Projet : Parallélisation de la Méthode de Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires

Plessia Stanislas

Mars 2018

Méthode de Jacobi

Définition du problème

Soit :

- $n \in \mathbb{N}$
- $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2}$ matrice carrée de taille n
- $b = (b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ vecteur de taille n.

On cherche alors le vecteur $x = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ tel que :

$$Ax = b \tag{1}$$

Résolution : Decomposition de A

On décompose A en deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notons D la matrice diagonale et R le reste. Comme on suppose les coefficiens diagonaux non nuls, D est trivialement inversible et on peut transformer l'équation (1) :

$$x = D^{-1}(b - Rx)$$

Résolution : Solution Itérative

Un solution itérative peut être construite de la manière suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} = \vec{0} \\ x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Rx^{(k)}) \end{cases}$$

D'après le théorème du point fixe, on peut montrer qu'on a alors :

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \rho(-D^{-1}R) < 1$$

On obtient alors la formule de récurrence sur les coefficients :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - \sum_{i \neq j} a_{i,j} x_j^{(k)}) \qquad (2)$$

Résolution : Condition suffisante de convergence

Une condition suffisante pour assurer la convergence de la méthode de Jacobi est la suivante :
Soit λ valeur propre de C et $y_\lambda$le vecteur propre associé, on a :

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot ||y_\lambda||_\infty &= |\frac{1}{a_{i,i}}| \cdot |\sum_{j \neq i} a_{i,j} y_{\lambda j}| \\ &\leq |\frac{1}{a_{i,i}}| \cdot \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \cdot ||y_\lambda||_\infty \end{aligned}$$

Donc on a $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad |a_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| \implies \rho(C) < 1$,
ie C est a diagonale strictement dominante.

Implémentation de la Méthode