужно заменить  $y_0$  на 0

пусть  $z \in Y, \|z\| < r, y_0 + z \in \overline{U(B)}$

$B$  — симметричное множество, т.е.  $x \in B \Rightarrow -x \in B \Rightarrow$

$\overline{U(B)}$  — симметричное, т.е.  $y_0 \in \overline{U(B)} \Rightarrow -y_0 \in \overline{U(B)}$

$$z = (y_0 + z) + (-y_0) \in \overline{U(B)} + \overline{U(B)} \subset \overline{U(2B)}$$

$$\Rightarrow B_r^Y(0) \subset \overline{U(2B)} \Rightarrow B_{\frac{r}{2}}^Y \subset \overline{U(B)}$$

[[ лемма о редукции ]]  $\Rightarrow B_{\frac{r}{4}}^Y(0) \subset U(B)$  [[ критерий открытости ]]  $\Rightarrow$

$U$  открыт

□

Особенно часто применяется следствие, когда  $U$  — биекция

**Теорема** (Банах, об обратном отображении).  $X, Y$  — банаховы,  $U \in \mathcal{B}(X, Y), U$  — биекция  $\Rightarrow$

$$U^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \text{ (то есть } U^{-1} \text{ непрерывен)}$$

Доказывать нечего. Мы уже показали, что открытость отображения эквивалентна непрерывности обратного. Эта теорема нам пригодится, когда будем говорить о спектрах.

Теперь некоторые приложения.

### 9.3. Теорема об эквивалентных нормах и о замкнутом графике

Когда мы говорили о нормах, нам обещалась некоторая сногшибательная теорема, которую мы сейчас и докажем.

**Теорема 9.2.**  $X$  — линейное пространство,  $\exists$  две нормы на  $X$ , т.ч.  $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$  — банаховы. Пусть  $\exists C > 0 : \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \forall x \in X$ . Как бы это не могло показаться чудовищно странным, но существует и оценка в другую сторону

$$\Rightarrow \exists c_1 > 0 : \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \forall x \in X$$

*Доказательство.* Как мы уже делали, когда рассматривали 2 пространства с эквивалентными нормами, рассмотрим  $X = (X, \|\cdot\|_1), Y = (X, \|\cdot\|_2)$

$Ix = x, I \in \text{Lin}(X, Y), I$  — биекция  $\Rightarrow \|Ix\|_2 \leq C \|x\|_1 \Rightarrow I \in \mathcal{B}(X, Y), \|I\| \leq C$   
 [[ т. Банаха об обратном отображении ]]  $\Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \forall x \in X$

□

$X, Y$  — нормированные над  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ .  $X \times Y$  — линейное нормированное

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1), \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

**Определение 9.3** (график).

$U : X \rightarrow Y, U$  — отображение  $G_U = \{(x, Ux)\}_{x \in X}$  — график  $U$

$U$  — замкнутое отображение, если  $G_U$  — замкнутое множество

$$\Leftrightarrow \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Ux_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow y_0 = Ux_0 \right) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lim x_n = x_0 \\ \lim Ux_n = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_0 = Ux_0$$

Посмотрим, как связаны замкнутость и непрерывность. Мы убедимся, что замкнутость это более слабое утверждение, чем непрерывность.

**Замечание 9.4.**  $U$  — непрерывное  $\Rightarrow U$  — замкнутое

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$



$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n = y_0$$

$$3. Ux_0 = y_0$$

$U$  непрерывен  $\Leftrightarrow 1 \Rightarrow 2 + 3$ ;  $U$  замкнутое  $\Leftrightarrow 1 + 2 \Rightarrow 3$

Есть множество примеров, где проверка замкнутости гораздо легче проверки непрерывности. И бывает иногда удобно, что эти условия равносильны.

**Теорема** (о замкнутом графике).  $X, Y$  — банаховы,  $U \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $U$  — замкнут  $\Rightarrow U$  непрерывен

*Доказательство.*  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ . Новая норма на  $X$ :  $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ux\|_Y$ . Аксиомы нормы очевидны.

Проверим, что  $(X, \|\cdot\|_1)$  — банахово по определению

$$\begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальная в } (X_1, \|\cdot\|_1), \text{ то есть} \\ \underbrace{\|x_m - x_n\|_1}_{\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0} = \|x_m - x_n\|_X + \|Ux_m - Ux_n\|_Y \\ \Rightarrow \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\|_X = 0 \\ \Rightarrow \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|Ux_n - Ux_m\|_Y = 0 \end{aligned}$$

Имеем дело с фундаментальными последовательностями в банаховом пространстве

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left. \begin{aligned} & \exists x_0 \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ & \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|Ux_m - Ux_n\|_Y = 0 \Rightarrow \exists y_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n = y_0 \end{aligned} \right\} \text{ замкнуто} \\ & \Rightarrow Ux_0 = y_0 \Rightarrow \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_0\|_X + \|Ux_n - Ux_0\|_Y) = 0 \\ & \Rightarrow (X, \|\cdot\|_1) \text{ — банахово} \\ & \Rightarrow \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Ux\|_Y = \|x\|_1 \\ & \text{[[ теорема об эквивалентных нормах]]} \Rightarrow \\ & \exists C > 0 \quad \|x\|_X + \|Ux\|_Y \leq C \|x\|_X \Rightarrow \|Ux\|_Y \leq C \|x\|_X \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y) \end{aligned}$$

□

Естественно, требуются примеры, когда есть замкнутость, но нет непрерывности.

**Замечание 9.5.**  $X, Y$  — нормированные,  $U \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $U$  — замкнутый  $\nRightarrow U$  — непрерывный.

У нас было не так много не непрерывных операторов: например, оператор дифференцирования, им и воспользуемся.

**Пример 9.4.**

$$\begin{aligned} D(f) &= f', Y = C[-1, 1], X \subset Y, X = \{f : f' \in C[-1, 1]\} \\ \|f\|_X &= \|f\|_Y = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \\ D(x^n) &= nx^{n-1}, \|D(x^n)\| = n, \|x^n\| = 1 \Rightarrow \sup_{\|f\|=1} \|D(f)\| = +\infty \\ &\Rightarrow D \text{ не непрерывен} \end{aligned}$$

это воспоминание о не непрерывности. Почему же он замкнут?

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in X, f_n \xrightarrow{X} f, D(f_n) \xrightarrow{Y} g \stackrel{?}{\Rightarrow} [[\text{замкнутость}]] D(f) = g$$

когда-то в анализе доказали

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{[-1, 1]} f \\ f'_n \xrightarrow{[-1, 1]} g \end{array} \right\} \Rightarrow g = f', \text{ то есть } D(f) = g \Rightarrow D \text{ замкнут}$$

Теорему о замкнутости графика нельзя применять, потому что  $X$  — не полное. Более того,  $\overline{X} = Y$

## 9.4. Примеры неограниченных операторов в банаховом пространстве

Заодно ещё раз вспомним лемму Цорна, чтобы вы не думали, что это была экзотика для доказательства теоремы Хана-Банаха, а вполне рабочий инструмент, когда мы хотим построить максимальный элемент в бесконечных множествах, где обычная индукция не помогает.

**Определение 9.4** (алгебраический базис).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$  (или  $\mathbb{R}$ ).  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — **алгебраический базис** (базис Гамеля), если  $\forall x, x = \sum_{j=1}^n c_j x_{\alpha_j}$  такое представление единственно.

Раньше у нас были ряды, а тут только конечные линейные комбинации. В конечномерном пространстве разницы с предыдущим определением базиса нет. Но в бесконечномерных пространствах нет надежды, что мы хотя бы счётное представление сможем предъявить.

**Теорема 9.3.**  $X$  — линейное пространство  $\Rightarrow$  в  $X$   $\exists$  базис Гамеля.

*Доказательство.* План такой: мы возьмём максимальное линейно-независимое множество и назовём его максимальным элементом, потом применим лемму Цорна. Когда мы говорим о линейной независимости, речь идёт только о конечных комбинациях

$$\mathcal{P} = \{Y : Y \subset X, Y \text{ — линейно независимое} \}$$

$$\text{порядок } Y \leq Z, \text{ если } Y \subset Z, Y, Z \in \mathcal{P}$$

для того, чтобы применить лемму Цорна, нужно установить, что в любом линейно упорядоченном множестве есть верхняя грань

$$\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — линейно упорядоченное множество, то есть}$$

$$\forall \alpha, \beta \text{ либо } Y_\alpha \subset Y_\beta \text{ или } Y_\beta \subset Y_\alpha$$

$$Y_0 = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \Rightarrow Y_0 \text{ — верхняя грань для } \{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

$$[[ \text{лемма Цорна} ]] \Rightarrow \text{ в } \mathcal{P} \exists \text{ максимальный элемент } Z$$

проверим, что  $\mathcal{L}(Z) = X$ . Допустим  $\exists x_0 \in X \setminus \mathcal{L}(Z)$

$$Y = x_0 \cup Z \Rightarrow Y \in \mathcal{P}, Z \leq Y, Z \neq Y$$

$$\text{противоречие} \Rightarrow Z \text{ — базис Гамеля}$$

□

С помощью этого базиса построим примеры, если их вообще можно назвать примерами, ведь они будут совсем-совсем неявными.

**Пример 9.5.**  $X$  — банахово,  $\dim X = \infty$ , пусть  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — базис Гамеля

$$\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}, \lambda_\alpha \in \mathbb{C} \quad \sup_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| = +\infty$$

$$U : X \rightarrow X, U(x_\alpha) = \lambda_\alpha \cdot x_\alpha$$

по линейности продолжим

$$x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n c_j x_{\alpha_j} \quad U(x) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$$

$$U \in \text{Lin}(X), \sup_{\alpha \in A} \frac{\|U(x_\alpha)\|}{\|x_\alpha\|} = \sup_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| = +\infty \Rightarrow U \notin \mathcal{B}(X)$$

Пример не очень явный, но, тем не менее, вот такие ужасы. Теперь пусть будет не непрерывный линейный функционал.

**Пример 9.6.**  $X$  — банахово,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — базис Гамеля,  $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}, \sup_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha| = +\infty$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \quad f(x_\alpha) = \lambda_\alpha \cdot \|x_\alpha\|$$

продолжим по линейности

$$\Rightarrow f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), \sup_{\alpha} \frac{|f(x_\alpha)|}{\|x_\alpha\|} = +\infty \Rightarrow f \notin X^*$$

Чуть-чуть более явный пример

**Пример 9.7.**

$$l^2, \{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$$

можем строить базис Гамеля, который содержит фиксированное линейно независимое множество, но предъявить базис мы не надеемся

$$\mathcal{P} = \{Y \subset l^2, E = \{e_n\}_{n=1}^\infty, E \subset Y, Y \text{ — линейно независимое}\}$$

$\exists$  максимальный элемент

$\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — базис Гамеля

$\mathbb{N} \subset A, \lambda_n = n$ , то есть

$f(e_n) = n, f(e_\alpha) = \lambda_\alpha, \lambda_\alpha \in \mathbb{C}, \lambda_\alpha$  — любое

$$\sup_n |f(e_n)| = +\infty \Rightarrow f \notin (l^2)^* \text{ при } \alpha \neq n$$

# Глава 10

## Сопряжённые пространства

### 10.1. Сопряженное пространство к $L^p$

На самом деле, в этой части всё докажем только для  $l$ , для  $L$  только простую часть.

Напоминание о том, что мы думаем о мерах:  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой,  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная, то есть  $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$ .  $\mu$  — полная мера, то есть если  $A \subset U, \mu A = 0$ , то  $\forall B \subset A \Rightarrow B \in U, \mu(B) = 0$

**Теорема 10.1** (сопряженное к  $L^p(X, U, \mu)$ ). 2 случая, во втором очень важно, что бесконечность не включается!

1.  $1 \leq p \leq +\infty$

$$g \in L^q(X, \mu) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$g \text{ — фиксирована, } h \in L^p, F_g(h) := \int_X h(x)g(x)d\mu \Rightarrow F_g \in (L^p)^*$$

$$\|F_g\| = \|g\|_{L^q}$$

2.  $1 \leq p < +\infty, F \in (L^p)^* \Rightarrow \exists ! g \in L^q \text{ т.ч. } F = F_g$

*1 утверждение.* Ну тут совсем легко.  $F_g \in \text{Lin}(L^p, \mathbb{C})$  — очевидно, просто потому что интеграл — линейное действие. Теперь, как его оценить?

$$g \in L^q, h \in L^p, |F_g(h)| = \left| \int_X hgd\mu \right| \leq [ [ \text{Гельдер} ] ] \|h\|_p \|g\|_q \quad \forall h \in L^p$$

мы уже отмечали, что неравенство верно даже для бесконечных  $p$  и  $q$

$$\Rightarrow F_g \in (L^p)^*, \|F_g\| \leq \|g\|_q$$

чтобы получить неравенство в другую сторону, предъявим так называемую пробную функцию, на которой будет выполняться неравенство. Пусть сначала  $1 < p \leq +\infty \Rightarrow 1 \leq q < +\infty$

$$U(x) := \begin{cases} \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} |g(x)|^{q-1} & g(x) \neq 0 \\ 0 & g(x) = 0 \end{cases}, \overline{g(x)} - \text{комплексное сопряжение}$$

Проверим, что  $U \in L^p$ , чтобы к ней применять что-то

$$\begin{aligned} |U(x)|^p &= |g(x)|^{p(q-1)} = [(q-1)p = q \left(1 - \frac{1}{q}\right) p = q \cdot \frac{1}{p} \cdot p = q] = |g|^q \\ \Rightarrow \left( \int_X |U|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow U \in L^p \end{aligned}$$

значит, мы имеем право вычислять

$$\begin{aligned} F_g(U) &= \int_X g(x) \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} |g(x)|^{q-1} d\mu = \int_X |g|^q d\mu = \|g\|_q^q \\ \|F_g\| &= \sup_{h \in L^p, h \neq 0} \frac{\|F_g(h)\|}{\|h\|_p} \geq \frac{|F_g(U)|}{\|U\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|g\|_q \\ \Rightarrow \|F_g\| &\geq \|g\|_q \Rightarrow \|F_g\| = \|g\|_{L^q} \end{aligned}$$

