Отчет по лабораторной работе №4

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнила: Губина Ольга Вячеславовна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Создать модель гармонический колебаний по средствам языков Julia и OpenModelica.

2 Задание

- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для трех случаев:
  - Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
  - Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
  - Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы
- Выполнить задачу на заданном интервале

3 Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид (формула [3.1]):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1}$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \dot{x} = \frac{dx}{dt}$)

Уравнение [3.1] есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения [3.1] получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени (формула [3.2]).

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.2}$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка [3.2] необходимо задать два начальных условия вида:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Уравнение второго порядка [3.2] можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \tag{3.4}$$

Начальные условия [3.3] для системы [-eq:04] примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом[1].

4 Выполнение лабораторной работы

1. К выполнению нам предлагается выполнить соответстующий номеру студенчесткого билета вариант: 1032201737 % 70 + 1 = 8

2. Задача предложенного варианта состоит в следующем:

Постройте фазовый портрет[2] гармонического осциллятора[3] и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

- Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 1.5x = 0$
- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 10x = 0$
- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 11x = 2\cos(t)$

На интервале $t \in [0; 60]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = 0$.

3. В общем виде можем записать наше однородное ОДУ второго порядка следующим образом:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx(t) = F(t) \tag{4.1}$$

где $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ - производная по времени:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx = F(t) \tag{4.2}$$

Можно сделать систему ОДУ:

$$\begin{aligned} y = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \\ \frac{dy}{dt} + ay(t) + bx(t) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Тогда система для решения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -ay - bx \end{cases} \tag{4.4}$$

4. **Первый случай** - колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 1.5x = 0$.

Отсюда видим, что $a = 0$ и $F(t) = 0$.

Если $F(t) = 0$ и $b \neq 0$, значит есть трение и система затухнет.

Если $F(t) = 0$ и $b = 0$, то трения нет.

Если $F(t) \neq 0$, то система никогда не затухнет, но энергия будет уходить на силу трения за счет внешней силы.

Общий вид первого случая: $\ddot{x} + bx = 0$, где $b = \omega_0^2 = 1.5$.

Тогда система ОДУ первого порядка для решения задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1.5x \end{cases} \tag{4.5}$$

Код для первого случая на Julia:

```
using Plots

using DifferentialEquations
```

```
"Условия:"
x_0 = 0
y_0 = 0

u_0 = [x_0, y_0]
T = (0.0, 60.0) # отслеживаемый промежуток времени

b = 1.5

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -b*u[1]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.05) # обозначили шаг

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end

plt = plot(
    dpi = 300,
```

```
    size = (800, 600),
    title = "Случай 1"
)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color = :red,
    label = "Фазовый портрет"
)

savefig(plt, "case01_faze.png")

plt_2 = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "Случай 1"
)

plot!(
    plt_2,
    sol.t,
    X,
    color = :blue,
    label = "t"
)

plot!(
```

```
    plt_2,
    sol.t,
    Y,
    color = :purple,
    label = "V"
)

savefig(plt_2, "case01.png")
```

График для первого случая - Julia (рис. [4.1]):

