

Отчет по лабораторной работе №8

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнила: Губина Ольга Вячеславовна

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	7
4	Выполнение лабораторной работы	10
4.1	Первый случай	12
4.2	Второй случай	16
5	Выводы	22
	Список литературы	23

Список иллюстраций

4.1	График изменения оборотных средств фирм, случай 1 - Julia . . .	15
4.2	График изменения оборотных средств фирм, случай 1 - OpenModelica	16
4.3	График изменения оборотных средств фирм, случай 2 - Julia . . .	19
4.4	График изменения оборотных средств фирм, случай 2 - OpenModelica	21

Список таблиц

1 Цель работы

Создать модель конкуренции двух фирм по средством языков программирования Julia и OpenModelica.

2 Задание

- Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для двух случаев

3 Теоретическое введение

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето. В данной работе авторы предприняли взглянуть на эту задачу с точки зрения экономической динамики.

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко используемую в экологии модель «хищник-жертва» Вольтера [1], математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий. В качестве классических примеров дифференциальных моделей экономической динамики отметим модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара, односекторную модель экономического роста Солоу, однопродуктовые динамические макроэкономические модели Леонтьева.[2]

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют. Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потре-

бителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия.

τ – длительность производственного цикла.

p – рыночная цена товара.

\tilde{p} – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

k – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{p}{S} = q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}} \right) \quad (3.1)$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени.

Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = \frac{Sq}{k}$.

Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме ([3.1]) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения. Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - k \quad (3.2)$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \left(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right) \quad (3.3)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.[3]

4 Выполнение лабораторной работы

1. К выполнению нам предлагается выполнить соответствующий номеру студенческого билета вариант: $1032201737 \% 70 + 1 = 8$
2. Задача предложенного варианта состоит в следующем:

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

где $a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}$, $a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$, $c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – форми-

рование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0.0017 \right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 2.5, M_0^2 = 1.8, p_{cr} = 20, N = 23, q = 1, \tau_1 = 16, \tau_2 = 19, \tilde{p}_1 = 13, \tilde{p}_2 = 11$$

Замечание: Значения $p_{cr}, \tilde{p}_{1,2}, N$ указаны в тысячах единиц, а значения $M_{1,2}$ указаны в млн. единиц.

N – число потребителей производимого продукта.

τ – длительность производственного цикла.

p – рыночная цена товара.

\tilde{p} – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени.

$\theta = \frac{t}{c_1}$ – безразмерное время.

- Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.
- Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

4.1 Первый случай

1. Для первого случая модель конкуренции двух фирм описывается уравнением [4.1].

На языке Julia напишем код моделирующий конкуренцию:

```
using Plots
using DifferentialEquations

"Условия:"
M_01 = 2.5
M_02 = 1.8
p_cr = 20
N = 23
q = 1
tau_1 = 16
tau_2 = 19
tilde_p_1 = 13
tilde_p_2 = 11

u_0 = [M_01, M_02]

a1 = p_cr / (tau_1 * tau_1 * tilde_p_1 * tilde_p_1 * N * q)
a2 = p_cr / (tau_2 * tau_2 * tilde_p_2 * tilde_p_2 * N * q)
b = p_cr / (tau_1 * tau_1 * tau_2 * tau_2 * tilde_p_1 * tilde_p_1 * tilde_p_2 * t
a1 = p_cr / (tau_1 * tau_1 * tilde_p_1 * tilde_p_1 * N * q)
c1 = (p_cr - tilde_p_1) / (tau_1 * tilde_p_1)
c2 = (p_cr - tilde_p_2) / (tau_2 * tilde_p_2)

T = (0.0*c1, 500.0*c1) # отслеживаемый промежуток времени - нормировка по времени
```

```

function F!(du, u, p, t)
    theta = t / c1
    du[1] = (c1 / c1) * u[1] - (b / c1) * u[1] * u[2] - (a1 / c1) * u[1] * u[1];
    du[2] = (c2 / c1) * u[2] - (b / c1) * u[1] * u[2] - (a2 / c1) * u[2] * u[2];

end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.001) # обозначили шаг

const M1 = Float64[]
const M2 = Float64[]

for u in sol.u
    m1 = u[1]
    m2 = u[2]
    push!(M1, m1)
    push!(M2, m2)
end

plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "Модель конкуренции двух фирм - случай 1"
)

plot!(
    plt,

