

Universidad de la Habana  
Facultad de Matemática y Computación



---

***Test* para detectar patrones DIAG y LINE en las contraseñas gráficas de PassPoint, basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay, condicionado al número de triángulos**

---

Trabajo de Diploma presentado en opción al título  
de Licenciado en Ciencias de la Computación

Autor: Ovidio Navarro Pazos

Tutores: M.Sc. Lisset Suárez Plasencia  
Dr.C. Carlos Miguel Legón Pérez  
M.Sc. Joaquín A. Herrera Macías

La Habana, Cuba  
27 de enero de 2025

## Resumen

Un método de autenticación que difiere de las contraseñas alfanuméricas tradicionales es la autenticación gráfica. Una de las técnicas más valiosas dentro de este campo es Pass-Point, conocida por su equilibrio entre seguridad y usabilidad. Sin embargo, esta técnica puede ser vulnerada si el usuario sigue patrones predefinidos al seleccionar los cinco puntos en la imagen, como los patrones DIAG y LINE. Investigaciones previas han destacado la utilidad de las características de las triangulaciones de Delaunay para extraer información de estos puntos que constituyen la contraseña, siendo el AMADT (promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay) una de estas características relevantes.

En este estudio, se comparan contraseñas gráficas generadas por la elección aleatoria de cinco puntos en una imagen con contraseñas que siguen patrones específicos del tipo DIAG y LINE. La comparativa se basa en segmentar las contraseñas que siguen estos patrones, considerando el número de triángulos en sus triangulaciones de Delaunay (3, 4 o 5). Experimentalmente se demuestra que, para cada número de triángulos, las contraseñas con patrones DIAG y LINE tienen un AMADT más alto que aquellas generadas con puntos aleatorios. Estudios previos respaldan este resultado y sugieren la viabilidad de un *test* de aleatoriedad espacial para identificar contraseñas gráficas débiles que sigan los patrones DIAG y LINE, utilizando el AMADT como estadígrafo. Se estiman las distribuciones más adecuadas para cada número de triángulos, se implementa un *test* de hipótesis y se valida mediante la estimación de los errores de tipo I y II. La relevancia de este *test* radica en la similitud de los resultados con pruebas previas. Sería crucial determinar si estos hallazgos son redundantes o complementarios para mejorar la seguridad del sistema de autenticación gráfica PassPoint.

# Abstract

One authentication method that differs from traditional alphanumeric passwords is graphical authentication. One of the most valuable techniques within this field is PassPoint, known for its balance between security and usability. However, this technique can be breached if the user follows predefined patterns when selecting the five dots in the image, such as the DIAG and LINE patterns. Previous research has highlighted the usefulness of Delaunay triangulation features to extract information from these points that constitute the password, with AMADT (average of the maximum angles of the Delaunay triangles) being one of these relevant features.

In this study, graphical passwords generated by randomly choosing five points in an image are compared with passwords that follow specific patterns of the DIAG and LINE type. The comparison is based on segmenting the passwords that follow these patterns, considering the number of triangles in their Delaunay triangulations (3, 4 or 5). Experimentally it is shown that, for each number of triangles, passwords with DIAG and LINE patterns have a higher AMADT than those generated with random dots. Previous studies support this result and suggest the feasibility of a spatial randomization test to identify weak graphical passwords following DIAG and LINE patterns, using the AMADT as a statistician. The best-fitting distributions for each number of triangles are estimated, a hypothesis test is implemented and validated by estimating type I and II errors. The relevance of this test lies in the similarity of the results with previous tests. It would be crucial to determine whether these findings are redundant or complementary to improve the security of the PassPoint graphical authentication system.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>7</b>  |
| <b>1. Marco Teórico</b>  | <b>10</b> |
| 1.1. PassPoint . . . . .   | 10        |
| 1.2. Patrones DIAG y LINE . . . . .  | 12        |
| 1.3. Triangulaciones de Delaunay . . . . .   | 13        |
| 1.4. Antecedentes en la detección de patrones DIAG y LINE o patrones suaves  | 14        |
| 1.4.1. Algoritmo para la detección de contraseñas con patrones suaves en PassPoint . . . . .   | 14        |
| 1.4.2. <i>Test</i> de detección de patrones DIAG y LINE en el sistema PassPoint basado en los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay . .                            | 16        |
| <b>2. Detección de patrones DIAG y LINE en PassPoint, basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay, condicionado al número de triángulos</b> | <b>17</b> |
| 2.1. Contraseñas con 3 triángulos en su triangulación de Delaunay . . . . .  | 17        |
| 2.1.1. Estimación de la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay . . . . .   | 17        |
| 2.1.2. <i>Test</i> basado en el promedio de los ángulos máximos de los Triángulos de Delaunay . . . . .  | 19        |
| 2.1.3. Implementación del <i>Test</i> propuesto : . . . . .  | 20        |
| 2.1.4. Estimación de la probabilidad de los errores de tipo I y de tipo II cometidos por el <i>test</i> . . . . .  | 22        |
| 2.2. Contraseñas con 4 triángulos en su triangulación de Delaunay . . . . .  | 24        |
| 2.2.1. Estimación de la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay . . . . .   | 25        |
| 2.2.2. <i>Test</i> basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay . . . . .  | 27        |
| 2.2.3. Implementación del <i>Test</i> propuesto . . . . .  | 28        |
| 2.2.4. Estimación de la probabilidad de los errores de tipo I y de tipo II cometidos por el <i>test</i> . . . . .  | 30        |
| 2.3. Contraseñas con 5 triángulos en su triangulación de Delaunay . . . . .  | 31        |
| 2.3.1. Estimación de la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay . . . . .   | 32        |
| 2.3.2. <i>Test</i> basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay . . . . .  | 33        |
| 2.3.3. Implementación del <i>test</i> propuesto : . . . . .  | 34        |
| 2.3.4. Estimación de la probabilidad de los errores de tipo I y de tipo II cometidos por el <i>test</i> . . . . .  | 35        |

|   |           |
|---|-----------|
| 2.4. Discusión de los resultados de los <i>test</i> anteriores y comparación con [13] . | 37        |
| 2.4.1. Comparación con [13] . . . . .   | 38        |
| <b>3. Conclusiones</b>  | <b>39</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>40</b> |
| <b>A. Anexos</b>  | <b>44</b> |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. PassPoint. . . . .   | 10 |
| 1.2. DIAG-LINE. . . . .   | 12 |
| 1.3. Esta triangulación no cumple condición de Delaunay . . . . .   | 13 |
| 1.4. Esta triangulación sí cumple condición de Delaunay . . . . .   | 13 |
| 1.5. Triangulación de Delaunay para 10 puntos . . . . .   | 14 |
| 1.6. Frecuencia de falsos positivos vs falsos negativos según $D(\varphi^\circ)$ . . . . .  | 15 |
| 2.7. Contraseña gráfica de 5 puntos con una triangulación de Delaunay de 3 triángulos. . . . .  | 18 |
| 2.8. Test de bondad de ajuste aplicados a la distribución <i>Johnson SB</i> sobre DB.1. . . . .   | 19 |
| 2.9. Función de densidad de probabilidad de la distribución <i>Johnson SB</i> para DB.1. . . . .  | 20 |
| 2.10. Comparación entre las probabilidades teóricas ( $\alpha$ ) y estimadas ( $\hat{\alpha}$ ) de cometer un error de tipo I. . . . .  | 23 |
| 2.11. Contraseña gráfica de 5 puntos con una triangulación de Delaunay de 4 triángulos . . . . .  | 25 |
| 2.12. Test de bondad de ajuste para la distribución Log-Logistic (3P) sobre DB.2. . . . .   | 26 |
| 2.13. Función de densidad de probabilidad de la distribución Log-Logistic (3P) para DB.2. . . . .                                       | 26 |
| 2.14. Comparación entre las probabilidades teóricas ( $\alpha$ ) y estimadas ( $\hat{\alpha}$ ) de cometer un error de tipo I . . . . . | 31 |
| 2.15. Contraseña gráfica de 5 puntos con una triangulación de Delaunay de 5 triángulos. . . . .   | 32 |
| 2.16. Test de bondad de ajuste para la distribución Log-Logistic (3P) sobre DB.3 . . . . .  | 33 |
| 2.17. Función de densidad de probabilidad de la distribución Log-Logistic (3P) para DB.3 . . . . .                                      | 34 |
| 2.18. Comparación entre las probabilidades teóricas ( $\alpha$ ) y estimadas ( $\hat{\alpha}$ ) de cometer un error de tipo I. . . . .  | 36 |

# Índice de Tablas

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Alfanuméricas vs Gráficas. Tomada de [1] . . . . .   | 11 |
| 2.2. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I derivado de la prueba.  | 22 |
| 2.3. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ ) del error de tipo II derivado de la prueba.  | 23 |
| 2.4. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I derivado de la prueba.  | 30 |
| 2.5. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ ) del error de tipo II derivado de la prueba.  | 31 |
| 2.6. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I derivado de la prueba.  | 35 |
| 2.7. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ ) del error de tipo II derivado de la prueba.  | 37 |
| 2.8. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ )de error tipo II para contraseñas con<br>ángulos entre segmentos de 30°a 45°. . . . . | 37 |
| 2.9. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ )de error tipo 1 para cada <i>test</i> . . . . .                                      | 38 |
| 2.10. Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I del <i>test</i> propuesto en<br>[13]. . . . .                  | 38 |
| A.1. 6 disribuciones mas ajustadas teóricamente a BD.1 . . . . .  | 44 |
| A.2. 6 disribuciones mas ajustadas teóricamente a BD.2 . . . . .  | 44 |
| A.3. 6 disribuciones mas ajustadas teóricamente a BD.3 . . . . .  | 44 |

# Introducción

En la actualidad, la gran mayoría de los usuarios tienden a ignorar las recomendaciones de seguridad al momento de crear sus contraseñas. Es común observar el uso por los usuarios de contraseñas cortas y cargadas de información personal, lo cual facilita su memorización, pero aumenta significativamente su vulnerabilidad frente a ataques de fuerza bruta o de diccionario [1, 2, 3, 4].

Debido a esta inherente contradicción entre facilidad y seguridad que presentan las contraseñas alfanuméricas, se han desarrollado nuevos métodos alternativos de autenticación, entre los que se encuentran los métodos basados en contraseñas gráficas. Este nuevo enfoque surge por la capacidad humana de recordar patrones visuales en una imagen con mayor facilidad que largas cadenas de caracteres alfanuméricos aleatorios. En este tipo de contraseñas, el usuario debe recordar una imagen o partes específicas de ella mediante la selección de determinados puntos.

El sistema PassPoint[1] es un método de autenticación gráfica que destaca por su usabilidad y seguridad. Este método consiste en que el usuario seleccione en la fase de registro cinco puntos de una imagen elegida por el usuario o dada por el sistema. Durante la autenticación, el usuario debe hacer clic en una determinada vecindad y en el mismo orden de los puntos seleccionados en la fase de registro. Una de las debilidades de este sistema es que los usuarios tienden a seleccionar los Hotspots[4](puntos más probables a seleccionar en una imagen), por esta razón las imágenes usadas en el sistema tienen que poseer cientos de Hotspots dispersos de manera homogénea. Además existen un conjunto de patrones no aleatorios que tienden a seguir los usuarios y su combinación con los Hotspots sería un grave error, pues hace que la contraseña sea muy susceptible a ataques de diccionarios. Estos patrones incluyen formas específicas como Z, W, C, V, patrones agrupados, regulares y los que más suelen seleccionar los usuarios que son los patrones DIAG o LINE (formas de diagonales o línea)[5].