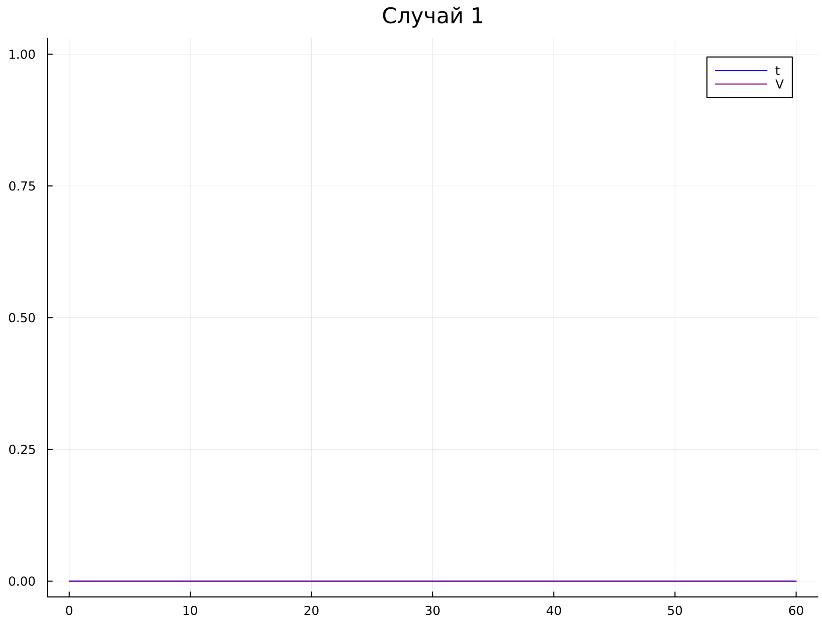

Рис. 4.1: График для первого случая - Julia

Фазовый портрет Julia (рис. [4.2]):

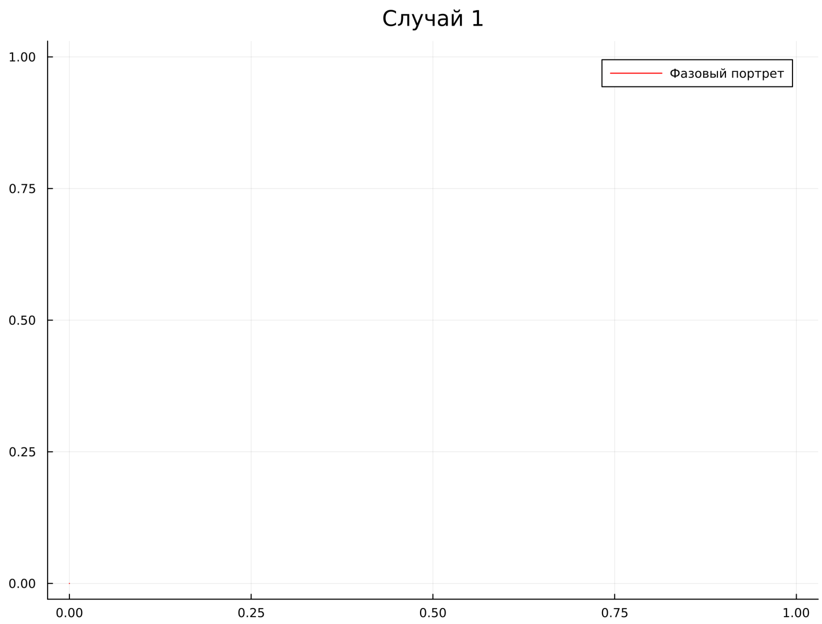

Рис. 4.2: Фазовый портрет Julia

Код для первого случая на OpenModelica:

```
model lab04_case01
  constant Integer x_0 = 0;
  constant Integer y_0 = 0;
  constant Real b = 1.5;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t = time;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -b*x;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 60.0),
    Documentation);
end lab04_case01;
```

Чтобы выставить на OpenModelica шаг в 0.05 призапуске отметим это (рис.

[4.3]):

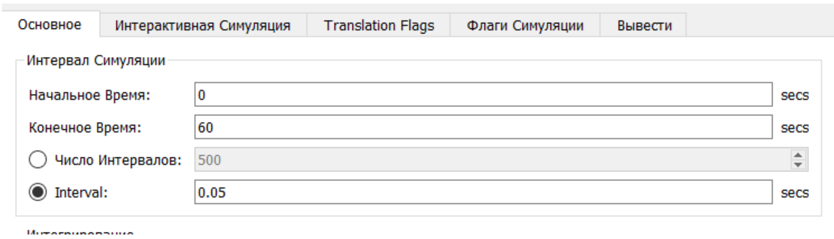

Рис. 4.3: Интервал

График для первого случая - OpenModelica (рис. [4.4]):