```

```
sol.t,  
M1,  
color = :red,  
xlabel="t",  
ylabel="M_1,2",  
label = "Фирма 1"  
)
```

```
plot!(  
    plt,  
    sol.t,  
    M2,  
    color = :blue,  
    xlabel="t",  
    ylabel="M_1,2",  
    label = "Фирма 2"  
)
```

```
savefig(plt, "julia_1.png")
```

В качестве результата у нас график изменения оборотных средств фирм (рис. [4.1]):

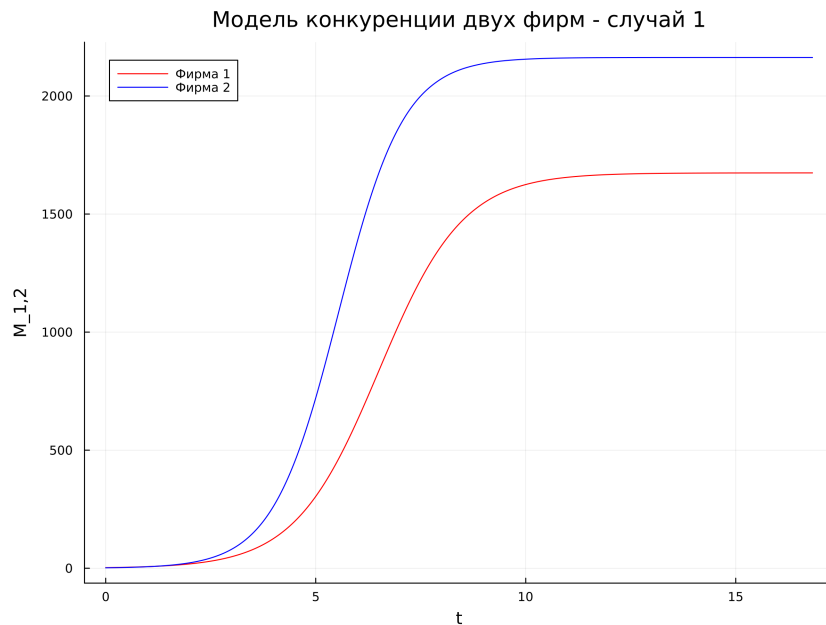


Рис. 4.1: График изменения оборотных средств фирм, случай 1 - Julia

2. Напишем код на OpenModelica:

```

model lab08_1
  constant Integer N = 23;
  constant Real M01 = 2.5;
  constant Real M02 = 1.8;
  constant Integer p_cr = 20;
  constant Integer q = 1;
  constant Integer tau1 = 16;
  constant Integer tau2 = 19;
  constant Integer p1 = 13;
  constant Integer p2 = 11;
  Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
  Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
  Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
  Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);

```

```

Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);
Real M1(start=M01);
Real M2(start=M02);
Real t = time;
equation
der(M1) = (c1/c1)*M1-(a1/c1)*M1*M1-(b/c1)*M1*M2;
der(M2) = (c2/c1)*M2-(a2/c1)*M2*M2-(b/c1)*M1*M2;
annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 50.0),
Documentation);
end lab08_1;

```

В качестве результата у нас график изменения оборотных средств фирм (рис. [4.2]):

