MATEMÁTICA DISCRETA

UNIDADE 4
Recorrências Gerais, PA e PG

Professor Nahass

4.1 – SUCESSÃO

Consideremos as equipes de uma equipe de times finalistas para a copa Brasil de 2023 e sua suposta classificação:

1º lugar – Atlético Mineiro

2º lugar – Botafogo

3º lugar – Grêmio

4º lugar – Chapecoense

O conjunto ordenado (Atlético Mineiro, Botafogo, Grêmio, Chapecoense) é chamado SEQUÊNCIA ou SUCESSÃO dos times de futebol segundo a ordem de classificação.

O conjunto ordenado (janeiro, fevereiro, março, abril, ... , dezembro) é chamado de SEQUÊNCIA ou SUCESSÃO dos meses do ano.

Seguindo o raciocínio anterior, podemos dizer que:

“SUCESSÃO ou SEQUÊNCIA é todo conjunto onde consideramos os elementos dispostos numa certa ordem e que obedecem a uma pré-determinada LEI DE FORMAÇÃO.”

Por exemplo, podemos tentar completar cada uma das sequências abaixo considerando a ordem com que ela oferece seus elementos e tentando descobrir a LÓGICA que melhor completa a sequência, lembrando que a LÓGICA deve ter sentido, coerência e concordância, com todos os termos anteriores e dar prosseguimento aos termos seguintes.

- (1, a, 2, b, 3, ...)
- (avós, pais, eu, filhos, ...)
- (D, S, T, Q, Q, ...)
- (3, 6, 9, 12, ...)
- (2, 6, 18, 54, ...)
- (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)
- (2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ...)
- (10, 12, 2, -10, -12, -2, ...)
- (3, 8, 15, 24, 35, ...)
- (aaa, aab, aba, baa, abb, bab, ...)
- (ava, ave, avi, ...)

4.2 – SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Consideremos um conjunto qualquer em que seus elementos são números reais; coloque-os numa certa ordem, isto é, escolha quem é o primeiro, o segundo, o terceiro e assim por diante.

Fazendo isso, você estará formando uma SEQUÊNCIA NUMÉRICA.

“Sequência Numérica é todo conjunto de números dispostos numa certa ordem”

A representação de uma sequência será sempre feita entre PARÊNTESES exatamente para poder diferenciar de CONJUNTOS NUMÉRICOS.

O primeiro termo será designado por uma letra minúscula à sua escolha seguido do índice 1. O segundo termo será a mesma letra escolhida para representar o primeiro termos seguido do índice 2. O terceiro termo será também representado pela mesma letra seguido do índice 3, e assim sucessivamente.

Um termo genérico da sequência será representado pela letra escolhida seguida do índice “n”, indicando que ele poderá ocupar uma posição qualquer dentro da sequência.

Assim teremos: $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \ldots, \boldsymbol{a_n}, \ldots)$

As sequências podem ser finitas ou infinitas.

4.3 – DETERMINAÇÃO DE UMA SUCESSÃO

As sucessões ou sequências são dadas, em sua maioria, por meio de uma regra chamada de LEI DE FORMAÇÃO ou FÓRMULA FECHADA que nos permite calcular qualquer termo da sucessão.

Por exemplo: Escrever a sequência em que

$$a_n = 2n \; e \; n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Resolução:

$para\; n = 1\; temos\; a_1 = 2.1 = 2$
$para\; n = 2\; temos\; a_2 = 2.2 = 4$
$para\; n = 3\; temos\; a_3 = 2.3 = 6$
$para\; n = 4\; temos\; a_4 = 2.4 = 8$
$para\; n = 5\; temos\; a_5 = 2.5 = 10$

Logo a sucessão pedida será $(\mathbf{2, 4, 6, 8, 10})$.

Outro exemplo: Achar os 5 primeiros termos da sequência onde:

$$a_1 = 3 \;\; e \;\; a_{n+1} = a_n + 5, \forall n \in N$$

Resolução:

$para\, n = 1\, temos\, a_{1+1} = a_1 + 5 = 3 + 5 = 8$

$para\, n = 2\, temos\, a_{2+1} = a_2 + 5 = 8 + 5 = 13$

$para\, n = 3\, temos\, a_{3+1} = a_3 + 5 = 13 + 5 = 18$

$para\, n = 4\, temos\, a_{4+1} = a_4 + 5 = 18 + 5 = 23$

Logo a sucessão pedida será $(\mathbf{3, 8, 13, 18, 23})$.