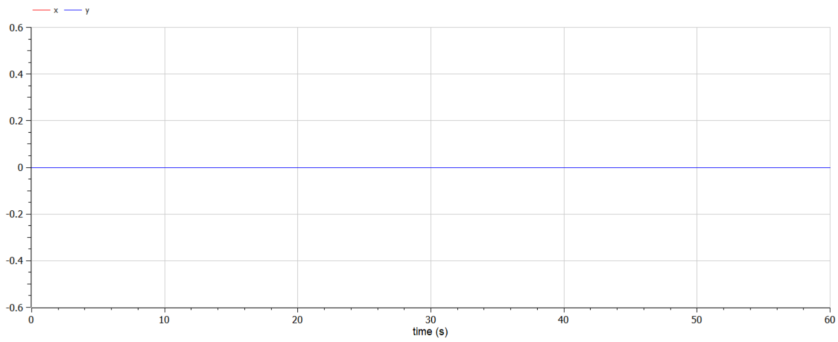

Рис. 4.4: График для первого случая - OpenModelica

Фазовый портрет OpenModelica (рис. [4.5]):

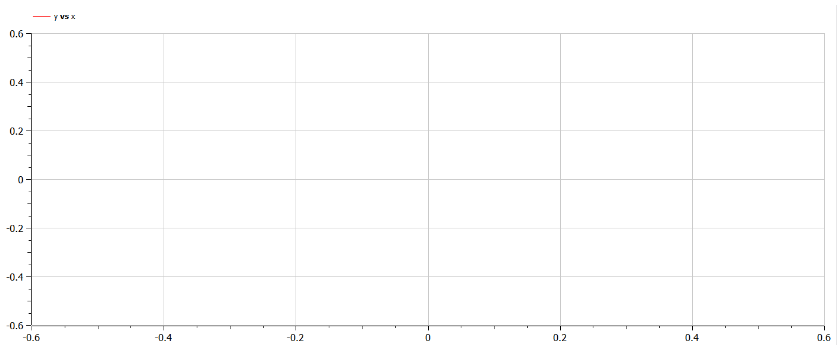

Рис. 4.5: Фазовый портрет OpenModelica

Теперь построим те же графики в OpenModelica, но с начальными значениями $x_0 = -2$ и $y_0 = 0$ (рис. [4.6]-[4.7]).

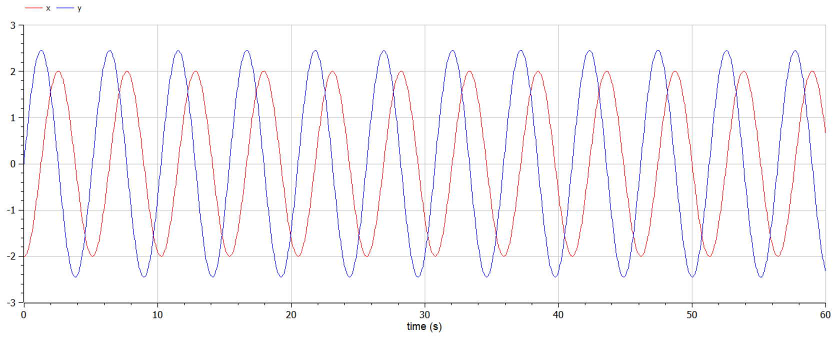

Рис. 4.6: График для первого случая другие значения - OpenModelica

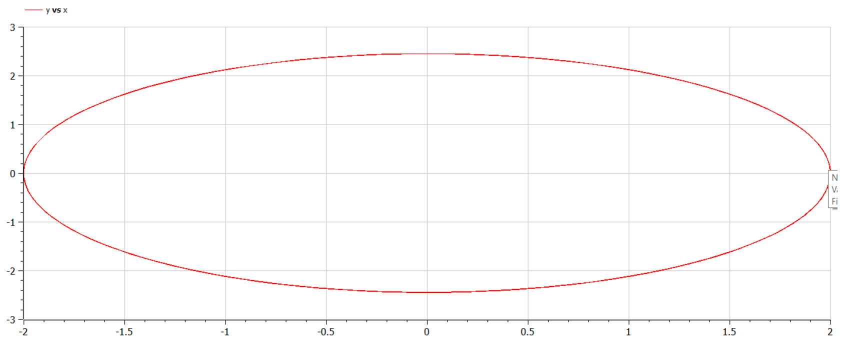

Рис. 4.7: Фазовый портрет другие значения - OpenModelica

5. **Второй случай** - колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 10x = 0$