Теперь пусть  $p = 1, q = \infty$ . Опять хотим оценить снизу норму линейного функционала

$$\begin{aligned} \text{если } \|g\|_\infty &= 0, \text{ то } g = 0 \text{ п.в.} \Rightarrow F_g = 0, \|F_g\| = 0 \\ \text{пусть } \|g\|_\infty &> 0, \text{ пусть } c > 0 \quad \|g\|_\infty > c > 0 \\ A = \{x \in X : |g(x)| &\geq c\} \Rightarrow +\infty > \mu(A) > 0 \end{aligned}$$

Вот, наконец, где нам потребуется  $\sigma$ -конечность. Почему вообще существует такое множество  $A$ ?

$$\begin{aligned}
 & \text{пусть } e \subset A, 0 < \mu e < +\infty \text{ т.к. } X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty \\
 \Rightarrow A &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap X_j), e_j = A \cap X_j \Rightarrow \mu e_j < +\infty, \text{ если бы } \mu e_j = 0 \forall j, \text{ то } \mu A = 0 \\
 &\Rightarrow \exists e = e_j \quad 0 < \mu e < +\infty, e \subset A \\
 U(x) &= \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} \chi_e(x) \Rightarrow \|U\|_{\infty} = 1 \\
 F_g(U) &= \int_X g(x) \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} \chi_e(x) d\mu = \int_e |g(x)| d\mu \geq c\mu(e) \\
 U \in L^1, \|U\|_1 &= \int_X |U(x)| d\mu = \int_e d\mu = \mu(e) \\
 \|F_g\| &\geq \frac{|F_g(U)|}{\|U\|_1} \geq \frac{c\mu(e)}{\mu(e)} = c \forall c, 0 < c < \|g\|_{\infty} \\
 &\Rightarrow \|F_g\| \geq \|g\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

□

Вторая, главная часть, без доказательства. Разве что скажем пару слов про единственность

$$\begin{aligned}
 F_g = F_v &\Rightarrow F_{g-v} = 0 \Rightarrow \int_X h(gv) d\mu = 0 \forall h \in L^p \\
 \|F_{g-v}\| &= \|g - v\|_p = 0 \Rightarrow g = v \text{ п.в., то есть } g = v \text{ в } L^p
 \end{aligned}$$

Для доказательства второй части нам не хватает одной теоремы из теории меры, а именно теоремы Никодима, который как раз сидел с Банахом на лавочке, когда мимо них проходил Штейнгауз, но у нас нет времени её доказывать.

**Теорема** (Сопряжённое пространство к  $l^p$ ). 2 случая, во втором очень важно, что бесконечность не включается!

1.

$$1 \leq p \leq +\infty, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y \in l^q, y \text{ — фиксирован}$$

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p \quad F_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \Rightarrow F_y \in (l^p)^*$$

$$\|F_y\| = \|y\|_q$$

2.  $1 \leq p < +\infty, F \in (l^p)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^q : F = F_y$

1 утверждение.

$$F_y \in \text{Lin}(l^p, \mathbb{C})$$

$$|F_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq [\text{Гельдер}] \|x\|_p \|y\|_q \Rightarrow F_y \in (l^p)^*, \|F_y\| \leq \|y\|_q$$

□

2 утверждение.

$$F \in (l^p)^*, 1 \leq p < +\infty, \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — базис в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

$$e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$$

$$y_n := F(e_n)$$

$$x \in l^p \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, S_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x \Rightarrow [F \text{ непрерывен}] \lim_{n \rightarrow \infty} F(S_n) = F(x)$$

$$F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \Rightarrow F = F_y$$



осталось проверить 2 вещи:  $y \in l^q$  и  $\|F\| \geq \|y\|_q$ . Пробные последовательности, которые мы будем брать тут, будут напоминать пробные функции, которые мы брали в предыдущей теореме

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \quad x^{(n)} &= \sum_{k=1}^n \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} |y_k|^{q-1} e_k \text{ при } 1 < p < +\infty \Rightarrow q < +\infty \\ \|x^{(n)}\|_p &= \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} \\ F(x^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n y_k \cdot \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} \cdot |y_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q \end{aligned}$$

как обычно, когда вычисляем норму линейного функционала

$$\begin{aligned} \|F\| &\geq \frac{|F(x^{(n)})|}{\|x^{(n)}\|_p} = \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}{\left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}} = \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow y \in l^q, \|F\| \geq \|y\|_q \\ \text{если } p = 1, q = \infty, \|F\| &\geq |F(e_n)| = |y_n| \quad \forall n \Rightarrow y \in l^\infty \\ \|F\| &\geq \|y\|_\infty \end{aligned}$$

□

Это замечание нужно было сделать про  $L^p$ , но сделаем его тогда сразу и для  $l^p$

**Замечание 10.1.**

$$\begin{aligned} 1 &\leq p \leq +\infty \\ T : l^q &\rightarrow (l^p)^* \quad y \in l^q \\ T(y) &= F_y \end{aligned}$$

Если  $1 \leq p < +\infty$ , то  $T$  — линейный изометрический изоморфизм. Говорят  $(l^p)^* = l^q$ , а имеют в виду  $T(l^q) = (l^p)^*$

$$\begin{aligned} p = \infty, T(l^1) &\subsetneq (l^\infty)^* \\ T &\text{ — изометрическое вложение} \end{aligned}$$

То же самое для  $L^p$ :

$$(X, U, \mu), T : L^q \rightarrow (L^p)^* \quad T(g) = F_g$$

Если  $1 \leq p < +\infty$ ,  $T$  — линейный изометрический изоморфизм. Говорят  $(L^p)^* = L^q$ . Если  $p = \infty$ ,  $T(L^1) \subsetneq (L^\infty)^*$  — изометрическое вложение

Вспомним, что такое  $c_0$

**Теорема 10.2** (сопряжённое к  $c_0$ ).

$$c_0 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{C}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}, c_0 \subset l^\infty$$

1.  $y \in l_1, y$  — фиксирован,  $x \in c_0$

$$F_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \Rightarrow F_y \in (c_0)^*, \|F_y\| = \|y\|_1$$

2.  $F \in (c_0)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^1$  т.е.  $F = F_y$

1 утверждение.

$$\begin{aligned} |F_y(x)| &= \left| \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \sum_{n=1}^\infty |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_1 \\ &\Rightarrow F_y \in (c_0)^*, \|F_y\| \leq \|y\|_1 \end{aligned}$$

Это повторение доказательства для  $l^p$  где  $p = \infty$

□

2 утверждение.

$$F \in (c_0)^* \quad \{e_n\}_{n=1}^\infty \text{ — базис в } c_0, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$$

$$y_n := F(e_n) \quad x \in c_0, x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x, F \text{ — непрерывный} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(S_n) = F(x)$$

$$F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \Rightarrow F = F_y$$

остатается понять, что  $y \in l^1$

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= \sum_{k=1}^n \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} e_k \Rightarrow x^{(n)} \in c_0 \quad \|x^{(n)}\|_\infty = 1 \\ &\Rightarrow F(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} = \sum_{k=1}^n |y_k| \\ \|F\| &\geq |F(x^{(n)})| = \sum_{k=1}^n |y_k| \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in l^1 \\ \|F\| &\geq \|y\|_1 \Rightarrow \|F\| = \|y\|_1 \end{aligned}$$

□

**Замечание 10.2.**

$$\begin{aligned} y \in l^1, T : l^1 &\rightarrow (c_0)^* \\ T(y) &= F_y \end{aligned}$$

$T$  — линейный изометрический изоморфизм

Говорят  $(c_0)^* = l^1$

$$c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\}$$

Упражнение:

**Утверждение 10.1.** требуется доказать

1.  $y = \{y_n\}_{n=0}^{+\infty} \in l^1 \Rightarrow F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n, F_y \in (c)^*$
2.  $F \in (c)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^1, y = \{y_n\}_{n=0}^{+\infty} : F = F_y$

Чтобы получился базис, нужно, чтобы был какой-то  $e_0$  помимо  $e_n$  и нужно понять, как определять этот дополнительный элемент, подумайте чуть-чуть.

## 10.2. Второе сопряжённое

**Определение 10.1.**

$$X^{**} = (X^*)^*, \text{ то есть } X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C}) \text{ или } \mathcal{B}(X^*, \mathbb{R})$$

Есть каноническое вложение  $\pi : X \rightarrow X^{**}$ . Пусть  $x \in X$  — фиксирован. Посмотрим, как этот фиксированный  $x$  порождает множество линейных функционалов на множестве линейных функционалов на  $X$

$$\begin{aligned} \text{пусть } f \in X^* \quad G_x(f) &:= f(x) \\ \pi(x) &:= G_x, \text{ то есть } (\pi(x))(f) := f(x) \end{aligned}$$

**Теорема 10.3** (каноническое вложение  $X$  во второе сопряженное).  $(X, \|\cdot\|), \pi : X \rightarrow X^{**} \Rightarrow$

$$\pi \in \mathcal{B}(X, X^{**}), \|\pi(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X (\Rightarrow \|\pi\| = 1)$$

*Доказательство.* Проверим, что при фиксированном  $x, \pi(x) \in X^{**}$  есть линейность:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C}, f \in X^* \quad (\pi(x))(\lambda f) &= (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \pi(x)(f) \\ f, g \in X^* \Rightarrow \pi(x)(f + g) &= (f + g)(x) = f(x) + g(x) = (\pi(x))(f) + (\pi(x))(g) \\ &\Rightarrow \pi(x) \in \text{Lin}(X^*, \mathbb{C}) \\ f \in X^* \quad |(\pi(x))(f)| &= |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \quad \forall f \Rightarrow \pi(x) \in (X^*)^* \\ &\|\pi(x)\| \leq \|x\| \end{aligned}$$

вспомним следствие из теоремы Хана-Банаха о достаточном числе линейных функционалов

$$\begin{aligned} \exists g \in X^*, \|g\| = 1, g(x) &= \|x\| \\ \|\pi(x)\| &\geq |(\pi(x))(g)| = |g(x)| = \|x\| \\ \Rightarrow \|\pi(x)\| &= \|x\|_X \Rightarrow \|\pi\| = 1 \end{aligned}$$

□

Вложение это как раз потому, что это отображение сохраняет норму.

Следствие, которое когда-то было обещано:

**Следствие 10.1.**  $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow \overline{\pi(X)}^{X^{**}} = Y \Rightarrow$   
 $Y$  — пополнение  $X$

Появляюстя теперь некоторые особенно хорошие банаховы пространства

**Определение 10.2** (рефлексивное пространство). Если  $\pi(X) = X^{**}$ , то  $X$  — рефлексивное пространство

**Следствие 10.2.**  $X$  — рефлексивное  $\Rightarrow X$  — банахово

У нас были симметричные формулы для нормы элемента и для нормы линейного функционала, но всё-таки они отличались тем, что в норме функционала мы ставили  $\sup$ , а в рефлексивном пространстве этого делать не надо.

**Следствие 10.3.**  $X$  — рефлексивное  $\Rightarrow \|f\| = \max_{\|x\|=1} |f(x)|$

*Доказательство.* известно, что

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|, \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

$$\begin{aligned} f \in X^* \Rightarrow \|f\| &= \max_{\{\varphi \in X^{**}: \|\varphi\|=1\}} |\varphi(f)| = [\text{рефлексивность}] \\ &= \max_{\{\pi(x), \|x\|=1\}} |(\pi(x))(f)| = \max_{\|x\|=1} |f(x)| \end{aligned}$$

□

**Пример 10.1.**  $1 < p < +\infty$ ,  $L^p$  — рефлексивные,  $(L^p)^* \cong L^q$ ,  $(L^q)^* \cong L^p$

**Пример 10.2.**  $H$  — гильбертово,  $H$  — рефлексивное,  $H^*$  — сопряженное линейно изоморфно  $H$ ,  $H^{**}$  — линейно изометрически изоморфно  $H$

**Пример 10.3.**  $L^1, L^\infty, l^1, l^\infty, c_0, c$  — не рефлексивны. Мы доказали, что  $l^1 \subset (l^\infty)^*$ ,  $l^\infty$  — не сепарабельно  $\Rightarrow (l^\infty)^*$  — не сепарабельно

**Пример 10.4.**  $C(K)$  — не рефлексивное

Единственный пример, когда мы реально можем сосчитать дважды сопряженное

**Пример 10.5.**  $(c_0)^* = l^1$ ,  $(l^1)^* = l^\infty \Rightarrow (c_0)^{**} = l^\infty$

### 10.3. Слабая сходимость

Когда-то давно деткам рассказывали, что такое слабая топология, но лектора отговорили это делать, поэтому будет только слабая сходимость.

**Определение 10.3.**  $(X, \|\cdot\|), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} x_n \in X, x_0 \in X$

$$x_0 = \text{w-lim } x_n \text{ если } \forall f \in X^* \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

w = weak

Отметим его простейшие свойства

**Свойство 10.1.** 1. Если  $\exists \text{ w-lim } x_n$ , то он единственный

2. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - x_n\| = 0$ , то  $x_0 = \text{w-lim } x_n$  (как раз почему слабая сходимость слабее сходимости по норме)

1.

пусть  $x_0 = \text{w-lim } x_n, y_0 = \text{w-lim } x_n \Rightarrow \forall f \in X^* \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(y_0)$

[[ по следствию о достаточном числе линейных функционалов]]

$$\begin{aligned} \exists g \in X^*, \|g\| = 1 \quad g(x_0 - y_0) &= \|x_0 - y_0\| \\ g(x_0) = g(y_0) &\Rightarrow \|x_0 - y_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 \end{aligned}$$

□

2. Пусть  $f \in X^*, |f(x_0) - f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \underbrace{\|x_0 - x_n\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

□

Воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза чтобы получить критерий слабой сходимости.