La tendencia de los usuarios a crear patrones entre los puntos seleccionados, ya sea de manera independiente o en combinación con Hotspots, constituye una debilidad importante. Por ello, resulta fundamental desarrollar *test* que detecten la existencia de estos patrones en las contraseñas antes de su uso, ya que contribuirían significativamente a mejorar la seguridad de la técnica PassPoint.

A lo largo de los últimos años, se han realizado pocas investigaciones enfocadas en este tema. Entre los métodos más comunes para evaluar la Aleatoriedad Espacial Completa se encuentran: el *test* de la función K-Ripley, el *test* de la función G, que analiza la distancia al vecino más cercano, y el *test* de la función F, que se centra en la distancia de espacio vacío. Sin embargo, en [6, 7] se demuestra que, en el contexto de PassPoint, dos de estos métodos son ineficaces para detectar contraseñas gráficas compuestas por patrones agrupados. Por otro lado, en [7, 8] se evidencia que los tres tests no logran identificar ni el agrupamiento ni la regularidad en las contraseñas de este escenario. Hasta ahora, en la bibliografía revisada, se han encontrado 4 *test* efectivos [7, 9, 10, 11] para identificar



contraseñas no aleatorias que presentan patrones agrupados o regulares en el contexto de PassPoint. Estos métodos se basan, en el caso de [9], en el promedio de los perímetros de los triángulos de Delaunay, en [7] en la distancia media entre cinco puntos, para el caso de [10] es una aplicación conjunta de los *test* [7, 9], y [11] basado en el perímetro de la envoltura convexa. De estos tests [11] es el más efectivo encontrado en la literatura y el segundo más eficiente después de [7].

Teniendo en consideración que en [12], las propiedades de una triangulación de Delaunay brindan la capacidad de obtener información acerca de la interrelación entre puntos, empleándose como una herramienta en la mitad de la década de 1980 para identificar configuraciones de puntos. En el estudio realizado por Chiu en [12], se emplearon varias de estas propiedades para reconocer la agrupación y la regularidad entre los puntos. Específicamente, la característica del “ángulo máximo de un triángulo de Delaunay”, según la literatura revisada, nunca había sido utilizada previamente para identificar otro tipo de configuraciones además de las agrupadas o regulares. No obstante, dado que los patrones DIAG y LINE se distinguen por presentar un ángulo cercano a  $0^\circ$  entre dos segmentos consecutivos o en otras palabras que las curvas formadas entre los 5 puntos sean curvas suaves a pedazos, es decir, que carezca de picos, también se les conoce como patrones suaves. De ahí que, en [13] se propuso y demostró que la media de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay generados a partir de los puntos de las contraseñas gráficas de PassPoint es un estadígrafo eficaz para detectar la presencia de patrones DAIG y LINE, incluso con un número limitado de puntos. En [5] se entendía como el ángulo formado entre dos segmentos consecutivos, el menor de los dos ángulos que forman la intersección de la prolongación de los segmentos de una contraseña. En este trabajo se referirá al mayor de estos dos ángulos como el ángulo adyacente entre dos segmentos .

Según los resultados obtenidos en [13], la distribución del promedio de los triángulos de Delaunay de las contraseñas gráficas aleatorias, sin tener en cuenta el número específico de triángulos sigue una distribución Normal. Por lo que se plantea la hipótesis de que cada una de las distribuciones de los conjuntos cuyas triangulaciones contienen 3, 4 o 5 triángulos también distribuirán Normal, pero con diferentes parámetros. Dada una contraseña ingresada por un usuario se verificará a qué distribución pertenece y se aplicará el *test* con la distribución adecuada. Esto debería mejorar el ajuste de los datos a los *test* de bondad de ajuste y aumentar la efectividad del mismo.

**Problema de investigación:** ¿Cómo detectar contraseñas gráficas que sigan patrones DIAG y LINE en el sistema de autenticación gráfica PassPoint, teniendo en cuenta el número de triángulos de Delaunay?

### **Objeto de estudio:**

Número de triángulos de las triangulaciones de Delaunay en autenticación gráfica

### **Campo de acción:**

Detección de contraseñas gráficas que sigan patrones DIAG y LINE en el escenario PassPoint utilizando el número de triángulos de las triangulaciones de Delaunay.

### **Hipótesis:**

Es posible detectar contraseñas gráficas que sigan patrones DIAG y LINE en el sistema de autenticación gráfica Passpoint, teniendo en cuenta el número de triángulos de

las triangulaciones de Delaunay.

### **Idea de la solución:**

Debido a que en la bibliografía existe un *test* capaz de detectar patrones DIAG y LINE en las contraseñas gráficas de PassPoint basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay. Se propone construir un *test* para detectar este tipo de patrones en las contraseñas gráficas en dicho escenario, pero teniendo en cuenta el número de triángulos de la triangulación de Delaunay correspondiente. Con el fin de llegar a comparar ambos *test* en cuanto a efectividad, y realizar la aplicación conjunta de ambos si es posible para lograr una mayor efectividad en la detección de estos tipos de patrones.

### **Objetivos:**

**Objetivo general:** Detectar las contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE en PassPoint para cada número de triángulos en una triangulación de Delaunay.

**Objetivos específicos:** Para cada número de triángulos en las triangulaciones de Delaunay de 5 puntos:

- Encontrar cómo distribuye el promedio de los ángulos máximos de la triangulación de Delaunay en contraseñas aleatorias.
- Construir un *test* de aleatoriedad basado en la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay en contraseñas aleatorias.
- Realizar un análisis estadístico con las estimaciones de los errores tipo I y tipo II cometidos para validar el *test*.
- Realizar una comparación con los resultados obtenidos en [13].

### **Estructura de la tesis**

Este trabajo estará dividido en dos capítulos.

En el primero se muestra en qué consiste la técnica de autenticación gráfica PassPoint, así como sus ventajas y desventajas, se describen los patrones comunes que los usuarios suelen seguir al crear sus contraseñas, destacando los patrones DIAG y LINE, se definen las triangulaciones de Delaunay y sus propiedades. Por último se realiza un resumen de los métodos antecedentes en la detección de patrones DIAG y LINE, uno es el algoritmo presentado en [3] para la detección de patrones suaves en PassPoint, y el otro es [13], donde se demuestra que el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay es un estadístico eficaz para detectar patrones DIAG y LINE en contraseñas de PassPoint.

En el segundo capítulo se investiga el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay en función del número de triángulos que conforman dicha triangulación. Tomando en cuenta el tamaño estándar de las imágenes (1920x1080) para cada posible número de triángulos presentes en las triangulaciones de Delaunay de las contraseñas de 5 puntos (3, 4 o 5), se estiman las mejores distribuciones a las que se ajustan, se propone un *test* de detección de patrones DIAG y LINE en PassPoint y, se estiman los errores de tipo I y tipo II cometidos por el *test*. Posteriormente, se realiza una comparación de los resultados obtenidos y los hallazgos presentados en el estudio[13].

# Capítulo 1

## Marco Teórico

A medida que las amenazas cibernéticas evolucionan, también lo hacen los métodos de autenticación utilizados para proteger los datos sensibles. Este capítulo se centrará en explorar los principios teóricos que sustentan la autenticación gráfica, específicamente el sistema PassPoint, y los patrones que los usuarios tienden a seguir al crear sus contraseñas. Al comprender estos conceptos, se podrá apreciar mejor la vulnerabilidad inherente a los sistemas de autenticación y la necesidad de desarrollar métodos más robustos para mitigar riesgos.

### 1.1. PassPoint

La técnica PassPoint diseñada por Wiedenbeck en [1] destaca entre los sistemas de autenticación gráfica del tipo *cued-recall* por su usabilidad y seguridad. Esta técnica consiste en que, en su fase de registro, el usuario seleccione 5 puntos (píxeles) de una imagen, ya sea seleccionada por el mismo usuario o dada por el sistema, un ejemplo es la figura 1.1. En el proceso de autenticación este debe hacer clic en el mismo orden y en determinada vecindad o región de tolerancia de los puntos escogidos en la fase de registro.

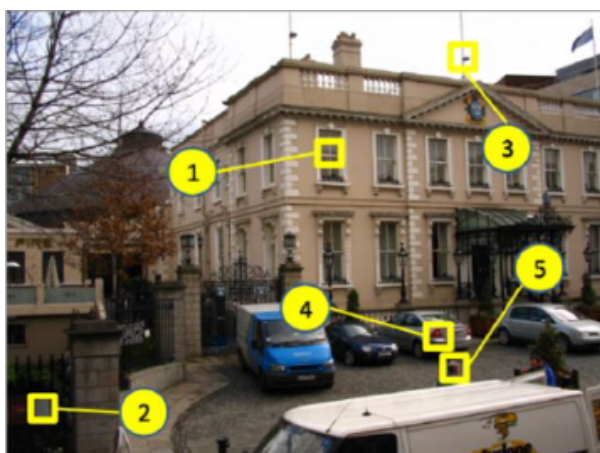


Figura 1.1: PassPoint.

Wiedenbeck en su investigación [1], asegura que las imágenes utilizadas en el sistema deben tener contenido significativo para el usuario, por lo que deben tener escenas concretas. Otro requisito es que la imagen seleccionada posea cientos de Hotspots (puntos más probables a seleccionar por el usuario o mejor llamados puntos calientes) diseminados de forma homogénea, de no ser así se reduciría el espacio de contraseñas y por ende

aumentaría la vulnerabilidad ante diversos ataques.

Existe el problema de la improbabilidad de que el usuario en el momento de autenticación seleccione exactamente el mismo punto que en la fase de registro, como alternativa a este problema surge la discretización. Esta se encarga de establecer una tolerancia alrededor de cada punto, por tanto esto disminuye el espacio de contraseñas y aumenta información relevante a la hora de los ataques de diccionarios. Se puede encontrar un análisis sobre la relevancia del mecanismo de discretización en los sistemas de contraseñas gráficas en [14, 15, 16]. Por otro lado, en [14, 15, 16, 17] se describen los distintos métodos de discretización que se han desarrollado hasta ahora.

En el trabajo [18] se presenta un método que permite determinar si una imagen es adecuada para ser utilizada en esta técnica. Este método conduce al desarrollo de un modelo, diseñado para identificar las regiones de una imagen que los usuarios tienen mayor probabilidad de elegir como parte de sus contraseñas. Según sus experimentos, el modelo puede predecir puntos de interés (Hotspots) con una precisión de entre el 70 % y el 80 %, aunque el tamaño de la muestra utilizada es limitado. La aplicación de esta técnica en el sistema PassPoint sería especialmente útil para mejorar la confiabilidad en la asignación de imágenes. Por otro lado, en el estudio [19] se demostró que incluso un pequeño cambio en la imagen puede influir en la elección de contraseñas por parte del usuario durante la fase de registro, afectando así su nivel de seguridad.