Отсюда видим, что $F(t) = 0$.
Общий вид второго случая: $\ddot{x} + ay + bx = 0$, где $a = 2\gamma = 1$ и $b = \omega_0^2 = 10$.
Тогда система ОДУ первого порядка для решения задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - 10x \end{cases} \tag{4.6}$$

Код для второго случая на Julia:

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations

"Условие:"
x_0 = 0
y_0 = 0

u_0= [x_0, y_0]
T = (0.0, 60.0) # отслеживаемый период времени

a = 1.0
b = 10.0

function F!(du, u, p, t) # система уравнений
    du[1] = u[2]
    du[2] = -a*u[2]-b*u[1]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat=0.05) # в saveat обозначили шаг

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end
```

```
plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800,600),
    title = "Случай 2"
)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:red,
    label = "Фазовый портрет"
)

savefig(plt, "case02_faze.png")

plt_2 = plot(
    dpi = 300,
    size = (800,600),
    title = "Случай 2"
)

plot!(
    plt_2,
    sol.t,
    X,
    color=:blue,
    label = "t"
)
```

```
plot!(
    plt_2,
    sol.t,
    Y,
    color=:purple,
    label = "V"
)

savefig(plt_2, "case02.png")
```

График для второго случая Julia (рис. [4.8]).

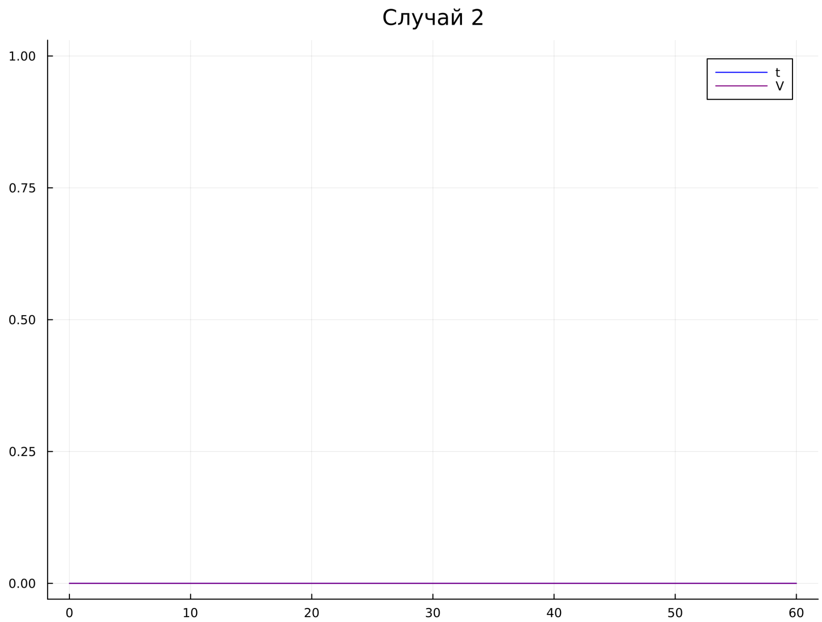

Рис. 4.8: График для второго случая Julia

Фазовый портрет второго случая Julia (рис. [4.9]).

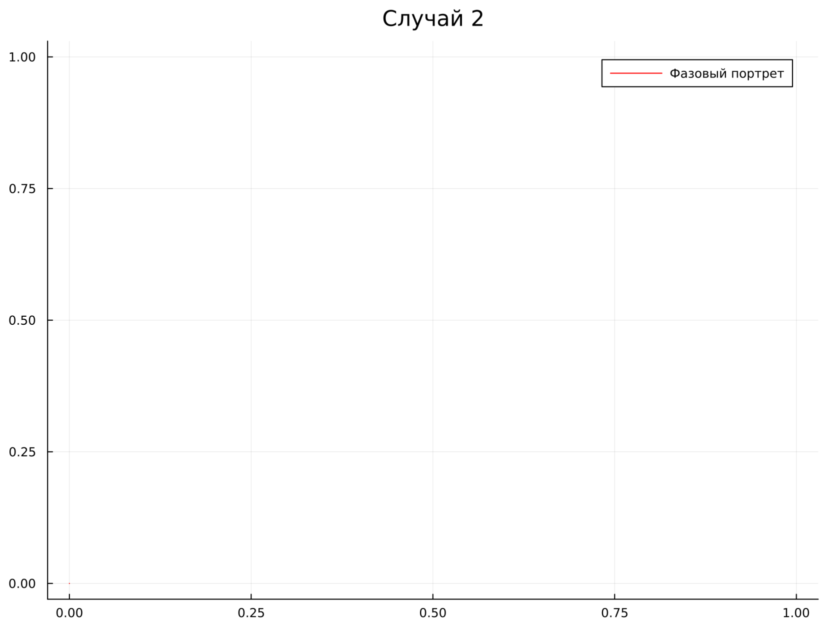

Рис. 4.9: Фазовый портрет второго случая Julia

Код для второго случая OpenModelica