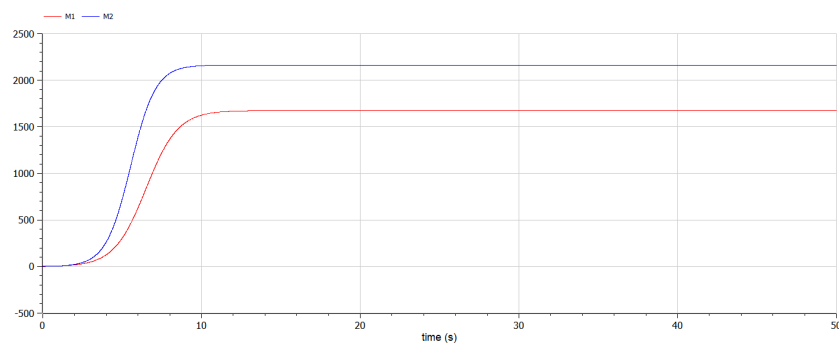


Рис. 4.2: График изменения оборотных средств фирм, случай 1 - OpenModelica

4.2 Второй случай

1. Для первого случая модель конкуренции двух фирм описывается уравнением [4.2].

На языке Julia напишем код моделирующий конкуренцию:

```
using Plots
```



```
using DifferentialEquations
```

```
"Условия:"
```

```
M_01 = 2.5
```

```
M_02 = 1.8
```

```
p_cr = 20
```

```
N = 23
```

```
q = 1
```

```
tau_1 = 16
```

```
tau_2 = 19
```

```
tilde_p_1 = 13
```

```
tilde_p_2 = 11
```

```
u_0 = [M_01, M_02]
```

```
a1 = p_cr / (tau_1 * tau_1 * tilde_p_1 * tilde_p_1 * N * q)
```

```
a2 = p_cr / (tau_2 * tau_2 * tilde_p_2 * tilde_p_2 * N * q)
```

```
b = p_cr / (tau_1 * tau_1 * tau_2 * tau_2 * tilde_p_1 * tilde_p_1 * tilde_p_2 * t
```

```
a1 = p_cr / (tau_1 * tau_1 * tilde_p_1 * tilde_p_1 * N * q)
```

```
c1 = (p_cr - tilde_p_1) / (tau_1 * tilde_p_1)
```

```
c2 = (p_cr - tilde_p_2) / (tau_2 * tilde_p_2)
```

```
T = (0.0*c1, 500.0*c1) # отслеживаемый промежуток времени - нормировка по времени
```

```
function F!(du, u, p, t)
```

```
    theta = t / c1
```

```
    du[1] = (c1 / c1) * u[1] - (b / c1 + 0.0017) * u[1] * u[2] - (a1 / c1) * u[1]
```

```
    du[2] = (c2 / c1) * u[2] - (b / c1) * u[1] * u[2] - (a2 / c1) * u[2] * u[2];
```

```
end
```

```
prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
```

```
sol = solve(prob, saveat = 0.001) # обозначили шаг
```

```
const M1 = Float64[]
```

```
const M2 = Float64[]
```

```
for u in sol.u
```

```
    m1 = u[1]
```

```
    m2 = u[2]
```

```
    push!(M1, m1)
```

```
    push!(M2, m2)
```

```
end
```

```
plt = plot(
```

```
    dpi = 300,
```

```
    size = (800, 600),
```

```
    title = "Модель конкуренции двух фирм - случай 2"
```

```
)
```

```
plot!(
```

```
    plt,
```

```
    sol.t,
```

```
    M1,
```

```
    color = :red,
```

```
    xlabel="t",
```

```
    ylabel="M_1,2",
```

```
    label = "Фирма 1"
```

)

```
plot!(  
    plt,  
    sol.t,  
    M2,  
    color = :blue,  
    xlabel="t",  
    ylabel="M_1,2",  
    label = "Фирма 2"  
)
```

```
savefig(plt, "julia_2.png")
```

В качестве результата у нас график изменения оборотных средств фирм (рис. [4.3]):