En relación al espacio de contraseñas, según [1], no sería necesario utilizar muchos puntos para crear una contraseña segura. Con solo 5 o 6 puntos (en una imagen de 1024x725), se podría lograr mayor seguridad que con contraseñas de 8 caracteres dentro de un alfabeto estándar de 64 símbolos. En la tabla 1.1, se muestra una comparación entre los espacios de contraseñas gráficas y alfanuméricas, considerando factores como el alfabeto, la longitud de la contraseña, la tolerancia y el tamaño de la imagen. Se observa que, con 5 puntos y un tamaño de imagen razonable, las contraseñas gráficas mantienen un espacio de clave superior al de las contraseñas alfanuméricas. Para resoluciones más actuales como 1366x768 (HD) o 1920x1080 (FHD) que son los estándares actuales, el espacio de claves es mucho mayor al de las alfanuméricas, es decir, el espacio de claves mejora con la tecnología y no afecta la memorabilidad, cosa que no sucede con las alfanuméricas.

|                                  | Tamaño de imagen | Tamaño de la cuadrícula (píxeles) | Tamaño del alfabeto/<br>No.Cuadrículas | Largo/No. puntos de clic | Tamaño de espacio de contraseñas |
|----------------------------------|------------------|-----------------------------------|--|--------------------------|----------------------------------|
| Alfanumérica                     | N/A              | N/A                               | 64                                     | 8                        | $2.8 \times 10^{14}$             |
| Alfanumérica                     | N/A              | N/A                               | 72                                     | 8                        | $7.2 \times 10^{14}$             |
| Alfanumérica                     | N/A              | N/A                               | 96                                     | 8                        | $7.2 \times 10^{15}$             |
| Gráficas                         | 451x331          | 20x20                             | 373                                    | 5                        | $7.2 \times 10^{12}$             |
| Gráficas                         | 1024x752         | 20x20                             | 1925                                   | 5                        | $2.6 \times 10^{16}$             |
| Gráficas                         | 1024x752         | 14x14                             | 3928                                   | 5                        | $9.3 \times 10^{17}$             |
| Gráficas(1/2 uso de la pantalla) | 1024x752         | 14x14                             | 1964                                   | 5                        | $2.9 \times 10^{16}$             |

Tabla 1.1: Alfanuméricas vs Gráficas. Tomada de [1]

## 1.2. Patrones DIAG y LINE

El problema de que los usuarios seleccionen imágenes que posean una cantidad reducida de Hotspots puede ser solucionado con un procesamiento previo de la misma, como se explica en la sección anterior, o brindando imágenes seguras por sistema, pero existen debilidades que ocurren independientemente de la imagen empleada. Estas debilidades están relacionadas con el uso de patrones específicos, principios psicológicos o modelos de atención visual. Estos aspectos son habitualmente empleados por los usuarios con el fin de hacer que sus contraseñas sean más fáciles de recordar. Sin embargo, esta estrategia, aunque mejora la memorabilidad, también facilita la creación de diccionarios de ataque para descifrar las contraseñas. Los patrones, en unión con los Hotspots y las reglas perceptuales que los usuarios suelen seguir al elegir sus contraseñas, como la organización visual o la repetición de ciertas formas, hacen que estas sean vulnerables a distintos tipos de ataques.

En los estudios reportados en [5, 20, 21, 22, 23, 24, 25], se identificaron varios patrones comunes utilizados por los usuarios en la creación de contraseñas gráficas. Algunos de estos patrones incluyen formas predefinidas como Z, W, V, y C, patrones agrupados, regulares, y patrones LOD (patrones que cumplen con la caracterización de que la distancia entre 2 puntos consecutivos es constante), además de los patrones DIAG y LINE, los cuales están relacionados con trayectorias diagonales o en línea. Entre estos, los patrones DIAG y LINE son los más frecuentemente utilizados por los usuarios.

Los patrones DIAG se describen como configuraciones donde los puntos se organizan formando arcos en direcciones horizontales y verticales. Una característica distintiva de estos patrones es que la suma de los valores absolutos de los ángulos entre los puntos es menor a  $15^\circ$ . Por otro lado, los patrones LINE se caracterizan por ser líneas rectas, ya sean horizontales o verticales. Estos se consideran un subconjunto de los patrones DIAG, ya que ambas configuraciones comparten una estructura similar basada en la alineación de los puntos, pero los patrones LINE son más simples al ser exclusivamente rectos.

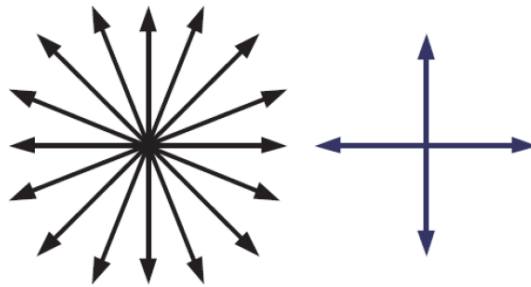


Figura 1.2: DIAG-LINE.

En un estudio realizado por los autores de [21, 22], se investigaron 223 contraseñas gráficas en el sistema PassPoint. Estas contraseñas fueron seleccionadas por estudiantes que interactuaron con dos imágenes diferentes. Cada imagen contenía una cantidad manejable de Hotspots, distribuidos de manera uniforme entre ellas. Durante el experimento, los investigadores intentaron descifrar las contraseñas utilizando ataques de diccionario. Utilizando un diccionario de 235.26 entradas y patrones de tipo DIAG, los atacantes lograron obtener entre el 48.2% y el 54.1% de las contraseñas. Además, empleando un diccionario diferente de 229.02 entradas y patrones de tipo LINE, los resultados fueron algo menos efectivos, logrando recuperar entre un 23.7% y un 52.3% de las contraseñas.

Estos resultados destacan la efectividad variable de los ataques de diccionario cuando se aplican a contraseñas gráficas en escenarios con patrones específicos.

### 1.3. Triangulaciones de Delaunay

**Definición(Triángulación de Delaunay):** Una triangulación del conjunto  $P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$  de los puntos sobre el plano es de Delaunay, si y solo si la circunferencia circunscrita de cualquier triángulo en la red no contiene un punto  $p_i$  en su interior. Como ejemplos de esta están las figuras 1.4, 1.3 y 1.5. Esta definición es conocida como condición de Delaunay [26, 27, 28].

#### Propiedades elementales de las triangulaciones de Delaunay

Una triangulación de Delaunay presenta las siguientes tres propiedades elementales:

1. La frontera externa de la triangulación de Delaunay forma la envoltura convexa del conjunto de puntos.
2. El ángulo mínimo dentro de todos los triángulos de Delaunay esta maximizado, es decir, se evita obtener resultados con ángulos demasiados agudos. Como consecuencia de lo anterior, los triángulos generados en una triangulación tienden a ser lo más equilátero posible. Esto es debido a que todo triángulo no equilátero siempre tiene algún ángulo menor que  $60^\circ$ .
3. La triangulación es única cuando ningún borde de la circunferencia circunscrita contiene más de tres vértices de la red.

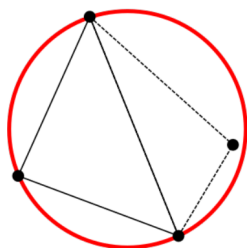


Figura 1.3: Esta triangulación no cumple condición de Delaunay

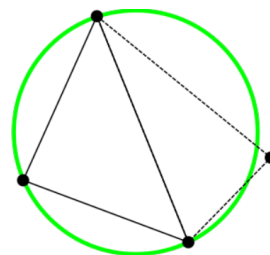


Figura 1.4: Esta triangulación sí cumple condición de Delaunay

Un aspecto clave al trabajar con triangulaciones de Delaunay es determinar si una triangulación es válida. Para lograr esto, se recurre a la fórmula de Euler, que es una herramienta fundamental en geometría computacional. Considerando un conjunto de puntos  $P$  de  $n$  elementos, si hay una cantidad  $h$  de puntos que pertenecen a la envoltura convexa de dicho conjunto, la fórmula permite calcular ciertas propiedades de la triangulación. Según esta, la triangulación de Delaunay resultante tendrá un total de  $2n-2-h$  triángulos y  $3n-3-h$  aristas [29]. Notemos que para 5 puntos de una contraseña, como máximo podemos obtener 5 triángulos de Delaunay pues  $n=5$  y  $h$  puede variar entre 3, 4 o 5.



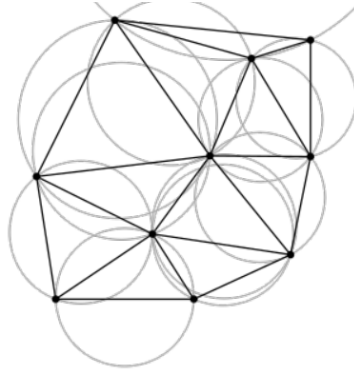


Figura 1.5: Triangulación de Delaunay para 10 puntos

## 1.4. Antecedentes en la detección de patrones DIAG y LINE o patrones suaves

En el contexto de la seguridad informática, la detección de patrones en contraseñas gráficas ha emergido como un aspecto crucial para garantizar la robustez de los sistemas de autenticación, especialmente en entornos como PassPoint. La identificación y evaluación de patrones específicos, como los patrones DIAG y LINE, se ha vuelto fundamental para mitigar vulnerabilidades y fortalecer la seguridad en estos sistemas.

Los estudios previos han destacado la efectividad de diversos métodos en la detección de contraseñas débiles que siguen patrones suaves. En particular, dos enfoques sobresalen en esta área: el algoritmo diseñado para detectar contraseñas con patrones suaves en PassPoint [3] y el *test* basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay [13] para la identificación de patrones DIAG y LINE en contraseñas gráficas.

En esta sección, se analizarán en detalle estos dos enfoques, centrándose en su eficacia, metodología y resultados. El objetivo es comprender cómo estos métodos contribuyen a la detección y evaluación de contraseñas débiles que siguen patrones predefinidos, así como su relevancia en la mejora de la seguridad en sistemas de autenticación gráfica como PassPoint.

### 1.4.1. Algoritmo para la detección de contraseñas con patrones suaves en PassPoint

En [3] se presentó un algoritmo diseñado para identificar contraseñas con patrones suaves en el método PassPoint. Este algoritmo toma como datos de entrada los puntos seleccionados por el usuario al crear su contraseña, junto con un parámetro de tolerancia, representado como  $D(\varphi^\circ)$ . A partir de los 5 puntos que componen la contraseña, se calculan los tres ángulos formados entre los segmentos consecutivos que conectan dichos puntos. El algoritmo determina que una contraseña presenta un patrón suave cuando los tres ángulos calculados superan el valor del parámetro  $D(\varphi^\circ)$ .

La cuestión de este algoritmo es la selección del valor  $D(\varphi^\circ)$  pues este va a ser el mayor determinante en la decisión del mismo. Para la solución de este problema se contó con una implementación básica del PassPoint para la web con dos imágenes de 700x400. Un grupo de 60 alumnos de la Universidad de Ciencias Informáticas crearon 397 contraseñas, las cuales se clasificaron visualmente y se decidió que 124 de ellas cumplieran con el patrón

de suavidad.

