MATEMÁTICA DISCRETA

2.A
DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

IFTM – ITUIUTABA

Professor Nahass

1 – INTRODUÇÃO

A primeira experiência que a maior parte de nós temos com a Matemática é por meio de processos de CONTAGEM. É importante observar que aprender a contar tem duas etapas bem distintas, com graus de complexidade também distintos.

- **Na primeira etapa, aprendemos a enunciar uma sequência de palavras (** ***um, dois, três, quatro, ...*****) sem atribuir significado a elas;**
- **Algum tempo depois, aprendemos a usar esta sequência para CONTAR os elementos do conjunto e estas palavras que chamamos de números. Algo notável, que não custamos a observar, é que, não importa como façamos a correspondência, o número final é sempre o mesmo – a ele denominamos o número de elementos do conjunto.**

2 – NÚMEROS ORDINAIS

Considerando as duas etapas, elas nos faz entender e estabelecer a fundamentação matemática apropriada para os números Naturais. Ao olhar os Números Naturais como uma simples sequência, estamos diante do que chamamos de NÚMEROS ORDINAIS, examinados na próxima secção, enquanto seu uso como instrumento de contagem remete à noção de NÚMERO CARDINAL, estudos mais à frente.

3 – NÚMEROS ORDINAIS

Como descrever matematicamente a estrutura do conjunto dos números naturais, no sentido de números ordinais? Como em outros ramos da Matemática, isto é feito por meio de uma lista de propriedades essenciais, chamadas de AXIOMAS (como já explicado anteriormente), que caracterizam a estrutura da sequência, sem ambiguidades ou propriedades supérfluas, isto é, que possam se obtidas das demais. GIUSEPE PEANO (1858 – 1932) propôs uma lista de axiomas, baseado na noção de SUCESSOR de um número natural (intuitivamente, o que vem logo depois na lista dos números naturais). A construção de PEANO caracteriza o conjunto dos números naturais N por meio dos 4 axiomas a seguir.

AXIOMAS DE PEANO

1-) Todo número natural "n" tem um único sucessor, representado por "n + 1", que também é um número natural.

2-) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes; ou seja, se "$m + 1 = n + 1 \Rightarrow m = n$" ou se "$m + 1 \neq n + 1 \Rightarrow m \neq n$".

3-) Existe um único número natural, designado por "1", que não é sucessor de nenhum outro, ou seja, "$n + 1 \neq 1$", para todo N.

4-) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X pertence a X, então $X = N$.

- **OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:**

O terceiro axioma estabelece o número 1 sendo o único número natural que não é o sucessor de nenhum outro número e que, portanto, representa o PONTO DE PARTIDA do conjunto N = { 1, 2, 3, 4, 5, ... } dos números naturais.

É comum, também, adotar-se 0 (zero) como ponto de partida, levando a N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }.

OPÇÃO POR UMA OU OUTRA ALTERNATIVA É UMA QUESTÃO DE GOSTO OU CONVENIÊNCIA.

Para nós, no MATEMÁTICA DISCRETA, consideraremos o primeiro número natural como sendo o número UM (1).

ALGUMAS DEFINIÇÕES E TEOREMAS IMPORTANTES

1-) Contar um conjunto X significa estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os de um subconjunto de N da forma $I_n = \{x \in N / x \leq n\}$ = {1, 2, 3, ... n}. Quando é possível estabelecer tal correspondência biunívoca, dizemos que X é um conjunto finito e que "n" é o NÚMERO CARDINAL ou NÚMERO DE ELEMENTOS DE X ou CARDINALIDADE DE X.

2-) Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma função bijetiva $f: X \rightarrow Y$, ou seja, uma regra que associa a cada elemento de X um único elemento de Y de modo que cada elemento de Y seja imagem de exatamente um elemento de X (isto equivale a dizer que f é uma função simultaneamente injetiva e sobrejetiva).

3-) Sejam *m* e *n* números naturais. Dizemos que *m* < *n* se existe um número natural p tal que *m* + *p* = *n*.

4-) Se m < n e n < p, então m < p .

5-) Dados $\boldsymbol{m \in N}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{n \in N}$, vale uma, e somente uma , das alternativas: $\boldsymbol{m = n, m < n \text{ } ou \text{ } n < m}$.

6-) Se $\boldsymbol{m < n}$ então, para qualquer $\boldsymbol{p \in N}$, tem-se $\boldsymbol{m + p < n + p}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{mp < np}$.

7-) Todo subconjunto não vazio $X \subset N$ possui um menor elemento. Isso significa que existe, um elemento $n_0 \in N$ que é menor que todos os demais elementos de X.

8-) O produto da contagem (ou seja o número cardinal de X) é sempre o mesmo, não importando como a contagem é feita.

9-) Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e $\mathbf{n(Y)} \leq \boldsymbol{n(X)}$. Tem-se que n(Y) = n(X) somente quando Y=X (lembre-se que Y e X é a cardinalidade de ambos os conjuntos e não os conjuntos em si).

10-) Dizemos que dois conjuntos X e Y têm MESMA CARDINALIDADE quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre X e Y (isto é, existe uma função bijetiva f : X→Y)

4 – O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O último axioma de Peano e chamado de MÉTODO DA INDUÇÃO. Ele fornece um mecanismo para garantir que um dado subconjunto X de N inclui, na verdade, todos os elementos de N. Por esta razão, é um instrumento fundamental para construir definições e demonstrar teoremas relativos a números naturais (as definições e provas por INDUÇÃO ou RECORRÊNCIAS).

