

# **Отчет по лабораторной работе №5**

**Дисциплина: Математическое моделирование**

Выполнила: Губина Ольга Вячеславовна

# Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	7
4	Выполнение лабораторной работы	11
5	Выводы	21
	Список литературы	22

## Список иллюстраций

3.1	Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.	8
3.2	Мягкая модель борьбы за существование . . . . .	9
3.3	Фазовый портрет системы «хищник–жертва» . . . . .	10
4.1	Графики изменения численности хищников и численности жертв - Julia . . . . .	14
4.2	График зависимости численности хищников от численности жертв - Julia . . . . .	15
4.3	Графики изменения численности хищников и численности жертв - OpenModelica . . . . .	16
4.4	График зависимости численности хищников от численности жертв - OpenModelica . . . . .	16
4.5	Стационарное состояние . . . . .	19
4.6	Графики изменения численности . . . . .	20
4.7	Зависимость численности хищников от числа жертв . . . . .	20

## Список таблиц

# 1 Цель работы

Создать простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

## 2 Задание

- Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
- Построить графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях
- Найти стационарное состояние системы

### 3 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - **модель Лотки-Вольтерры**. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

- Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
- В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
- Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
- Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
- Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников (формула [3.1])

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  – число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников ( $xy$ ). Каждый акт взаимодействия уменьшает

популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dxu$  в правой части уравнения).

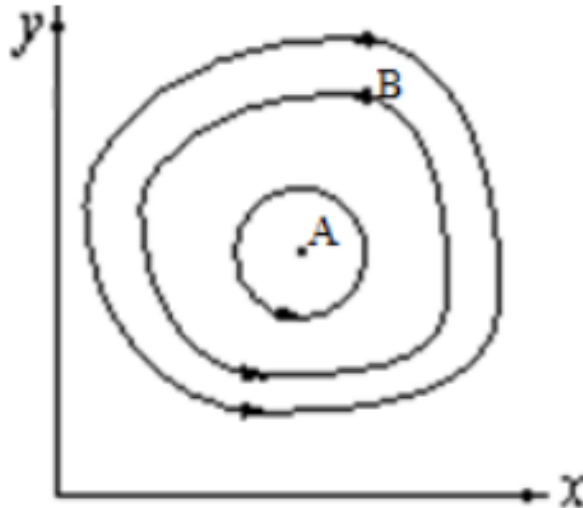


Рис. 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние ( $A$  на рис. [3.1]), всякое же другое начальное состояние ( $B$ ) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние  $B$ . Стационарное состояние системы [3.1] (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке:  $x_0 = \frac{c}{d}$ ,  $y_0 = \frac{a}{b}$ . Если начальные значения задать в стационарном состоянии  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей  $x(0)$ ,  $y(0)$ . Колебания совершаются в противофазе.



При малом изменении модели

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x, y), \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние  $B$ ), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок  $f$  и  $g$  возможны следующие сценарии 1-3 на рис. [3.2].

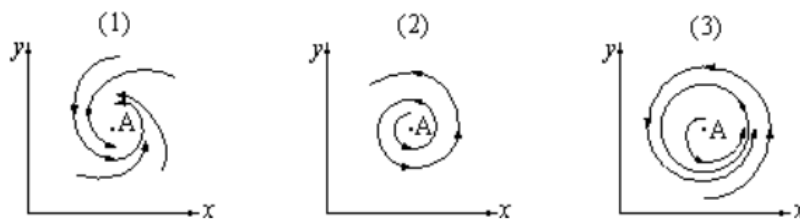


Рис. 3.2: Мягкая модель борьбы за существование

**В случае 1** равновесное состояние  $A$  устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

**В случае 2** система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений  $x$  и  $y$ , что модель перестает быть применимой.

**В случае 3** в системе с неустойчивым стационарным состоянием  $A$  с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния  $A$  приводит не к малым колебаниям около  $A$ , как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей

от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делаящим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок  $f$  и  $g$  в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости[1].