En un primer experimento se aplicó el algoritmo propuesto a las 124 contraseñas variando con paso 10 el parámetro  $D(\varphi^\circ)$ , y de esta manera se determinaron los falsos negativos obtenidos por el algoritmo para cada valor de  $D(\varphi^\circ) \in \{20, 30, 40, 50, \dots, 150\}$ . Se observó que al aumentar  $D(\varphi^\circ)$  se reducen los falsos negativos, y que para valores de  $D(\varphi^\circ)$  mayores a  $80^\circ$  ocurre poca variación en la cantidad de contraseñas detectadas. Incluso para  $D(\varphi^\circ) = 150^\circ$  aún quedan 3 contraseñas no detectadas, quizás esto pueda ser un error debido a la clasificación del observador.

En un segundo experimento se aplicó el algoritmo para las 397 contraseñas registradas inicialmente por los 60 usuarios y los mismos valores de  $D(\varphi^\circ)$  que en el experimento anterior, para identificar cuántas nuevas contraseñas detectaba el algoritmo que no estaban en la clasificación inicial. Se pudo apreciar que el número crece a partir de que  $D(\varphi^\circ)$  es mayor que  $50^\circ$ . Dada la contradicción entre las contraseñas detectadas por el algoritmo y las clasificadas por el observador, se realizó un análisis de las contraseñas no clasificadas por este pero sí por el algoritmo y se pudo demostrar que sí cumplían con el patrón de suavidad. Esto sugiere que el observador puede haber cometido errores de clasificación, ya que el usuario que eligió la contraseña intentaba establecer conexiones entre los puntos, aunque la suavidad de estas relaciones no sea evidente para quien observa.

Como tercer experimento se aplicó el algoritmo sobre un conjunto de 400 contraseñas aleatorias para detectar los falsos positivos para cada valor de  $D(\varphi^\circ)$ . Según los resultados, se sugiere usar por defecto  $D(\varphi^\circ) = 130^\circ$ , ya que representa un buen equilibrio entre falsos positivos y falsos negativos. La figura 1.6 extraída de [3] proporciona la información necesaria para ajustar este parámetro según las necesidades del usuario. Incrementar  $D(\varphi^\circ)$  mejora la seguridad, mientras que reducirlo favorece la usabilidad del sistema.

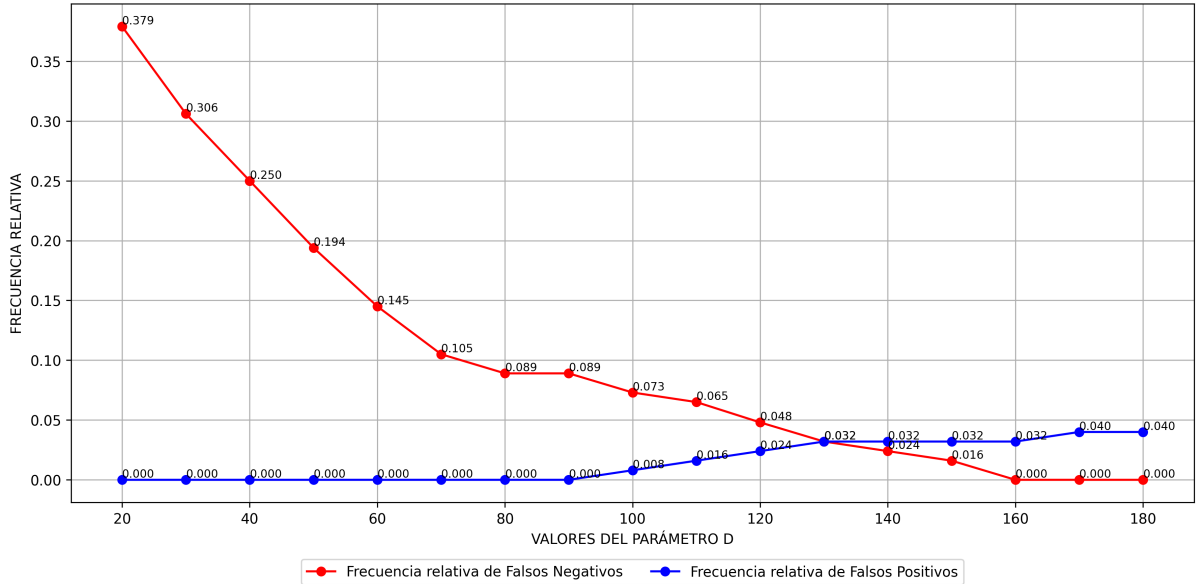


Figura 1.6: Frecuencia de falsos positivos vs falsos negativos según  $D(\varphi^\circ)$ .  
Tomada de [3].

A partir de los resultados de cada experimento se pudo afirmar que se obtuvo un criterio efectivo para detectar la existencia de patrones de suavidad en las contraseñas de la técnica de autenticación gráfica PassPoint en imágenes de  $700 \times 400$  píxeles. En [3] se puede observar el algoritmo propuesto así como una implementación del mismo en



Python. Además el algoritmo permitió constatar que en muchas ocasiones el usuario crea una dependencia entre los puntos que no se nota a simple vista por un observador, sin embargo puede ser detectada por el algoritmo con parámetro de tolerancia variable.

### 1.4.2. *Test* de detección de patrones DIAG y LINE en el sistema PassPoint basado en los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay

En [13] se propuso un innovador *test* para la detección de contraseñas gráficas débiles en el sistema PassPoint, diseñado específicamente para identificar contraseñas que sigan patrones de tipo DIAG y LINE. Este *test* se aplica de manera efectiva a imágenes con una relación de aspecto 16:9, válida para una amplia gama de tamaños de imagen. Para la construcción de este *test*, se desarrolló y probó una hipótesis inicial en la que se utilizó como estadígrafo la media de los ángulos máximos de los triángulos resultantes de la triangulación de Delaunay en los cinco puntos de una contraseña gráfica en PassPoint. Este enfoque demostró ser un método eficaz para evaluar y determinar si la contraseña seleccionada sigue un patrón DIAG o LINE.

Los resultados experimentales revelaron que las contraseñas que se ajustan a estos patrones tenían una media del estadígrafo significativamente más alta que aquellas generadas de forma aleatoria. Además, se comprobó que el estadígrafo utilizado seguía una distribución normal, lo que permitió desarrollar un *test* de una cola (derecha) basado en la media de una distribución normal. Este *test* evalúa la hipótesis nula, que afirma que la contraseña no sigue un patrón DIAG o LINE, frente a la alternativa de que sí sigue uno de estos patrones.

La eficacia del *test* se evaluó utilizando seis bases de datos que contenían 10 000 contraseñas cada una. Tres de estas bases incluían contraseñas que formaban patrones DIAG y tres contenían patrones LINE, y a su vez cada una con distintos niveles de suavidad. Las bases de datos fueron segmentadas según los ángulos entre los segmentos consecutivos, una frecuencia que se determinó en [5] como mayor a la media. El *test* logró detectar el 100 % de las contraseñas gráficas que seguían los patrones DIAG y LINE, para segmentos consecutivos con una amplitud máxima entre 150° y 180° (Db1.DIAG, Db2.DIAG, Db1.LINE, Db2.LINE) en todos los niveles de significación evaluados.

Para contraseñas cuyos patrones tenían una amplitud entre 135° y 150° (Db3.DIAG, Db3.LINE), el *test* logró una detección del 100 % en los niveles de significación  $\alpha = 0.2$  y  $\alpha = 0.1$ . Sin embargo, en los niveles de significación más bajos  $\alpha \in \{0.05, 0.02, 0.01\}$ , la tasa de detección disminuyó a aproximadamente 88 %, 42 % y 16 %, respectivamente. Para fines generales, los autores recomendaron utilizar un nivel de significación de  $\alpha = 0.05$ , ya que este valor ofrece resultados superiores al 91 % de detección para patrones DIAG y 88 % para patrones LINE, a cambio de solo un falso positivo cada 20.

## Capítulo 2

# Detección de patrones DIAG y LINE en PassPoint, basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay

En [13] se demostró que el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay es un estadígrafo eficaz para la detección de patrones DIAG y LINE. Teniendo en cuenta que las contraseñas en PassPoint se crean con la selección de 5 puntos, los posibles números de triángulos de Delaunay pueden ser 3, 4 o 5 como se mostró en la sección 1.3. En las próximas secciones se proponen tres *test* de detección de contraseñas que siguen patrones DIAG o LINE en PassPoint, basados en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay, pero realizando un análisis separado por cada número de triángulos en su triangulación. En cada subsección se determinarán las distribuciones a las que se ajustaron los promedios de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay para el número de triángulos correspondiente, a través del software EasyFit 5.6. A partir de ello se construirá un *test* estadístico para la detección de contraseñas con patrones DIAG y LINE, y se evaluará su efectividad estimando los errores de tipo I y de tipo II cometidos.

La justificación de el uso de EasyFit 5.6 para ajustar los datos a una distribución conocida se basa en que esta versión del software contiene un total de 54 distribuciones conocidas y una implementación de los *test* de bondad de ajuste: Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling y Chi-Cuadrado, los cuales son empleados para encontrar la distribución de mejor ajuste a los datos/

### 2.1. Contraseñas con 3 triángulos en su triangulación de Delaunay

En esta sección cuando se hace referencia al promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay de las contraseñas gráficas en PassPoint, nos referiremos a las contraseñas que posean 3 triángulos en su triangulación de Delaunay, figura 2.7.

#### 2.1.1. Estimación de la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay

##### Experimento #1.1.

Para estimar la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay para contraseñas gráficas en PassPoint, se generaron aleatoriamente 1000 contraseñas gráficas de 5 puntos en una imagen de 1920x1080. Para cada una de estas

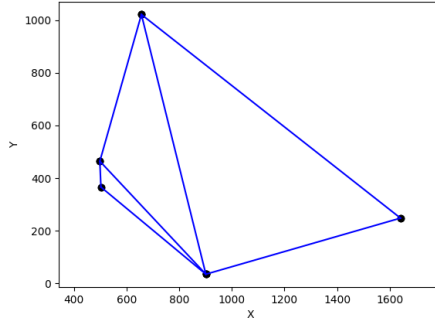


Figura 2.7: Contraseña gráfica de 5 puntos con una triangulación de Delaunay de 3 triángulos.

contraseñas se construyó su correspondiente triangulación de Delaunay y se determinó el promedio de los ángulos máximos de su triangulación de Delaunay resultante. A la base de datos que contiene los 1000 promedios se le denominó DB.1. Una vez creada dicha base de datos, se utilizó el software EasyFit 5.6 para ajustar dichos datos a una distribución conocida.

#### Resultados del experimento #1.1.

En la tabla A.1 se muestran las 6 distribuciones a las que más se ajustaron a los datos encontrados en DB.1, teniendo en cuenta los tres test de bondad de ajuste mencionados anteriormente. Encontrándose en el primer lugar *Johnson SB* con los parámetros  $\gamma = 1,9152$ ,  $\delta = 1,4296$ ,  $\lambda = 134,77$  y  $\xi = 68,377$ . Sin embargo, cabe destacar que los datos se ajustaron a distribuciones conocidas, no encontrándose entre ellas la distribución Normal, al contrario de como se esperaba, pues se rechazan para esta distribución los tres test de bondad de ajuste aplicados para todos los niveles de significación, como muestra la tabla A.1. En la figura 2.8 se muestran los resultados de tres de los *test* de bondad de ajuste aplicados a la distribución *Johnson SB* sobre datos contenidos en DB.1 donde para ninguno de los tres test de bondad de ajuste se rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de la distribución teórica *Johnson SB*, aceptándolos para todo nivel de significación y por tanto indicando un buen ajuste. En la figura 2.9 se muestra la función de densidad de probabilidad de la misma.

