IFTM – Campus Ituiutaba

MATEMÁTICA DISCRETA
UNIDADE 6.5
Análise Combinatória
PERMUTAÇÃO SIMPLES E REPETIDA

Professor Nahass

PERMUTAÇÃO SIMPLES

PERMUTAÇÃO SIMPLES é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição, em que entram todos os elementos em cada grupo. Ou seja, é um ARRANJO SIMPLES onde n = p.

Neste caso, é só fazer n = p na fórmula do ARRANJO SIMPLES e chegaremos na forma da PERMUTAÇÃO SIMPLES de "n" elementos, que chamaremos de $\boldsymbol{P_n}$ *.*

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

EXEMPLOS

1-) Calcular o valor da expressão numérica dada abaixo:

$$E = P_5 + 2.\frac{P_6 - P_4}{P_2}$$

RESOLUÇÃO: Somente substituir os fatoriais correspondentes a cada permutação e fazer as devidas simplificações.

$$E = P_5 + 2.\frac{P_6 - P_4}{P_2} = 5! + 2.\frac{6! - 4!}{2!} = 120 + 2.\frac{720 - 24}{2} =$$
$$120 + 2.\frac{696}{2} = 120 + 696 = 816$$

Logo, E = 816.

2-) Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser escritos usando-se os algarismos 1, 3, 5, e 7 ?

RESPOSTA: Percebemos, em primeiro lugar que o número de entidades a serem agrupadas e o número de entidades por agrupamento é o mesmo (4 e 4).

Vemos também que ao se formar um número de 4 algarismos com os disponíveis, se mudarmos a ordem de uma deles no agrupamento, os números ficam diferentes e, portanto trata-se de uma permutação de 4 elementos. Assim

$$P_n = P_4 = 4! = 24$$

Logo, podemos escrever 24 números com algarismos distintos.

3-) Quantos anagramas tem a palavra CAFE?

RESPOSTA: Como já vimos anteriormente, anagrama de uma palavra é qualquer combinação entre as letras da palavra, com ou sem sentido.

Neste caso, são 4 letras distintas que serão agrupadas de 4 em 4 e, se mudarmos a ordem de alguma das letras, o anagrama muda. Portanto trata-se de uma permutação de 4.

Assim,

$$\boldsymbol{P_n = P_4 = 4! = 24.}$$

Neste caso, teremos 24 anagramas

4-) Considere os números obtidos a partir do conjunto dado onde A = { 1, 2, 3, 4, 5 }, e que possuem na sua formação 5 dígitos distintos. Colocando-se estes números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521 ?

RESPOSTA: Este exercício já foi feito anteriormente através do PFC, ou seja, conhecendo-se o PFC e sabendo aplica-lo de forma correta e coerente, não há necessidade de se decorar fórmulas.

No entanto, pelas fórmulas, consegue-se chegar mais rapidamente na resposta, desde que se saiba em qual caso se encaixa.

Neste exercício, devemos dividi-lo em partes de forma a tornar possível os passos para chegar ao resultado.

Iniciaremos encontrando todos os números que podemos formar iniciando por 1, depois 2, depois 3 e, em seguida iremos diminuindo as possibilidades até chegar no número desejado.

Como os algarismos precisam ser distintos e trocando-se de posição, muda o agrupamento e a quantidade de entidades a se agrupar é igual à quantia em cada agrupamento, trata-se de PERMUTAÇÃO.

Lembrando que os números são 1, 2, 3, 4 e 5 e queremos a posição do número solicitado é 43 521.

Iniciando com 1 teremos: 1 _ _ _ _ $\rightarrow\ P_4 = 4! = 24$

Iniciando com 2 teremos: 2 _ _ _ _ $\rightarrow\ P_4 = 4! = 24$

Iniciando com 3 teremos: 3 _ _ _ _ $\rightarrow\ P_4 = 4! = 24$

Iniciando com 41 teremos: 41 _ _ _ $\rightarrow\ P_3 = 3! = 6$

Iniciando com 42 teremos: 42 _ _ _ $\rightarrow\ P_3 = 3! = 6$

Iniciando com 43 1 teremos: 43 1 _ _ $\rightarrow\ P_2 = 2! = 2$

Iniciando com 43 2 teremos: 43 2 _ _ $\rightarrow\ P_2 = 2! = 2$

Iniciando com 43 51 teremos: 43 12 _ $\rightarrow\ P_1 = 1! = 1$

Em seguida teremos o número pedido: 43 152

Os resultado mostram a quantidade de números em cada classe.

Somando todos teremos 89 e com o solicitado, temos 90.

Ou seja, 90ª posição.

5-) Um estudante ganhou numa competição quatro livros diferentes de Matemática, três diferentes de Física e dois diferentes de Química. Querendo manter juntos os da mesma unidade curricular, calculou que poderá enfileira-los numa prateleira de estante, de modos diversos. Calcule essa quantidade de modos.

RESPOSTA: Temos aqui 2 eventos menores que compõem o evento maior.

