MATEMÁTICA DISCRETA

UNIDADE 5

RECORRÊNCIAS

Professor Nahass

“A MATEMÁTICA É O ALFABETO COM O QUAL DEUS ESCREVEU O UNIVERSO”

Galileu Galilei

5.1 - INTRODUÇÃO

Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função de um ou mais antecessores imediatos.

Vejamos alguns exemplos:

I -) A sequência X_n dos números ímpares (1, 3, 5, 7, ...) pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2\ , com\ x_1 = 1\ e\ n \in N$.

II -) Qualquer Progressão Aritmética X_n de razão r e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + r\ , com\ x_1 = a\ e\ n \in N\ e\ r \in R$.

III -) Qualquer Progressão Geométrica X_n de primeiro termo a e razão q pode ser definida por $x_{n+1} = q.x_n\ , com\ x_1 = a\ e\ n \in N\ e\ q \in R$.

IV -) A sequência de Fibonacci, cujos termos são (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) pode ser definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ , com\ F_1 = 1, F_2 = 1\ e\ n \in N$

ATENÇÃO

É fácil ver que uma recorrência por si só, não define a sequência.

Por exemplo, a recorrência do Exemplo (I), $x_{n+1} = x_n + 2\ , n \in N$ **, é satisfeita não apenas pela sequência de números ímpares, mas todas as progressões aritméticas de razão igual a 2.**

Para que a sequência fique perfeitamente definida é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Uma recorrência é dita de PRIMEIRA ordem quando depende somente do termo imediatamente anterior.

Será chamada de SEGUNDA ordem quando depender de dois termos imediatamente anteriores.

De terceira ordem, quando depender de três termos imediatamente anteriores. E assim por diante.

ASSIM, A ORDEM DE UMA RECORRÊNCIA É A QUANTIDADE DE TERMOS ANTECESSORES QUE SÃO NECESSÁRIOS PARA DEFINI-LA.

Vejamos alguns exemplos:

1-) Determine x_5 na sequência definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n,\ com\ x_1 = x_2 = 1\ \forall n \in N$.

RESPOSTA:

Podemos observar de imediato que trata-se de uma recorrência de 2ª ordem, uma vez que para achar determinado termo é preciso conhecer os dois antecessores imediatos dele.

Tomemos

$$n = 1\colon x_{1+2} = 2.x_{1+1} + x_1 \to x_3 = 2.x_2 + x_1 \to x_3 = 2.1 + 1 = 3$$
$$n = 2\colon x_{2+2} = 2.x_{2+1} + x_2 \to x_4 = 2.x_3 + x_2 \to x_4 = 2.3 + 1 = 7$$
$$n = 3\colon x_{3+2} = 2.x_{3+1} + x_3 \to x_5 = 2.x_4 + x_3 \to x_4 = 2.7 + 3 = 17$$

Portanto o quinto termo é 17.

2-) Prove que uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com uma condição inicial de $x_1 = a$, tem sempre uma e só uma solução.

Resposta:

$$Sem\ perda\ de\ generalidade\ podemos\ fazer\ x_1 = f(y_0) = a$$

$n = 1$: $x_{1+1} = f(x_1) \rightarrow x_2 = f(a) = y_1$

$n = 2$: $x_{2+1} = f(x_2) \rightarrow x_3 = f(y_1) = y_2$

$n = 3$: $x_{3+1} = f(x_3) \rightarrow x_4 = f(y_2) = y_3$

....

$n = n - 1$: $x_{n-1+1} = f(x_{n-1}) = y_n \rightarrow x_n = f(x_{n-1}) = y_n$

Por INDUÇÃO FINITA, podemos provar que a igualdade é válida para n + 1.

Logo a sequência será única e igual a $(a, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$. $\blacksquare$

3-) Determine a fórmula fechada da recorrência dada por:

$$x_{n+1} = x_n + 3, x_1 = 2 \; e \; n \; \in N$$

RESPOSTA:

Listando alguns termos da Recorrência teremos: (2, 5, 8, 11, 14, ...)