A partir de este resultado, en el resto de la sección se asume que la muestra BD.1 y, por tanto, el promedio de los ángulos máximos de las triangulaciones de Delaunay que tengan tres triángulos en las contraseñas de PassPoint, proceden de una distribución *Johnson SB*. Por lo que se puede asumir que las contraseñas que incumplan esta propiedad no son aleatorias. La aplicación práctica de este criterio se facilita porque después de aplicar la transformación de *Johnson SB* mediante la fórmula [30] :

$$P_D^N = J_{SB}(P_D) = \gamma + \delta \times \ln \left( \frac{P_D - \xi}{\lambda + \xi - P_D} \right),$$

con los parámetros correspondientes, el promedio transformado debe seguir una distribución normal estándar  $P_D^N \sim N(0, 1)$ . Basado en la propiedad anterior, la detección de la no aleatoriedad de las contraseñas se reduce a aplicar un *test* de media para la distribución normal del estadígrafo muestral transformado a *Johnson SB*.

| Kolmogorov-Smirnov   |         |         |         |        |         |
|----------------------|---------|---------|---------|--------|---------|
| Tamaño de la muestra | 1000    |         |         |        |         |
| Estadística          | 0.01725 |         |         |        |         |
| Valor P              | 0.92216 |         |         |        |         |
| Rango                | 1       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 0.03393 | 0.03867 | 0.04294 | 0.048  | 0.05151 |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |
| Anderson-Darling     |         |         |         |        |         |
| Tamaño de la muestra | 1000    |         |         |        |         |
| Estadística          | 0.26338 |         |         |        |         |
| Rango                | 1       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 1.3749  | 1.9286  | 2.5018  | 3.2892 | 3.9074  |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |
| Chi-cuadrado         |         |         |         |        |         |
| Grados de libertad   | 9       |         |         |        |         |
| Estadística          | 5.3831  |         |         |        |         |
| Valor P              | 0.79971 |         |         |        |         |
| Rango                | 1       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 12.242  | 14.684  | 16.919  | 19.679 | 21.666  |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |

Figura 2.8: *Test* de bondad de ajuste aplicados a la distribución *Johnson SB* sobre DB.1.

### 2.1.2. *Test* basado en el promedio de los ángulos máximos de los Triángulos de Delanunay

Dado que el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delanunay distribuye *Johnson SB*, se propone un *test* estadístico para identificar contraseñas con patrones DIAG y LINE en PassPoint. La propuesta consiste en un *test* de una cola (derecha) basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay transformados a una distribución normal estándar mediante la transformación *Johnson SB*. Este se enfoca en la amplitud de los ángulos en lugar de las dimensiones de los lados o cualquier otra característica que pueda cambiar con el tamaño de la imagen. Por lo tanto, será aplicable a todas las imágenes con una relación de aspecto de 16:9. En estas imágenes, las dimensiones serán proporcionales y los triángulos dentro de ellas también serán proporcionales, lo que permite formalizar la prueba propuesta de la siguiente manera:

1. Variable aleatoria X: promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay de contraseñas de 5 puntos con 3 triángulos en su triangulación.
2. Estadígrafo :

$$Z = J_{SB}(X) = \gamma + \delta \times \ln \left( \frac{X - \xi}{\lambda + \xi - X} \right)$$

3. Hipótesis nula :

$$H_0 : E(Z) = 0$$

- La contraseña gráfica seleccionada por el usuario es aleatoria si el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay transformados mediante la fórmula de *Johnson SB* a una normal estándar es igual a 0.

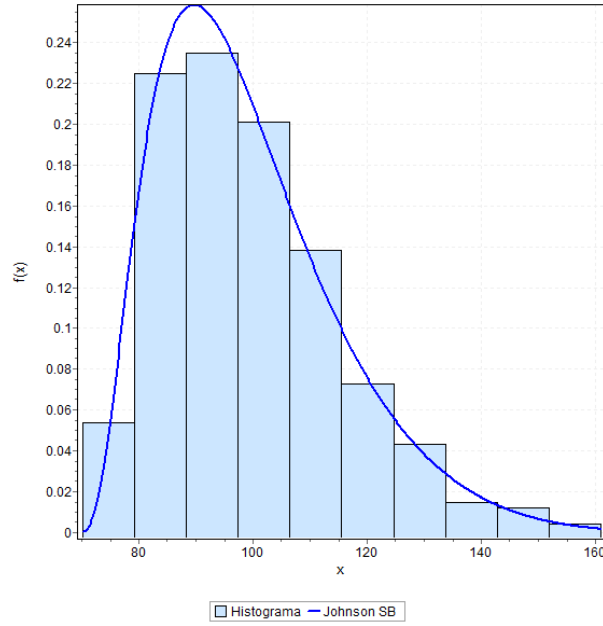


Figura 2.9: Función de densidad de probabilidad de la distribución *Johnson SB* para DB.1.

4. Hipótesis alternativa :

$$H_a : E(Z) > 0$$

- La contraseña gráfica seleccionada por el usuario posee patrones DIAG o LINE si el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay transformado mediante la fórmula de *Johnson SB* a una normal estándar es mayor a 0.
5. Región de Rechazo:  $\{z : Z > z_\alpha\}$ , donde  $\alpha$  es el nivel de significación establecido por el usuario.
6. Criterio de decisión:
- Para los cinco niveles de significación establecidos, se decide que la contraseña gráfica seleccionada por el usuario no sigue un patrón aleatorio si al transformar el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay mediante la transformación *Johnson SB*, el valor obtenido pertenece a la región crítica.

### 2.1.3. Implementación del *Test* propuesto :

Para la implementación del *test* propuesto, se toman las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de cada uno de los  $p_i$  puntos,  $i = 1, \dots, 5$  como valores de entrada. A partir de estos puntos, se construye la triangulación Delaunay utilizando la función *Delaunay* de *scipy.spatial*.

Luego, la longitud de los lados de cada triángulo se determina por la distancia euclidiana de dos a dos de los puntos que lo forman, de la siguiente ecuación:

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Para encontrar los ángulos de cada triángulo, se aplica la Ley de los Cosenos:

$$\theta = \arccos\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ab}\right), \quad \phi = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right), \quad \psi = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right).$$

Es necesario encontrar el máximo de estos tres ángulos  $\theta$ ,  $\phi$ , y  $\psi$ . Es análogo para los triángulos restantes de la triangulación Delaunay. Una vez que se hayan obtenido los ángulos máximos de la triangulación Delaunay, se calcula su promedio, con el cual se obtiene el valor de  $X$ . La hipótesis nula se rechaza dependiendo de si la estadística  $Z$  pertenece a la región de rechazo para el  $\alpha$  establecido. Una posible implementación de esta prueba en Python sería:

- points: 5 puntos de la contraseña.
- gamma, delta, lambda, xi: parámetros correspondientes a la distribución *Johnson SB* obtenida.
- rg: límite inferior de la región de rechazo según el nivel de significación escogido.

La implementación del *test* retorna 0 cuando se rechaza la hipótesis nula y 1 en otro caso

```

1  def test(points, gamma, delta, lambda, xi, rg):
2      triangulation=Delaunay(points)
3      angles=[]
4      for i in triangulation:
5          a=distancia_puntos(points[i[0]],
6                               points[i[1]])
7          b=distancia_puntos(points[i[1]],
8                               points[i[2]])
9          b=distancia_puntos(points[i[2]],
10                              points[i[0]])
11         angles.append(angle_max(a,b,c))
12     X=mean(angles)
13     Z=gamma + delta * np.log((x - xi) / (lambda -
14         x + xi))
15     if Z>rg:
16         return 0
17     else:
18         return 1
19
20 def distancia_puntos(punto1, punto2):
21     return math.sqrt((punto1[0] - punto2[0])**2 +
22         (punto1[1] - punto2[1])**2)
23
24 def angle_max(distancia_ab, distancia_bc,
25     distancia_ca):
26     angulo_A = math.degrees(math.acos(
27         (distancia_bc**2 + distancia_ca**2 -
28             distancia_ab**2)
29         / (2 * distancia_bc * distancia_ca)
30     ))

```

```

25     angulo_B = math.degrees(math.acos(
26         (distancia_ca**2 + distancia_ab**2 -
27             distancia_bc**2)
28         / (2 * distancia_ca * distancia_ab)
29     ))
30     angulo_C = 180 - angulo_A - angulo_B
    return max(angulo_A, angulo_B, angulo_C)

```

En cuanto a la complejidad, las funciones *distancia\_puntos* y *angle\_max* solo poseen operaciones elementales por lo que su complejidad es  $O(1)$ . La función *test* en su primera línea hace un llamado a la función *Delaunay* (línea 2) de *scipy.spatial*, esta posee una complejidad de  $O(N \log N)$  debido a que el algoritmo subyacente utilizado por *Scipy* es el algoritmo de *Qhull*. Seguido en el algoritmo se itera por la triangulación obtenida (líneas 4-8), la cual poseen como máximo  $n$  triángulos, dentro de cada iteración se hacen llamados a las funciones *distancia\_puntos* y *angle\_max* que son  $O(1)$ , por tanto el costo del iterador es  $O(N)$ . Las operaciones restantes son  $O(1)$  (líneas 9-14), por tanto el costo total sería  $O(1) + O(N) + O(N \log N) = O(N \log N)$  por ley de la suma.

#### 2.1.4. Estimación de la probabilidad de los errores de tipo I y de tipo II cometidos por el *test*

##### Experimento #2 : Estimación del error tipo I

Para estimar la probabilidad de que la prueba decida que la contraseña gráfica contiene un patrón DIAG o LINE cuando, en verdad, sigue un patrón aleatorio (error de tipo I o falsos positivos), se generó una base de datos DB.1.RANDOM con 10 000 contraseñas gráficas aleatorias sobre la imagen. El *test* descrito en la sección 2.1.3 se aplicó a cada una de estas contraseñas gráficas para los valores de  $z_\alpha \in \{0,842, 1,282, 1,645, 2,054, 2,326\}$  correspondientes a los niveles de significación  $\alpha \in \{0,2, 0,10,05, 0,02, 0,01\}$ .

##### Resultados del experimento #2.

Las probabilidades estimadas de cometer un error de tipo I ( $\hat{\alpha}$ ) mediante el *test* son ligeramente superiores a las probabilidades teóricas preestablecidas ( $\alpha$ ), véase en la figura 2.10 y en la tabla 2.2.

| $\alpha$       | $\alpha = 0,2$ | $\alpha = 0,1$ | $\alpha = 0,05$ | $\alpha = 0,02$ | $\alpha = 0,01$ |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\hat{\alpha}$ | 0.2221         | 0.1178         | 0.0605          | 0.0251          | 0.0132          |

Tabla 2.2: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I derivado de la prueba.

