Отчет по лабораторной работе №6

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнила: Губина Ольга Вячеславовна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Смоделировать задачу об эпидемии по средством языков программирования Julia и OpenModelica.

2 Задание

- Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп
- Рассмотреть протекание эпидемия в двух различных случаях

3 Теоретическое введение

Перед нами простейшая модель эпидемии.

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. **Первая группа** - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. **Вторая группа** – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А **третья группа**, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения $I*$, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону [3.1]:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & I(t) > I^* \\ 0, & I(t) \leq I^* \end{cases} \tag{3.1}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & I(t) > I^* \\ -\beta I, & I(t) \leq I^* \end{cases} \tag{3.2}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{3.3}$$

Постоянные пропорциональности α, β, - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия .Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$[1].

Группы обозначены как S, I, R - отсюда модель эпидемии называют SIR-моделью. Эта модель создана методом системной динамики. Есть также её вариант, реализованный с помощью агентного моделирования (там есть возможность запустить эксперименты варьирования параметров и Монте-Карло 1-го и 2-го порядка).

Разумеется, это очень упрощенная модель. Чтобы отражать действительность, модель должна основываться на реальных свойствах конкретной болезни и учитывать изменения системы под управленческими воздействиями – например, количество контактов можно снижать карантинными мерами [2].

Часто еще вспоминают SEIR модель, которую рассматривают как модификацию SIR.

SEIR модель учитывает инкубационный период (E – exposed, индивиды болеют, но не заразны и со временем полностью заболеют). В такой модели заражение восприимчивых происходит таким же способом как в модели SIR, но попадают такие особи не в группу I, а в группу E. А из E с определённой вероятностью (α, число обратное длительности инкубационного периода) происходит переход уже в I[3].

4 Выполнение лабораторной работы

1. К выполнению нам предлагается выполнить соответстующий номеру студенчесткого билета вариант: 1032201737 % 70 + 1 = 8

2. Задача предложенного варианта состоит в следующем:

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 14000$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 114$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 14$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- если $I(t) \leq I^*$
- если $I(t) > I^*$

3. В условии не указаны значения коэффициентов, поэтому будем считать их следующими: $\alpha = 0.01, \beta = 0.02$.

4.1 Первый случай $I(t) \leq I^*$

1. На языке Julia напишем код моделирующий изменение числа особей в каждой из трех групп - заболевших, здоровых с иммунитетом и здоровых, но восприимчивых:

```
using Plots
using DifferentialEquations

"Условия:"
N = 14000

I_0 = 114
R_0 = 14
S_0 = N - I_0 - R_0

u_0 = [S_0, I_0, R_0]
T = (0.0, 100.0) # отслеживаемый промежуток времени

a = 0.01 # alpha
b = 0.02 # beta

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = 0
    du[2] = - b * u[2]
    du[3] = b * u[2]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.05) # обозначили шаг

const S = Float64[]
const I = Float64[]
const R = Float64[]
```

```
for u in sol.u
    s, i, r = u
    push!(S, s)
    push!(I, i)
    push!(R, r)
end

plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "Модель эпидемии - изменение числа заболевших I(0) <= I*"
)

plot!(
    plt,
    sol.t,
    S,
    color = :blue,
    xlabel="t",
    ylabel="численность",
    label = "Восприимчивые к болезни, но пока здоровые"
)

plot!(
    plt,
    sol.t,
    I,
    color = :red,
    xlabel="t",
```

```
    ylabel="численность",
    label = "Инфицированные распространители болезни"
)

plot!(
    plt,
    sol.t,
    R,
    color = :black,
    xlabel="t",
    ylabel="численность",
    label = "Здоровые с иммунитетом к болезни"
)

savefig(plt, "julia_1.png")
```

В качестве результата у нас график изменения численности заболеваемости (рис. [4.1]):