Observando a recorrência, percebemos claramente que se trata de uma PA de razão r = 3 e primeiro termo igual a 2.

O termo geral de uma PA é dado por: $a_n = a_1 + (n-1).r$

Substituindo "a" por "x" para ficar de acordo com o exercício, temos:

$$x_n = x_1 + (n-1).r \;\rightarrow\; x_n = 2 + (n-1).3 \;\rightarrow\; \boldsymbol{x_n = 3n - 1}, \forall\, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$$

RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Uma RECORRÊNCIA de primeira ordem é aquela que depende somente de seu PRIMEIRO antecessor.

A mesma será dita linear quando for expressa em função exclusivamente de x_n através de uma função AFIM (antigamente dita Polinomial do Primeiro Grau – não se usa mais esta terminologia).

Ou seja, será algo do tipo:

$$x_{n+1} = f(x_n), \forall\, n \in N\; e f(x_n)\; uma\; função\; afim$$

Por exemplo:

$x_{n+1} = 2x_n + n^2$ é $linear\; pois\; a\; função$ é $2x_n$.

$x_{n+1} = n.x_n + n$ é $linear\; pois\; a\; função$ é nx_n.

$x_{n+1} = 3(x_n)^2 + 2$ $NÃO$ é $linear\; pois\; a\; função$ é $quadrática$;

$x_n\; está\; elevado\; ao\; quadrado.$

Ou seja, será LINEAR se o expoente de x_n for UM.

RECORRÊNCIAS HOMOGÊNEAS

Uma recorrência de PRIMEIRA ORDEM será dita homogênea quando o termo em x_n estiver sozinho, ou seja, não houver nada somando ou subtraindo nele (pode haver multiplicação ou divisão, mas não por ele!).

Nos três exemplos anteriores, nenhuma é homogênea.

Por exemplo, uma recorrência só será homogênea quando tiver a forma:

$$x_{n+1} = f(n).x_n \text{ , } \forall\, n \in N$$

Assim:

$\boldsymbol{x_{n+1} = n.x_n}$, $\quad x_{n+1} = 3.x_n$, $\quad \boldsymbol{x_{n+1} = -2n^2.x_n}$, $\quad x_{n+1} = 5.\frac{x_n}{2}$

são homogêneas

NOSSO OBJETIVO É ESTUDAR AS RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM, seja homogênea ou não.

EXEMPLO: Classifique as recorrências abaixo quanto à ordem, linearidade e homogeneidade.

$a)\ x_{n+2} = 3.x_{n+1} - x_n \,, \forall\, n \in N.$ Linear, homogênea, 2ª ordem

$\mathbf{b)}\ \boldsymbol{x_{n+2} = 3.x_{n+1} - (x_n)^2 \,, \forall\, n \in N.}$ Não linear, não homogênea, 2ª ordem

$\mathrm{c)}\ x_{n+2} = 3.x_{n+1} + x_n - (n+1)^2 \,, \forall\, n \in N.$ Linear, não homogênea, 2ª ordem

$\mathbf{d)}\ \boldsymbol{x_{n+1} - x_n - 5 = 0 \,, \forall\, n \in N.}$ Linear, não homogênea, 1ª ordem

$\mathrm{e)}\ x_{n+1} = 3.x_n \,, \forall\, n \in N.$ Linear, homogênea, 1ª ordem

$\mathbf{f)}\ \boldsymbol{x_{n+3} + n.x_{n+2} - x_{n+1} = x_n \,, \forall\, n \in N.}$ Linear, homogênea de 3ª ordem

$\mathrm{g)}\ x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n} - 4 \,, \forall\, n \in N.$ Não linear, não homogênea de 1ª ordem

$\boldsymbol{h)\ x_{n+1} = x_n - 2n \,, \forall\, n \in N.}$ Linear, não homogênea, 1ª ordem