OBSERVAÇÃO: A este tipo de sequência, onde o termo sucessor depende do termo antecessor, dá-se o nome de RECORRÊNCIA. Exatamente porque para conseguir encontrar o sucessor é necessário RECORRER ao antecessor. Que será mais formalmente definido nos próximos slides.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1-) Dada a sequência definida por $a_n = 4n - 1, \forall n \in N$, calcule:

a) $a_3 - a_2$ *Resp: 4* b) $(a_5)^2 + (a_6)^2$ *Resp: 890*

2-) Escreva os quatro primeiros termos das sequências dadas pelos seus termos gerais:

a) $a_n = 4n - 1, \forall n \in N$ *Resp: (2, 5, 8, 11)*

b) $a_n = 2^{n-1}, \forall n \in N$ *Resp: (1, 2, 4, 8)*

3-) Dada a sucessão de termo geral $a_n = \frac{1+3n}{2n}, \forall n \in N$,

a) Calcule a soma de seus 4 primeiros termos. *Resp: 169/2e4*

b) Verifique se $\frac{31}{20}$ é termo da sequência. Em caso positivo, indique sua ordem (lugar que ocupa na sequência). *Resp: sim. 10º termo*

4-) Ache os 5 primeiros termos da sequência dada por:

$a_n = \frac{n}{n+1}, se\ n < 3 \quad ou \quad a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+1}, se\ n \geq 3, \forall n \in N$ ***Resp: (1/2, 2/3, -9/4, 16/3, -25/6)***

5-) Considere a sequência dada por $b_n = 2 + \frac{n-1}{n}$, calcule

$b_{n+2} - b_{n+1}$ *Resp:* $\frac{1}{n^2+3n+2}$

6-) Determine os 5 primeiros termos das RECORRÊNCIA abaixo:

a) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}, \forall n \in N$ *(-1,-3,-5,-7,-9)* b) $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = (a_n).a \end{cases}, \forall n \in N$ $(\boldsymbol{a, a^2, a^3, a^4, a^5})$

7-) Uma RECORRÊNCIA é dada por:

$$a_1 = 20, a_2 = 40\ e\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \forall n \in N\ e\ n > 2$$

Calcule a soma de seus 5 primeiros termos. *Resp: 157,5*

8-) É dada a sucessão definida pelo seu termo geral:

$$a_n = 10 - \sqrt{2n-1}, \forall n \in N$$

a) – 8 é termo dessa sucessão. *Resp: faça an=-8 e calcule n (não é)*

b) A sucessão tem termos nulos? Se sim, qual é a ordem? *Não possui*

c) Determine o maior termos da sucessão. $Resp: 9 . A\ sucessão\ e\ decres.$

9-) Averigue se o número 512 pertence à sequência definida pelo termo geral $a_n = 2^{n-1}, \forall n \in N$. Em caso positivo, qual a ordem? *Resp: sim. 10º*

4.4 – PROGRESSÃO ARITMÉTICA

PROGRESSÃO ARITMÉTICA ou SEQUÊNCIA ARITMÉTICA ou simplesmente PA é uma sequência numérica (RECORRÊNCIA) em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com um número fixo, chamado RAZÃO da PA.

Em símbolos, podemos afirmar que PA é uma RECORRÊNCIA definida por: $\boldsymbol{a_1 = a \ \ e \ \ a_{n+1} = a_n + r \, , \forall \, a \in R \, , r \in R \; e \; n \in N}$.

Pela definição de PA, podemos demonstrar todas as suas fórmulas que, a partir delas, podemos chegar diretamente à conclusões sem necessitar, necessariamente, passar por longos caminhos.

Considerações a serem demonstradas:

1ª-) Se **r > 0**, a PA será **estritamente crescente**. Se **r < 0**, a PA será **estritamente decrescente**. Se **r = 0**, a PA será **constante**.

2ª-) Se três números "**a**", "**b**" e "**c**" , estão em PA, nesta ordem, podemos escrever: $\boldsymbol{b - a = c - b \rightarrow b = \frac{a+c}{2}}$ (o termo do meio é a média aritmética dos extremos).

3ª-) Se três números aleatórios formam uma PA, eles podem ser escritos na forma ***(x – r, x, x + r)***.