```
model lab04_case02
  constant Integer x_0 = 0;
  constant Integer y_0 = 0;
  constant Real a = 1.0;
  constant Real b = 10.0;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t = time;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -a*y-b*x;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 60.0),
    Documentation);
end lab04_case02;
```

График для второго случая OpenModelica (рис. [4.10]).

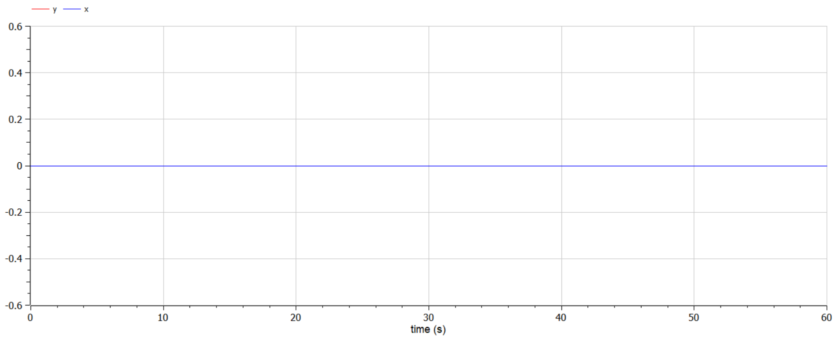

Рис. 4.10: График для второго случая OpenModelica

Фазовый портрет второго случая OpenModelica (рис. [4.11]).

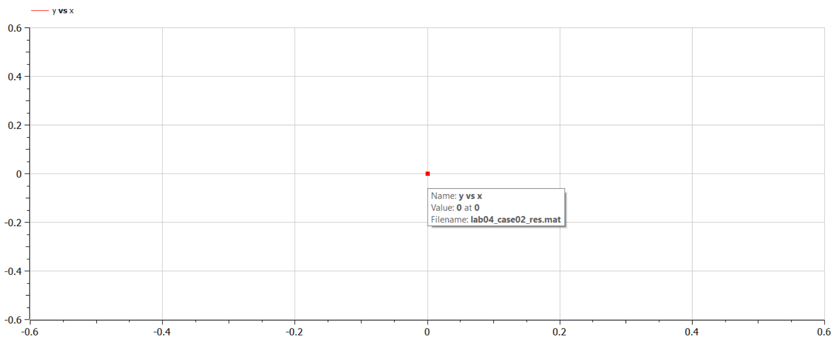

Рис. 4.11: Фазовый портрет второго случая OpenModelica

Теперь построим те же графики в OpenModelica, но с начальными значениями $x_0 = -2$ и $y_0 = 0$ (рис. [4.12]-[4.13]).

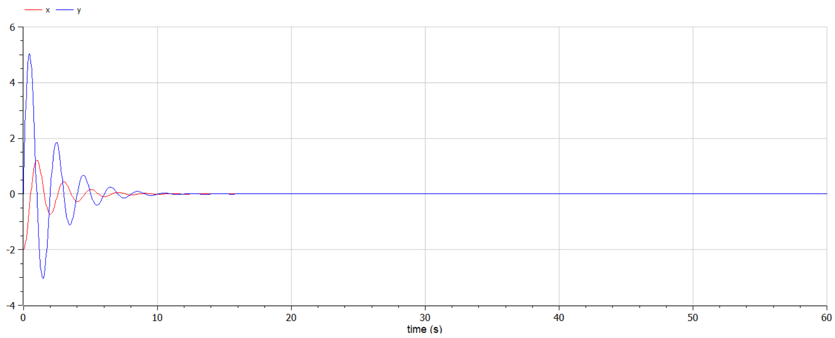

Рис. 4.12: График для второго случая другие значения - OpenModelica

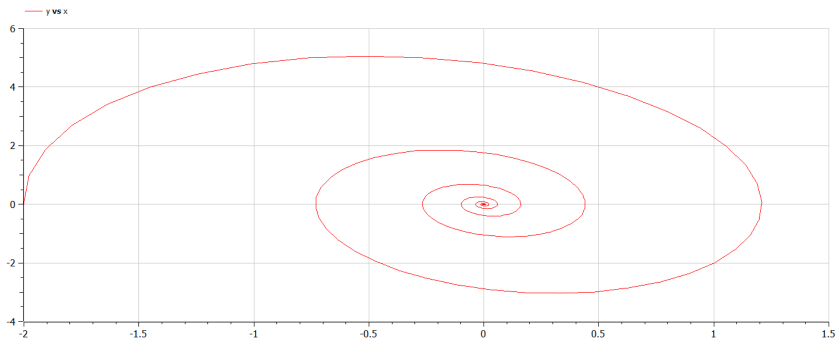

Рис. 4.13: Фазовый портрет другие значения - OpenModelica

6. **Третий случай** - колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 11x = 2\cos(t)$

Отсюда видим, что $F(t) = 2\cos(t)$.

Общий вид третьего случая: $\ddot{x} + ay + bx = F(t)$, где $a = 2\gamma = 1, b = \omega_0^2 = 11$ и $F(t) = 2\cos(t)$.

Тогда система ОДУ первого порядка для решения задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\cos(t) - y - 11x \end{cases} \tag{4.7}$$

Код для третьего случая Julia

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations

"Условие:"
x_0 = 0
y_0 = 0

u_0= [x_0, y_0]
T = (0.0, 60.0) # отслеживаемый период времени

a = 1.0
b = 10.0

function F(t)
    return 2*cos(t)
end

function Fu!(du, u, p, t) # система уравнений
    du[1] = u[2]
    du[2] = F(t) - a*u[2] - b*u[1]
end

prob = ODEProblem(Fu!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat=0.05) # в saveat обозначили шаг

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
    x, y = u
```

```
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end

plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800,600),
    title = "Случай 3"
)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:red,
    label = "Фазовый портрет"
)

savefig(plt, "case03_faze.png")

plt_2 = plot(
    dpi = 300,
    size = (800,600),
    title = "Случай 3"
)

plot!(
    plt_2,
    sol.t,
```

```
    X,
    color=:blue,
    label = "t"
)

plot!(
    plt_2,
    sol.t,
    Y,
    color=:purple,
    label = "V"
)

savefig(plt_2, "case03.png")
```