$i)\ \ x_{n+1} = 3nx_n - n! \,, \forall\, n \in N.$ Linear, não homogênea, 1ª ordem

$\boldsymbol{j)\ x_{n+2} - 3.x_{n+1} + x_n = 0 \,, \forall\, n \in N.}$ Linear, homogênea, 2ª ordem

RESOLVER UMA RECORRÊNCIA, SEJA DE QUAL TIPO, É ENCONTRAR A SUA *FÓRMULA FECHADA* OU SEJA, ENCONTRAR A SUA *LEI DE FORMAÇÃO*, EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO OCUPADA PELO ELEMENTO DENTRO DA SEQUÊNCIA.

Ou melhor, é encontrar uma fórmula que me permita chegar a qualquer elemento da sequência sem precisar passar pelos anteriores a ele.

No nosso estudo, aprenderemos a resolver as Recorrências Lineares de 1ª ordem (Homogêneas ou não Homogêneas) e as Recorrências Lineares Homogêneas de 2ª ordem.

Os demais tipos de recorrências são estudos avançados de especialização.

ALGUMAS OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Se tivermos várias igualdades, se somarmos todas ou multiplicarmos todas, entre si, o resultado permanece igual.

$$\begin{array}{rr} & 2 = 2 \\ & -5 = -5 \\ + & 6 = 6 \\ & -4 = -4 \\ \hline & -1 = -1 \end{array}$$

- O mesmo vale para a desigualdade, só fazendo a ressalva que al multiplicar uma desigualdade por um número negativo, ele se inverte, pois quanto maior o MÓDULO de um número negativo, menor ele é.
- Lembrar a LEI DO CANCELAMENTO das operações de lados opostos da igualdade, tomando cuidado com a POTENCIAÇÃO e RADICIAÇÃO.

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

Segue algumas "dikas" que podem te ajudar.

- Antes de iniciar o exercício procure listar pelo menos os 5 primeiros termos da sequência; pode ser que você consiga encontrar a fórmula por raciocínio lógico.
- Verifique se é PA ou PG, pois já existem as fórmulas gerais de ambas.
- Abrir a recorrência levando-a até o n-ésimo termo.
- Normalmente as homogêneas resolve-se por multiplicação.
- As não homogêneas, na maioria das vezes, faz-se a adição.
- Se der para separar a homogênea da função, resolve-se por substituição de variável (algumas pode usar outros artifícios).
- Ao encontrar a fórmula fechada, substitua na fórmula os índices e verifique se sua resposta coincide com a listada no início.
- A verificação da fórmula pode ser feita também através de INDUÇÃO.

Nas recorrências abaixo, escreva alguns termos da mesma, determine a sua solução geral (em função de $\boldsymbol{x_1}$), determine a sua solução particular, escreva alguns termos em função da solução particular, compare com os termos listados na recorrência (seria interessante demonstrar por indução que a fórmula fechada está correta).

1-) $x_{n+1} = x_n + 2, com\ x_1 = 2\ e\ n \in N$.

2-) $x_{n+1} = 2nx_n, com\ x_1 = 2\ e\ n \in N$.

3-) $\boldsymbol{x_{n+1} = 3x_n, com\ x_1 = -1\ e\ n \in N}$.

4-) $x_{n+1} = x_n + 5, com\ x_1 = -3\ e\ n \in N$.

5-) $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - 2, com\ x_1 = 5\ e\ n \in N}$.

6-) $x_{n+1} = nx_n, com\ x_1 = 1\ e\ n \in N$.

7-) $\boldsymbol{x_{n+1} = 2x_n, com\ x_1 = 2\ e\ n \in N}$.

8-) $x_{n+1} = 4x_n, com\ x_1 = 1\ e\ n \in N$.

9-) $\boldsymbol{x_{n+1} = 2nx_n, com\ x_1 = 1\ e\ n \in N}$.

RECORRÊNCIAS DO TIPO: $x_{n+1} = x_n + f(n)$

As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem são as da forma mostrada acima.