**Теорема 10.4** (критерий слабой сходимости).  
 $(X, \|\cdot\|), \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in X \quad x_0 = \text{w-lim } x_n \Leftrightarrow$

1.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$
2.  $E \subset X^*, E$  — полное семейство, т.е.  $\overline{\mathcal{L}(E)} = X^*, f \in E \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

*Доказательство.* Пока у нас нет никаких отображений, не говоря уже о том, что в теореме Банаха-Штейнгауза была куча полных пространств. К чему будет применять критерий? Тут нам и пригодится  $\pi$

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X^{**} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi(x_n))(f) = \pi(x_0)(f) \\ x_0 = \text{w-lim } x_n &\Leftrightarrow \pi(x_0) = \text{s-lim } \pi(x_n) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

когда-то мы доказывали, что пространство линейных операторов  $\text{Lin}(X, Y)$ , где  $Y$  — банахово, тоже будет банаховым

$[[\pi(x) : X^* \rightarrow \mathbb{C} \quad X^*, \mathbb{C} \text{ — банаховы, теорема Банаха-Штейнгауза}]]$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sup_n \|\pi(x_n)\| < +\infty \\ E \subset X^*, \overline{\mathcal{L}(E)} = X^*, \forall f \in E \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi(x_n))(f) = (\pi(x_0))(f) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} \sup_n \|x_n\| < +\infty \\ \forall f \in E, \overline{\mathcal{L}(E)} = X^*, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Теорема 10.5** (слабая сходимость в конечномерном пространстве).  $(X, \|\cdot\|), \dim X < +\infty \Rightarrow$

$$x_0 = \text{w-lim } x^{(n)} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - x^{(n)}\| = 0$$

*Доказательство.*

пусть  $\dim X = m, \{e_j\}_{j=1}^m$  — базис в  $X$

$$x \in X, x = \sum_{j=1}^m x_j e_j, \|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq m} |x_j|$$

когда-то мы доказывали, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны

$$\begin{aligned} x_0 = \text{w-lim } x^{(n)} \quad x^{(n)} &= \sum_{j=1}^m x_j^{(n)} e_j \quad x_0 = \sum_{j=1}^m (x_0)_j e_j \\ f_j(x) &:= x_j, f_j \in X^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_j(x^{(n)}) = f_j(x_0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} &= (x_0)_j \Rightarrow \|x_0 - x^{(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|x_0 - x^{(n)}\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

Теперь, господа, какое-то странное определение-обозначение для того, чтобы обозначать действие линейного функционала на элемент и забыть про  $\pi(x)$  и писать  $x$ . Есть  $X, X^*$ .

$$\begin{aligned} x \in X, f \in X^* \\ \langle f, x \rangle &:= f(x) \end{aligned}$$

а тут мы уже будем думать что  $x$  это элемент  $X^{**}$ , который действует на  $f$ ; вместо  $x$  подразумевается  $\pi(x)(f)$

$$\langle x, f \rangle := f(x)$$

Иногда удобно думать, что  $x$  — аргумент линейного функционала, а в другом случае удобно думать что  $x$  это сам линейный функционал.

Например,  $1 < p < +\infty, f \in L^p, g \in L^q, \langle f, g \rangle = \int_X f g d\mu$ . Одна компонента — функция, другая — линейный функционал, и может быть наоборот.

**Теорема 10.6** (слабая сходимость в  $l^p, 1 < p < +\infty$ ).

$$x^{(n)} \in l^p, x = \text{w-lim } x^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|x^{(n)}\| < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = x_j \quad j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= \left\{ x_j^{(n)} \right\}_{j=1}^{\infty}, (l^p)^* = l^q, E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l^q, e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ \overline{\mathcal{L}(E)} &= l^q \end{aligned}$$



В  $l^q$  мы выберем базис. Рассмотрим действие  $e$  на произвольном элементе

$$x \in l^p \quad e_n \in l^q \Rightarrow e_n \in (l^p)^*$$

$$\langle e_n, x \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (e_n)_j x_j = x_n, \langle e_m, x \rangle = x_m$$

применим критерий

$$x = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|x^{(n)}\|_p < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_j, x^{(n)} \rangle = \langle e_j, x \rangle \quad \forall j \end{cases} \quad 2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = x_j$$

□

Естественно сделать следующее замечание

**Замечание 10.3.**  $1 < p < +\infty, x = \text{w-lim } x^{(m)} \not\Rightarrow \lim \|x - x^{(m)}\|_p = 0$

Слабая сходимость всегда слабее сходимости по норме, поэтому она и слабая. В обратную сторону следствие мы уже доказали

**Пример 10.6.**

$$e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\sigma_j^m = \begin{cases} 1 & m = j \\ 0 & m \neq j \end{cases}, \quad e_m = \{\sigma_j^m\}_{j=1}^{\infty}$$

Давайте убедимся, что слабый предел последовательностей  $m$  равен 0

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left. \begin{matrix} \sigma_j^m = 0 \quad \forall j \\ \|e_m\|_p = 1 \end{matrix} \right\} \left[ \text{критерий слабой сходимости} \right] \Rightarrow$$

$$0 = \text{w-lim } e_m$$

$$\|e_m - 0\| = 1 \Rightarrow \|e_m - 0\|_p \not\rightarrow 0$$

Обсудим теперь, что такое слабая сходимость в больших пространствах  $L^p$

**Теорема 10.1** (Слабая сходимость в  $L^p$ ).  $(X, U, \mu), 1 \leq p < +\infty, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f_n \in L^p, f \in L^p$

$$f = \text{w-lim } f_n \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|f_n\|_p < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \quad A \in U, 1 < p < +\infty, \mu A < +\infty \end{cases} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \quad \forall A \in U, p = 1 \quad (2')$$

*Доказательство.* Мы помним, что  $(L^p)^* = L^q$ <sup>1</sup>

$$g \in L^q, f \in L^p$$

$$\langle g, f \rangle = \int_X g(x)f(x)d\mu$$

В  $L^q$  мы хотим предъявить подмножество, которое будет полным семейством. Мы когда-то обсуждали, что у нас будет полным семейством в  $L^q$

пусть  $p > 1 \Rightarrow q < +\infty \Rightarrow E = \{\chi_A\}_{A \in U, \mu(A) < +\infty}$  — полное семейство в  $L^q$ , т.е.

$$\overline{\mathcal{L}(E)} = L^q$$

$$g = \chi_A, f \in L^p \Rightarrow \langle \chi_A, f \rangle = \int_A f(x)d\mu$$

$\langle \chi_A, f \rangle$  обозначает нашу старую запись для функционала  $F_{\chi_A}$ , который действует на  $f$ . Теперь воспользуемся критерием слабой сходимости

$$f = \text{w-lim } f_n \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|f_n\|_p < +\infty \\ \forall \chi_A \in E \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \chi_A, f_n \rangle = \langle \chi_A, f \rangle \end{cases}$$

$$2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \forall A \in U, \mu(A) < +\infty$$

Если же  $p = 1, q = \infty$

$$E_1 = \{\chi_A\}_{A \in U}, E_1 \text{ — полные в } L^\infty$$

$$2' \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \forall A \in U$$

□

Теперь немножко о слабой сходимости в гильбертовом пространстве

---

<sup>1</sup>пишем равно, но имеем в виду изометрический изоморфизм

**Теорема 10.7** (слабая сходимостъ в гильбертовом пространстве).  $H$  — гильбертово пространство,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in H, x \in H$ .

1. Следующие условия равносильны:

a)  $x = \text{w-lim } x_n$

b)  $\forall y \in H \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y)$

c)  $\begin{cases} \sup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| < +\infty \\ \exists E \subset H, \overline{\mathcal{L}(E)} = H, y \in E \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y) \end{cases}$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \\ x = \text{w-lim } x_n \end{cases}$$

*1 утверждение.* Для того, чтобы показать, что  $a \Leftrightarrow b$  надо просто вспомнить, как устроены все линейные функционалы. По теореме Рисса (тык)  $f \in H^* \Rightarrow \exists ! y \in H : f(x) = (x, y) \forall x \in H$ . Далее,  $x = \text{w-lim } x_n \Leftrightarrow \forall f \in H^* \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \Leftrightarrow \forall y \in H \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y)$ . То есть  $a \Leftrightarrow b$ .

Теперь  $a \Leftrightarrow c$ . По критерию слабой сходимости

$$a \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|x_n\| < +\infty \\ \exists E \subset H^*, \forall f \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \end{cases}$$

опять-таки воспользуемся тем, что каждый  $f \in E$  порождается элементом нашего  $H$

$$\begin{aligned} & \forall f \in E \exists y \in E_1, E_1 \subset H \\ & f(x) = (x, y), \overline{\mathcal{L}(E)} = H^* \Leftrightarrow \overline{\mathcal{L}(E_1)}^H = H \\ & \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y) \forall y \in E_1 \end{aligned}$$

□

*2 утверждение.*  $\Rightarrow$  очевидно. Первое условие есть в любом нормированном пространстве (1), а из сходимости по норме следует слабая сходимостъ (2).

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|^2 &= (x - x_n, x - x_n) = \|x\|^2 - \underbrace{(x_n, x)}_{\rightarrow \|x\|^2} - \underbrace{(x, x_n)}_{\rightarrow (x, x)} + \underbrace{\|x_n\|^2}_{\xrightarrow{1} \|x\|^2} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|^2 = 0 \end{aligned}$$

□

## 10.4. Слабая со \* сходимость

**Определение 10.4.**  $X$  — нормированное пространство,  $X^*, \{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in X^*, f \in X^*$

$$f = w^*\text{-}\lim f_n, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in X$$

Самый кошмар состоит в том, что она нам она уже встречалась. Это сильная сходимость, если вместо линейных операторов у нас линейные функционалы. Имеется понятие «Слабая топология», и ей соответствует эта сходимость

**Замечание 10.4.**  $f = s\text{-}\lim f_n \Leftrightarrow f = w^*\text{-}\lim f_n$

**Утверждение 10.2.**  $\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in X^*, f = w\text{-}\lim f_n \Rightarrow f = w^*\text{-}\lim f_n$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f = w\text{-}\lim f_n &\Leftrightarrow \forall \varphi \in X^{**} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n) &= \varphi(f) \end{aligned}$$

Среди этих функционалов есть часть, которая порождается элементами  $X$

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X^{**}, \text{ пусть } x \in X \Rightarrow \pi(x) \in X^{**} \\ \text{пусть } \varphi &= \pi(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi(x))(f_n) = (\pi(x))(f) \Leftrightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= f(x) \forall x \in X \Rightarrow f = w^*\text{-}\lim f_n \end{aligned}$$

□

**Замечание 10.5.** Если  $X$  — рефлексивное, то есть  $\pi(X) = X^{**}$ , то  $f = \text{w-lim } f_n \Leftrightarrow f = \text{w}^*\text{-lim } f_n$

Теперь воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза, чтобы сформулировать критерий. Когда был критерий слабой сходимости, чтобы сформулировать критерий для неё, мы применяли  $\pi(x)$ , здесь же этого не будет, мы сразу будем предполагать, что  $X$  — банахово.

**Теорема 10.8** (критерий слабой со  $*$  сходимости).  $X$  — банахово,  $f_n \in X^*$ ,  $f \in X^*$

$$f = \text{w}^*\text{-lim } f_n \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_n \|f_n\| < +\infty \\ \exists E \subset X, \overline{\mathcal{L}(E)} = X : \forall x \in E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \end{cases}$$

*Доказательство.* Просто применяем теорему Банаха-Штейнгауза,  $f = \text{s-lim } f_n$ .  $\square$

**Замечание 10.6.** В  $\Leftarrow$  сторону верно, если  $X$  — нормированное

Обсудим сейчас, что означает  $\text{w}^*\text{-lim}$  в  $l^1$ . Чем хорошо  $l^1$ ? Тем, что мы знаем сопряжённое к нему, и чьим сопряжённым оно является.