Suponhamos que desejemos provar que uma propriedade P(n) relativa ao número natural n, denominado por nós de m (que normalmente é igual a 1) seja válida para todos os valores naturais de N. Ou seja, desejamos provar que o conjunto

X = { n/P(n)} , e que um subconjunto de N é, na verdade, igual ao próprio N. Pelo Axioma da Indução basta mostrar que o menor número de $x \in N$ e que o sucessor de cada elemento de X também está em X.

Em termos da propriedade P(n), isto equivale a mostrar que:

(i) P(m) é válida; onde m é o menor valor de P(n)

(ii) Para todo $n \in N$, a validez de P(n) implica na validez de P (n+1).

Verificado estes dois fatos, conclui-se que a validez de P(n) para todos os valores de n.

O axioma da Indução pode ser reescrito como abaixo, usando linguagem de propriedades nesta forma, ele costuma ser chamado de PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA ou da INDUÇÃO MATEMÁTICA:

"Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i) CASO BASE DA INDUÇÃO: P(m) é válida, onde m é o menor número natural que satisfaz a propriedade. Na maioria dos casos, m = 1.

ii) PASSO INDUTIVO: Admita, por hipótese, que P(n) seja válida para $n \in N$ e que a validez de P(n) implica na validez de P(n + 1).

Neste caso, P(n) é válida para todo $n \in N$ ".

OBSERVAÇÃO: Para todo ou qualquer que seja, pode ser substituído pelo símbolo matemático $\forall$.

RESOLUÇÃO DE ALGUNS EXEMPLOS

Exemplo I – Consideremos o problema de obter uma expressão para a soma

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 2n – 1, que é a soma dos *n* primeiros números naturais ímpares.

Façamos a análise desta soma desde o início:

n = 1 : 2.1 – 1 = 2 – 1 = 1 (ok)

n = 2 : 2.2 – 1 = 4 – 1 = 3 = 1 + 3 = 4 (ok)

n = 3 : 2.3 – 1 = 6 – 1 = 5 = 1 + 3 + 5 = 9 (0k)

n = 4 : 2.4 – 1 = 8 – 1 = 7 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 (ok)

n = 5 : 2.5 – 1 = 10 – 1 = 9 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 (ok)

Percebemos que para a soma dos 5 primeiros números ímpares, obtemos quadrados perfeitos da quantidade de números que estão sendo somados.

Se seguirmos nesta linha, podemos CONJECTURAR que a soma de n números ímpares nos levaria a n^2 ,ou seja, a soma dos 10 primeiros números naturais ímpares nos levaria a 100; e assim por diante.

No entanto, é necessário PROVAR, DEMONSTRAR, que tal conjectura é válida para a soma de qualquer quantidade de números ímpares.

Ou seja, provar que $\forall n \in N, 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1 = n^2$

Aqui, então, entra a demonstração por INDUÇÃO.

Provar que $1+2+3+5+7+\cdots+2n-1=n^2\ \ \forall n \in N$

i) Base da indução (menor número) : 1

$n=1 \Rightarrow 2.(1)-1=1^2 \Rightarrow 1=1$ **; o que é verdade. Logo a fórmula é válida para o menor valor.**

ii) PASSO INDUTIVO: Supor POR HIPÓTESE que a fórmula é válida para "n", ou seja:

$$1+3+5+7+\cdots+2n-1=n^2 \text{ é verdade } \forall n \in N$$

dar o passo indutivo e provar que a validade para "n" implica na validade do sucessor de "n", que é "n + 1", ou seja: $n \Rightarrow n+1$.

$$1+3+5+\cdots+2n-1+\ 2(n+1)-1=(n+1)^2$$

Perceba que o que está destacado em verde é exatamente a nossa hipótese de indução que vale n^2. Assim, podemos escrever:

$$n^2+2n+2-1=n^2+2n+1\ \Rightarrow n^2+2n+1=n^2+2n+1$$

Mostrando que o passo indutivo é válido para o sucessor de n. E, se é válido, a fórmula é verdadeira para qualquer valor de n.

$\blacksquare$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Demonstrar através da INDUÇÃO FINITA as igualdades e desigualdades abaixo:

1-) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}\ ,\forall\, n\in N$

2-) $3+8+13+\cdots+(5n-2)=\frac{n.(5n+1)}{2}\ ,\forall\, n\in N$

3-) $2+4+6+\cdots+2n=n.(n+1)\ ,\forall\, n\in N$

4-) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}\ ,\forall\, n\in N$

5-) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2\ ,\forall\, n\in N$

6-) $2^n < n!\ ,\ \forall\, n \in N\ e\ n \geq 4$

7-) $n < 2^n\ ,\ \forall\, n \in N$

8-) $2n + 1 < 2^n\ ,\ \forall\, n \in N\ e\ n \geq 4$

9-) $n^2 \leq 2^n\ ,\ \forall\, n \in N\ e\ n \geq 4$

10-) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}\ ,\ \forall\, n \in N$

11-) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n.(n + 1) = \frac{n.(n+1).(n+2)}{3}\ , \forall\, n \in N$

12-) $1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + \cdots + n.2^{n-1} = 1 + (n-1).2^n \; , \; \forall\, n \in N$

13-) $3^{n-1} < 2^{n^2} \; , \; \forall\, n \in N$

14-) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} < 2 \; , \; \forall\, n \in N \;\; (com\ \mathrm{n}\ radicais)$

15-) Mostre que qualquer número natural “n” na forma $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3.

16-) Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.