Com efeito, temos:

$$
\begin{gathered}
x_1 = x_1 \\
x_2 = x_1 + f(x_1) \\
x_3 = x_2 + f(x_2) \\
x_4 = x_3 + f(x_3) \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1})
\end{gathered}
$$

Somando todas as igualdades chegamos em:

$$\boldsymbol{x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)}$$

OBS: Neste caso, faz-se necessário saber as fórmulas da soma dos termos de uma PA e uma PG finita.

(continuação dos EXERCÍCIOS)

10-) $x_{n+1} = x_n + n \; com \; x_1 = 0, \forall n \in N$

11-) $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n + 2^n \; com \; x_1 = 1, \forall n \in N}$

13-) $x_{n+1} = x_n + n + 1 \; com \; x_1 = -1, \forall n \in N$

14-) $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n + 2n \; com \; x_1 = 1, \forall n \in N}$

15-) $x_{n+1} = x_n + 2n - 1 \; com \; x_1 = 0, \forall n \in N$

16-) $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \; com \; x_1 = 0, \forall n \in N}$

17-) $x_{n+1} = x_n + (2n-1)^2 \; com \; x_1 = 1, \forall n \in N$

RECORRÊNCIAS DO TIPO:

$$x_{n+1} = g(n).x_n + f(n)$$

A resolução de recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem com soluções não nulas, do tipo acima, podem ser resolvidos por artifícios próprios, fazendo a multiplicação invertida "de baixo para cima" ou de outra forma que conseguir, ou poderá fazer pelo processo básico de substituição, que permite resolver todas, sem conjecturar respostas.

Para tanto, basta seguir o passo a passo a seguir.

$$x_{n+1} = g(n).x_n + f(n)$$

- Resolva a recorrência homogênea $x_{n+1} = g(n).x_n$
- Chame a solução da homogênea de y_n e calcule y_1 substituindo x_1 na solução da homogênea.
- Substitua na inicial $x_{n+1} = g(n).x_n + f(n)$, a solução y_n , lembrando que onde tem x_{n+1}, deve ser colocado y_{n+1}, ou seja, toda a recorrência deverá ser substituída.
- A nova recorrência após a substituição se tornará na forma da vista anteriormente, ou seja, $y_{n+1} = y_n + f(n), \textit{calculado}\ y_1$
- Resolver a recorrência em y_n e voltar na inicial achando a solução da mesma; ou seja, $x_n = (\textit{solução da homogênea}).y_n$, obtendo a solução da inicial.

RECORRÊNCIAS DO TIPO $x_{n+1} = K.x_n + f(n)$

Demonstra-se que se a recorrência estiver na forma

$$x_n = K.x_{n-1} + f(n-1), n \geq 2$$

K = constante real; f (n – 1) = função de “n”; dado x_1

Utiliza-se a fórmula fechada:

$$X_n = K^{n-1}.x_1 + \sum_{i=2}^{n} (K^{n-i}.f(i)), n \in N$$

(continuação dos EXERCÍCIOS)

18-) $x_{n+1} = 2x_n + 1,\ com\ x_1 = 2\ e\ \forall n \in N$

19-) $\boldsymbol{x_{n+1} = 3x_n + 3^n,\ com\ x_1 = 2\ e\ \forall n \in N}$

20-) $x_{n+1} = 2x_n + 2^n,\ com\ x_1 = 1\ e\ \forall n \in N$

21-) $\boldsymbol{x_{n+1} = 3x_n - 3,\ com\ x_1 = 1\ e\ \forall n \in N}$

22-) $x_{n+1} = -2x_n + 2,\ com\ x_1 = 1\ e\ \forall n \in N$

23-) Prove que a recorrência $\boldsymbol{x_{n+1} = 3x_n - 2,\ com\ x_1 = 1\ e\ \forall n \in N}$ é uma sequência numérica constante.