4ª-) Termo Geral de Uma PA. Qualquer termo a_n de uma PA, a partir do primeiro, será dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1).r}$, onde

$$\boldsymbol{a_n} = termo\ que\ se\ quer\ saber.$$

$$\boldsymbol{a_1} = primeiro\ termo.$$

$$\boldsymbol{n} = posição\ (ou\ ordem) do\ termo.$$

$$\boldsymbol{r} = razão\ da\ PA$$

4ª-) Termo Intermediário de uma PA. Dados dois termos quaisquer $\boldsymbol{a_n}\ e\ \boldsymbol{a_m}$, dentro de uma PA, demonstra-se que:

$$\boldsymbol{a_n = a_m + (n - m).r}, com\ \boldsymbol{n > m}\ e\ \boldsymbol{r\ a\ razão}.$$

5ª-) A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA é igual à soma dos extremos, ou seja:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$$

6ª-) A soma dos termos de uma PA finita é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}}$$

7ª-) Caso houver informações de vários termos de uma PA, colocar todos os termos em função do primeiro termo e da razão, utilizando o termo geral ou termo intermediário e resolver o sistema linear formado.

8ª-) A maioria dos exercícios é possível resolver sem utilização das fórmulas. Bastando a definição. No entanto as fórmulas monitoram o tempo gasto na resolução.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1-) Determinar o valor de “x”, de modo que os números $(x+4)^2, (x-1)^2 \; e \; (x+2)^2$, estejam, nessa ordem, em PA. *Resp: -9/8*

2-) Escreva uma PA de 6 termos onde $a_1 = 1 \; e \; r = 2\pi$. *Resp: (1, 1+2pi, 1+4pi, 1+6pi, 1+8pi, 1+10pi)*

3-) Calcule o valor de “x” para que os quadrados dos números dados $(x+1), \sqrt{x+15} \; e \; (x+3)$ formem, nessa ordem, uma PA. *Resp: 2 ou -5*

4-) Calcule a quantidade de termos da PA (-3, 1, 5, ... , 113). *Resp: 30*

5-) Achar a quantidade de múltiplos de 5 compreendidos entre 21 e 623. *Resp: 18*

6-) Encontre a FÓRMULA FECHADA (Termo Geral) da PA onde seus termos são: $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{4}, \ldots\right)$ *Resp:* $a_n = \frac{5n+23}{12}$

7-) Na sucessão $(a_n)\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{13}{12}, \ldots\right)$, quer o numerador, quer o denominador, estão em PA. Determine sua Fórmula Fechada (Termo Geral). *Resp:* $a_n = \frac{4n-3}{3n}$

8-) Determine o quinto termo da PA (a + b, 3a – 2b, ...). *Resp: 9a-11b*

9-) Qual é o primeiro termo de uma PA cujo sétimo termo é 46, sendo seu termo precedente 39? *Resp:4*

10-) Quantos são os números inteiros não negativos múltiplos de 7 e 11 e menores que 10 000 ? *Resp:129*

11-) Numa PA, a soma do terceiro termo com o sexto é igual a 29. A soma do quarto termo com o sétimo é 35. Escreva os 10 primeiros termos desta PA. *Resp:(4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 310*

12-) Determine os 4 primeiros termos da PA onde: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 30 \end{cases}$

Resp:(1, 4, 7, 10)

13-) Determine a razão de uma PA crescente de 3 termos não nulos, em que o termo médio é igual ao produto dos extremos e o produto dos três termos é igual à soma deles. *Resp:* $\sqrt{6}$

14-) Determine 4 números em PA, sabendo-se que sua soma é 26 e que a soma de seus quadrados é 214. *Resp: 2, 5, 8 e 11*

15-) Determine a média aritmética dos seis meios aritméticos que podem ser interpolados entre 10 e 500. *Resp:255*

16-) Sendo $x = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 49 \;\; e \;\; y = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 50$ calcule $x - y$. *Resp:- 25*

17-) Resolva a equação $2 + 5 + 8 + \cdots + x = 77$. *Resp: V={20}*

18-) Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10})\,, onde\; a_1 = 4 \;\; e \;\; a_2 = 4k$. Determine k, para que a soma dos termos da PA seja 250. *Resp:k+13/6*

19-) Sabendo que a soma dos “n” primeiros múltiplos de 5, maiores que 80, é 1075, calcule “n”. *Resp:10*

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR

Quando a diferença da diferença entre os termos formar uma PA.

Por exemplo: (1, 2, 4, 7, 11, ...) é uma PA de segunda ordem, pois a diferença entre seus termos consecutivos formam uma PA.