O primeiro é agrupar cada lote de livros, que são 3 lotes de cada unidade curricular, o que é permutação, pois uma inversão na ordem do livro altera toda a fileira da prateleira.

O segundo é, após a organização dos livros por unidade curricular, leva-los para organização de cada grupo, já previamente organizado para a prateleira.

Matemática: $P_4 = 4! = 24$

Física: $P_3 = 3! = 6$

Química: $P_2 = 2! = 2$

Número de maneiras de organizar cada bloco no prateleira (3 blocos): $P_3 = 3! = 6$

Pelo PFC, o número de modos diferentes de organizar os livros na prateleira será:

$$\boldsymbol{P_3 . P_4 . P_3 . P_2 = 6.24.6.2 = 1728 \quad MODOS}$$

EXERCICIOS PROPOSTOS

1-) Calcule o valor de E, sendo $E = P_4 - 2.\frac{P_8 - P_7}{P_4}$ RESP: 2 916

2-) Resolva a equação: $\frac{P_m + m.P_{m-2}}{P_{m+1}} = \frac{3}{8}$ RESP: V = { 3 }

3-) Quantos anagramas da palavra EDITORA

a) Começam com A? RESP: 720
b) Começam com A e terminam com E? RESP: 120

3-) Quanto aos anagramas da palavra ENIGMA, calcule:

a) O número total delas. RESP: 720
b) O número dos que terminam em A. RESP: 120
c) O número dos que começam com EM nesta ordem. RESP: 24

4-) Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, usando-se os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 8? **RESP: 120**

5-) De quantos modos diferentes podem sentar-se nove pessoas:

a) **Se ficarem todas em fila?** **RESP: 362 880**

b) **Se ficarem todos em fila, mas os lugares extremos forem ocupados pelo mais velho e pelo mais novo?** **RESP: 10 080**

6-) Num carro com 5 lugares e mais o lugar do motorista viajam 6 pessoas, das quais 3 são habilitados. De quantas maneiras se podem dispor essas 6 pessoas em viagem? **RESP: 360**

7-) De quantos modos podemos ordenar 2 livros de Matemática, 3 de Português e 4 de Física, de modo que os livros de uma mesma matéria fiquem sempre juntos e, além disso, os de Física fiquem, entre si, sempre na mesma ordem? **RESP: 72**

8-) Permutando os algarismos 2, 4, 6 e 8, formamos números. Dispondo esses números em ordem crescente, qual o número que ocupa a 22ª posição? **RESP: 8 462**

9-) Calcule o número de permutações que podem ser feitas com as letras da palavra CAPITULO, de forma que não fiquem juntas duas vogais E duas consoantes? **RESP: 1 152**

10-) Formados e dispostos em ordem alfabética todos os anagramas da palavra ESAN, determine a posição que ocupará a palavra NASE. **RESP: 14ª posição**

PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Até agora estudamos permutação com elementos distintos.

Vejamos o que acontece quando em uma quantidade “n” de elementos houver uma quantidade de elementos repetidos.

Como eles repetem, se trocarmos eles entre si, não haverá alteração do agrupamento formado e neste caso, devemos excluir este agrupamento, lembrando que nem todos se repetem.

Para isto, devemos dividir a permutação dos “n” elementos do conjunto pelo fatorial de vezes que há a repetição deum ou mais elementos do conjunto.

Assim, se em um determinado conjunto um elemento repete α vezes, outro β vezes, outro γ vezes, e assim por diante, denominaremos por:

$$\boldsymbol{P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.\gamma!}}$$

EXEMPLOS

1-) Quantos são os anagramas da palavra NATALIA ?

RESPOSTA: Observamos claramente que é um caso de permutação repetida, onde existem 7 entidades no conjunto e no entanto, o A repete 3 vezes.

Logo a quantidade de anagramas será dado por:

$$\boldsymbol{P_n^{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!.} \rightarrow P_7^{3} = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 840}$$

2-) Quantos anagramas tem a palavra ARITNETICA ?

RESPOSTA: A palavra ARITMETICA tem 10 letras, sendo:

2 iguais a A

2 iguais a I

2 iguais a T

Portanto temos um caso de permutação com repetição. Logo:

$$\boldsymbol{P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.\gamma!} = P_{10}^{2,2,2} = \frac{10!}{2!.2!.2!} \rightarrow P_{10}^{2,2,2} = 453\,600}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1-) Quantos anagramas têm as palavras:

a) PATA *RESP: 12*

b) PARALELOGRAMO *RESP: 120 729 600*

c) GUANABARA *RESP: 15 120*

2-) Quantos anagramas da palavra MATEMATICA que começam por vogal? *RESP: 75 600*

3-) Determine a quantidade de números distintos que podemos obter permutando os algarismos dos números:

a) 73 431 *RESP: 60* b) 343 434 *RESP: 20*

4-) Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras da palavra ARAPONGA, de modo que a letra P ocupe sempre o último lugar? *RESP: 840*

5-) Usando uma vez a letra A, uma vez a letra B e (n – 2) vezes a letra C, podemos formar 20 anagramas diferentes com “n” letras em cada anagrama. Calcule “n”. *RESP: 5*