**Теорема 10.2** (слабая и слабая со  $*$  сходимость в  $l^1$ ).  $x^{(m)} \in l^1$ ,  $x^{(m)} = \{x_j^{(m)}\}_{j=1}^\infty$ ,  $x \in l^1$

$$x = \text{w}^*\text{-lim } x^{(m)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup \|x^{(m)}\|_1 < +\infty \\ \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$x = \text{w-lim } x^{(m)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup \|x^{(m)}\|_1 < +\infty \\ \forall A \subset \mathbb{N} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \in A} x_j^{(m)} = \sum_{j \in A} x_j \end{cases}$$

*Доказательство.* Слабая со звездочкой сходимость — для последовательности функционалов на любом элементе пространства, рассматриваем элементы  $l_1$  как линейные функционалы, а мы знаем, что  $(c_0)^* = l_1$ , значит, будем искать полное семейство в  $c_0$ , чтобы применить критерий. Слабая сходимость — для элементов пространства на любом линейном функционале. В этом случае уже будем рассматривать элементы  $l_1$  как элементы пространства,  $(l_1)^* = l^\infty$ , и чтобы

применять критерий слабой сходимости, будем искать полное семейство функционалов, и функционалами будут выступать уже  $l^\infty$ .

$$(c_0)^* = l^1, (l^1)^* = l^\infty, e_m = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

$$x \in c_0, y \in l_1, \langle y, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, E = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}, e_m \in c_0$$

чтобы воспользоваться критерием слабой со звездочкой сходимости, нам нужно предъявить полное семейство в  $c_0$

$E$  — полное семейство в  $c_0$

применим критерий слабой со \* сходимости

$$\begin{aligned} x = w^*\text{-}\lim x^{(m)} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sup \|x^{(m)}\|_1 < +\infty \\ \lim \langle x^{(m)}, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle \forall j \in \mathbb{N} \end{cases} \\ \langle x^{(m)}, e_j \rangle = x_j^{(m)}, 2 &\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2)$$

Разобрались с первой половиной теоремы. Во второй же нам надо использовать  $(l^1)^* = l^\infty$

$$x \in l^1, y \in l^\infty$$

$$\langle y, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

В огромном пространстве  $l^\infty$  нет никакой надежды предъявить счётное семейство, которое будет полным, его там нет. Что же будем делать?

$$A \subset \mathbb{N}, x_j^A = \begin{cases} 1 & j \in A \\ 0 & j \notin A \end{cases}, x^A \in l^\infty, x^A = \{x_j^A\}_{j=1}^{\infty}$$

если есть  $L^\infty(X, \mu)$ , то  $\{\chi_A\}_{A \in U}$  — полное семейство в  $L^\infty(X, U, \mu)$

$$l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \Rightarrow \{\chi^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство в } l^\infty$$

$$E = \{x^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$$

$$\langle x^A, x^{(m)} \rangle = \sum_{j \in A} x_j^{(m)}$$

воспользуемся критерием слабой сходимости

$$\begin{aligned} x = w\text{-}\lim x^{(m)} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sup \|x^{(m)}\|_1 < +\infty \\ \forall A \subset \mathbb{N} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle x^A, x^{(m)} \rangle = \langle x^A, x \rangle \end{cases} \\ (2) &\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \in A} x_j^{(m)} = \sum_{j \in A} x_j \end{aligned}$$

□

**Пример 10.7.**  $e_m = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $e_m \in l^1$ ,  $\|e_m\| = 1 \Rightarrow \sup_m \|e_m\|_1 = 1 < +\infty$ . Если мы зафиксируем  $j$ -ю координату, то она будет стремиться к 0.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0 \Rightarrow 0 = w^*\text{-}\lim e_m$$

$$\text{пусть } A = \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{\infty} (e_m)_j = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} (e_m)_j = 1, \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow$$

$$0 \neq w\text{-}\lim e_m \Rightarrow \nexists w\text{-}\lim e_m$$

Поскольку  $l^\infty$  фантастически гигантское пространство, верна такая нетривиальная теорема, которую мы даже не будем доказывать

**Замечание 10.7** (для общего развития).  $x^{(m)} \in l^1, x = w\text{-}\lim x^{(m)} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_1 = 0$

**Теорема 10.3** (аппроксимативная единица).

$$X = C[-1, 1], \mu \text{ на } [-1, 1], A \subset [-1, 1]$$

рассмотрим такую меру

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

кроме того, есть последовательность «колокольчиков» (см. рисунок 10.1)

$$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \varphi_n \in C[-1, 1], \varphi_n(x) \geq 0$$

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ при } |x| > \frac{1}{n}, \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = 1$$

тогда утверждается, что если мы рассмотрим последовательность линейных функционалов

$$g \in C[-1, 1], F(g) = \int_{-1}^1 g(x) d\mu$$

$$F_n(g) = \int_{-1}^1 g(x) \varphi_n(x) dx \Rightarrow F = w^*\text{-}\lim F_n$$

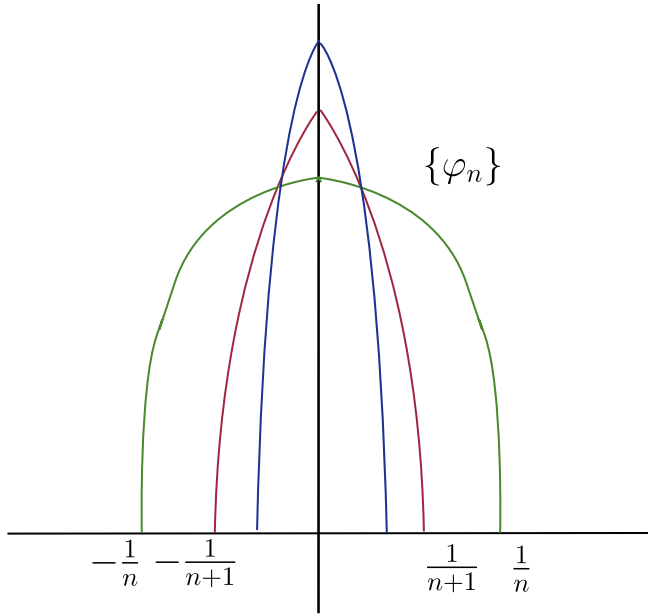


Рис. 10.1: Теорема 10.3

*Доказательство.*

$$F(g) = \int_{-1}^1 g(x) d\mu = [[\text{раз мера сосредоточена в нуле}]] = g(0)$$

$$F_n(g) = \int_{-1}^1 g(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(x) \varphi_n(x) dx =$$

теорема о среднем говорит, что существует такая точка  $c_n \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

$$= g(c_n) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(x) dx = g(c_n)$$

$$g \in C[-1, 1] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(c_n) = g(0) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(g) = F(g) \quad \forall g \in C[-1, 1] \Rightarrow F = w^*\text{-}\lim F_n$$

□

**Теорема 10.9** (Банах-Алаоглу, слабая со \* компактность единичного шара сопряженного пространства).  $X$  — сепарабельное, нормированное,  $D = \{f \in X^*, \|f\| \leq 1\}$ ,  $\forall \{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in D \exists \{f_{n_j}\}$  — подпоследовательность  $f_0 \in D, f_0 = w^*\text{-}\lim f_{n_j}$



Теорема утверждает гораздо большее на самом деле и могла бы быть даже четвёртым китом, но четырёх китов не бывает: слишком уж неустойчивая конструкция.

*Доказательство.* Идея такая: выбрать подпоследовательность из  $f_n$ , которая будет сходиться на каждом элементе всюду плотного множества в  $X$ . Выбирать мы будем, используя диагональный процесс.

$$\begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — плотное множество в } X \\ \{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}, |f_n(x_1)| & \leq \|f_n\| \cdot \|x_1\| = \|x_1\| \\ \Rightarrow \{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty} & \text{ — ограниченная последовательность в } \mathbb{C} \end{aligned}$$

а из анализа известно, что из ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists \text{ подпоследовательность } \{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_{1,n}(x_1) & = z_1 \\ \{f_{1,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}, |f_{1,n}(x_2)| & \leq \|x_2\| \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2,n}(x_2) = z_2 \end{aligned}$$

отметим, что первое условие мы не потеряли, потому что  $f_{2,n}$  — подпоследовательность  $f_{1,n}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2,n}(x_1) = z_1$ . И так далее, формально говоря, по индукции

$$\begin{aligned} \{f_{j,n}\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{j,n}(x_k) & = z_k, k = 1, 2, \dots, j \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,n}(x_j) & = z_j \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} & \dots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2n} & \dots \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \dots & f_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & \dots & \dots & f_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Первая строка имеет предел в точке  $x_1$ , вторая — подстрока первой, есть пределы в точках  $x_1, x_2$ . Каждая строчка добавляет новый предел. Диагональная последовательность, начиная с некоторого момента ( $n \geq j$ ) на диагонали, будет подпоследовательностью  $\{f_{j,m}\}_{m=1}^{\infty}$ . По замечанию 10.6 к критерию  $w^*$ -лим сходимости  $\exists f \in D : f = w^*\text{-}\lim f_{n,n}$   $\square$

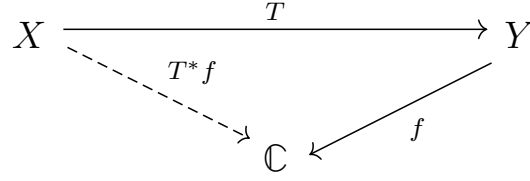


Рис. 10.2: Определение 10.5, коммутативная диаграмма

## 10.5. Сопряжённые операторы в нормированном пространстве

**Определение 10.5.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Определим  $T^* : Y^* \rightarrow X^* : f \in Y^*, x \in X, (T^*f)(x) := f(Tx)$

**Теорема 10.10** (простейшие свойства сопряженного оператора).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), T \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow$

1.  $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*), \|T^*\| = \|T\|$
2.  $\alpha \in \mathbb{C}, (\alpha T)^* = \alpha T^*$
3.  $T, S \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow (T + S)^* = T^* + S^*$
4.  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), (Z, \|\cdot\|), X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z, T \in \mathcal{B}(X, Y), S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow (ST)^* = T^*S^*$

1. Проверим, что  $T^* \in \text{Lin}(Y^*, X^*)$

$$\alpha \in \mathbb{C}, f \in Y^*, x \in X, (T^*(\alpha f))(x) = (\alpha f)(Tx) = \alpha f(Tx) = \alpha(T^*(f))(x) \forall x \in X \\ \Rightarrow T^*(\alpha f) = \alpha T^*(f)$$

$$f, g \in Y^*, x \in X, (T^*(f + g))(x) = (f + g)(Tx) = f(Tx) + g(Tx) = \\ = (T^*(f))(x) + (T^*(g))(x) \forall x \in X$$

линейность проверили. Теперь посчитаем норму  $T^*$

$$\|T^*\| = \sup_{\{f \in Y^*, \|f\| \leq 1\}} \|T^*f\| =$$

но при фиксированном  $f$  у нас получается линейный функционал, поэтому

$$= \sup_{\{\|f\|_{Y^*} \leq 1\}} \left( \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} |(T^*f)(x)| \right) =$$

нам ничего не стоит поменять  $\sup$  местами. По следствию из теоремы Хана-Банаха для нормированного пространства получаем

$$= \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \left( \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |f(Tx)| \right) = \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \|Tx\| = \|T\|$$

□

2.

$$\alpha \in \mathbb{C}, f \in Y^*, x \in X$$

$$(\alpha T^*)(f)(x) = f((\alpha T)(x)) = \alpha f(Tx) = \alpha (T^*f)(x) \forall x, \forall f \Rightarrow (\alpha T)^* = \alpha T^*$$

□

3 доказывается аналогично

4.

$$(ST)^* : Z^* \rightarrow X^*, f \in Z^*, x \in X$$

$$(((ST)^*)(f))(x) = f((ST)(x)) = f(S(Tx)) = (S^*f)(Tx) = (T^*(S^*f))(x) \\ \forall x \in X, \forall f \in Z^* \Rightarrow (ST)^* = T^*S^*$$

□

Посмотрим, как выглядит сопряжённый оператор для интегрального оператора. Будем думать, что речь идёт о мере Лебега, чтобы не пугаться каких-то абстрактных мер, хотя Лебег тут совершенно ни при чём.

**Теорема 10.4.**

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, K(x, y) \in L^p(\mathbb{R}^{n+m}), 1 < p < +\infty$$

$$M = \|K\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(\mathcal{K}(f))(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x, y) f(y) dy, f \in L^q(\mathbb{R}^m)$$

$dx$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $dy$  в  $\mathbb{R}^m$ ,  $dx dy$  — в  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Тогда

1.  $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^m), L^p(\mathbb{R}^n))$
2.  $(\mathcal{K}^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)g(x)dx$

Ядро сопряженного оператора мы должны записать таким образом, чтобы интегрирование происходило по второй переменной. Если мы запишем 2 как  $(\mathcal{K}^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x)g(x)dx$ . Сопоставляя эти 2 равенства, мы заключаем, что  $K^*(y, x) = K(x, y)$ . То есть ядро сопряженного оператора получается перестановкой координат  $x$  и  $y$ .

1. Справедлива теорема Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)|^p dx \right) dy < +\infty \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)|^p dx < +\infty \text{ для п.в. } y \text{ по мере Лебега } dy \text{ в } \mathbb{R}^m$$

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ фиксируем, } f \in L^q$$

$$|(\mathcal{K}f)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} K(x, y)f(y)dy \right| \leq [[\text{Гёльдер}]] \left( \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_q$$

последний интеграл конечен для п.в.  $x$ . Теперь хотим оценить норму этой штуки в  $L^p$

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{K}f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_q \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p dy \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}}_M = M \|f\|_q$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} \in \mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n)), \|K\| \leq M$$

□

2.

$$K^*, (L^p(\mathbb{R}^n))^* = L^q(\mathbb{R}^n), (L^q(\mathbb{R}^m))^* = L^p(\mathbb{R}^m)$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}^* \in \mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^m))$$

$$T \in \mathcal{B}(X, Y), T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$$

$$f \in Y^*, x \in X \quad \langle f, Tx \rangle = \langle T^*f, x \rangle \Leftrightarrow (T^*f)(x) = f(Tx)$$

$$f \in L^p, g \in L^q, \langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu, f \in (L^q)^*, f \text{ действует на } g \text{ или } g \in (L^p)^*, g \text{ действует на } f$$

$$\langle g, \mathcal{K}f \rangle = \langle \mathcal{K}^*g, f \rangle \quad f \in L^q(\mathbb{R}^m), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle g, \mathcal{K}f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left( \int_{\mathbb{R}^m} K(x, y)f(y)dy \right) dx =$$

по теореме Фубини можем переписать

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) g(x) dx \right) dy \\
 &\Rightarrow (\mathcal{K}^* g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) g(x) dx, g \in L^q(\mathbb{R}^n) \\
 &\quad K^* — ядро оператора  $\mathcal{K}^*$  \\
 &(\mathcal{K}^* g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x) g(x) dx \Rightarrow K^*(y, x) = K(x, y)
 \end{aligned}$$

□

## 10.6. Сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве

**Определение 10.6** ( $T^*$ ).  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $y \in H$ ,  $y$  — фиксирован,  $x \in H$

$$G_y(x) := (Tx, y)$$

из определения  $G_y$ , очевидно,  $G_y \in \text{Lin}(H, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
 |G_y(x)| &\leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x \in H \Rightarrow \\
 G_y &\in H^*, \|G_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|
 \end{aligned}$$

воспользуемся теоремой Рисса (тык). У нас есть непрерывный оператор, значит, есть какой-то элемент, который его порождает

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \exists ! z \in H \\
 G_y(x) &= (x, z) \quad \forall x \in H, \|G_y\| = \|z\|
 \end{aligned}$$

можно было бы написать сразу это, всё выше просто оправдание корректности

$$T^* y := z, \text{ то есть } (Tx, y) = (x, T^* y) \quad \forall x, y \in H$$

$\|T^* y\| = \|G_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$ ,  $T^*$  — эрмитово сопряжение к  $T$ . Но слово «эрмитовость» скоро отомрёт.