24-) Seja X_n tal que a sequência definida pela relação de recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1,\ com\ \ termo\ inicial\ x_1\ e\ \forall n \in N$.

a) Encontre o valor de x_1 para que a sequência seja constante e igual a um número real "a".

b) Resolva a recorrência com a substituição $x_n = y_n + a$, em que o "a" é o valor encontrado em (a) .

c) Para que valores de x_1 a sequência é crescente?

"SE ALGO NA SUA VIDA ESTIVER NEGATIVO, MULTIPLIQUE AMBOS OS LADOS POR (-1)"

Autor Desconhecido

RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Uma RECORRÊNCIA será considerada de segunda ordem quando um de seus termos depender dois termos antecessores imediatos a ele.

Nosso estudo terá como escopo apenas as recorrências lineares homogêneas; ou seja, todos os termos da recorrência terão expoente igual a 1 e seus coeficientes serão números reais.

A forma geral de uma recorrência de segunda ordem será do tipo:

$$x_{n+2} = b.x_{n+1} + c.x_n \,, \qquad dados\ \ x_1\ e\ x_2\,, \forall n \in N$$

Observamos claramente que $c \neq 0$, pois caso contrário teríamos uma recorrência de primeira ordem, já estudada.

Se fizermos o segundo membro da recorrência igual a zero, obteremos a mesma recorrência, que ficará na forma:

$$x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n \,, = 0 \ \ , com\, q \neq 0, dados\ \ x_1\ e\ x_2\,, \forall n \in N$$

A cada recorrência linear se segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma:

$$\boldsymbol{x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n\,, = 0\ \ , com\ q \neq 0, dados\ \ x_1\ e\ x_2\ , \forall n \in N}$$

Associaremos uma equação do segundo grau da forma:

$$\boldsymbol{r^2 + p.r + q = 0}$$

Chamada de EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA. A nossa suposição preliminar de que $c \neq 0\ \rightarrow q \neq 0$, implica que ZERO não é raiz da equação característica e portanto ela poderá:

- possuir duas raízes reais e distintas, $r_1\ e\ r_2\ , se\ \Delta > 0$;
- possuir duas raízes reais e iguais, $r_1 =\ r_2 = r\ , se\ \Delta = 0$;
- possuir duas raízes reais e imaginárias, conjugadas, $r_1\ e\ r_2\ , se\ \Delta < 0$.

TEOREMA:

"Se as raízes de $r^2 + p.r + q = 0$ são $r_1 \neq r_2 \in R$ então

$$a_n = C_1.(r_1)^n + C_2.(r_2)^n$$

é solução da recorrência

$$x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n \,, = 0 \;\; , com\; q \neq 0, dados\;\; x_1\; e\; x_2 \,, \forall n \in N$$

Quaisquer que sejam os valores das constantes "C_1 e C_2" .

DEMONSTRAÇÃO:

Substituindo a solução a_n na recorrência:

$$x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n \,, = 0 \;\rightarrow a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n \,, = 0$$

$$C_1.(r_1)^{n+2} + C_2.(r_2)^{n+2} + p.(C_1.(r_1)^{n+1} + C_2.(r_2)^{n+1}) + \mathrm{q}.(C_1.(r_1)^n + C_2.(r_2)^n) = 0$$

Juntando os termos semelhantes e preparando, chegamos à conclusão que 0=0 e, portanto a sugestão de que a_n é solução da recorrência é verdadeira.

POR EXEMPLO:

Resolva a recorrência $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0,\ com\ x_1 = 0, x_2 = 1\ e\ \forall n \in N$

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, vamos listar alguns termos da sequência, pois talvez por LÓGICA, conseguimos encontrar sua lei de formação.

$n = 1\ \rightarrow x_3 = -3x_2 + 4x_1 = -3(1) + 4.(0) = -3$

$n = 2\ \rightarrow x_4 = -3x_3 + 4x_2 = -3(-3) + 4.(1) = 13$

$n = 3\ \rightarrow x_5 = -3x_4 - 4x_3 = -3(13) + 4.(-3) = -51$

$n = 4\ \rightarrow x_6 = -3x_5 - 4x_4 = -3(-51) + 4.(13) = 205$

Teremos a sequência: (0, 1, -3, 13, -51, 205, ...)