График для третьего случая Julia (рис. [4.14]).

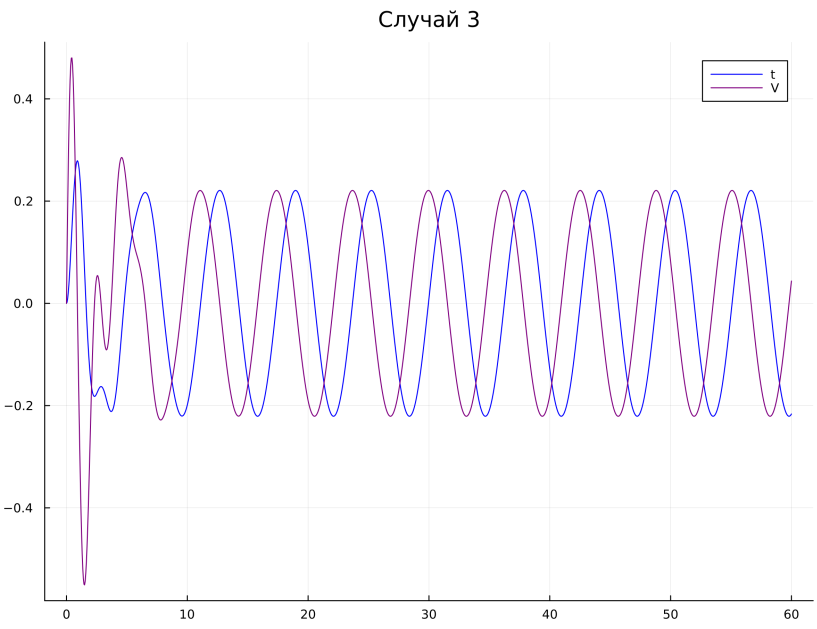

Рис. 4.14: График для третьего случая Julia

Фазовый портрет третьего случая Julia (рис. [4.15]).

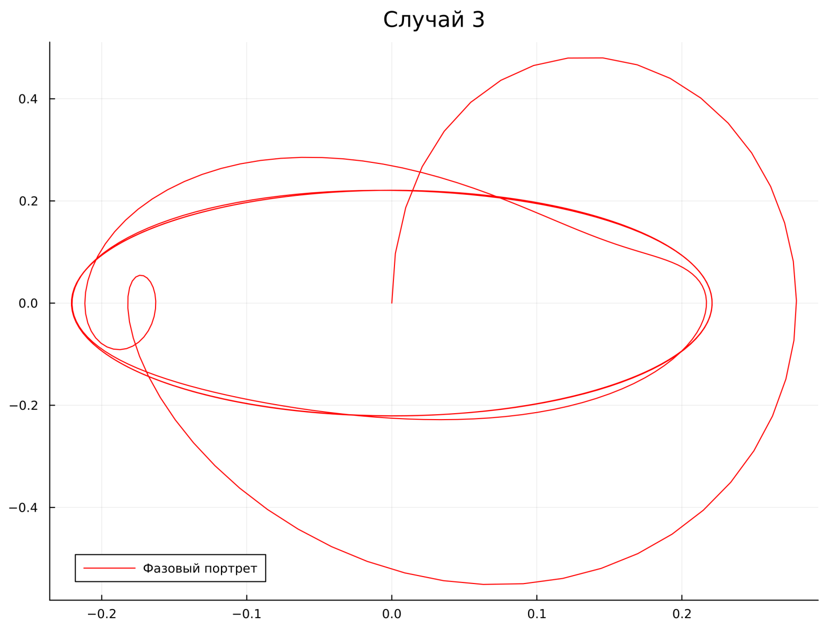

Рис. 4.15: Фазовый портрет третьего случая Julia

```
model lab04_case03
  constant Integer x_0 = 0;
  constant Integer y_0 = 0;
  constant Real a = 1.0;
  constant Real b = 11.0;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t = time;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = 2*cos(t)-a*y-b*x;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 60.0),
    Documentation);
end lab04_case03;
```

График для третьего случая OpenModelica (рис. [4.16]).

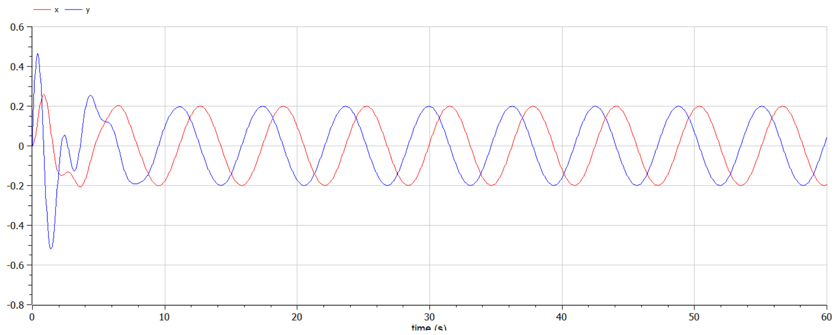

Рис. 4.16: График для третьего случая OpenModelica

Фазовый портрет третьего случая OpenModelica (рис. [4.17]).