Ou seja: 2 – 1 = 1; 4 – 2 = 2; 7 – 4 = 3; 11 – 7 = 4; ... ,

Formando a sequência de diferenças: (1, 2, 3, 4, ...), que é uma PA.

Neste caso, é fácil a demonstrar que a FÓRMULA FECHADA ou LEI DE FORMAÇÃO da sequência inicial é um polinômio do segundo grau na forma: $x_n = an^2 + bn + c$; ou seja:

$$x_1 = a.1^2 + b.1 + c \rightarrow a + b + c = 1$$
$$x_2 = a.2^2 + b.2 + c \rightarrow 4a + 2b + c = 2$$
$$x_3 = a.3^2 + b.3 + c \rightarrow 9a + 3b + c = 4$$

Levando-nos ao sistema linear de 3 equação e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+b+c=1} \\ \boldsymbol{4a+2b+c=2} \\ \boldsymbol{9a+3b+c=4} \end{cases}$$

, que resolvido por qualquer processo já aprendido no ensino médio nos leva em: $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}\,;b=-\frac{1}{2}\ \ e\ \ c=1}$

A fórmula fechada da sequência dada (1, 2, 4, 7, 11, ...) será:

$$\boldsymbol{x_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1,\forall n\in N}$$

Fazendo a verificação, teremos:

$$n=1\ \rightarrow\ x_1=\frac{1}{2}(1)^2-\frac{1}{2}(1)+1\rightarrow x_1=1$$

$$n=2\ \rightarrow\ x_2=\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{2}(2)+1\rightarrow x_2=2$$

$$n=3\ \rightarrow\ x_3=\frac{1}{2}(3)^2-\frac{1}{2}(3)+1\rightarrow x_3=4$$

$$n=4\ \rightarrow\ x_1=\frac{1}{2}(4)^2-\frac{1}{2}(4)+1\rightarrow x_4=7$$

$$n=5\ \rightarrow\ x_1=\frac{1}{2}(5)^2-\frac{1}{2}(5)+1\rightarrow x_1=11$$

Mostrando que a fórmula fechada nos leva à sequência dada.

Caso a diferença entre os termos consecutivos aparecer na segunda etapa, a PA será chamada de segunda ordem e poderá ser escrita como um polinômio do terceiro grau, na forma:

$$\boldsymbol{x_n = an^3 + bn^2 + cn + d, \forall n \in N}$$

Caindo em um sistema de 4 equações e 4 incógnitas que, quando resolvido, gera a FÓRMULA FECHADA da sequência.

Por exemplo, a sequência (0, 0, 6, 24, 60, 120, 210, ...) é um caso.

Veja a sequência formada pelas primeiras diferenças:

(0 – 0; 6 – 0; 24 – 6; 60 – 24; 120 – 60; 210 – 120; ...) = (0; 6; 18; 36; 60; 90; ...)

Observe agora a sequência formada pela subtração da sequência obtida:

(6 – 0; 18 – 6; 36 – 18; 60 – 36; 90 – 60; ...) = (6; 12; 18; 24; 30; ...)

Que é uma PA.

Como a PA ocorreu na 2ª subtração da sequência gerada, será de segunda ordem.

Se montarmos o sistema, encontraremos como solução: a = 1; b = -3; c = 2 e d = 0

Levando na fórmula: $\boldsymbol{x_n = n^3 - 3n^2 + 2n, \forall n \epsilon N}$

ATENÇÃO

Saber estes macetes de PA de 2ª ou 3ª ordem facilita DEMAIS a resolução de várias recorrências.

Portanto.... !!!!!!!!! ...

4.5 – PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA ou SEQUÊNCIA GEOMÉTRICA ou simplesmente PG é uma sequência numérica (RECORRÊNCIA) em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior MULTIPLICADO por um número fixo, chamado RAZÃO da PG.

Em símbolos, podemos afirmar que PG é uma RECORRÊNCIA definida por: $\boldsymbol{a_1 = a \;\; e \;\; a_{n+1} = a_n . q \; , \forall \; a \in R \; , q \in R \; e \; n \in N}$.

Pela definição de PG, podemos demonstrar todas as suas fórmulas que, a partir delas, podemos chegar diretamente à conclusões sem necessitar, necessariamente, passar por longos caminhos.

