Correção dos exercícios de recorrências de 1ª ordem - 20 , 21

segunda-feira, 13 de novembro de 2023 07:28

FÓRMULA PARA RESOLUÇÃO DIRETA DE RECORRÊNCIAS DO TIPO $x_n = K.x_{n-1} + f(n-1), n \geq 2$

$$X_n = K^{n-1}.x_1 + \sum_{i=2}^{n}(K^{n-i}.f(i)), n \in N$$

20-) $x_{n+1} = 2x_n + 2^n,\ com\ x_1 = 1\ e\ \forall n \in N$ $(1, 4, 12, 32, 80, \cdots)$

1º Fazer pela fórmula ⇒ Redução $x_n = \underset{K}{2}.x_{n-1} + \underset{f(i)}{2^{n-1}}$, $\underline{x_1 = 1}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$

$X_n = K^{n-1}.x_1 + \sum_{i=2}^{n}(K^{n-i}.f(i))$

$X_n = 2^{n-1}.1 + (2^{n-2}.2^1 + 2^{n-3}.2^2 + 2^{n-4}.2^3 + \cdots + 2^{n-n}.2^{n-1}) = 2^{n-1} + (\underbrace{2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + 2^{n-1}}_{(n-1)\ vezes\ 2^{n-1}})$

$\boxed{X_n = n.2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}}$

$x_1 = 1 \Rightarrow 1;\ x_2 = 4;\ x_3 = 12;\ x_4 = 32;\ x_5 = 80$

2º Fazer por expanção ⇒ SUBSTITUIÇÃO * Resolver a homogênea: $a_{n+1} = 2a_n$, $a_1 = 1$

Resolvendo a homogênea: $\underline{a_{n+1} = 2.a_n}$ com $a_1 = 1$

PG: 1º termo é 1; razão é 2 ⇒ $a_n = a_1.q^{n-1}$

$a_n = 1.2^{n-1}$

$\underline{a_n = 2^{n-1}}$

SUBSTITUIÇÃO: $X_n = a_n.y_n$

$X_n = 2^{n-1}.y_n$

$n = 1$

$x_1 = 2^{1-1}.y_1$

$1 = 1.y_1$

$\underline{y_1 = 1}$

$x_{n+1} = 2x_n + 2^n,\ x_1 = 1$

$2^{n+1-1}.y_{n+1} = 2.2^{n-1}.y_n + 2^n,\ \underline{y_1 = 1}$

$\frac{2^n.y_{n+1}}{2^n} = \frac{2^n.y_n}{2^n} + \frac{2^n}{2^n}$ $(\div 2^n)$

$y_{n+1} = y_n + 1,\ y_1 = 1$: PA onde $y_1 = 1; r = +1$

$y_n = y_1 + (n-1).r$

$y_n = 1 + (n-1).1 \Rightarrow \underline{y_n = n}$ Voltar na substituição

$X_n = 2^{n-1}.(y_n)$

$X_n = 2^{n-1}.n$

$X_n = n.2^{n-1}$ $\forall n \in N$

$$X_n = 2^{n-1} \cdot n$$

$$\boxed{X_n = n \cdot 2^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

Como a verificação já feita na resolução pela formula, não há necessidade de listagem

21-) $x_{n+1} = 3x_n - 3, \ com \ x_1 = 1 \ e \ \forall n \in N$ $\quad (1, 0, -3, -12, -39, \dots)$

1º Resolvendo pela fórmula → Reduzir a forma de escrever a recorrência

$$x_n = 3\, x_{n-1} - 3 \quad \text{com } x_1 = 1 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

$$X_n = K^{n-1} \cdot x_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(K^{n-i} \cdot f(i) \right)$$

$$X_n = 3^{n-1} \cdot 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(3^{n-i} \cdot (-3) \right)$$

$$X_n = 3^{n-1} + \left(3^{n-2} \cdot (-3) + 3^{n-3} (-3) + 3^{n-4} \cdot (-3) + \dots + 3^{3} \cdot (-3) + 3^{2} \cdot (-3) + 3^{1} \cdot (-3) + 3^{0} \cdot (-3) \right)$$

$$X_n = 3^{n-1} - \left(3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 3^{4} + 3^{3} + 3^{2} + 3^{1} \right)$$

$$X_n = 3^{n-1} - \left(\underbrace{3^{1} + 3^{2} + 3^{3} + \dots + 3^{n-2} + 3^{n-1}}_{} \right)$$