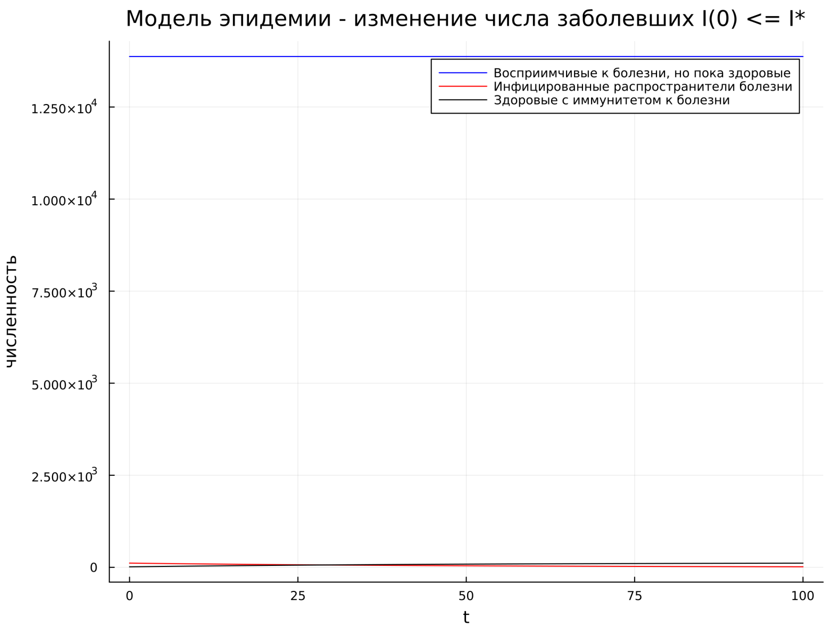

Рис. 4.1: Графики изменения числа особей в каждой из трех групп - Julia

2. Напишем код на OpenModelica:

```
model lab06_1
  constant Integer N = 14000;
  constant Integer I_0 = 114;
  constant Integer R_0 = 14;
  constant Integer S_0 = N-I_0-R_0;
  constant Real a = 0.01;
  constant Real b = 0.02;
  Real s(start=S_0);
  Real i(start=I_0);
  Real r(start=R_0);
  Real t = time;
equation
  der(s) = 0;
  der(i) = -b*i;
```

```
  der(r) = b*i;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100.0),
    Documentation);
end lab06_1;
```

В качестве результата у нас график изменения численности численности заболеваемости (рис. [4.2]):

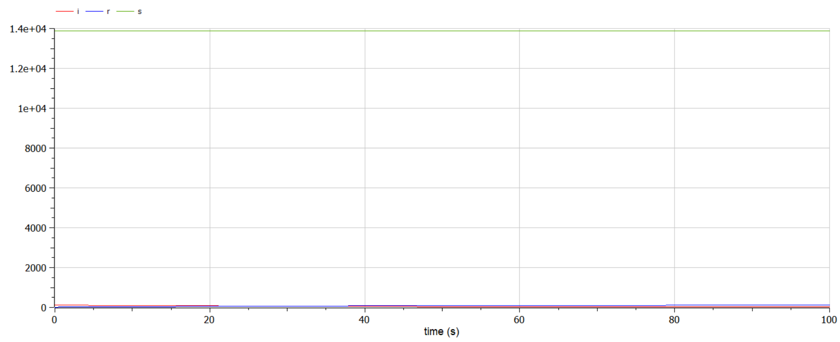

Рис. 4.2: Графики изменения числа особей в каждой из трех групп - OpenModelica

Для большей наглядности случая приведу графики I и R отдельно (рис. [4.3]):

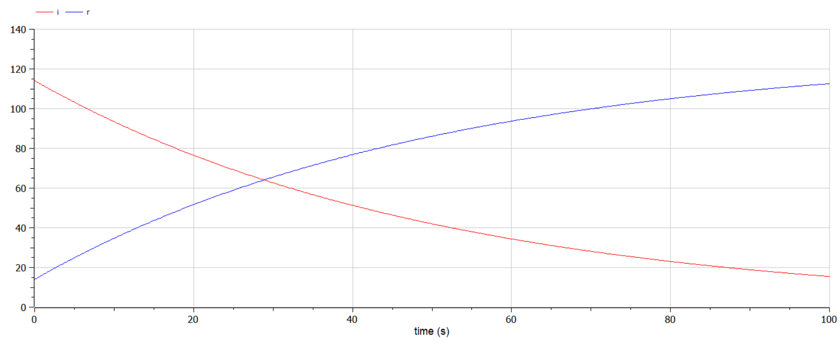

Рис. 4.3: Графики изменения числа I и R

4.2 Второй случай $I(t) > I^*$

1. На языке Julia напишем код моделирующий изменение числа особей в каждой из трех групп - заболевших, здоровых с иммунитетом и здоровых,

но восприимчивых:

```
using Plots
using DifferentialEquations

"Условия:"
N = 14000

I_0 = 114
R_0 = 14
S_0 = N - I_0 - R_0

u_0 = [S_0, I_0, R_0]
T = (0.0, 100.0) # отслеживаемый промежуток времени

a = 0.01 # alpha
b = 0.02 # beta

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = - a * u[1]
    du[2] = a * u[1] - b * u[2]
    du[3] = b * u[2]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.05) # обозначили шаг

const S = Float64[]
const I = Float64[]
const R = Float64[]
```

```
for u in sol.u
    s, i, r = u
    push!(S, s)
    push!(I, i)
    push!(R, r)
end

plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "Модель эпидемии - изменение числа заболевших I(0) > I*"
)

plot!(
    plt,
    sol.t,
    S,
    color = :blue,
    xlabel="t",
    ylabel="численность",
    label = "Восприимчивые к болезни, но пока здоровые"
)

plot!(
    plt,
    sol.t,
    I,
    color = :red,
```

```
    xlabel="t",
    ylabel="численность",
    label = "Инфицированные распространители болезни"
)

plot!(
    plt,
    sol.t,
    R,
    color = :black,
    xlabel="t",
    ylabel="численность",
    label = "Здоровые с иммунитетом к болезни"
)

savefig(plt, "julia_2.png")
```