**Теорема 10.5** (простейшие свойства эрмитово сопряженного оператора).

1.  $T^{**} = T$
2.  $T^* \in \mathcal{B}(H), \|T^*\| = \|T\|$
3.  $\alpha \in \mathbb{C} (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
4.  $(S + T)^* = S^* + T^*$
5.  $(ST)^* = T^* S^*$
6.  $\exists T^{-1} \Leftrightarrow \exists (T^*)^{-1}$  и при этом  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

1.

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, T^{**}x)} = (T^{**}x, y) \forall y \in H \\ \Rightarrow Tx = T^{**}x \forall x \in H$$

□

2.  $T^* \in \text{Lin}(H)$  — очевидно. При определении  $T^*$  доказали  $\|T^*y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \Rightarrow T^* \in \mathcal{B}(H), \|T^*\| \leq \|T\|$ . Теперь вот такой трюк мы будем часто использовать

$$\Rightarrow \|T^{**}\| \leq \|T^*\|, \text{ но } T^{**} = T \Rightarrow \|T\| = \|T^*\|$$

□

3.

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \Rightarrow ((\alpha T)x, y) = \begin{cases} = (x, \bar{\alpha} T^*y) \\ = (x, (\alpha T)^*y) \end{cases} \Rightarrow (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

□

4, 5 — очевидно.

6.

$$\text{пусть } \exists T^{-1} \Rightarrow TT^{-1} = I, T^{-1}T = I, I^* = I \stackrel{5}{\Rightarrow} \\ (T^{-1})^* T^* = I, T^* (T^{-1})^* = I \\ \begin{cases} T^* (T^{-1})^* = I \Rightarrow \exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \\ \text{пусть } \exists (T^*)^{-1} \Rightarrow \exists (T^{**})^{-1}, \text{ но } T^{**} = T \end{cases}$$

□

**Замечание 10.8.** Если  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\exists T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Leftrightarrow \exists (T^*)^{-1} \in \mathcal{B}(X^*, Y^*)$$

и при этом  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

В одну сторону как для гильбертовых пространств, в другую сторону, чтобы доказать похожее, мы пользовались фактом  $T^{**} = T$ , здесь же этого нет. Оставим без доказательства.

**Следствие 10.4** (интегральный оператор в  $L^2$  и его сопряженный).

$H = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ ,  $dx = \lambda_n$  — мера Лебега

$$K(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^{2n}, d\lambda_{2n}) \quad \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = M < +\infty$$

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy \Rightarrow$$

$$1. \mathcal{K} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$$

$$2. \mathcal{K}^* \text{ — эрмитово-сопряженный}$$

$$(\mathcal{K}^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x, y)} g(x) dx, \mathcal{K}^* \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$$

$$(\mathcal{K}^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x) g(x) dx \Rightarrow K^*(y, x) = \overline{K(x, y)}$$

Первое утверждение уже доказывали.

2 утверждение.

$$(\mathcal{K}f, g) = (f, \mathcal{K}^*g) \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$(\mathcal{K}f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx = [[ \text{теорема Фубини} ]]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) \overline{g(x)} dx \right) dy = \left( f, \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x, y)} g(x) dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathcal{K}^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x, y)} g(x) dx$$

□

Введём ещё одно полезное понятие.

**Определение 10.7.**  $X$  — нормированное,  $T \in \mathcal{B}(X)$ .  $Y \subset X$ ,  $Y$  — подпространство в алгебраическом смысле.  $Y$  — инвариантное подпространство для  $T$ , если  $T(Y) \subset Y$ .

Иными словами, можно рассмотреть сужение оператора на  $Y$ , это тоже будет оператор.

Прежде чем доказывать что-то простое, сначала небольшое замечание.

**Замечание 10.9** (Проблема Банаха).  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X)$ . Существует ли замкнутое инвариантное подпространство ( $Y \neq \{0\}, Y \neq X$ )

Опять Енфло в 1974 предъявил контр-пример.

Если  $H$  — гильбертово, то ответ неизвестен. Может так, может и не так, никто не знает. Стараются математики, бьются головой, всё бестолку. А мы докажем что-то совсем простое.

**Теорема 10.11.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $Y$  — инвариантное подпространство для  $T \Rightarrow Y^\perp$  — инвариантное для  $T^*$

*Доказательство.* Просто по определению. Возьмём  $x \in Y^\perp, y \in Y$

$$\begin{aligned} (T^*x, y) &= (x, Ty) = 0 \text{ так как } x \in Y^\perp, Ty \in Y \\ &\Rightarrow T^*x \in Y^\perp \Rightarrow T^*(Y^\perp) \subset Y^\perp \end{aligned}$$

□

**Определение 10.8** (самосопряжённый оператор).  $H$  — гильбертово пространство.  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T$  — **самосопряжённый**, если  $T = T^*$

$$\Leftrightarrow (Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H$$

**Пример 10.8.**  $H$  — гильбертово,  $M$  — замкнутое подпространство.  $P : H \rightarrow M$ ,  $P$  — ортогональный проектор, тогда  $P = P^*$



**Следствие 10.5** (из последней теоремы).  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T = T^*$ ,  $Y$  — инвариантное подпространство для  $T \Rightarrow Y^\perp$  — инвариантное подпространство для  $T$

**Теорема 10.12** (о ядре и образе оператора и его сопряженного).  $H$  — гильбертово пространство,  $T \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow$

1.  $H = \text{Ker } T \oplus \overline{T^*(H)}$  ( $\overline{T^*(H)}$  — замыкание образа)
2.  $H = \text{Ker } T^* \oplus \overline{T(H)}$

Такое часто бывает полезно при разложении гильбертова пространства.

*Доказательство.* Сначала сделаем абстрактное замечание. Пусть  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле для  $H$  (не обязательно замкнутое, даже интереснее, если оно не замкнутое). Может, мы когда-то уже отмечали, что  $L^\perp = \overline{L}^\perp$ . Если  $M = \{x : x \perp L\} = \{x : x \perp \overline{L}\} \Rightarrow$

$$H = \overline{L} \oplus M$$

в нашем случае будет  $L := T^*(H)$

вычислим  $L^\perp$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \perp T^*(H) &\Leftrightarrow 0 = (x, T^*y) \forall y \in H \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 = (Tx, y) \forall y \in H \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } T \\ &\Rightarrow H = \text{Ker } T \oplus \overline{T^*(H)} \end{aligned}$$

применим 1 к  $T^*$

$$\Rightarrow H = \text{Ker } T^* \oplus \overline{T^{**}(H)}, T^{**} = T$$

□

## Глава 11

# Спектр и резольвента оператора

**Определение 11.1.**  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X)$ ,  $Ix = x, x \in X$  — тождественный оператор

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad V(\lambda) : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(X) \quad V(\lambda) = \lambda I - T$$

Теперь множество комплексных чисел разбивается на 2 подмножества.  $\lambda$  — **регулярное значение**, если  $V(\lambda)$  — биекция [[ теорема Банаха ]]  $\Rightarrow \exists (V(\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ .

$\rho(T) = \{\lambda - \text{регулярная}\}$  — **резольвентное множество**

$$R(\lambda) : \rho(T) \rightarrow \mathcal{B}(X) \quad R(\lambda, T) = R(\lambda) = (V(\lambda))^{-1}$$

$R$  — **резольвента**

Операторно-значная функция: комплексному числу сопоставляем оператор.

Откуда берется такое пугающее слово резольвента? Рассмотрим уравнение  $\lambda x - Tx = y$ . Если  $\forall y \in X \exists! x$  — решение этого уравнения, то  $\lambda$  — регулярное значение, а уравнение — разрешимо (resolve). Англосаксонское слово проникло и сюда

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) \text{ — спектр оператора}$$

Посмотрим, из каких частей состоит этот спектр. Почему  $V$  может быть не биекцией? В конечномерных пространствах он мог быть

только не инъекцией, но в бесконечномерных может быть и не сюръекцией.

1.  $\sigma_p$  — точечный спектр (p = point)

$$\lambda \in \sigma_p(T) \text{ если } \text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$$

$$X_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T), x \in X_\lambda \Leftrightarrow Tx = \lambda x$$

$\lambda$  — собственное значение,  $X_\lambda$  — собственное подпространство

2.  $\sigma_c(T)$  — непрерывный спектр (c = continuous)

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}, (V(\lambda))(X) \text{ — всюду плотен в } X\}$$

$$\text{то есть } \overline{(\lambda I - T)(X)} = X$$

хоть и не биекция, но почти — на всюду плотном множестве существует решение уравнения

3.  $\sigma_r(T)$  — остаточный спектр (r = remainder)

$$\sigma_r = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}, \overline{\lambda I - T(X)} \subsetneq X \right\}$$

образ  $(V(\lambda))(X)$  не плотен в  $X$

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

части спектра не пересекаются

**Пример 11.1.** Если  $\dim X < +\infty$ , то  $\sigma(T) = \sigma_p(T)$

**Теорема 11.1** (свойства резольвенты).  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X)$ ,  $\lambda, \mu \in \rho(T)$

1.  $R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$
2.  $R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$  (тождество Гильберта)
3.  $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$
4.  $\rho(T)$  — открытое множество,  $\mu \in \rho(T), \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \right\} \subset \rho(T)$
5.  $R(\lambda)$  — непрерывная функция, то есть  $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \|R(\lambda) - R(\mu)\| = 0, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda) = 0$
6.  $F \in (\mathcal{B}(X))^*, g(\lambda) = F(R(\lambda)), \lambda \in \rho(T) \Rightarrow g(\lambda)$  — аналитическая в  $\rho(T)$  (то есть  $\exists g'(\lambda)$ )

1.

$$\begin{aligned} V(\lambda)V(\mu) &= (\lambda I - T)(\mu I - T) = \\ &= [[I \text{ коммутирует со всеми}}] = (\mu I - T)(\lambda I - T) = V(\mu)V(\lambda) \\ AB &= BA, A, B \in \mathcal{B}(X), \exists A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow \\ (AB)^{-1} &= (BA)^{-1} \Leftrightarrow B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

□

2.

$$\begin{aligned} A^{-1} - B^{-1} &= A^{-1}(B - A)B^{-1} \\ A = V(\lambda) &= \lambda I - T \quad B = V(\mu) = \mu I - T \\ B - A &= (\mu - \lambda)I \\ \Rightarrow R(\lambda) - R(\mu) &= R(\lambda)(\mu - \lambda)I \cdot R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu) \end{aligned}$$

это рассуждение связано с утверждениями об открытости множества обратимых операторов, об обратимости оператора, близкого к тождественному, и всё это мы будем сейчас использовать □

3.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \|T\| \\ V(\lambda) = \lambda I - T = \lambda \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right), \left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| < 1 \\ \text{[[ теорема об обратимости оператора, близкого к тождественному ]]} \Rightarrow \\ \exists \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} \Rightarrow R(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} \end{aligned}$$

□

4.

$$\begin{aligned} A \in \text{In}(X), \text{ то есть } A \text{ обратим, [[ теорема об открытости } \text{In}(X) \text{ ]]} \Rightarrow \\ \|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow B \in \text{In}(X) \\ A = \mu I - T \quad B = \lambda I - T \\ \|A - B\| = |\lambda - \mu| \quad |\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \Rightarrow \exists B^{-1}, \text{ т.е. } R(\lambda), \text{ т.е.} \\ \lambda \in \rho(T) \end{aligned}$$

□

5.

$$\begin{aligned} \|V(\lambda) - V(\mu)\| &= |\lambda - \mu| \\ \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \|V(\lambda) - V(\mu)\| &= 0 \\ \varphi : \text{In}(X) &\rightarrow \text{In}(X) \quad \varphi(A) := A^{-1} \end{aligned}$$

$\varphi$  — непрерывное отображение, доказали в теореме об открытости  $\text{In}(X)$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \varphi(V(\lambda)) = \varphi(V(\mu)) \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \mu} R(\lambda) = R(\mu)$$

теперь воспользуемся формулой, которую мы вывели в доказательстве пункта 3

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} T = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right) = I \text{ [[по непрерывности } \varphi \text{]]} \Rightarrow \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} = I \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} = 0 \\ R(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} \end{aligned}$$

□

6. напомним просто тождество Гильберта

$$\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} \stackrel{2}{=} \frac{(\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda)R(\mu) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \mu} -R(\mu)^2$$

ура, у нас получилась аналитическая функция со значениями в банаховом пространстве. Но такого у нас еще не было, и чтобы не вводить новый объект, мы просто применим наш функционал

$$\begin{aligned} F \in (\mathcal{B}(X))^* \quad g(\lambda) &= F(R(\lambda)) \\ \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} &= \frac{F(R(\lambda)) - F(R(\mu))}{\lambda - \mu} = F\left(\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu}\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \mu} \\ &= -F((R(\mu))^2) \Rightarrow \exists g'(\mu) \forall \mu \in \rho(T) \end{aligned}$$

□

Важная теорема, которая будет простым следствием из доказанных свойств

**Теорема 11.2** (компактность и не пустота спектра).  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow \sigma(T)$  — не пуст и компактен

Достаточно необычно, что для того чтобы показать непустоту спектра, нам понадобится ТФКП, математика всё-таки едина, ёлы-палы!

**Теорема 11.3** (Лиувилль). Пусть  $f(\lambda)$  — аналитическая в  $\mathbb{C}$  и ограниченная, то есть  $\exists M > 0 : |f(\lambda)| \leq M \forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f(\lambda) \equiv \text{const.}$

По секрету, функции, аналитические во всей комплексной плоскости, называются **целыми**.