Фазовые кривые формируются (фазовый поток) вокруг положения равновесия (стационарное состояние) (рис. [3.3])[2]:

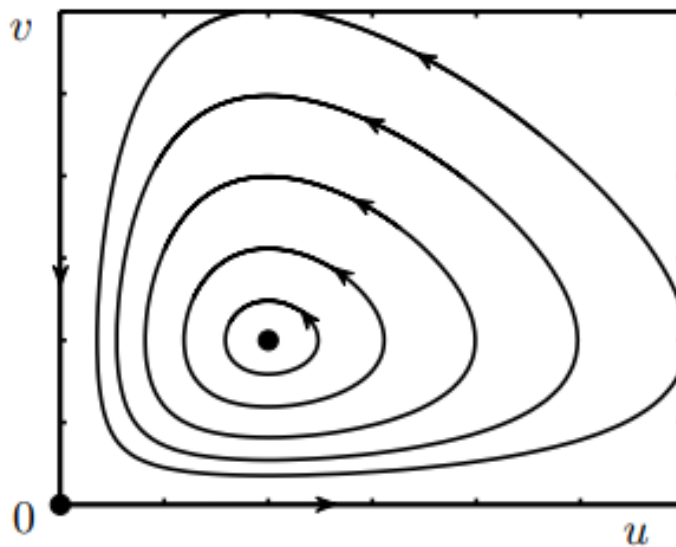


Рис. 3.3: Фазовый портрет системы «хищник–жертва»

## 4 Выполнение лабораторной работы

1. К выполнению нам предлагается выполнить соответствующий номеру студенческого билета вариант:  $1032201737 \% 70 + 1 = 8$
2. Задача предложенного варианта состоит в следующем:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.19x(t) + 0.048x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.39y(t) - 0.036x(t)y(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв (фазовый портрет[3]), а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 13, y_0 = 18$ . Найдите стационарное состояние системы.

3. По коэффициентам видим, что в данном случае  $y$  - число жертв,  $x$  - число хищников. Тогда, из условия коэффициенты имеют следующие значения:  $a = 0.39, b = 0.036, c = 0.19, d = 0.048$ .

А уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -cx(t) + dx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = ay(t) - bx(t)y(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

4. На языке Julia напишем код моделирующий взаимосвязь между хищниками и жертвами:

```

using Plots
using DifferentialEquations

"Условия:"
x_0 = 13
y_0 = 18

u_0 = [x_0, y_0]
T = (0.0, 60.0) # отслеживаемый промежуток времени

a = 0.39
b = 0.036
c = 0.19
d = 0.048

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = -c * u[1] + d * u[1] * u[2]
    du[2] = a * u[2] - b * u[1] * u[2]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.05) # обозначили шаг

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)

```

```

        push!(Y, y)
    end

    plt = plot(
        dpi = 300,
        size = (800, 600),
        title = "График зависимости численности хищников от численности жертв"
    )

    plot!(
        plt,
        Y,
        X,
        color = :red,
        label = "Фазовый портрет"
    )

    savefig(plt, "julia_2.png")

    plt_2 = plot(
        dpi = 300,
        size = (800, 600),
        title = "Графики изменения численности хищников и численности жертв"
    )

    plot!(
        plt_2,
        sol.t,
        X,

```

```

        color = :blue,
        label = "Число жертв"
    )

    plot!(
        plt_2,
        sol.t,
        Y,
        color = :purple,
        label = "Число хищников"
    )

    savefig(plt_2, "julia_1.png")

```

В качестве результата у нас графики изменения численности хищников и жертв (рис. [4.1]-[4.2]):