Considerações a serem demonstradas:

1ª-) Se $\boldsymbol{r > 1\ e\ a_1 > 0}$ ou $0 < \mathrm{r} < 1$ e $a_1 < 0$ a PA será **estritamente crescente**. Se $\boldsymbol{r > 1\ e\ a_1 < 0}$ **ou** $\mathbf{0 < r < 1}$ **e** $\boldsymbol{a_1 > 0}$, a PG será **estritamente decrescente**. S $\boldsymbol{r < 0\ e\ a_1 \neq 0}$, a PG será **oscilante ou alternante**. Se $a_1 = 0,\ \ q \in R^*$, a PG será singular. Se $a_1 \neq 0,\ \ q = 0$, a PG também será singular.

2ª-) Se três números "**a**", "**b**" e "**c**" , estão em PG, nesta ordem, podemos escrever: $\boldsymbol{\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \to b = \pm\sqrt{ac}}$ (o termo do meio é a média geométrica dos extremos).

3ª-) Se três números aleatórios formam uma PG, eles podem ser escritos na forma $(\boldsymbol{\frac{x}{q}, x, x.q})$.

4ª-) Termo Geral de uma PG. Qualquer termo a_n de uma PA, a partir do primeiro, será dado por $\boldsymbol{a_n = a_1.q^{n-1}}$, onde

$$\boldsymbol{a_n} = termo\ que\ se\ quer\ saber.$$

$$\boldsymbol{a_1} = primeiro\ termo.$$

$$\boldsymbol{n} = posição\ (ou\ ordem) do\ termo.$$

$$\boldsymbol{q} = razão\ da\ PG$$

4ª-) Termo Intermediário de uma PG. Dados dois termos quaisquer $\boldsymbol{a_n}\ e\ \boldsymbol{a_m}$, dentro de uma PG, demonstra-se que:

$$\boldsymbol{a_n = a_m . q^{(n-m)}}, com\ \boldsymbol{n > m}\ e\ \boldsymbol{q\ a\ raz}\text{ão}\ \boldsymbol{da\ PG}.$$

5ª-) O PRODUTO de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA é igual ao produto dos extremos, ou seja:

$$a_1 . a_n = a_2 . a_{n-1} = a_3 . a_{n-2} = \cdots$$

6ª-) O PRODUTO dos termos de uma PG finita é dada por:

$$P_n = a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_n = (a_1 . a_n)^{\frac{n}{2}}}$$

7ª-) Caso houver informações de vários termos de uma PG, colocar todos os termos em função do primeiro termo e da razão, utilizando o termo geral ou termo intermediário e resolver o sistema linear formado.

8ª-) A maioria dos exercícios é possível resolver sem utilização das fórmulas. Bastando a definição. No entanto as fórmulas monitoram o tempo gasto na resolução.

8ª-) A soma dos termos de uma PG finita será dado por:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n \ \rightarrow \ S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}}$$

9ª-) A soma dos termos de uma PG infinita CONVERGENTE será dado por:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1}{1 - q}, \qquad 0 < q < 1}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1-) Se a sequência (x, 3x + 2, 10x + 12) é uma PG, pde-se:

a) O valor de x. *Resp: x = 2 ou x = - 2*

b) Escrever a sequência. *Resp: (2, 8, 32) ou (-2, -4, -8)*

2-) Em cada caso abaixo determine a razão e classifique a monotonicidade da PG.

a) (10, 20, 40, ...) *Resp: ½ e estritamente decrescente*

b) (-1, 3, -9, 27, ...) *Resp: -1/3 e alternante*

c) (-4, -2, -1, ...) *Resp: ½ e estritamente crescente*

d) (160, 40, 10, ...) *Resp: ¼ e estritamente decrescente*

e) (2, 2, 2, 2, ...) *Resp: 1 e constante*

f) (-1, 1, -1, 1, ...) *Resp: -1 e alternante*

g) (-6, -12, -24, ...) *Resp: 2 e estritamente decrescente*

h) (5, 0, 0, 0, ...) *Resp: 0 e singular decrescente*

i) (0, 0, 0, 0, ...) *Resp: qualquer número real e singular constante*

j) ($\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, \ldots$) *Resp:* $\sqrt{5}$ *e estritamente crescente*

k) ($ab, ab^3, ab^5, \ldots$) *Resp:* b^2 e $depende$ dos $sinais$ de a e b.

l) ($\frac{x}{a}, x, ax, \ldots$) *Resp:* x $depende$ dos $sinais$ de a e x.