Podemos observar que, para encontrar sua fórmula fechada, termos muita dificuldade, pois não “salta” aos olhos a sua FÓRMULA FECHADA.

Passemos à resolução da recorrência pelo TEOREMA demonstrado anteriormente.

A equação característica da recorrência será na forma abaixo.

Se $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ *, então E.C.:* $r^2 + 3r - 4 = 0$ *,*

que resolvendo, encontramos como raízes: $r_1 = 1 \; ou \; r_2 = -4.$

Assim, a ***SOLUÇÃO GERAL*** *será da forma:* $\boldsymbol{X_n = C_1.(r_1)^n + C_2.(r_2)^n}$

Fazendo as substituições teremos: $\boldsymbol{X_n = C_1.(1)^n + C_2.(-4)^n} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{X_n = C_1 + (-4)^n.C_2}}$

Substituindo os valores de $x_1 = 0 \;\; e \; x_1 = 1$*, teremos:*

$\boldsymbol{x_1 = C_1.(1)^1 + C_2.(-4)^1 \;\rightarrow\; C_1 - 4C_2 = 0}$ *e*

$\boldsymbol{x_2 = C_1.(1)^2 + C_2.(-4)^2 \;\rightarrow\; C_1 + 16C_2 = 1}$

Que nos leva no sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas dado:

$\boldsymbol{\begin{cases} C_1 - 4C_2 = 0 \\ C_1 + 16C_2 = 1 \end{cases}}$ *que após resolvido por qualquer processo, teremos:*

$$C_1 = \frac{1}{5} \quad e \quad C_2 = \frac{1}{20}$$

Levando as constantes na SOLUÇÃO GERAL, obteremos a SOLUÇÃO PARTICULAR DA RECORRÊNCIA para os valores de x_1 e x_2 dados.

$$\boldsymbol{X_n = C_1 + (-4)^n . C_2} \rightarrow \boldsymbol{x_n = \frac{1}{5} + (-4)^n . \frac{1}{20}}$$

Organizando a resposta de forma "elegante", termos:

$$\boxed{\boldsymbol{X_n = \frac{4 + (-4)^n}{20}}}$$

Fazendo a verificação (que pode ser feita também por indução), teremos:

$$n = 1 \rightarrow x_1 = \frac{4 + (-4)^1}{20} = 0; \; n = 2 \rightarrow x_2 = \frac{4 + (-4)^2}{20} = 1;$$

$$n = 3 \rightarrow x_3 = \frac{4 + (-4)^3}{20} = -3; \; n = 4 \rightarrow x_4 = \frac{4 + (-4)^4}{20} = 13;$$

$$n = 5 \rightarrow x_5 = \frac{4 + (-4)^5}{20} = -51; \; n = 6 \rightarrow x_6 = \frac{4 + (-4)^6}{20} = 205;$$

Que nos leva na mesma sequência numérica gerada pela recorrência: (0, 1, -3, 13, -51, 205, ...)

Observamos que no exercício anterior, para encontrar a SOLUÇÃO GERAL da recorrência, deixamos a resposta em função de $C_1 \ e \ C_2$.

Se quisermos a SOLUÇÃO PARTICULAR, devemos encontrar os valores de $C_1 \ e \ C_2$ resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} C_1 . r_1 + C_1 . r_2 = x_1 \\ C_1 .(r_1)^2 + C_2 .(r_2)^2 = x_2 \end{cases}$$ nas incógnitas $C_1 \ e \ C_2$

Por qualquer processo que se escolha, a solução será:

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{x_1 .(r_2)^2 - r_2 . x_2}{r_1 . r_2 (r_2 - r_1)} \quad e \quad C_2 = \frac{r_1 . x_2 - (r_1)^2 . x_1}{r_1 . r_2 (r_2 - r_1)}}$$

Se as raízes da equação característica forem iguais

$(\Delta = \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{ou\ seja}, \boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r})$, a SOLUÇÃO GERAL da recorrência será dada por:

$$\boldsymbol{X_n = C_1.r^n + C_2.n.r^n}$$

A SOLUÇÃO PARTICULAR será dada quando os valores de $x_1\ e\ x_2$ forem dados.

