Função Logarítmica

Prof. Luiz Claudio[1] Joao Victor[2]

[1] EETI Bilíngue Gilberto Mestrinho de Medeiros Raposo
[2] Instituto Federal do Amazonas

21 de fevereiro de 2026

Sumário

Introdução (logaritmo)

Suponhamos que um caminhão custe hoje R$100.000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso. Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$20.000,00?

Definição

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que:

- a é a **base** do logaritmo;
- b é o **logaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Definição

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que:

- a é a **base** do logaritmo;
- b é o **logaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Definição

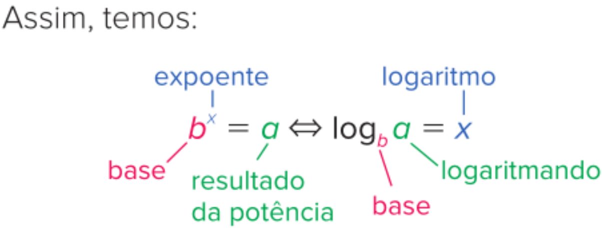

Figura 1: Sistema de Ensino Poliedro

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3, \text{ pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2, \text{ pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0, \text{ pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2, \text{ pois } (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3,\ \text{pois}\ 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2,\ \text{pois}\ 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0,\ \text{pois}\ 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3,\ \text{pois}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2,\ \text{pois}\ (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3, \text{ pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2, \text{ pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0, \text{ pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2, \text{ pois } (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3, \text{ pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2, \text{ pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0, \text{ pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2, \text{ pois } (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3,\ \text{pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2,\ \text{pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0,\ \text{pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3,\ \text{pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2,\ \text{pois } (0,5)^2 = 0,25$

Aplicação

Exercício 1. Calcule, por meio da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

b) $\log_{16} 0,25$

Exercício 2.

Qual o número real x em que $\log_x 4 = -2$?

Convenção importante

Logaritmo decimal

Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la da notação:

- $\log 1 = \log_{10} 1 = 0$
- $\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$

Logaritmo natural (Logaritmo neperiano)

Já quando a base do logaritmo é o número de Euler, $e \approx 2,7183$, a notação utilizada é ln:

- $\ln e = \log_e e = 1$
- $\ln e^3 = \log_e e^3 = 3$

Convenção importante

Logaritmo decimal

Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la da notação:

- $\log 1 = \log_{10} 1 = 0$
- $\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$

Logaritmo natural (Logaritmo neperiano)

Já quando a base do logaritmo é o número de Euler, $e \approx 2,7183$, a notação utilizada é ln:

- $\ln e = \log_e e = 1$
- $\ln e^3 = \log_e e^3 = 3$

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P1: O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

P2: O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

P3: A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P1: O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

P2: O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

P3: A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P1: O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

P2: O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

P3: A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P4:

- Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$

- Reciprocamente, se dois números reais positivos são iguais, seus logaritmos em uma mesma base também são iguais.

Aplicação

Exercício 3.

Qual é o valor de $9^{\log_3 5}$?

Exercício 4.

Vamos calcular o número real x tal que $\log_5(2x+1) = \log_5(x+3)$

Exercício 5.

Qual é o valor de cada uma das expressões seguintes?

a) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_4 \frac{1}{4}$

c) $3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3}$

Propriedades operatórias (PO)

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos.

PO1: Logaritmo do produto

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles, isto é, se $0 < a \neq 1,\ b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Por exemplo:

$$\log_2 6 = \log_2(2.3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$$

Propriedades operatórias (PO)

PO2: Logaritmo do quociente

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador, isto é, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Por exemplo:

$$\log \left(\frac{3}{100}\right) = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2$$

Propriedades operatórias (PO)

PO3: Logaritmo da potência

Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é, se $0 < a \neq 1,\ b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Por exemplo:

$$\log_5 27 = \log_5 3^3 = 3 \log_5 3$$

Aplicação

Exercício 6.

Calcular o valor de $\log_b(x^2.y)$, sabendo que $\log_b x = 3$ e $\log_b y = -4\,(x > 0, y > 0$ e $0 < b \neq 1)$

Exercício 7.

Qual é a expressão E cujo desenvolvimento logarítmico (em base 10) é $\log \mathrm{E} = 1 + \log \mathrm{a} + 2\log \mathrm{b} - \log \mathrm{c}$, com a, b e c números reais e positivos?

Exercício 8.

Admitindo que $\log 2 = \mathrm{a}$ e $\log 3 = \mathrm{b}$, obter o valor de $\log 0,48$, em função de a e b.

Mudança de base

Definição

Suponha que a, b e c números reais positivos, com a e b diferentes de 1. Temos:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Por exemplo:

a) base 10: $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \dfrac{0,699}{0,3010} \approx 2,32$

b) base e: $\log_2 5 = \dfrac{\log_e 5}{\log_e 2} = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{1,609}{0,693} \approx 2,32$

Mudança de base

Definição

Suponha que a, b e c números reais positivos, com a e b diferentes de 1. Temos:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Por exemplo:

a) base 10: $\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{0,699}{0,3010} \approx 2,32$

b) base e: $\log_2 5 = \frac{\log_e 5}{\log_e 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2} = \frac{1,609}{0,693} \approx 2,32$

Mudança de base

Definição

Suponha que a, b e c números reais positivos, com a e b diferentes de 1. Temos:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Por exemplo:

a) base 10: $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \dfrac{0,699}{0,3010} \approx 2,32$

b) base e: $\log_2 5 = \dfrac{\log_e 5}{\log_e 2} = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{1,609}{0,693} \approx 2,32$

Exercício

Exercício 9.

Calcular o valor de $\log_{100} 72$, considerando as aproximações: $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

Aplicação importante

Sejam a e b reais positivos e diferentes de 1. Temos que:

Definição

$$\log_a b \ . \ \log_b a = 1 \text{ ou } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Por exemplo:

a) $\log_3 2 \ . \ \log_2 3 = 1$

b) $\log_4 5 = \dfrac{1}{\log_5 4}$

Aplicação importante

Sejam a e b reais positivos e diferentes de 1. Temos que:

Definição

$$\log_a b \ . \ \log_b a = 1 \text{ ou } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Por exemplo:

a) $\log_3 2 \ . \ \log_2 3 = 1$

b) $\log_4 5 = \dfrac{1}{\log_5 4}$

Aplicação importante

Sejam a e b reais positivos e diferentes de 1. Temos que:

Definição

$$\log_a b \ . \ \log_b a = 1 \text{ ou } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Por exemplo:

a) $\log_3 2 \ . \ \log_2 3 = 1$

b) $\log_4 5 = \dfrac{1}{\log_5 4}$

Exercício 10.

Qual o valor de $y = \log_3 7 \ . \ \log_7 3 \ . \ \log_{11} 5 \ . \ \log_5 11$?

Exercício 11.

Mostrar que $\log_{49} 25 = \log_7 5$.