3-) Dados os números: 1, 3 e 4, determine o número único que deve ser somado a cada um deles para que se tenha uma progressão geométrica. *Resp: -5*

4-) Qual é primeiro termo de uma PG que possui o quarto termo igual a 128 e razão igual a 4? *Resp: 2*

5-) Hoje uma editora produz 20 000 livros e, a cada mês, deve produzir 30% a mais do que produziu no mês anterior.

a) Quanto o editora produzirá daqui a 5 meses? *Resp; 57 122*

b) Em quantos meses deverá produzir 33 800 livros? *Resp: 3 dias*

5-) Numa PG de termos reais, sabe-se que $a_4 = 48 \ e \ a_7 = \frac{16}{9}$. Determine a sua razão. *Resp: q=1/3*

6-) Determine os 5 primeiros termos da PG onde: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\ a_4 + a_5 + a_6 = -48 \end{cases}$

Resp: (2, -4, 8, -16, 32)

7-) PROVE que não existe:

a) triângulos cujos lados estejam em PG de razão 2. *Resp: demonstrar por absurdo atravé da desigualdade triangular (maior lado menor que a soma dos outros dois)*

b) triângulo retângulo com lados em PG de razão $\sqrt{2}$. *Resp: Demonstrar utilizando o teorema de Pitágoras.*

8-) Entre 18 e "b" foram inseridos 2 termos, obtendo-se uma PG de razão 3, Qual o valor de "b"? *Resp: b=486*

9-) Interpole cinco meio geométricos entre ¾ e 48. *Resp: (3/4,3/2,3,6,12,24,48) ou (3/4, -3/2, 3, -6, 12, -24, 48).*

10-) Dar o valor de x na igualdade $a + 3x + \cdots + 729x = 5465$, sabendo que 0s termos do 1º membro formam uma PG. *Resp: x=5*

11-) Numa PG crescente, o segundo termo é igual a $\sqrt{2}$ e o terceiro termo é o dobro do primeiro.

a) Escreva a fórmula fechada do termo geral da PG. *Resp:* $a_n = 2^{n-\frac{3}{2}}$

b) Calcule a soma dos 12 primeiros termos da PG. *Resp:* $S_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(2^{12} - 1)$

12-) Prove que o decimal 0,3131313131... É RACIONAL utilizando PG.

$$SUGESTÃO: abra\ o\ decimal\ em\ 0{,}31 + 0{,}0031 + 0{,}000031 + \cdots$$

Transforme em frações geradoras. Perceba que a soma de uma PG convergente. Utilize a fórmula da soma de uma PG infinita convergente.

13-) Os raios de infinitos círculos são dados pela sequência (6, 3, 3/2, ¾, ...).

Determine a soma das áreas desses círculos. 48π

14-) Resolva a equação: $2^{1+x} + 2^{1+2x} + 2^{1+3x} + 2^{1+4x} + 2^{1+5x} + \cdots = \frac{2}{3}$

$$V = \{-2\}$$

15-) Partindo de um quadrado Q1, cujo lado mede “a”, consideramos os quadrados Q2, Q3, Q4, ... , Qn, tais que os vértices de cada um são os pontos médios dos lados do quadrado anterior, Calcule a soma das áreas dos quadrados Q1+Q2+Q3+ ... +Qn. $2a^2$

16-) Calcule o valor de x > 0 e Real, que satisfaça a igualdade:

$$1 + x + x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots = 56 \qquad x = 5$$

15-) Numa progressão geométrica, sabemos que seu primeiro termo é 8 e sua razão -1/2. Calcule o produto de:

a) seus 8 primeiros termos. *Resp: 1/16*

b) seus 11 primeiros termos. $Resp: -2^{-22}$

EXERCÍCIOS ENVOLVENDO PA E PG

1-) São dados 4 números positivos: 12, x, y e 4. Sabendo que os três primeiros estão em PA e os três últimos em PG, determinar os valores de x e y. *Resp: $x = 9$ e $y = 6$*

2-) A soma de três números que formam uma PG crescente é 19. Calcular esses três números, sabendo que, se subtrairmos 1 do primeiro, sem alterar os outros dois, eles passam a constituir uma PA. *Resp: 4, 6 e 9.*

3-) A sequência (a, 2b – a, 3b, ...) é uma PA e a sequência (a, b, 3a + b – 1, ...) é uma progressão geométrica. Calcule “a” e “b”. *Resp: $a=-1/3$ e $b=-1$*

4-) São dados 3 números inteiros em PG cuja soma é 26. Determine esses números, sabendo que o primeiro, o dobro da segundo e o triplo do terceiro formam uma progressão geométrica. *Resp: 18, 6 e 2.*