Neste caso, deveremos resolver o sistema abaixo para encontrar os valores de $C_1\ e\ C_2$.

$$\begin{cases} C_1.r + C_2.r = x_1 \\ C_1.r^2 + 2C_2.r^2 = x_2 \end{cases}$$ nas incógnitas $C_1\ e\ C_2$.

Resolvendo o sistema encontraremos:

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{2.x_1}{r} - \frac{x_2}{r^2}} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{C_2 = \frac{x_2 - r.x_1}{r^2}}$$

OBSERVAÇÃO:

Se as raízes forem imaginárias, serão doferentes e, portanto, a fórmula utilizada será a primeira. Aconcelha-se usar a forma trigonométrica do número complexo para facilidade de cálculos.

RESOLUÇÃO DE ALGUNS EXEMPLOS

1-) Dada a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, com $x_1 = 1 \; e \; x_2 = 1$, determine sua solução geral e sua solução particular.

RESPOSTA:

Inicialmente vamos listar alguns termos da recorrência:

$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, com $x_1 = 1 \; e \; x_2 = 1$ $\rightarrow x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$

(1, 1, 0, -4, -16, - 48, - 128, ...)

A equação característica da recorrência será: $r^2 - 4r + 4 = 0$

Resolvendo a equação encontramos como solução: $r_1 = r_2 = r = 2$

Logo a SOLUÇÃO GERAL será do tipo: $\boldsymbol{X_n = C_1 . r^n + C_2 . n . r^n}$

Assim: $\boxed{\boldsymbol{X_n = C_1 . 2^n + C_2 . n . 2^n}}$

Para a SOLUÇÃO PARTICULAR, utilizaremos os valores de $x_1 \; e \; x_2$.

A partir da solução geral encontrada $X_n = C_1.2^n + C_2.n.2^n$, e sabendo que $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, poderemos montar:

$$x_1 = 1 \;\rightarrow C_1.2^1 + C_2.n.2^1 = 1 \;\rightarrow\; 2C_1 + 2C_2 = 1$$

$$x_2 = 1 \;\rightarrow C_1.2^2 + C_2.2.2^2 = 1 \;\rightarrow\; 4C_1 + 8C_2 = 1$$

Podemos montar o sistema: $\begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 1 \\ 4C_1 + 8C_2 = 1 \end{cases}$, *que quando resolvido,*

$C_1 = \frac{3}{4}$ e $C_2 = -\frac{1}{4}$, *que nos leva na solução particular:*

$$X_n = C_1.2^n + C_2.n.2^n \;\rightarrow\; X_n = \frac{3}{4}.2^n + \left(-\frac{1}{4}\right)n.2^n$$

Preparando a resposta de forma apresentável:

$$X_n = \frac{3.2^n}{2^2} - \frac{n.2^n}{2^2} \;\rightarrow\; X_n = 3.2^{n-2} - n.2^{n-2} \;\rightarrow$$

$$X_n = 2^{n-2}.(3-n), \forall n \in N$$

Listando alguns termos da recorrência teremos: (1, 1, 0, -4, -16, -128, ...)

Verificando os termos da recorrência inicial. (podendo conferir por INDUÇÃO)

2-) Escreva alguns termos da recorrência dada abaixo. Aplique a fórmula do TEOREMA para recorrências lineares homogêneas de 2ª ordem e determine sua solução geral. Em seguida, determine a sua solução particular e faça a verificação se os termos obtidos pela solução particular coincidem com os termos iniciais encontrados na recorrência.