В качестве результата у нас график изменения численности численности заболеваемости (рис. [4.4]):

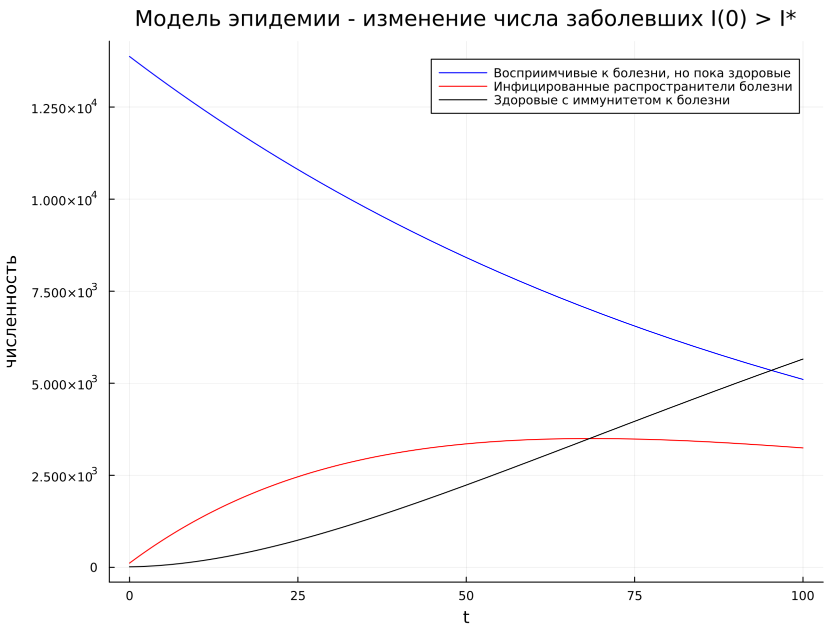

Рис. 4.4: Графики изменения числа особей в каждой из трех групп - Julia

2. Напишем код на OpenModelica:

```
model lab06_2
  constant Integer N = 14000;
  constant Integer I_0 = 114;
  constant Integer R_0 = 14;
  constant Integer S_0 = N-I_0-R_0;
  constant Real a = 0.01;
  constant Real b = 0.02;
  Real s(start=S_0);
  Real i(start=I_0);
  Real r(start=R_0);
  Real t = time;
equation
  der(s) = -a*s;
  der(i) = a*s-b*i;
```

```
  der(r) = b*i;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100.0),
    Documentation);
end lab06_2;
```

В качестве результата у нас график изменения численности численности заболеваемости (рис. [4.5]):

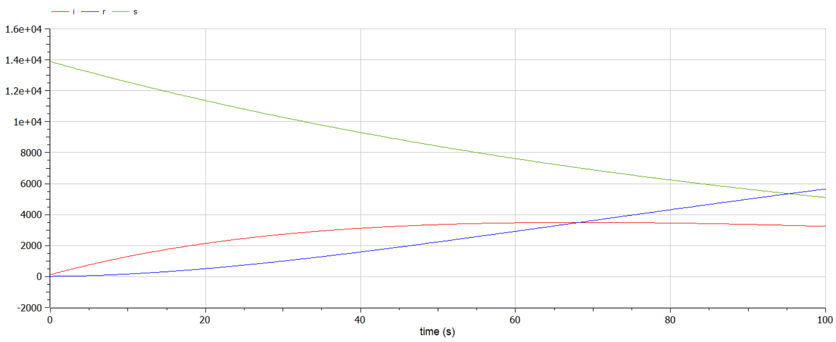

Рис. 4.5: Графики изменения числа особей в каждой из трех групп - OpenModelica

5 Выводы

- Смоделировала задачу об эпидемии по средством языков программирования Julia и OpenModelica
- Построила графики изменения числа особей в каждой из трех групп
- Рассмотрела протекание эпидемия в двух различных случаях

Список литературы

1. Задача об эпидемии [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971737/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%205.pdf.
2. SIR и разновидности: модели COVID-эпидемии в России [Электронный ресурс]. 2020. URL: https://www.anylogic.ru/blog/sir-i-raznovidnosti-modeli-covid-epidemii-v-rossii/.
3. Конструирование эпидемиологических моделей [Электронный ресурс]. 2021. URL: https://habr.com/ru/post/551682/.