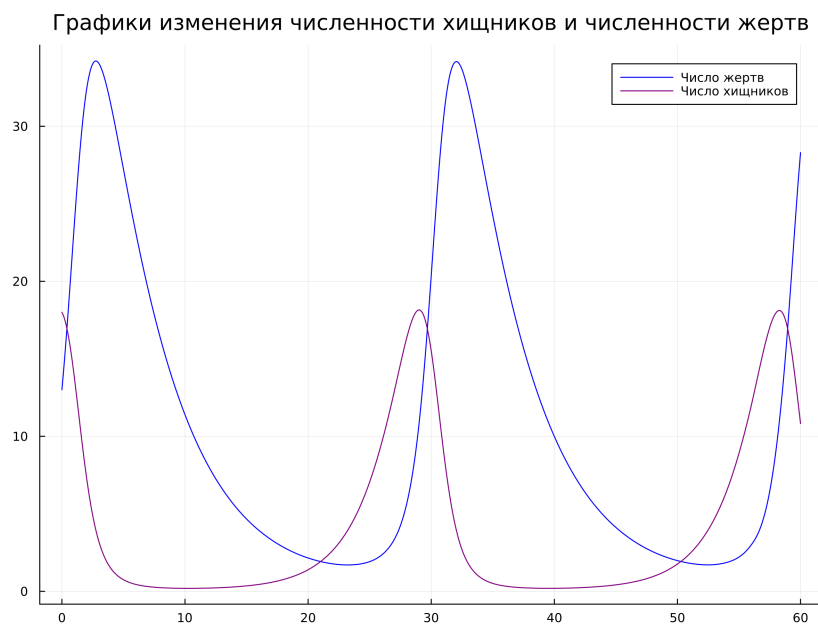


Рис. 4.1: Графики изменения численности хищников и численности жертв - Julia

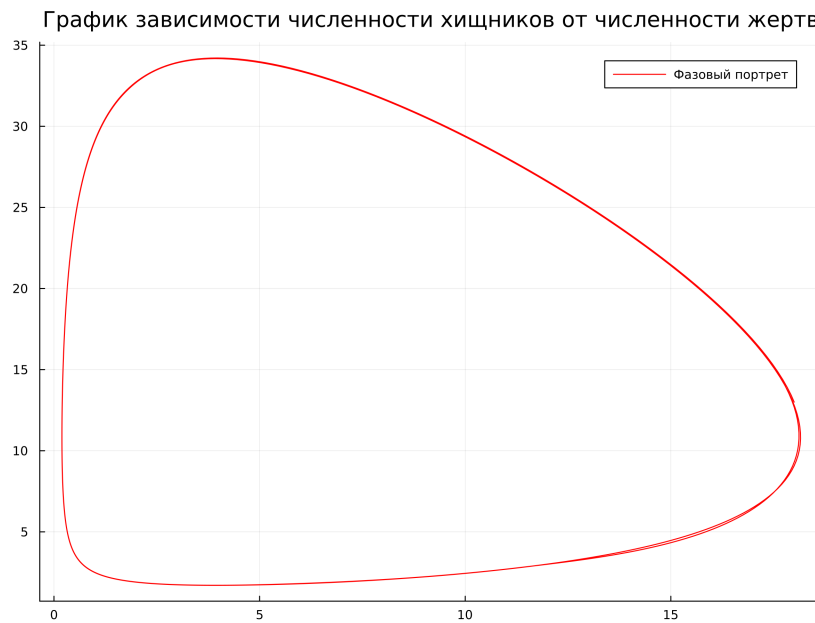


Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв - Julia

#### 4. Напишем код на OpenModelica:

```
model lab05
  constant Integer x_0 = 13;
  constant Integer y_0 = 18;
  constant Real a = 0.39;
  constant Real b = 0.036;
  constant Real c = 0.19;
  constant Real d = 0.048;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t = time;
equation
  der(x) = -c*x+d*x*y;
  der(y) = a*y-b*x*y;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 60.0),
```

```
Documentation);
end lab05;
```

В качестве результата у нас графики изменения численности хищников и жертв (рис. [4.3]-[4.4]):

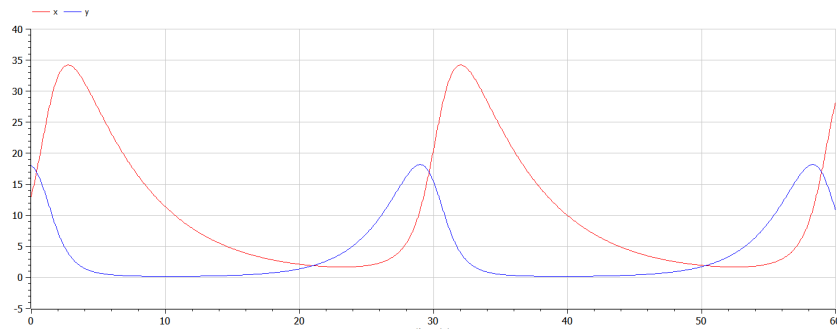


Рис. 4.3: Графики изменения численности хищников и численности жертв - OpenModelica