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0, \qquad com\ \ x_1 = 0, x_2 = 1, \forall\ n \in N$$

RESPOSTA:

Listagem dos termos: $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n\ , x_1 = 0, x_2 = 1$ *.*

(0, 1, 6, 28, 120, 496, ...)

Equação característica: $\boldsymbol{r^2 - 6r + 8 = 0}$

Percebemos que o discriminante será $\Delta = 4\ \ \rightarrow\ r_1 = 2\ \ ou\ \ r_2 = 4$

Sua solução geral será dada por: $\boldsymbol{X_n = C_1.(r_1)^n + C_2.(r_2)^n}$

$$\boldsymbol{X_n = C_1.2^n + C_2.4^n, \forall\, n \in N}$$

Partindo da solução geral, vamos para a solução particular.

$$\boldsymbol{X_n = C_1.2^n + C_2.4^n}$$

$x_1 = 0 \;\rightarrow\; C_1.2^1 + C_2.4^1 = 0 \;\rightarrow\; 2C_1 + 4C_2 = 0\;\;(:2)$

$x_2 = 1 \;\rightarrow\; C_1.2^2 + C_2.4^2 = 1 \;\rightarrow\; 4C_1 + 16C_2 = 1$

Teremos o sistema: $\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 \\ 4C_1 + 16C_2 = 1 \end{cases}$

Que nos leva em $C_1 = -\frac{1}{4}$ $\;e\;$ $C_2 = \frac{1}{8}$

Portanto sua solução particular será:

$X_n = \left(-\frac{1}{4}\right).2^n + \left(\frac{1}{8}\right).4^n$, *que pode ser melhorada na sua apresentação*

$$X_n = \left(-\frac{1}{4}\right).2^n + \left(\frac{1}{8}\right).4^n \;\; \rightarrow \;\; X_n = -\frac{2^n}{2^2} + \frac{2^{2n}}{2^3} \;\; \rightarrow$$

$$\boldsymbol{X_n = 2^{2n-3} - 2^{n-2}\,,\forall\, n \in N}$$

Fazendo a listagem pela lei de formação teremos:

(0, 1, 6, 28, 120, 496, ...)

**** Lembrando que o mais correto para uma garantia perfeita da fórmula fechada é a demonstração por INDUÇÃO.***

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nas recorrências abaixo, escreva alguns termos da mesma (pelo menos 5), determine a sua solução geral, determine a sua solução particular, escreva alguns termos da solução particular, confira com os termos escritos através da recorrência. (Seria interessante demonstrar por indução que a fórmula fechada está correta).

$a) x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \ , \ com \ x_1 = 0 \ e \ x_2 = 1 , \forall \ n \in N$

$\boldsymbol{b) x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0 \ , \ com \ x_1 = 1 \ e \ x_2 = 2, \forall \ n \in N}$

$c) x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0 \ , \ com \ x_1 = 0 \ e \ x_2 = 2, , \forall \ n \in N$

$\boldsymbol{d) x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \ , \ com \ x_1 = 1 \ e \ x_2 = 1, \forall \ n \in N}$

$e) x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \ , \ com \ x_1 = 0 \ e \ x_2 = 1, , \forall \ n \in N$

f) $\boldsymbol{x_{n+2} - 4x_n = 0\ ,\ com\ x_1 = 1\ \ e\ \ x_2 = 2}, \forall\, n \in N$

g) $x_{n+2} - 9x_n = 0\ ,\ com\ x_1 = 0\ \ e\ \ x_2 = 1, \forall\, n \in N$

h) $\boldsymbol{x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0\ ,\ com\ x_1 = 0\ \ e\ \ x_2 = 1}, \forall\, n \in N$

$i)\ x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0\ , com\ x_1 = -1\ \ e\ \ x_2 = 0, \forall\, n \in N$

$\boldsymbol{j)\ x_{n+2} - 16x_n = 0\ ,\qquad com\ x_1 = 0\ \ e\ \ x_2 = 1}, \forall\, n \in N$