##### Experimento #3: Estimación del error tipo II

Para estimar la probabilidad  $\hat{\beta}$  de que el *test* detecte una contraseña gráfica como aleatoria cuando sigue un patrón DIAG o LINE (error tipo II o falsos negativos), se crearon 3 bases de datos que en conjunto contienen 30 000 contraseñas gráficas de 5 puntos que siguen patrones DIAG y LINE:

- DB.DIAG.LINE.1.1: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos de  $15^\circ$ .
- DB.DIAG.LINE.1.2: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos que varía entre  $15^\circ$  y  $30^\circ$ .

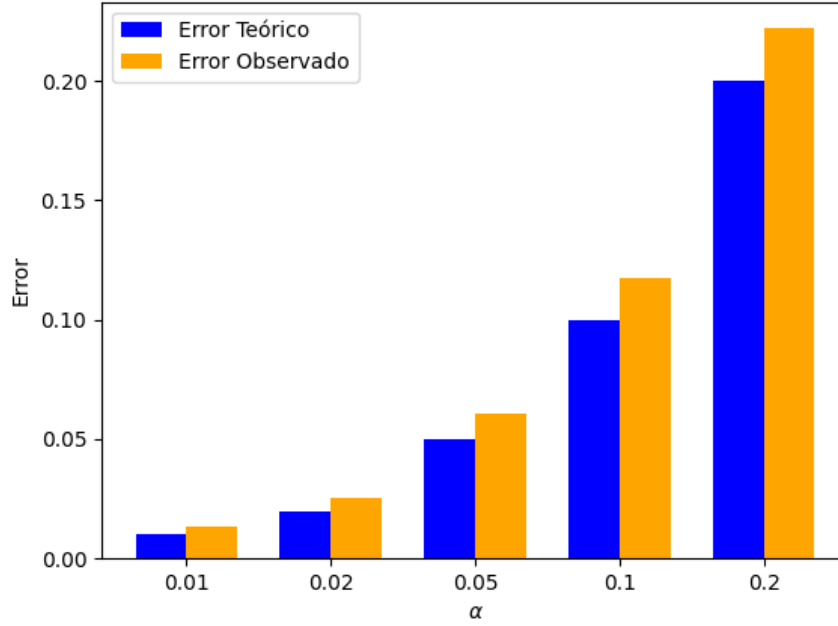


Figura 2.10: Comparación entre las probabilidades teóricas ( $\alpha$ ) y estimadas ( $\hat{\alpha}$ ) de cometer un error de tipo I.

- DB.DIAG.LINE.1.3: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos que varia entre 30° y 45°.

### Resultados del experimento #3

Los resultados obtenidos por el *test* para cada una de las bases de datos y los niveles de significación preestablecidos se muestran en la tabla. 2.3

| $\alpha$ | BD.DIAG.LINE.1.1 | BD.DIAG.LINE.1.2 | BD.DIAG.LINE.1.3 |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| 0.2      | 0                | 0                | 0.0571           |
| 0.1      | 0                | 0                | 0.2721           |
| 0.05     | 0                | 0.0029           | 0.5222           |
| 0.02     | 0                | 0.0939           | 0.8508           |
| 0.01     | 0                | 0.2527           | 0.9871           |

Tabla 2.3: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ ) del error de tipo II derivado de la prueba.

Como se aprecia en la tabla 2.3, el test propuesto durante este experimento mostró una alta capacidad para detectar las contraseñas encontradas en DB.DIAG.LINE.1.1 y en DB.DIAG.LINE.1.2, lo que para esta ultima con los niveles de significación de  $\alpha \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$ . Para las contraseñas de DB.DIAG.LINE.1.3 no se obtuvieron buenos resultados, llegando a detectar 94 %, 72 %, 48 %, 15 % y 1 % para  $\alpha \in \{0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01\}$  respectivamente.



## 2.2. Contraseñas con 4 triángulos en su triangulación de Delaunay

En esta sección, cuando hablemos del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay correspondientes a las contraseñas gráficas en PassPoint, nos estaremos refiriendo específicamente a aquellas contraseñas cuya triangulación de Delaunay contiene 4 triángulos [2.11](#).

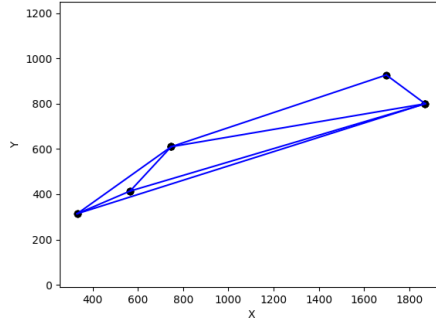


Figura 2.11: Contraseña gráfica de 5 puntos con una triangulación de Delaunay de 4 triángulos

### 2.2.1. Estimación de la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay

#### Experimento #1.

Para estimar la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay en contraseñas gráficas de Passpoint, se generaron de manera aleatoria 1000 contraseñas gráficas formadas por 5 puntos ubicados en una imagen con resolución de 1920x1080. Para cada una de estas contraseñas, se construyó su correspondiente triangulación de Delaunay y se calculó el promedio de los ángulos máximos de los triángulos resultantes. Los 1000 promedios obtenidos fueron recopilados en una base de datos denominada DB.2.

#### Resultados del experimento 1

En la tabla A.2 se muestran las 6 distribuciones que más se ajustan a los datos encontrados en DB.2, encontrándose en el primer lugar Log-Logistic (3P) con los parámetros  $\alpha = 6,4824$ ,  $\beta = 46,461$   $\gamma = 68,566$ , además se observa que los datos no se ajustan a la distribución Normal, rechazando los tres *test* de bondad de ajuste para todos los niveles de significación. En la figura 2.12 se muestran los datos de tres de los *test* de bondad de ajuste aplicados a la distribución obtenida sobre los datos contenidos en DB.2 y en la figura 2.13 se muestra la función de densidad de probabilidad de la misma.

Como se muestra en la figura 2.12, los tres métodos de bondad de ajuste evaluados (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling y Chi-cuadrado) no rechazan la hipótesis nula de que los datos provienen de la distribución teórica Log-Logistic (3P) para ninguno de los niveles de significación analizados. Esto indica que los datos se ajustan adecuadamente a dicha distribución.

Con base en este resultado, en el resto de la sección se asume que la muestra DB.2, y por extensión el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay, provienen de una distribución Log-Logistic (3P). Por lo tanto, se asume que las contraseñas que no cumplan con esta propiedad pueden considerarse como no aleatorias.

| Kolmogorov-Smirnov   |         |         |         |        |         |
|----------------------|---------|---------|---------|--------|---------|
| Tamaño de la muestra | 1000    |         |         |        |         |
| Estadística          | 0.01309 |         |         |        |         |
| Valor P              | 0.9947  |         |         |        |         |
| Rango                | 1       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 0.03393 | 0.03867 | 0.04294 | 0.048  | 0.05151 |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |
| Anderson-Darling     |         |         |         |        |         |
| Tamaño de la muestra | 1000    |         |         |        |         |
| Estadística          | 0.21014 |         |         |        |         |
| Rango                | 1       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 1.3749  | 1.9286  | 2.5018  | 3.2892 | 3.9074  |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |
| Chi-cuadrado         |         |         |         |        |         |
| Grados de libertad   | 9       |         |         |        |         |
| Estadística          | 0.82785 |         |         |        |         |
| Valor P              | 0.99974 |         |         |        |         |
| Rango                | 1       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 12.242  | 14.684  | 16.919  | 19.679 | 21.666  |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |

Figura 2.12: *Test* de bondad de ajuste para la distribución Log-Logistic (3P) sobre DB.2.

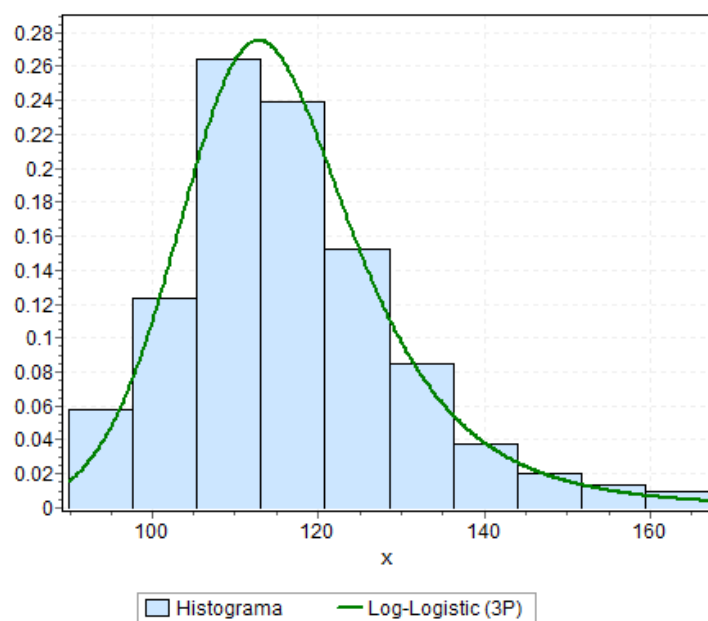


Figura 2.13: Función de densidad de probabilidad de la distribución Log-Logistic (3P) para DB.2.

### 2.2.2. *Test* basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay

Dado que el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay sigue una distribución Log-Logistic, se propone un *test* estadístico para identificar contraseñas con patrones DIAG y LINE. Este *test* consiste en una prueba unilateral (cola derecha) basada en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay.

Al igual que el *test* previamente mencionado, este se fundamenta en la amplitud de los ángulos y no en la longitud de los lados ni en otras características que dependan del tamaño de la imagen. Por esta razón, este es válido para imágenes de cualquier tamaño siempre que mantengan una relación de aspecto de 16:9, ya que las dimensiones proporcionales garantizan que los triángulos correspondientes sean semejantes. La formalización del *test* propuesto es la siguiente:

1. Variable aleatoria  $X$ : promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay en un conjunto de 5 puntos, con 4 triángulos en su triangulación.

2. Estadígrafo :  $X$

3. Hipótesis nula :

$$H_0 : E(X) = 0$$

4. Hipótesis alternativa :

$$H_a : E(X) > 0$$

5. Región de Rechazo:  $\{z : Z > z_\alpha\}$ , donde  $z_\alpha$  estará dado por la evaluación de los respectivos niveles de confianza  $p$  en la inversa de la función de distribución acumulada de Log-Logistic (3P) con los parámetros obtenidos:

$$FDA(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^\alpha}, \quad x > \gamma$$

- Para hallar la inversa de la función de distribución acumulada se debe despejar  $x$ : Para despejar  $x$ , seguimos los pasos:

Paso 1: Igualar  $F(x; \alpha, \beta, \gamma)$  a  $y$ :

$$y = \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^\alpha}$$

Paso 2: Invertir la fracción:

$$\frac{1}{y} = 1 + \left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^\alpha$$

Paso 3: Restar 1 de ambos lados:

$$\frac{1}{y} - 1 = \left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^\alpha$$

Paso 4: Escribir con denominador común:

$$\frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1-y}{y} = \left( \frac{\beta}{x-\gamma} \right)^\alpha$$

Paso 5: Elevar ambos lados a la  $\frac{1}{\alpha}$  potencia:

$$\left( \frac{1-y}{y} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\beta}{x-\gamma}$$

Paso 6: Invertir la fracción de la derecha:

$$x-\gamma = \frac{\beta}{\left( \frac{1-y}{y} \right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Paso 7: Pasar  $\left( \frac{1-y}{y} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$  multiplicando a  $\beta$ :

$$x-\gamma = \beta \cdot \left( \frac{1-y}{y} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Paso 8: Simplificar  $x$ :

$$x = \gamma + \beta \cdot \left( \frac{1-y}{y} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$x = \gamma + \beta \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{y} - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Finalmente, sustituyendo  $y = p$ , la solución general es:

$$z_\alpha = \gamma + \beta \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{p} - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

## 6. Criterio de decisión

- Para los cinco niveles de significación establecidos, se decide que la contraseña gráfica seleccionada por el usuario no sigue un patrón aleatorio si su promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay pertenece a la región crítica.

