Correção de alguns exercícios da lista de DEMONSTRAÇÕES direta, contrapositiva e contradição

sábado, 19 de agosto de 2023 10:00

3-) Demonstre que se *n* é um número inteiro e 3*n* + 2 é par, então *n* é par, usando:

- **a)** uma demonstração por contraposição.
- **b)** uma demonstração por contradição.

a) Proposição: Se $\underbrace{3n+2 \text{ é par}}$ → n é par

Contra positiva: Se n é ímpar então 3n+2 é ímpar

Se n é ímpar ⇒ $n = 2K-1$, $K \in \mathbb{N}$

logo: $3n+2 = 3.(2K-1)+2$

$3n+2 = 6K-3+2$

$3n+2 = 2.(3K)-1$, como $K \in \mathbb{N} \Rightarrow 3K \in \mathbb{N} \Rightarrow 3K = T \in \mathbb{N}$

$3n+2 = 2T-1$, que é ímpar

Como a contra positiva da proposição é verdadeira e elas são equivalentes, logo a proposição inicial é verdadeira $\blacksquare$

b) Proposição: $\underbrace{3n+2 \text{ é par}}$ → n é par

Contradição: 3n+2 é ímpar

Se 3n+2 é ímpar ⇒ $3n+2 = 2K-1$, $K \in \mathbb{N}$ (−2 ... −2)

$3n = 2K-1-2$

$3n = 2K-3 \quad (\div 3)$

$n = \dfrac{2K-3}{3}$

$n = \dfrac{2K}{3} - \dfrac{3}{3}$

$n = \dfrac{2K}{3} - 1$

Como $K \in \mathbb{N}$ a fração $\dfrac{2K}{3}$ só será Natural se K for M(3).

e mesmo assim se K é M(3) a expressão $\dfrac{2K}{3} - 1$ será um número ímpar.

1ª Contradição: Se K não é M(3) então $n \in \mathbb{Q}$

2ª Contradição: Se K é M(3) então n é ímpar.

Logo n é PAR ■

4-) Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n + 4$ for par.

Proposição: n é par $\Longleftrightarrow$ $7n+4$ for Par

* (ida: $\rightarrow$) n é par $\rightarrow$ $7n+4$ é par

Se n é par então $n = 2K$, $K \in \mathbb{N}$

Logo $7n+4 = 7.2K+4$

$7n+4 = \underline{14}K+\underline{4}$

$7n+4 = 2.(7K+2)$. Como $K \in \mathbb{N}$ então $(7K+2) \in \mathbb{N}$

$7n+4 = 2T$ Fazendo $7K+2 = T \in \mathbb{N}$

e $2T$ é par.

* (Volta: $\leftarrow$) $7n+4$ é par $\rightarrow$ n é par

Contra positiva:

n é impar $\rightarrow$ $7n+4$ é impar

se n é impar então $n = 2K-1$, $K \in \mathbb{N}$

$7n+4 = 7.(2K-1)+4$

$7n+4 = 14K-7+4$

$7n+4 = 14K-3$

$7n+4 = \underline{14K-2}-1$

$7n+4 = 2.(7K-1)-1$. Como $K \in \mathbb{N}$, $(7K-1) \in \mathbb{N}$, logo

$7n+4 = \underbrace{2T-1}$ $7K-1 = T \in \mathbb{N}$

é impar

Se a contra positiva é Verdadeira, a proposição também é.

■

6-) Demonstre o seguinte teorema: *"Se x é um número natural positivo, então $x + \frac{1}{x} \geq 2$"*.

Como $x \neq 0 \Rightarrow$ Multiplicar toda a desigualdade por x.

Como $x \neq 0 \Rightarrow$ Multiplicar toda a desigualdade por x.

$$x.\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 2.(x)$$

$$x^2+\frac{x}{x} \geq 2x \Rightarrow \underset{-2x}{x^2+1} \geq \underset{-2x}{2x}$$

$$\underbrace{x^2-2x+1} \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

Como $x \in \mathbb{N}$ $(x-1)^2$ será sempre positivo.

Na pior das hipóteses, sera $x-1=0$ quando $x=1$

Mas pode ser igual a zero devido a desigualdade

logo $x+\frac{1}{x} \geq 2$, com $x \in \mathbb{N}$ ∎

9-) Prove que qualquer quadrado perfeito de um número natural maior que 1 ou é da forma 4K ou da forma 4K + 1. (Sugestão: faça de forma Direta, primeiro para os números pares e em seguida para os números ímpares).

Sem perda de generalidade, vamos supor incialmente n um número par. Assim $n=2W$, $W \in \mathbb{N}$

se $n=2W \Rightarrow n^2=(2W)^2$

$n^2=4W^2$. Com $W \in \mathbb{N}$, $W^2 \in \mathbb{N}$

$n^2=4T$ $\quad W^2=T \in \mathbb{N}$

logo n^2 é $m(4)$ ou seja, na forma 4K

Se n é impar, então $n=2W-1$, $W \in \mathbb{N}$

$n^2=(2W-1)^2$

$n^2=\underline{4W^2-4W}+1$

$n^2=4(W^2-W)+1$. Como $W \in \mathbb{N}$, $W^2-W \in \mathbb{N}$

$n^2=4T+1$ $\quad W^2-W=T \in \mathbb{N}$

logo n^2 é $M(4)+1$, ou seja, na forma $4K+1$. ∎

Conclusão:

* Um número só terá Raiz quadrada exata se for NATURAL, $m(4)$ ou $m(4)+1$.

se for NATURAL, $m(4)$ ou $m(4)+1$.

1302 tem raiz exata

Não é $M(4)$

1º $M(4)$ abaixo de 1302 é 1300 $\Rightarrow$ $M(4)+1$: $\underline{\underline{1301}}$

Conclusão : 1302 é Irracional