Soma de uma PG: $a_1 = 3$; razão $= 3$; $(n-1)$ termos

$$S = \frac{a_1 \cdot (q^{n} - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{3 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{n} - 3}{2}$$

$$X_n = \frac{3^{n-1}}{1} - \frac{3^{n} - 3}{2}$$

$$\boxed{X_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 3^{n} + 3}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2 \cdot 3^{0} - \cancel{3} + \cancel{3}}{2} = 1$$

$$n = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2 \cdot 3 - 3^{2} + 3}{2} = 0$$

$$n = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{2 \cdot 3^{2} - 3^{3} + 3}{2} = \frac{18 - 27 + 3}{2} = -3$$

$$n = 4 \Rightarrow x_4 = \frac{2 \cdot 3^{3} - 3^{4} + 3}{2} = \frac{54 - 81 + 3}{2} = -12$$

2º Resolvendo por expansão: Fazer a substituição $\boxed{X_n = a_n \cdot y_n}$ onde a_n e a solução da homogênea

$$X_{n+1} = 3 \cdot X_n - 3, \quad x_1 = 1$$

Fazer a substituição

$$X_n = 3^{n-1} \cdot y_n$$

$n = 1$

$x_1 = 3^{1-1} \cdot y_1$

$1 = 1 \cdot y_1$

$\boxed{y_1 = 1}$

* Resolvendo a homogínea:

$a_{n+1} = 3a_n \rightarrow$ PG: $\ a_1 = 1, \ q = 3$

$a_n = a_1 \, q^{n-1}$

$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow \underline{a_n = 3^{n-1}}$

$$3^{(n+1)-1} \cdot y_{n+1} = 3 \cdot 3^{n-1} \cdot y_n - 3, \quad y_1 = 1$$

$$3^{(n+1)-1} \cdot y_{n+1} = 3 \cdot 3^{n-1} \cdot y_n - 3, \quad y_1 = 1$$

$$\frac{3^n \cdot y_{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot y_n}{3^n} - \frac{3}{3^n}, \quad y_1 = 1 \qquad (\div 3^n)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{3}{3^n}, \quad y_1 = 1$$

Fazendo a expansão:

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = y_1 - \frac{3}{3^1}$$
$$y_3 = y_2 - \frac{3}{3^2}$$
$$y_4 = y_3 - \frac{3}{3^3}$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} = y_{n-2} - \frac{3}{3^{n-2}}$$
$$y_n = y_{n-1} - \frac{3}{3^{n-1}}$$

$+$

$$y_n = 1 - \frac{3}{3^1} - \frac{3}{3^2} - \frac{3}{3^3} - \dots - \frac{3}{3^{n-2}} - \frac{3}{3^{n-1}}$$

$$y_n = 1 - 3 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-1}}}_{} \right)$$

Soma de uma PG onde 1° termo é $\frac{1}{3}$; $q = \frac{1}{3}$ possui $(n-1)$ termos

$$S = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1 \right]}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$S = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1 \right]}{-2 \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}$$

$$S = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1}{2}$$

$$y_n = 1 - 3 \cdot \left[- \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1}{2} \right]$$

$$y_n = 1 + \frac{\frac{3}{3^{n-1}} - 3}{2}$$

$\longrightarrow$ substituição: $x_n = 3^{n-1} \cdot y_n$

$$x_n = 3^{n-1} \cdot \left[\frac{2 + \frac{3}{3^{n-1}} - 3}{2} \right]$$

$$x_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1} + \frac{\cancel{3^{n-1}} \cdot 3}{\cancel{3^{n-1}}} - 3 \cdot 3^{n-1}}{2}$$

$$x_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1} + 3 - 3^n}{2}$$

$$x_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 3^n + 3}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como a resposta deu a mesma da fórmula e esta foi validada, não [...]

foi validada, <u>não</u>
faremos a conferência.