### 2.2.3. Implementación del *Test* propuesto

Para la implementación del *test* propuesto, se toman las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de cada uno de los  $p_i$  puntos,  $i = 1, \dots, 5$  como valores de entrada. A partir de estos puntos, se construye la triangulación Delaunay utilizando la función *Delaunay* de *scipy.spatial*.

Luego, la longitud de los lados de cada triángulo se determina por la distancia euclidiana de dos a dos de los puntos que lo forman, de la siguiente manera:

$$a = \sqrt{(x_{pr_1} - x_{pr_2})^2 + (y_{pr_1} - y_{pr_2})^2} = \|pr_{p_i} - pr_{p_j}\|.$$

Para encontrar los ángulos de cada triángulo, se aplica la Ley de los Cosenos:

$$\theta = \arccos\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ab}\right), \quad \phi = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right), \quad \psi = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right).$$

Es necesario encontrar el máximo de estos tres ángulos  $\theta$ ,  $\phi$ , y  $\psi$ . Es análogo para los triángulos restantes de la triangulación Delaunay. Una vez que se hayan obtenido los ángulos máximos de la triangulación Delaunay, se calcula su promedio, con el cual se obtiene el valor de la estadística  $X$ . La hipótesis nula se rechaza dependiendo de si la estadística  $X$  pertenece a la región de rechazo para el  $\alpha$  establecido. Una posible implementación de esta prueba en python sería:

- points 5 puntos de la contraseña.
- alpha, beta, gamma: parámetros de la distribución Log-Logistic (3P) obtenida.
- nivel\_sig: nivel de significación escogido.

La implementación retorna 0 si se rechaza la hipótesis nula y 1 en otro caso.

```

1 def test(points, alpha, beta, gamma, nivel_sig):
2     triangulation=Delaunay(points)
3     angles=[]
4     for i in triangulation:
5         a=distancia_puntos(points[i[0]],points[i[1]])
6         b=distancia_puntos(points[i[1]],points[i[2]])
7         b=distancia_puntos(points[i[2]],points[i[0]])
8         angles.append(angle_max(a,b,c))
9     X=mean(angles)
10    rg= beta * ((1 / (1 / (1-nivel_sig) - 1)) ** (1 /
11        alpha)) + gamma
12    if X>rg:
13        return 0
14    else:
15        return 1
16
17 def distancia_puntos(punto1, punto2):
18     return math.sqrt((punto1[0] - punto2[0])**2 +
19         (punto1[1] - punto2[1])**2)
20
21 def angle_max(distancia_ab, distancia_bc, distancia_ca):
22     angulo_A = math.degrees(math.acos(
23         (distancia_bc**2 + distancia_ca**2 - distancia_ab**2)
24         / (2 * distancia_bc * distancia_ca)
25     ))
26     angulo_B = math.degrees(math.acos(
27         (distancia_ca**2 + distancia_ab**2 - distancia_bc**2)
28         / (2 * distancia_ca * distancia_ab)
29     ))
30     angulo_C = 180 - angulo_A - angulo_B
31     return max(angulo_A, angulo_B, angulo_C)

```

En cuanto a la complejidad, las funciones *distancia\_puntos* y *angle\_max* solo poseen operaciones elementales por lo que su complejidad es  $O(1)$ . La función *test* en su primera línea hace un llamado a la función *Delaunay* (línea 2) de *scipy.spatial*, esta posee una complejidad de  $O(N \log N)$  debido a que el algoritmo subyacente utilizado por *Scipy* es el algoritmo de *Qhull*. Seguido en el algoritmo se itera por la triangulación obtenida (líneas 4-8), la cual poseen como máximo  $n$  triángulos, dentro de cada iteración se hacen llamados a las funciones *distancia\_puntos* y *angle\_max* que son  $O(1)$ , por tanto el costo del iterador es  $O(N)$ . Las operaciones restantes son  $O(1)$  (líneas 9-14), por tanto el costo total sería  $O(1) + O(N) + O(N \log N) = O(N \log N)$  por ley de la suma.

## 2.2.4. Estimación de la probabilidad de los errores de tipo I y de tipo II cometidos por el *test*

### Experimento #2 : Estimación del error tipo I

Para estimar la probabilidad de que la prueba decida que la contraseña gráfica contiene un patrón DIAG o LINE cuando, en verdad, sigue un patrón aleatorio (error de tipo I o falsos positivos), se generó una base de datos llamada DB.2.RANDOM con 10 000 contraseñas gráficas aleatorias sobre la imagen. El *test* descrito en la sección 2.2.3, se aplicó a cada una de estas contraseñas gráficas, obteniendo como límites inferiores de la región crítica a  $rg \in \{126.105, 133.772, 141.739, 153.254, 162.959\}$  para los respectivos niveles de significación  $\alpha \in \{0,2, 0,10,05, 0,02, 0,01\}$ .

| $\alpha$       | $\alpha = 0,2$ | $\alpha = 0,1$ | $\alpha = 0,05$ | $\alpha = 0,02$ | $\alpha = 0,01$ |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\hat{\alpha}$ | 0.2032         | 0.1083         | 0.0552          | 0.0134          | 0.0034          |

Tabla 2.4: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I derivado de la prueba.

### Resultados del experimento #2.

Las probabilidades estimadas de cometer un error de tipo I ( $\hat{\alpha}$ ) mediante el *test* poseen gran similitud a las probabilidades teóricas preestablecidas ( $\alpha$ ), véase en la figura 2.10.

### Experimento #3: Estimación del error tipo II

Para estimar la probabilidad  $\hat{\beta}$  de que el *test* detecte una contraseña gráfica como aleatoria cuando sigue un patrón DIAG o LINE (error tipo II o falsos negativos), se crearon 3 bases de datos que en conjunto contienen 30 000 contraseñas gráficas de 5 puntos que siguen patrones DIAG y LINE :

- DB.DIAG.LINE.2.1: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos de  $15^\circ$ .
- DB.DIAG.LINE.2.2: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos que varía entre  $15^\circ$  y  $30^\circ$ .
- DB.DIAG.LINE.2.3: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos que varía entre  $30^\circ$  y  $45^\circ$ .

### Resultados del experimento #3

Los resultados obtenidos por el *test* para cada una de las bases de datos y los niveles de significación preestablecidos se muestran en la tabla 2.5.

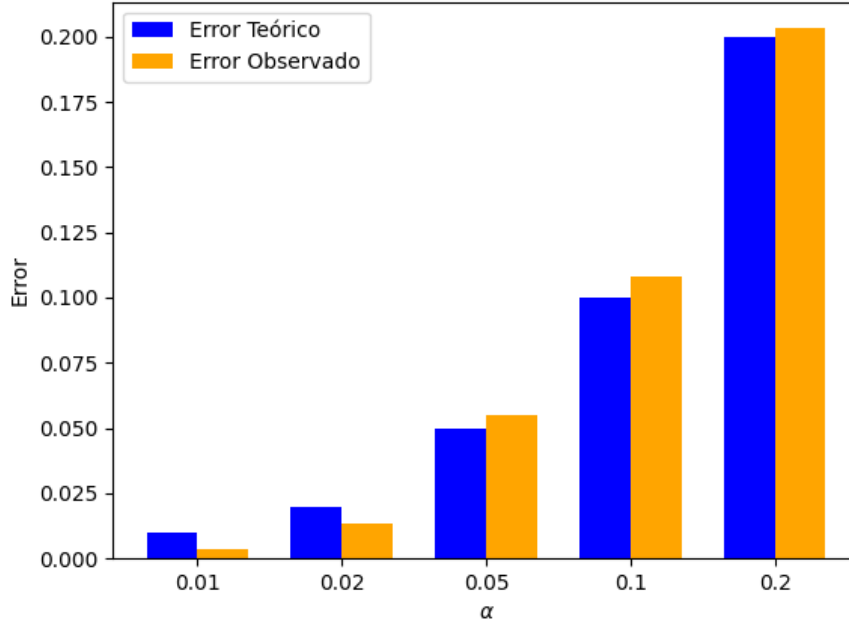


Figura 2.14: Comparación entre las probabilidades teóricas ( $\alpha$ ) y estimadas ( $\hat{\alpha}$ ) de cometer un error de tipo I

| $\alpha$ | BD.DIAG.LINE.2.1 | BD.DIAG.LINE.2.2 | BD.DIAG.LINE.2.3 |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| 0.2      | 0                | 0                | 0.0001           |
| 0.1      | 0                | 0                | 0.0174           |
| 0.05     | 0                | 0                | 0.2577           |
| 0.02     | 0                | 0.0642           | 0.9798           |
| 0.01     | 0                | 0.8688           | 1.0000           |

Tabla 2.5: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ ) del error de tipo II derivado de la prueba.

El test propuesto durante este experimento mostró una alta capacidad para detectar las contraseñas encontradas en BD.DIAG.LINE.2.1, pues detectó el 100 % de estas para todos los niveles de significación, en BD.DIAG.LINE.2.2 detectó el 100 % para los niveles de significación  $\alpha \in \{0,2,0,1,0,05\}$  y 93 % para  $\alpha = 0,02$ . Para las contraseñas de BD.DIAG.LINE.2.3 no se obtuvieron buenos resultados, dado que para los casos de  $\alpha \in \{0,05,0,02,0,01\}$  solo detectó el 74 %, 2 % y 0 % respectivamente.

## 2.3. Contraseñas con 5 triángulos en su triangulación de Delaunay

Como mismo se definió en las secciones anteriores, en esta cuando hacemos referencia a el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay de las contraseñas gráficas en PassPoint, nos referiremos a las contraseñas que posean 5 triángulos en su triangulación de Delaunay [2.15](#).



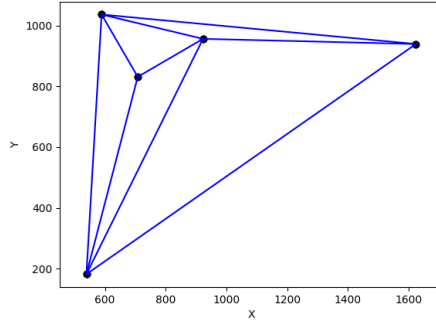


Figura 2.15: Contraseña gráfica de 5 puntos con una triangulación de Delaunay de 5 triángulos.