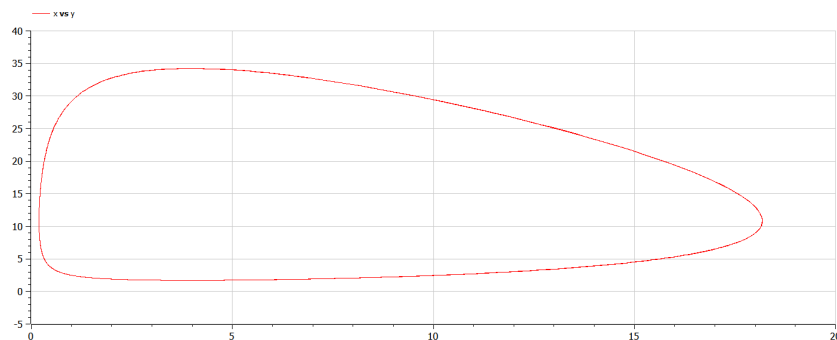


Рис. 4.4: График зависимости численности хищников от численности жертв - OpenModelica

5. Теперь найдем стационарное состояние по формуле:  $x_0 = \frac{a}{b}$ ,  $y_0 = \frac{c}{d}$

Код для нахождения состояния и проверки правильности его обнаружения напишем на Julia. В нем выведем полученные значения и посчитаем его начальным значением численности хищников и жертв.



```

using Plots
using DifferentialEquations

"Условия:"
a = 0.39
b = 0.036
c = 0.19
d = 0.048

x_0 = a / b
y_0 = c / d

@show x_0
@show y_0

u_0 = [x_0, y_0]
T = (0.0, 60.0) # отслеживаемый промежуток времени

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = -c * u[1] + d * u[1] * u[2]
    du[2] = a * u[2] - b * u[1] * u[2]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.05) # обозначили шаг

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

```

```

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end

plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "График зависимости численности хищников от численности жертв"
)

plot!(
    plt,
    Y,
    X,
    color = :red,
    label = "Фазовый портрет"
)

savefig(plt, "julia_2_stat.png")

plt_2 = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "Графики изменения численности хищников и численности жертв"
)

plot!(

```

```

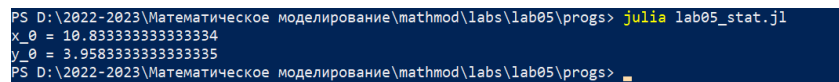
plt_2,
sol.t,
X,
color = :blue,
label = "Число жертв"
)

plot!(
plt_2,
sol.t,
Y,
color = :purple,
label = "Число хищников"
)

savefig(plt_2, "julia_1_stat.png")

```

Значения стационарного состояния следующие (рис. [4.5]):



```

PS D:\2022-2023\Математическое моделирование\mathmod\labs\lab05\progs> julia lab05_stat.jl
x_0 = 10.833333333333334
y_0 = 3.9583333333333335
PS D:\2022-2023\Математическое моделирование\mathmod\labs\lab05\progs>

```

Рис. 4.5: Стационарное состояние

Результаты получены следующие (рис. [4.6]-[4.7]):



Рис. 4.6: Графики изменения численности



Рис. 4.7: Зависимость численности хищников от числа жертв

Стационарное состояние найдено правильно, поскольку численность не изменяется (рис. [4.6]), а эволюция популяций стоит на месте - точка (рис. [4.7]).

## 5 Выводы

Создала простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Нашла стационарное состояние.

## Список литературы

1. Модель хищник-жертва [Электронный ресурс]. URL: [https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971733/mod\\_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%204.pdf](https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971733/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%204.pdf).
2. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. 2011. 436 с.
3. Фазовые портреты «на пальцах» или что можно узнать о решениях диффура, не решая его [Электронный ресурс]. 2015. URL: <https://habr.com/ru/post/268507/>.