*Доказательство теоремы Лиувилля.*

$$a \in \mathbb{C} \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\{|z-a|=r\}} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \Rightarrow$$

то есть продифференцировали формулу Коши. Когда функция у нас целая, мы  $r$  можем взять любое

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f'(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M \cdot 2\pi r}{r^2} = \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow f'(a) &= 0 \forall a \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow f(\lambda) &= c \forall \lambda \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

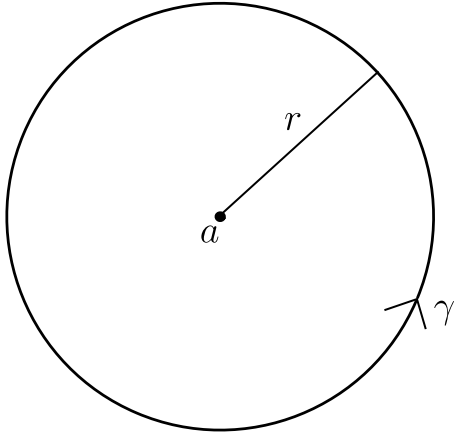


Рис. 11.1: Теорема 11.3

□

*Доказательство теоремы.*  $\rho(T)$  — открыто,  $\rho(T) \subset \mathbb{C} \Rightarrow \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$  — замкнутое.

$|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \in \rho(T) \Rightarrow \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$  — ограниченное  $\Rightarrow \sigma(T)$  — компакт.

$$\begin{aligned} \text{пусть } \sigma(T) \neq \emptyset \Rightarrow \rho(T) = \mathbb{C} \Rightarrow 0 \in \rho(T) \\ V(0) = 0 \cdot I - T = -T, 0 \in \rho(T) \Rightarrow \exists T^{-1} \end{aligned}$$

по следствию о достаточном числе линейных функционалов

$$\exists F \in (\mathcal{B}(X))^* : F(T^{-1}) = \|T^{-1}\|, F(T^{-1}) \neq 0$$

но нас интересует только что  $F(T^{-1}) \neq 0$

$$g(\lambda) = F(R(\lambda)) \quad \underline{g(0) \neq 0}, \text{ 6 свойство } \Rightarrow g(\lambda) \text{ аналитическая в } \mathbb{C}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda) = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(R(\lambda)) = 0$$

$$[[\exists R > 0 : |g(\lambda)| \leq 1 \text{ при } \lambda \geq R, \exists M = \max_{|\lambda| \leq R} |g(\lambda)| \Rightarrow |g(\lambda)| \leq \max\{1, M\}]]$$

применяем теорему Лиувилля

$$g(\lambda) = \text{const}, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0 \Rightarrow g(\lambda) \equiv 0 \Rightarrow \underline{g(0) = 0}$$

$$\text{противоречие} \Rightarrow \sigma(T) \neq \emptyset$$

□

**Определение 11.2** (Спектральный радиус оператора  $T$ ).  
 $r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ . Из теоремы  $\Rightarrow r(T) \leq \|T\|$

Примем без доказательства формулу

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

Наконец, обсудим, как связаны между собой спектр оператора и спектр сопряженного оператора.

**Теорема 11.4** (спектр сопряженного оператора). 1.  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sigma(T^*) &= \sigma(T) \\ \lambda \in \rho(T) &\Rightarrow (R(\lambda, T))^* = R(\lambda, T^*) \end{aligned}$$

2.  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T^*$  — эрмитово сопряженный

$$\begin{aligned} \sigma(T^*) &= \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\} \\ \lambda \in \rho(T) \quad R(\bar{\lambda}, T^*) &= (R(\lambda, T))^* \end{aligned}$$

1.

$$\left. \begin{aligned} \text{пусть } \lambda \in \rho(T) &\Rightarrow \exists (\lambda I - T)^{-1} \\ (\lambda I - T)^* &= \lambda I - T^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists (\lambda I - T^*)^{-1} = ((\lambda I - T)^{-1})^*$$

В обратную сторону по замечанию 10.8 (из существования  $(T^*)^{-1}$  следует существование  $T^{-1}$ ) □

2.

$$(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^* \text{ и так далее}$$

□

Маленькое ДЗ, которое когда-то давали в качестве задачи на 5 на экзамене

**Утверждение 11.1.**  $H$  — гильбертово,  $M$  — замкнутое подпространство.  $P : H \rightarrow M$  — ортопроектор.  $\sigma(P)$ ,  $R(\lambda) = ?$

Иногда кровожадные помощники задавали такие вопросы (но это не на 5, это просто на 1 секунду подумать):  $I$  — тождественный,  $\sigma(I) = ?$



## 11.1. Компактные операторы

**Определение 11.3** (компактный оператор).  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \text{Lin}(X, Y)$ .  $T$  — компактный, если  $T(B_1^X(0))$  — относительно компактен

$\text{Com}(X, Y)$  — множество всех компактных операторов. Если  $X = Y$ , будем писать  $\text{Com}(X)$

**Замечание 11.1.**  $\text{Com}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $T(B_1^X(0))$  — относительно компактно  $\Rightarrow T(B_1^X(0))$  — ограниченное  $\Rightarrow T \in \mathcal{B}(X, Y)$

**Замечание 11.2.**  $\forall A \subset X, A$  — ограниченное,  $T \in \text{Com}(X, Y) \Rightarrow T(A)$  — относительно компактно

Понятно, что если есть относительная компактность образа единичного шара, то его можно раздувать как угодно.

Теперь еще один способ сказать, что оператор — компактный.

**Замечание 11.3.**  $T \in \text{Com}(X, Y) \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — ограниченная  $\Rightarrow \exists \{n_k\}_{k=1}^\infty$  т. ч.  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_{n_k}) = y_0 \in Y$

Вот чем мы будем пользоваться изо всех сил: если последовательность ограниченная, то у нее есть сходящаяся в  $Y$  подпоследовательность.

Более узкий класс операторов, но они же являются и примерами компактных операторов:

**Определение 11.4** (оператор конечного ранга).  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $T$  — оператор конечного ранга, если  $\dim(T(X)) < +\infty$

**Пример 11.2.**

$$\begin{aligned} & \{y_j\}_{j=1}^n, y_j \in Y, \{f_j\}_{j=1}^n, f_j \in X^* \\ & x \in X \quad Tx = \sum_{j=1}^n f_j(x)y_j \\ & \text{rank } T = n \end{aligned}$$

Небольшое ДЗ: показать, что любой оператор конечного ранга имеет такой вид.

**Утверждение 11.2.**  $T$  — оператор конечного ранга  $\Rightarrow T \in \text{Com}(X, Y)$

*Доказательство.*  $\dim(T(X)) < +\infty, T \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow T(B_1^X(0))$  — ограниченное множество в конечномерном пространстве  $\Rightarrow T(B_1^X(0))$  — относительно компактно  $\square$

Существенная теорема о том, как связаны между собой компактность, операторы конечного ранга, конечномерные подпространства.

**Теорема 11.5.**  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \text{Com}(X, Y)$ . Если  $L = \overline{L}$ ,  $L$  — подпространство  $T(X) \Rightarrow \dim L < +\infty$

*Доказательство.* Первая часть доказательства. Допустим, что  $L = T(X)$ . Иными словами, предполагаем, что образ замкнут  $\Rightarrow T(X)$  — банахово как замкнутое подпространство полного пространства  $Y$ . Тогда вот что у нас есть

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow T(X) \text{ [[ теорема Банаха об открытом отображении ]]} \Rightarrow \\ &\exists B_r^{T(X)}(0) \subset T(B_1^X(0)) \text{ — относительно компактно} \\ &\Rightarrow B_r^{T(X)}(0) \text{ — относительно компактно} \\ &\text{[[ теорема Рисса ]]} \dim(T(X)) < +\infty \end{aligned}$$

Вторая часть,  $L = \overline{L} \subset T(X)$ , и тут другая идея, как это свести к предыдущему пункту. Рассмотрим  $X_1 = T^{-1}(L)$ ,  $X_1$  — банахово, потому что  $T^{-1}$  — непрерывный

$$T(X_1) = L, T \in \text{Com}(X_1, L) \stackrel{1}{\Rightarrow} \dim L < +\infty$$

$\square$

**Следствие 11.1.**  $X$  — банахово,  $T \in \text{Com}(X)$

1. Если  $T(X) = X$ , то  $\dim X < +\infty$
2. Если  $\dim X = +\infty$ , то  $0 \in \sigma(T)$

*Доказательство.* Первое очевидно. Второе от противного, предположим, что  $0 \in \rho(T)$

$$0 \in \rho(T) \Leftrightarrow V(0) = 0 \cdot I - T = -T, \exists T^{-1} \Rightarrow T(X) = X \text{ — противоречие с } 1 \\ \Rightarrow 0 \in \sigma(T)$$

□

Посмотрим теперь, какие арифметические операции можно выполнять с компактными операторами

**Теорема 11.6** (арифметические операции и предельный переход в  $\text{Com}(X, Y)$ ).  $X, Y$  — банаховы

1.  $\text{Com}(X, Y)$  — замкнутое подпространство в  $\mathcal{B}(X, Y)$ . Поэтому будет сложение, композиция, умножение на константу и переход к пределу
2.  $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ ,  $X, Y, Z$  — банаховы
  - а)  $T \in \mathcal{B}(X, Y), S \in \text{Com}(Y, Z) \Rightarrow ST \in \text{Com}(X, Z)$
  - б)  $T \in \text{Com}(X, Y), S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow ST \in \text{Com}(X, Z)$

1.

$$T \in \text{Com}(X, Y), \alpha \in \mathbb{C} \text{ [[ очевидно ]] } \Rightarrow \alpha T \in \text{Com}(X, Y) \\ T, S \in \text{Com}(X, Y) \quad B = B_1^X(0)$$

вспомним, что в полном пространстве относительная компактность эквивалентна вполне ограниченности

$$T(B) \text{ — относительно компактно } \Leftrightarrow \text{ вполне ограничено}$$

хотим воспользоваться тем, что  $T(B), S(B)$  — вполне ограничены, а значит,  $(S + T)(B)$  будет вполне ограниченным

$$\varepsilon > 0 \exists E \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } T(B) \\ \exists F \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } S(B) \\ E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\} \text{ — конечная } 2\varepsilon\text{-сеть для множества } T(B) + S(B) \\ (T + S)(B) \subset T(B) + S(B) \\ \Rightarrow (T + S)(B) \text{ — вполне ограничено } \Rightarrow \text{ относительно компактно}$$

Проверим замкнутость  $\text{Com}(X, Y)$ . Возьмём

$$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, T_n \in \text{Com}(X, Y)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$$

наша мечта проверить, что  $T$  — компактный оператор. Опять-таки воспользуемся вполне ограниченностью

$$\begin{aligned} & \text{пусть } \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \|T_n - T\| < \varepsilon \\ & \exists E \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } T_n(B) \\ & \Rightarrow E \text{ — } 2\varepsilon\text{-сеть для } T(B) \Rightarrow T(B) \text{ — вполне ограничено} \end{aligned}$$

□

$$2. X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z, B = B_1^X(0)$$

Первый пункт:  $T \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow T(B)$  — ограниченное множество  $\Rightarrow S(T(B))$  — относительно компактно.

Второй пункт:  $T \in \text{Com}(X, Y) \Rightarrow T(B)$  — относительно компактен.  $S$  — непрерывное отображение  $\Rightarrow S(T(B))$  — относительно компактно.

□

Вот какую умность можно сказать:

**Следствие 11.2.**  $X$  — банахово,  $\text{Com}(X)$  — замкнутый двухсторонний идеал алгебры  $\mathcal{B}(X)$

## 11.2. Спектр компактного оператора

Замечание-напоминание, которое, вероятно, было в алгебре, тут даже никакой непрерывности не требуется

**Замечание 11.4.**  $X$  — линейное пространство,  $T \in \text{Lin}(X)$ ,  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n, \lambda_j \neq \lambda_k$  при  $j \neq k$

$$Tx_j = \lambda_j x_j, x_j \neq 0 \Rightarrow \{x_j\}_{j=1}^n \text{ — линейно независимы}$$

**Теорема 11.7.**  $T \in \text{Com}(X)$ ,  $X$  — банахово,  $\delta > 0$ ,  $X_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T)$  — собственное подпространство, соответствующее  $\lambda$

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(T), |\lambda| > \delta} \dim X_\lambda < +\infty$$

Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственным числам  $\lambda$ , таким, что  $|\lambda| > \delta$ , конечно.

*Доказательство.* Доказывать будем от противного.

пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — линейно независимы,  $Tx_n = \lambda_n x_n, |\lambda_n| > \delta$

возможно,  $\lambda_n = \lambda_m$  при  $n \neq m$

$$L_n = \mathcal{L}\{x_j\}_{j=1}^n, L_n \subsetneq L_{n+1}$$

[[ следствие из леммы Рисса 5.10]]  $\Rightarrow \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \|y_n\| = 1, \rho(y_{n+1}, L_n) \geq \frac{1}{2}$

$$T \in \text{Com}(X) \Rightarrow \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \\ \exists \lim_{k \rightarrow \infty} Ty_{n_k}$$

Проверим, что  $\|Ty_n - Ty_m\| > \varepsilon(\delta) > 0$ , то есть не существует фундаментальной подпоследовательности

$$y_n = \alpha_n x_n + u_n, u_n \in L_{n-1} \\ Ty_n = \alpha_n \lambda_n x_n + Tu_n, Tx_j = \lambda_j x_j \Rightarrow T(L_n) \subset L_n$$

учёным образом говоря,  $L_n$  — инвариантное подпространство относительно оператора  $T$

$$Ty_n = \lambda_n(\alpha_n x_n + u_n) - \lambda_n u_n + Tu_n = \lambda_n y_n + v_n, v_n \in L_{n-1}$$

сейчас докажем, что  $\|Ty_n - Ty_m\|$  отделена от нуля, это и есть наша мечта, это и будет противоречием. пусть  $n > m$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n + v_n - Ty_m\| = |\lambda_n| \left\| y_n + \frac{1}{\lambda_n} \left( \underbrace{v_n}_{\in L_{n-1}} - \underbrace{Ty_m}_{\in L_{n-1} \text{ т.к. } n > m} \right) \right\| \geq \\ \delta \rho(y_n, L_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \delta$$

□

Отметим такое тривиальное следствие

**Следствие 11.3.**  $X$  — банахово пространство,  $T \in \text{Com}(X) \Rightarrow$

1.  $\delta > 0, \# \{ \lambda \in \sigma_p(T), |\lambda| \geq \delta \} < +\infty$
2.  $\lambda \in \sigma_p(T), \lambda \neq 0 \Rightarrow \dim X_\lambda < +\infty$
3.  $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{ \lambda_n \}_{n=1}^N, 0 \leq N \leq +\infty$ . Если  $N = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ , можно занумеровать  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

Всё очевидно, разве что про 3 что-то сказать. Вспоминаем одно из эквивалентных определений предела. Вот у нас есть 0, его  $\delta$ -окрестность, знаем что вне окрестности только конечное число элементов последовательности (это и утверждает теорема), а это и значит, что 0 — предел.