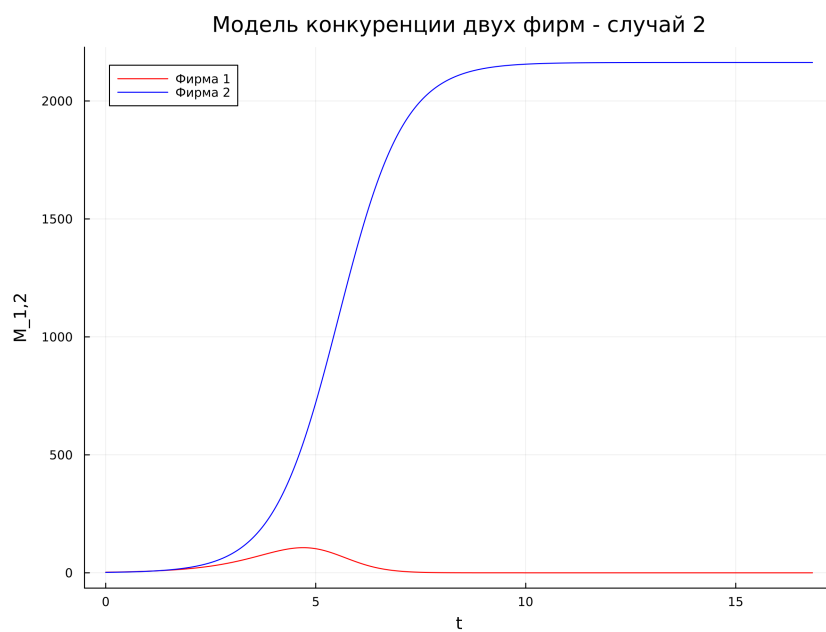


Рис. 4.3: График изменения оборотных средств фирм, случай 2 - Julia

2. Напишем код на OpenModelica:

```
model lab08_2
  constant Integer N = 23;
  constant Real M01 = 2.5;
  constant Real M02 = 1.8;
  constant Integer p_cr = 20;
  constant Integer q = 1;
  constant Integer tau1 = 16;
  constant Integer tau2 = 19;
  constant Integer p1 = 13;
  constant Integer p2 = 11;
  Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
  Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
  Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
  Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);
  Real M1(start=M01);
  Real M2(start=M02);
  Real t = time;
equation
  der(M1) = (c1/c1)*M1-(a1/c1)*M1*M1-(b/c1+0.0017)*M1*M2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2-(a2/c1)*M2*M2-(b/c1)*M1*M2;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 50.0),
    Documentation);
end lab08_2;
```

В качестве результата у нас график изменения оборотных средств фирм (рис. [4.4]):

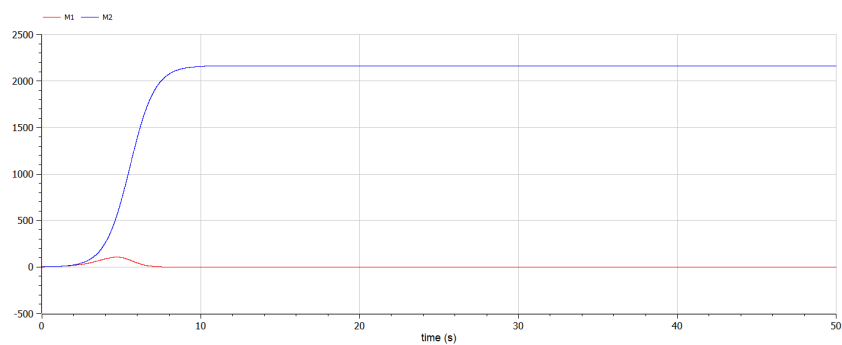


Рис. 4.4: График изменения оборотных средств фирм, случай 2 - OpenModelica

5 Выводы

Создала модель конкуренции двух фирм по средством языков программирования Julia и OpenModelica.

- Построила графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для двух случаев

Список литературы

1. D. M.J. Some simple mathematical models in ecology. Math. Spectrum, 1983-1984.
2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ФИРМ НА ОДНОРОДНОМ РЫНКЕ [Электронный ресурс]. Научный журнал Успехи современного естествознания, 2003. URL: <https://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=14730>.
3. Модель конкуренции двух фирм [Электронный ресурс]. Российский университет дружбы народов, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971745/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%207.pdf.