Função Logarítmica

Joao Victor[1] Prof. Luiz Claudio[2]

[1] Instituto Federal do Amazonas
[2] EETI Bilíngue Gilberto Mestrinho de Medeiros Raposo

18 de fevereiro de 2026

Sumário

Introdução (logaritmo)

Suponhamos que um caminhão custe hoje R$$100.000,00$ e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso. Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$$20.000,00$?

Definição

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que:

- a é a **base** do logaritmo;
- b é o **logaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Definição

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que:

- a é a **base** do logaritmo;
- b é o **logaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3, \text{ pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2, \text{ pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0, \text{ pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2, \text{ pois } (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3,\ \text{pois}\ 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2,\ \text{pois}\ 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0,\ \text{pois}\ 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3,\ \text{pois}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2,\ \text{pois}\ (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3, \text{ pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2, \text{ pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0, \text{ pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2, \text{ pois } (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3, \text{ pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2, \text{ pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0, \text{ pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2, \text{ pois } (0,5)^2 = 0,25$

Exemplos

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

a) $\log_2(8) = 3, \text{ pois } 2^3 = 8$

b) $\log_3 9 = 2, \text{ pois } 3^2 = 9$

c) $\log_4 1 = 0, \text{ pois } 4^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

e) $\log_{0,5} 0,25 = 2, \text{ pois } (0,5)^2 = 0,25$

Aplicação

Exercício 1. Calcule, por meio da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

b) $\log_{16} 0,25$

Exercício 2.

Qual o número real x em que $\log_x 4 = -2$?

Convenção importante

Convencionou-se que, ao escrevermos o logaritmo de um número com a base omitida, estamos nos referindo ao logaritmo desse número em base 10, isto é:

$$\log x = \log_{10} x$$

Assim, por exemplo:

- $\log 10.000 = 4,\ \text{pois } 10^4 = 10.000$
- $\log \frac{1}{1000} = -3,\ \text{pois } 10^{-3} = \frac{1}{1000}$

Os logaritmos em base 10 são conhecidos como **logaritmos decimais**.

Convenção importante

Convencionou-se que, ao escrevermos o logaritmo de um número com a base omitida, estamos nos referindo ao logaritmo desse número em base 10, isto é:

$$\log x = \log_{10} x$$

Assim, por exemplo:

- $\log 10.000 = 4, \text{ pois } 10^4 = 10.000$
- $\log \dfrac{1}{1000} = -3, \text{ pois } 10^{-3} = \dfrac{1}{1000}$

Os logaritmos em base 10 são conhecidos como **logaritmos decimais**.

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P1: O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

P2: O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

P3: A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P1: O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

P2: O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

P3: A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P1: O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

P2: O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

P3: A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

Consequências

Sejam a, b e c números reais com $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$. Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades (P):

P4

- Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$

- Reciprocamente, se dois números reais positivos são iguais, seus logaritmos em uma mesma base também são iguais.

Aplicação

Exercício 3.

Qual é o valor de $9^{\log_3 5}$?

Exercício 4.

Vamos calcular o número real x tal que $\log_5(2x+1) = \log_5(x+3)$

Exercício 5.

Qual é o valor de cada uma das expressões seguintes?

a) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_4 \frac{1}{4}$

c) $3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3}$

Propriedades operatórias (PO)

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos.

PO1: Logaritmo do produto

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles, isto é, se $0 < a \neq 1,\ b > 0$ e $c > 0$, então

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Por exemplo:

$$\log_2 6 = \log_2(2.3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$$

Propriedades operatórias (PO)

PO2: Logaritmo do quociente

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador, isto é, se $0 < a \neq 1,\ b > 0$ e $c > 0$, então

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Por exemplo:

$$\log \left(\frac{3}{100}\right) = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2$$