### 11.3. Самосопряжённые операторы

**Теорема 11.8** (простейшие свойства самосопряженного оператора).  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H), T = T^*, ((Tx, y) = (x, Ty) \forall x, y \in H)$

1.  $(Tx, x) \in \mathbb{R}$
2.  $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
3.  $\lambda, \mu \in \sigma_p(T), \lambda \neq \mu, Tu = \lambda u, Tv = \mu v \Rightarrow (u, v) = 0$
4.  $\|T\| = \sup_{\{x: \|x\|=1\}} |(Tx, x)|$

Свойства 1–3 были доказаны в алгебре, вероятно, да и вообще доказываются в одну секунду. Будем считать их очевидными. Четвертый пункт самый содержательный

1.

$$(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)} \Rightarrow (Tx, x) \in \mathbb{R}$$

□

2.

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_p(T) &\Rightarrow \exists x > 0 : Tx = \lambda x \Rightarrow \\ (Tx, x) &= \lambda(x, x) \Rightarrow \lambda = \frac{(Tx, x)}{\|x\|^2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

3.

$$\begin{aligned} \lambda &\neq \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ из (2)} \\ (Tu, v) &= (\lambda u, v) = \lambda(u, v) \\ (Tu, v) &= (u, Tv) = (u, \mu v) = \mu(u, v) \\ 0 &= (\lambda - \mu)(u, v), \lambda \neq \mu \Rightarrow (u, v) = 0 \end{aligned}$$

□

4.

$$\begin{aligned} Q &= \sup_{\{x: \|x\|=1\}} |(Tx, x)|, \|x\| = 1 \Rightarrow \\ |(Tx, x)| &\leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\| \\ \forall x : \|x\| &= 1 \Rightarrow Q \leq \|T\| \end{aligned}$$

а в другую сторону нужно постараться

$$\begin{aligned} \text{пусть } u \in H, u \neq 0, \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| &= 1 \Rightarrow \left| \left( T \left( \frac{u}{\|u\|} \right), \frac{u}{\|u\|} \right) \right| \leq Q \Rightarrow \\ |(Tu, u)| &\leq Q \|u\|^2 \quad \forall u \in H \\ \text{пусть } x, y \in H, u &= x + y \Rightarrow \\ (T(x + y), x + y) &\leq Q \|x + y\|^2 \\ -(T(x - y), x - y) &\leq Q \|x + y\|^2 \end{aligned}$$

неравенства складывать можно, а вычитать нельзя, поэтому во втором неравенстве появился минус

$$\begin{aligned} (T(x + y), x + y) &= (Tx, x) + (Ty, x) + (Tx, y) + (Ty, y) = \\ &= [(Tx, y) = (x, Ty) = \overline{(Ty, x)}] = \\ &= (Tx, x) + 2 \operatorname{Re}(Tx, y) + (Ty, y) \\ (T(x - y), x - y) &= (Tx, x) - 2 \operatorname{Re}(Tx, y) + (Ty, y) \end{aligned}$$

вспомним тождество параллелограмма

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Re}(Tx, y) &\leq 2Q(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ \text{пусть } \|x\| &= 1, \text{ пусть } Tx \neq 0, y = \frac{Tx}{\|Tx\|} \Rightarrow \|y\| = 1 \Big\} \Rightarrow \\ 4 \operatorname{Re} \left( Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|} \right) &\leq 4Q \Rightarrow \|Tx\| \leq Q \quad \forall x, \|x\| = 1 \\ \Rightarrow \|T\| &= \sup_{\{x: \|x\|=1\}} \|Tx\| \leq Q \end{aligned}$$

□

**Определение 11.5** (границы оператора).

$$T = T^*, M = \sup_{x: \|x\|=1} (Tx, x), m = \inf_{x: \|x\|=1} (Tx, x)$$

$m, M$  — границы оператора  $T$

**Замечание 11.5.**  $T = T^* \Rightarrow \|T\| = \max\{|m|, M\}$

Еще одна причина, почему «границы»

**Замечание 11.6** (без доказательства).  $T = T^* \Rightarrow \sigma(T) \subset [m, M]$

Вот минимальные сведения о самосопряжённых операторах

## 11.4. Компактные самосопряжённые операторы

**Теорема 11.9.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H), T \in \text{Com}(H), T = T^*$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \sigma_p(T), |\lambda| = \|T\|$$

*Доказательство.*

$$M = \sup_{x: \|x\|=1} (Tx, x), m = \inf_{x: \|x\|=1} (Tx, x)$$

$$\|T\| = \max\{|m|, M\}$$

$$\text{пусть } \|T\| = M \quad \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x_n\| = 1$$

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n, x_n), T \in \text{Com}(H), \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ т.ч.}$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y$$

не умаляя общности, просто чтобы не писать много индексов,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$ . Сейчас убедимся, что  $y$  — искомый собственный вектор, то есть  $y \neq 0, Ty = My$

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\| = M$$

$$\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| \Rightarrow \|y\| \leq M$$

$$0 \leq \|Tx_n - My_n\|^2$$



наша мечта доказать, что эта разница стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Mx_n\|^2 &= (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) = \underbrace{\|Tx_n\|^2}_{\rightarrow \|y\|^2} - \underbrace{M(Tx_n, x_n)}_{\rightarrow M^2} - \\ &\quad - \underbrace{M(x_n, Tx_n)}_{\rightarrow M^2} + M^2 \|x_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|y\|^2 - M^2 \\ &\Rightarrow \|y\| \geq M \Rightarrow \|y\| = M \Rightarrow y \neq 0 \end{aligned}$$

возвращаемся к тому, с чего начинали

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n &= M \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow y = M \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ [[ применим } T \text{ ]]} \Rightarrow \\ Ty &= M \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n}_{=y} \Rightarrow Ty = My \end{aligned}$$

$$\text{Если } \|T\| = |m|, T_1 = -T \sup_{\{x: \|x\|=1\}} (T_1 x, x) = -m$$

уже показали, что  $\exists y \neq 0 : T_1 y = -my \Rightarrow Ty = my, \lambda \in \sigma_p(T), \lambda = m$   
 $|\lambda| = |m|$

короче говоря, применим первую часть доказательства к  $T_1$  и получим то, что надо  $\square$

**Теорема 11.10** (Гильберт-Шмидт).  $H$  — гильбертово,  $T \in \text{Com}(H), T = T^*, \sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n=1}^N, 0 \leq N \leq +\infty$

$H_{\lambda_n} = \text{Ker}(\lambda_n I - T), P_{\lambda_n}$  — ортогональный проектор на  $H_{\lambda_n}$

$$\Rightarrow T = \sum_{n=1}^N \lambda_n P_{\lambda_n}$$

если  $N = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - \sum_{k=1}^n \lambda_k P_{\lambda_k}\| = 0$

*Доказательство.* Доказательство действительно напоминает то, как это делается в алгебре. Отщепляем собственные подпространства. Тут мы ещё можем и перейти к пределу. Сначала сделаем такое абстрактное действие

$\lambda \in \sigma_p(T), \lambda \neq 0, H_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T), P_\lambda : H \rightarrow H_\lambda$  — ортпроектор

и что за отщепление?

$$\tilde{T} = T - \lambda P_\lambda$$

сейчас отметим, что он самосопряженный, компактный, собственные числа и собственные подпространства такие же, как у оператора  $T$ . Обсудим подробнее связь  $T$  и  $\tilde{T}$

$$(\tilde{T})^* = T^* - \bar{\lambda} P_\lambda^* = T - \lambda P_\lambda \text{ т.к. } \lambda \in \mathbb{R}, T = T^*, P_\lambda^* = P_\lambda$$

$$L := H_\lambda^\perp \text{ то есть } H = H_\lambda \oplus L$$

так как  $P_\lambda$  отправляет элементы из  $L$  в  $0$ , если  $x \in L = H_\lambda^\perp, \tilde{T} = Tx - \underbrace{\lambda P_\lambda(x)}_0$ , а если  $x \in H_\lambda, Tx = \lambda x, \tilde{T}x = Tx - \underbrace{\lambda P_\lambda(x)}_{\lambda x}$

$$\tilde{T}|_L = T, \tilde{T}|_{H_\lambda} = 0$$

$$\text{пусть } \mu \in \sigma_p(T), \mu \neq 0, \mu \neq \lambda \Rightarrow H_\mu \perp H_\lambda \Rightarrow H_\mu \subset L$$

$$\Rightarrow \mu \in \sigma_p(\tilde{T}), \text{Ker}(\mu I - \tilde{T}) = H_\mu = \text{Ker}(\mu I - T)$$

то есть отщепление никак не испортит остальные собственные числа и собственные подпространства

$$\exists \lambda_1 \quad \lambda_1 \in \sigma_p(T), |\lambda_1| = \|T\| \text{ так как мы знаем, что } \forall \lambda \in \sigma(T), |\lambda| \leq \|T\|$$

$\lambda_1$  имеет наибольший возможный модуль

если вдруг окажется, что  $\lambda_1 = 0$ , то  $T = 0$ . Тогда вообще непонятно, что утверждает теорема, ноль равен сумма пустого числа слагаемых... далее пусть  $T \neq 0$

$$T_1 = T \quad T_2 = T_1 - \lambda_1 P_{\lambda_1}$$

$$\text{если } T_2 = 0, \text{ то } T = \lambda_1 P_{\lambda_1}$$

$$\text{если } T_2 \neq 0, \text{ то } \exists \lambda_2 = \|T_2\| = \sup_{\{x: \|x\|=1\}} |(T_2 x, x)| = \sup_{\{x: \|x\|=1, x \perp H_{\lambda_1}\}} |(Tx, x)|$$

$$\text{и так далее } T_n = T - \lambda_1 P_{\lambda_1} - \dots - \lambda_{n-1} P_{\lambda_{n-1}}$$

$$\text{если } T_n = 0, \text{ то } T = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k P_{\lambda_k}$$

$$\text{если } \forall n \quad T_n \neq 0 \quad \|T_n\| = |\lambda_n| = \sup_{\{x: \|x\|=1, x \perp H_{\lambda_j}, 1 \leq j \leq n-1\}} |(Tx, x)|$$

$$\text{если } N = +\infty, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

$$|\lambda_n| = \left\| T - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k P_{\lambda_k} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

**Теорема 11.11** (Гильберт-Шмидт). В сепарабельном гильбертовом пространстве у самосопряженного компактного оператора существует О.Н.Б. из собственных векторов

Это та самая теорема, которая обещалась на первой лекции! Тут уже почти нечего доказывать.

Покороче:  $H$  — гильбертово,  $T = T^*$ ,  $T \in \text{Com}(H) \Rightarrow \exists \{e_n\}_{n=1}^\infty$  О.Н.Б.,  $e_n$  — собственные векторы.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) \setminus \{0\} &= \{\lambda_n\}_{n=1}^N, 1 \leq N \leq +\infty \\ H_{\lambda_n} &= \text{Ker}(\lambda_n I - T), m_n = \dim H_{\lambda_n} \\ m_n &< +\infty, \{e_{n,j}\}_{j=1}^{m_n} \text{ — О.Н.Б. в } H_{\lambda_n} \end{aligned}$$

возьмём все векторы и рассмотрим замыкание линейной оболочки

$$L = \overline{\mathcal{L}\{e_{n,j}\}_{n=1, 1 \leq j \leq m_n}^N} \text{ — замыкание линейной оболочки}$$

используя предыдущую теорему, проверим, что  $L = \overline{T(H)}$

$$Te_{n,j} = \lambda_n e_{n,j}, \lambda_n \neq 0 \Rightarrow e_{n,j} = T \left( \frac{e_{n,j}}{\lambda_n} \right) \Rightarrow L \subset \overline{T(H)}$$

а чтобы показать включение в другую сторону, понадобится предыдущая теорема

$$x \in H \text{ по предыдущей теореме } Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n P_{\lambda_n} x \Rightarrow Tx \subset L \Rightarrow T(H) \subset L$$

$$P_{\lambda_n} x = \sum_{j=1}^{m_n} (x, e_{n,j}) e_{n,j}$$

$L$  — замкнутое подпространство, поэтому нам ничего не стоит и замкнуть ( $L = \overline{L}$ )  $\Rightarrow \overline{T(H)} \subset L$ .  $T(H)$  — всегда есть О.Н.Б. из собственных векторов  $H$  (для  $\forall H$ , не обязательно сепарабельного); уже доказал для любого  $T$

$$\begin{aligned} H &= \overline{T(H)} \oplus \text{Ker } T^* = \overline{T(H)} \oplus \text{Ker } T, H_0 = \text{Ker}(0 \cdot I - T) = \text{Ker } T \Rightarrow \\ &H = L \oplus H_0 \end{aligned}$$

$H$  — сепарабельное  $\Rightarrow H_0$  — сепарабельное,  $m_0 = \dim H_0, 0 \leq m_0 \leq +\infty$

$$\begin{aligned} & \{\lambda_{0,j}\}_{j=1}^{m_0} \text{ — О.Н.Б. в } H_0 \\ \Rightarrow & \{e_{n,j}\}_{n=0, 1 \leq j \leq m_n}^N \text{ — О.Н.Б. в } H \end{aligned}$$

□

**Теорема 11.12** (о спектре компактного самосопряженного оператора).  $H$  — бесконечномерное гильбертово пространство,  $T \in \text{Com}(H), T = T^*$

$$\Rightarrow \sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$$

0 может быть собственным числом, а может и не быть. Остальные комплексные числа, не 0 и не собственные, являются регулярными. Начнём с тривиальной леммы. Раньше её вариант давался в качестве задачи на 5 на экзамене.