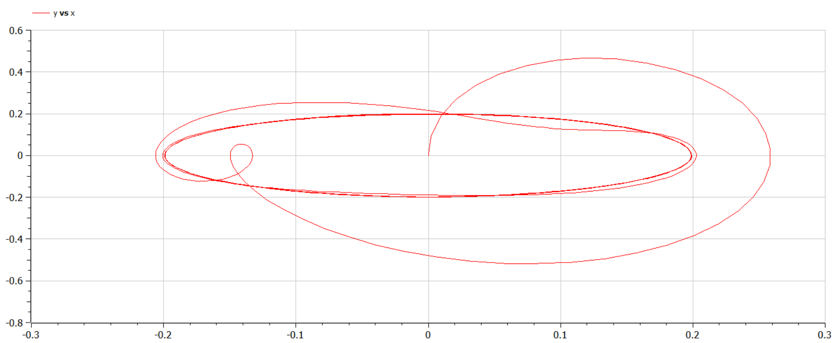

Рис. 4.17: Фазовый портрет третьего случая OpenModelica

Теперь построим те же графики в OpenModelica, но с начальными значениями $x_0 = -2$ и $y_0 = 0$ (рис. [4.18]-[4.19]).

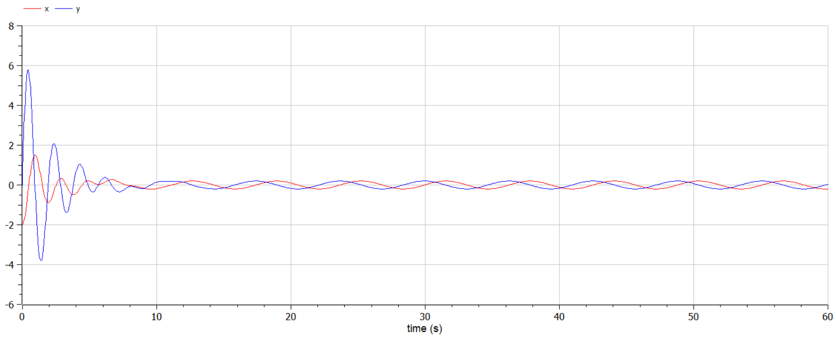

Рис. 4.18: График для третьего случая другие значения - OpenModelica

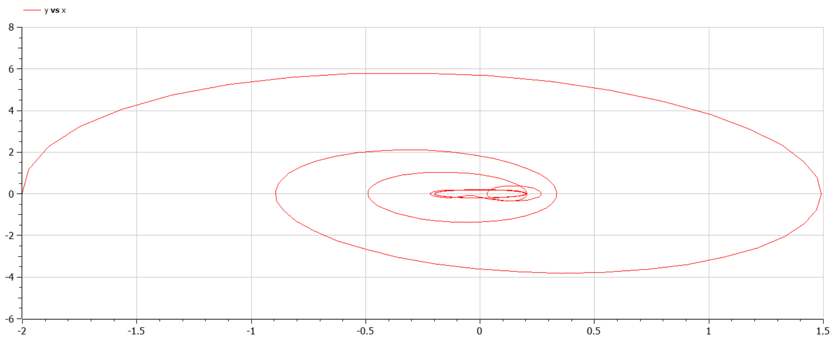

Рис. 4.19: Фазовый портрет другие значения - OpenModelica

5 Выводы

Создала модель гармонический колебаний по средствам языков Julia и OpenModelica.

Список литературы

1. Модель гармонических колебаний [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971729/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%203.pdf.
2. Фазовые портреты «на пальцах» или что можно узнать о решениях диффура, не решая его [Электронный ресурс]. 2015. URL: https://habr.com/ru/post/268507/.
3. Курс общей физики, том I [Электронный ресурс]. URL: https://edu.tltsu.ru/er/book_view.php?book_id=4b6&page_id=3846.