**Лемма 11.1.**  $\mathcal{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — О.Н.Б.

$$\{\mu_n\}_{n=1}^\infty, \mu_n \in \mathbb{C}, Ae_n := \mu_n e_n$$

продолжим по линейности на  $\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty$

1.  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \{\mu_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty, \|A\| = \|\{\mu_n\}\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n|$
2.  $\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n| = \delta > 0$

*Доказательство первого утверждения леммы.  $\Rightarrow$*

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \Rightarrow \|A\| = \sup_{\{x: \|x\|=1\}} \|Ax\| \geq \|Ae_n\| = |\mu_n| \quad \forall n \\ & \Rightarrow \{\mu_n\} \in l^\infty, \|A\| \geq \|\{\mu_n\}\|_{l^\infty} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{H} & \Rightarrow x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \\ \|Ax\|^2 & = \sum_{n=1}^\infty |\mu_n|^2 |x_n|^2 \leq \|\{\mu_n\}\|_{l^\infty}^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|A\| \leq \|\{\mu_n\}\|_{l^\infty} \end{aligned}$$

□

*Доказательство второго утверждения леммы.*

$$A^{-1}e_n = \frac{1}{\mu_n}e_n \text{ из } 1 \ A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{\mu_n} \right\} \in l^\infty \Leftrightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n| > 0$$

□

*Доказательство теоремы.*

$$\begin{aligned} \{\lambda_n\}_{k=1}^N &= \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ E &= \sigma_p(T) \cup \{0\} \Rightarrow E \text{ — замкнутое} \end{aligned}$$

$E$  замкнуто, поскольку если последовательность конечная, то и обсуждать нечего, а если бесконечная, то их предельная точка обязательно 0

$$\begin{aligned} \lambda \notin E \exists \delta > 0 \ |\lambda - \lambda_n| \geq \delta, |\lambda| \geq \delta \\ H_{\lambda_n}, \{e_{n,j}\}_{j=1}^{m_n} \text{ — О.Н.Б. в } H_{\lambda_n} \\ x \in H \ x = x_0 + x_1, x_0 \in H_0 \quad x_1 \in L = \overline{T(H)} \\ Tx = \underbrace{Tx_0}_{=0} + Tx_1 = \sum_{n=1}^N \lambda_n \sum_{j=1}^{m_n} (x, e_{n,j}) e_{n,j} \end{aligned}$$

мечтаем доказать, что у  $(\lambda I - T)$  есть обратный

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)x &= \lambda x_0 + \sum_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n) \sum_{j=1}^{m_n} (x, e_{n,j}) e_{n,j} \\ |\lambda - \lambda_n| \geq \delta, \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right| &\leq \frac{1}{\delta}, \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right\} \in l^\infty \text{ [[ лемма ]] } \Rightarrow \\ &\exists R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} \\ (\lambda I - T)^{-1}y &= \frac{1}{\lambda} y_0 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \sum_{j=1}^{m_n} (y, e_{n,j}) e_{n,j} \end{aligned}$$

□

**Замечание 11.7** (без доказательства).  $X$  — банахово бесконечномерное,  $T \in \text{Com}(X) \Rightarrow \sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$

## 11.5. Интегральный оператор в $L^2$

Это главный пример оператора, к которому применяют эти все теоремы Гильберта-Шмидта.

**Теорема 11.13.**  $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m, X, Y$  — измеримые по мере Лебега множества.

$$K(x, y) \in L^2(X \times Y, dxdy_{\mathbb{R}^{m+n}})$$

$$\left( \int_X \int_Y |K(x, y)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_Y K(x, y)f(y)dy, f \in L^2(Y)$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} \in \text{Com}(L^2(Y), L^2(X))$$

*Доказательство.* Докажем, что  $\|\mathcal{K}\| \leq \|K(x, y)\|_{L^2(X \times Y)}$ . Идея такая: будем приближить этот компактный оператор операторами конечного ранга. Мы знаем, что они компактные и мы знаем, что можно переходить к пределу. А предел компактных операторов — компактный оператор.

$$L^2(X) \text{ — сепарабельное} \Rightarrow \exists \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ О.Н.Б. в } L^2(X)$$

$$L^2(Y) \text{ — сепарабельное} \Rightarrow \exists \{\psi_m(x)\}_{m=1}^{\infty} \text{ О.Н.Б. в } L^2(Y)$$

$$\int_X \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

проверим  $\{\varphi_n(x)\psi_m(y)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  — О.Н.Б. в  $L^2(X \times Y)$

$$\int_X \int_Y \varphi_n(x) \psi_m(y) \overline{\varphi_k(x) \psi_j(y)} dxdy = \begin{cases} 1 & n = k, m = j \\ 0 & (n, m) \neq (k, j) \end{cases}$$

проверим полноту теперь через критерий: предположим, что есть функция, которая ортогональна этой системе

$\{\varphi_n \psi_m\}$  — полная в  $L^2(X \times Y)$ : пусть  $f(x, y) \in L^2(X \times Y)$ ,  $f \perp \{\varphi_n \psi_m\} \forall n, m$

$$\int_X \int_Y f(x, y) \overline{\varphi_n(x) \psi_m(y)} dx dy = 0 \forall n, m$$

пусть  $n$  — фиксированное

$$\int_Y \left( \int_X f(x, y) \overline{\varphi_n(x)} dx \right) \overline{\psi_m(y)} dy = 0$$

есть некоторая фиксированная функция, ортогональная всем элементам базиса  $\psi_m$

$$\Rightarrow \int_X f(x, y) \overline{\varphi_n(x)} dx = 0 \text{ п.в. } y \in Y$$

$$\text{для п.в. } y \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_X f(x, y) \overline{\varphi_n(x)} dx = 0 \Rightarrow$$

аналогично заключаем, что и  $f(x, y) = 0$  почти всюду

$$f(x, y) = 0 \text{ п.в. } x \in X \Rightarrow f = 0 \text{ в } L^2(X \times Y) \Rightarrow \\ \{\varphi_n(x) \psi(m)y\} \text{ — базис в } L^2(X \times Y)$$

теперь разложим ядро по базису

$$K(x, y) \in L^2(X \times Y) \Rightarrow$$

$$K(x, y) = \sum_{1 \leq i, j < +\infty} \alpha_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y)$$

$$K_n(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y), \|K(x, y) - K_n(x, y)\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

идея такая: рассмотрим интегральный оператор с ядром  $K_n$ , убедимся, что он конечного ранга, значит, он будет компактным, а потом перейдем к пределу, поскольку в множестве компактных операторов можно переходить к пределу, оператор с ядром  $K$  тоже будет компактным оператором

$$f \in L^2(Y), (\mathcal{K}_n f)(x) = \int_Y K_n(x, y) f(y) dy = \int_Y \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y) f(y) dy = \\ = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} \varphi_i(x) \int_Y \psi_j(y) f(y) dy \in \mathcal{L}(\varphi_i(x))_{i=1}^n$$

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{K}_n(L^2(Y)) &= n < +\infty \\ \Rightarrow \mathcal{K}_n &\text{ — оператор конечного ранга} \\ \Rightarrow \mathcal{K}_n &\in \text{Com}(L^2(Y), L^2(X)) \end{aligned}$$

мы учились оценивать норму интегрального оператора с помощью нормы его ядра

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\|_{B(L^2(Y), L^2(X))^*} &\leq \|K(x, y) - K_n(x, y)\|_{L^2(X, Y)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \mathcal{K} &\in \text{Com}(L^2(Y), L^2(X)) \end{aligned}$$

□

Отметим такое следствие, главный пример, к которому применяются теоремы Гильберта-Шмидта

**Следствие 11.4.**  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X$  — измеримое,  $K(x, y) \in L^2(X \times X)$

$$K(y, x) = \overline{K(x, y)} \quad (\mathcal{K}f)(x) = \int_X K(x, y)f(y)dy \quad f \in L^2(X)$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} = \mathcal{K}^*, \mathcal{K} \in \text{Com}(L^2(X))$$

к оператору  $\mathcal{K}$  применили теорему Гильберта-Шмидта. Верно не только для меры Лебега

## 11.6. Каноническое представление компактного оператора

Произвольный компактный оператор нет надежды представлять такой замечательной суммой, поскольку у него может быть только одно собственное число — 0, и весь спектр будет состоять из 0, и ничего не напишешь больше.

**Определение 11.6.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T = T^*$ ,  $T \geq 0$  если  $(Tx, x) \geq 0 \forall x \in H$

$$S = S^*, S \geq T \text{ если } S - T \geq 0$$

**Пример 11.3.**

$$T = T^*, m = \inf_{\{x: \|x\|=1\}} (Tx, x), M = \sup_{\{x: \|x\|=1\}} (Tx, x)$$



$$Ix = x, mI \leq T \leq MI$$

**Теорема 11.14.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow$

1.  $TT^* \geq 0$
2.  $\|TT^*\| = \|T\|^2$
3.  $\text{Ker}(T^*T) = \text{Ker } T$

Теорема хороша тем, что  $T$  произвольный, и мы можем рассмотреть  $TT^*$ , и он уже будет положительно определённый и самосопряжённый

1.

$$(TT^*)^* = TT^* \Rightarrow TT^* \text{ — самосопряжённый}$$

$$(TT^*x, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2 \geq 0$$

□

2.

$$\|x\| = 1 \quad \|TT^*\| = \sup_{\{x: \|x\|=1\}} |(TT^*x, x)| = \sup_{\{x: \|x\|=1\}} \|T^*x\|^2 = \|T\|^2$$

□

3.

$$Tx = 0 \Rightarrow T^*Tx = 0$$

пусть  $T^*Tx = 0 \Rightarrow (T^*Tx, x) = 0 \Rightarrow \underbrace{(Tx, Tx)}_{=\|Tx\|^2} = 0 \Rightarrow Tx = 0$

□

Из того, что оператор положительно определённый, следует, что его собственные числа неотрицательные.

**Замечание 11.8.**  $\mu_n \geq 0$

$$(Tx, x) \geq 0 \quad \forall x \in H, Tx = \lambda x \Rightarrow \lambda = \frac{(Tx, x)}{\|x\|^2} \geq 0$$

**Определение 11.7** (сингулярное число оператора).  $T \in \text{Com}(H)$ ,  $H$  — гильбертово  $\Rightarrow T^*T \in \text{Com}(H)$ ,  $(T^*T)^* = (TT^*) \Rightarrow \sigma_p(T^*T) \setminus \{0\} = \{\mu_n\}_{n=1}^N$ ,  $\mu_n \geq 0$ ,  $\mu_1 > \mu_2 > \dots$ , если  $N = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$

$$s_n = \sqrt{\mu_n}$$

$s_n$  — сингулярное число оператора  $T$

$m_n = \dim(\mu_n I - T^*T)$ ,  $m_n$  — кратность сингулярного числа  $s_n$

**Теорема 11.15** (каноническое разложение компактного оператора).  $H$  — гильбертово,  $T \in \text{Com}(H)$ ,  $\{s_n\}_{n=1}^N$  — сингулярные числа,  $\{m_n\}_{n=1}^N$  — кратности  $\Rightarrow$

$$\{e_{n,j}\}_{n=1, 1 \leq j \leq m_n}^N \text{ — О.Н.С., } \{f_{n,j}\}_{n=1, 1 \leq j \leq m_n}^N \text{ — О.Н.С.,}$$

$$Tx = \sum_{n=1}^N s_n \sum_{j=1}^{m_n} (x, e_{n,j}) f_{n,j}$$

Наибольший интерес теорема представляет в случае бесконечных рядов  $1 \leq N \leq +\infty$

*Доказательство.*

$$H_{\mu_n} = \text{Ker}(\mu_n I - T^*T), m_n = \dim H_{\mu_n}$$

$$\{e_{n,j}\}_{j=1}^{m_n} \text{ — О.Н.Б. в } H_{\mu_n}$$

$$f_{n,j} = \frac{1}{s_n} T e_{n,j}$$

проверим, что они ортогональны друг другу

$$\begin{aligned} (f_{n,j}, f_{m,k}) &= \frac{1}{s_n s_m} (T e_{n,j}, T e_{m,k}) = \frac{1}{s_n s_m} (T^* T e_{n,j}, e_{m,k}) = \frac{\mu_n}{s_n s_m} (e_{n,j}, e_{m,k}) = \\ &= \begin{cases} 1 & n = m, j = k \\ 0 & (n, j) \neq (m, k) \end{cases} \end{aligned}$$

$$x = \underbrace{x_0}_{\in H_0} + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{m_n} (x, e_{n,j}) e_{n,j} \quad x_0 \in \text{Ker}(T^*T) = \text{Ker}(T)$$

$$Tx = \sum_{n=1}^N s_n \sum_{j=1}^{m_n} (x, e_{n,j}) f_{n,j}$$

□

**Следствие 11.5.**  $T \in \text{Com}(H)$ ,  $H$  — гильбертово  $\Rightarrow$   
 $\exists \{T_n\}_{n=1}^\infty, T_n$  — конечного ранга  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$

*Доказательство.* Пусть  $N = +\infty$ , иначе оператор и так конечного ранга.

$$T_n x = \sum_{k=1}^n s_k \sum_{j=1}^{m_k} (x, e_{k,j}) f_{k,j}, \text{ пусть } \|x\| = 1$$

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |s_k|^2 \left( \sum_{j=1}^{m_k} |(x, e_{k,j})|^2 \right) \leq |s_{n+1}|^2 \cdot \|x\|^2 \leq |s_{n+1}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Конец.