### 2.3.1. Estimación de la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay

#### Experimento #1.

De igual manera que en las secciones anteriores para estimar la distribución del promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay para contraseñas gráficas en Passpoint, se generaron aleatoriamente 1000 contraseñas gráficas de 5 puntos en una imagen de 1920x1080. Para cada una de estas contraseñas se contruyó su correspondiente triangulación de Delaunay y se determinó el promedio de los ángulos máximos de su triangulación de Delaunay resultante. La base de datos que contiene los 1000 promedios se le denominó DB.3.

#### Resultados del experimento 1

En la tabla A.3 se muestran las 6 distribuciones que más se ajustan a los datos encontrados en DB1.1, encontrándose en el primer lugar Log-Logistic (3P) con los parámetros  $\alpha = 5,8577$ ,  $\beta = 28,592$   $\gamma = 102,72$ , también se observa que la distribución Normal no se ajusta a los datos, rechazando los tres tes de bondad de ajustes en todos los niveles de significación. En la figura 2.16 se muestran los datos de tres de los *test* de bondad de ajuste aplicados a la distribución obtenida sobre los datos contenidos en DB.3 y en la figura 2.17 se muestra la función de densidad de probabilidad de la misma.

Como se observa en la figura 2.16, para los tres métodos de bondad de ajuste (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling y Chi-cuadrado), no se rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de la distribución teórica Log-Logistic (3P), en ningún nivel de significación evaluado, indicando un buen ajuste hacia la misma.

A partir de este resultado, en el resto de la sección se asume que la muestra DB.3 y, por tanto, el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay en contraseñas con 5 triángulos en su triangulación proceden de una distribución Log-Logistic (3P), por tanto se puede asumir que que las contraseñas que incumplan esta propiedad no son aleatorias.

|                      |         |         |         |        |         |
|----------------------|---------|---------|---------|--------|---------|
| Kolmogorov-Smirnov   |         |         |         |        |         |
| Tamaño de la muestra | 1000    |         |         |        |         |
| Estadística          | 0.02342 |         |         |        |         |
| Valor P              | 0.63408 |         |         |        |         |
| Rango                | 2       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 0.03393 | 0.03867 | 0.04294 | 0.048  | 0.05151 |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |
| Anderson-Darling     |         |         |         |        |         |
| Tamaño de la muestra | 1000    |         |         |        |         |
| Estadística          | 0.58887 |         |         |        |         |
| Rango                | 1       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 1.3749  | 1.9286  | 2.5018  | 3.2892 | 3.9074  |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |
| Chi-cuadrado         |         |         |         |        |         |
| Grados de libertad   | 9       |         |         |        |         |
| Estadística          | 11.847  |         |         |        |         |
| Valor P              | 0.22209 |         |         |        |         |
| Rango                | 2       |         |         |        |         |
| $\alpha$             | 0.2     | 0.1     | 0.05    | 0.02   | 0.01    |
| Valor crítico        | 12.242  | 14.684  | 16.919  | 19.679 | 21.666  |
| Rechazar?            | No      | No      | No      | No     | No      |

Figura 2.16: *Test* de bondad de ajuste para la distribución Log-Logistic (3P) sobre DB.3

### 2.3.2. *Test* basado en el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delanunay

Como la distribución obtenida en el experimento #1 es la misma que la obtenida en la sección 2.2.1, tanto el *test* propuesto como su implementación serían el mismo, solo que con otros parámetros.

1. Variable aleatoria  $X$ : promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay en un conjunto de 5 puntos, con 5 triángulos en su triangulación.
2. Estadígrafo :  $X$
3. Hipótesis nula :

$$H_0 : E(X) = 0$$

4. Hipótesis alternativa :

$$H_a : E(X) > 0$$

5. Región de Rechazo:  $\{z : Z > z_\alpha\}$ , donde  $\alpha$  es el nivel de significación establecido por el usuario,  $z_\alpha$  el valor que estará dado por la evaluación de los respectivos niveles de confianza  $p$  en la inversa de la función de distribución acumulada de Log-Logistic (3P) con los parámetros obtenidos:

$$FDA(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^\alpha}, \quad x > \gamma$$

- inversa de FDA evaluada en  $p$  como se demostró en la subsección 2.2.2.

$$rg = \gamma + \beta \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{p} - 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

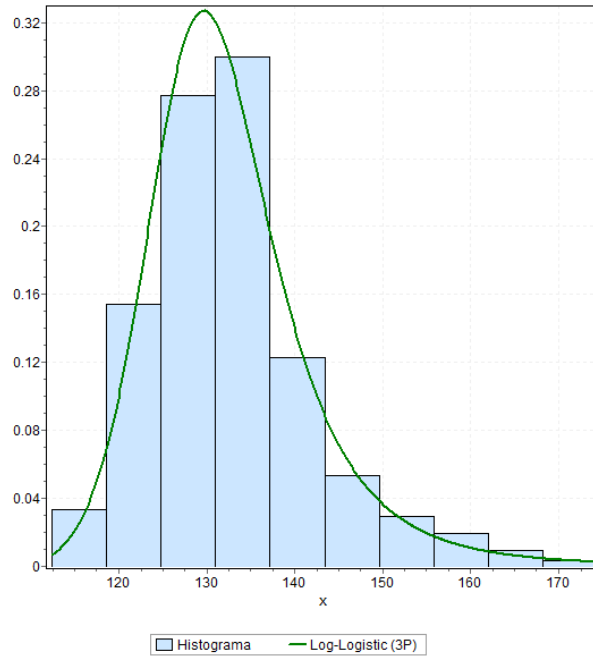


Figura 2.17: Función de densidad de probabilidad de la distribución Log-Logistic (3P) para DB.3

#### 6. Criterio de decisión:

- Para los cinco niveles de significación establecidos, se decide que la contraseña gráfica seleccionada por el usuario no sigue un patrón aleatorio si su promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay pertenece a la región crítica.

### 2.3.3. Implementación del *test* propuesto :

En cuanto la implementación del *test* , como se explicó en la sección 2.3.2 es el mismo que se utilizó en la sección 2.2.3, solo que cambiando los parámetros por los obtenidos en la sección 2.3.1, por lo tanto su nivel de complejidad es el mismo,  $O(N \log N)$ .

```

1  def test(points, alpha, beta, gamma,nivel_sig):
2      triangulation=Delaunay(points)
3      angles=[]
4      for i in triangulation:
5          a=distancia_puntos(points[i[0]],points[i[1]])
6          b=distancia_puntos(points[i[1]],points[i[2]])
7          b=distancia_puntos(points[i[2]],points[i[0]])
8          angles.append(angle_max(a,b,c))
9      X=mean(angles)
10     rg= beta * ((1 / (1 / (1-nivel_sig) - 1)) ** (1 /
11         alpha)) + gamma
12     if X>rg:
13         return 0
14     else:
15         return 1

```

```

15
16     def distancia_puntos(punto1, punto2):
17         return math.sqrt((punto1[0] - punto2[0])**2 +
18             (punto1[1] - punto2[1])**2)
19
20     def angle_max(distancia_ab, distancia_bc,
21         distancia_ca):
22         angulo_A = math.degrees(math.acos(
23             (distancia_bc**2 + distancia_ca**2 - distancia_ab**2)
24             / (2 * distancia_bc * distancia_ca)
25         ))
26         angulo_B = math.degrees(math.acos(
27             (distancia_ca**2 + distancia_ab**2 - distancia_bc**2)
28             / (2 * distancia_ca * distancia_ab)
29         ))
30         angulo_C = 180 - angulo_A - angulo_B
31         return max(angulo_A, angulo_B, angulo_C)

```

### 2.3.4. Estimación de la probabilidad de los errores de tipo I y de tipo II cometidos por el *test*

#### Experimento #2 : Estimación del error tipo I

Para estimar la probabilidad de que el *test* decida que la contraseña gráfica contiene un patrón DIAG o LINE cuando, en verdad, sigue un patrón aleatorio (error de tipo I o falsos positivos), se generó una base de datos llamada DB.3.RANDOM con 10 000 contraseñas gráficas aleatorias sobre la imagen. El *test* descrito en la sección 2.2.3, se le aplicó a cada una de estas contraseñas gráficas, obteniendo como límites inferiores de la región crítica a  $rg \in \{138,946, 144,325, 149,985, 158,283, 165,372\}$  para los respectivos niveles de significación  $\alpha \in \{0,2, 0,10, 0,05, 0,02, 0,01\}$ .

#### Resultados del experimento #2.

Las probabilidades estimadas de cometer un error de tipo I ( $\hat{\alpha}$ ) mediante el *test* poseen gran similitud a las probabilidades teóricas preestablecidas ( $\alpha$ ), véase en la figura 2.18.

| $\alpha$       | $\alpha = 0,2$ | $\alpha = 0,1$ | $\alpha = 0,05$ | $\alpha = 0,02$ | $\alpha = 0,01$ |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\hat{\alpha}$ | 0.1943         | 0.1074         | 0.057           | 0.0181          | 0.0051          |

Tabla 2.6: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I derivado de la prueba.

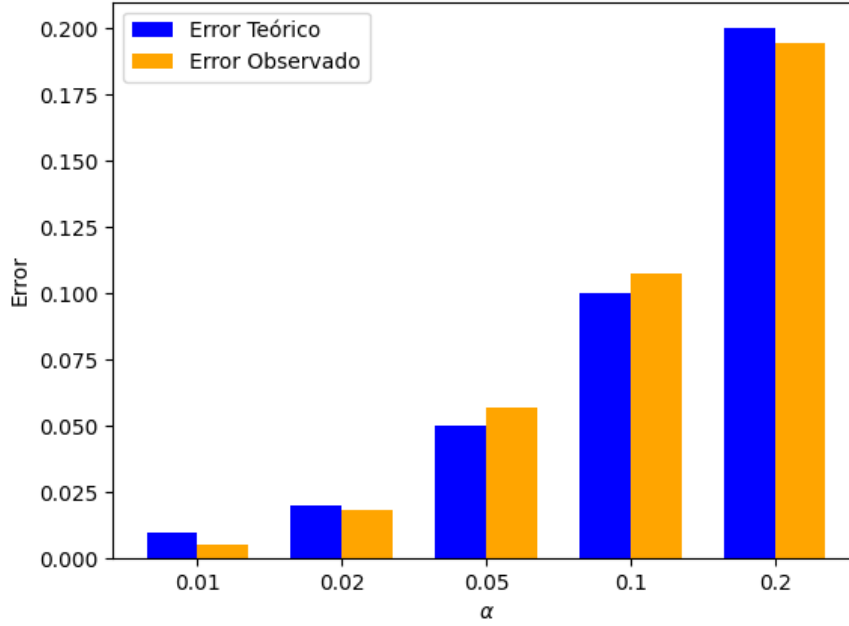


Figura 2.18: Comparación entre las probabilidades teóricas ( $\alpha$ ) y estimadas ( $\hat{\alpha}$ ) de cometer un error de tipo I.

### Experimento #3: Estimación del error tipo II

Para estimar la probabilidad  $\hat{\beta}$  de que el *test* detecte una contraseña gráfica como aleatoria cuando sigue un patrón DIAG o LINE (error tipo II o falsos negativos), se crearon 3 bases de datos que en conjunto contienen 30 000 contraseñas gráficas de 5 puntos que siguen patrones DIAG y LINE :

- DB.DIAG.LINE.3.1: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos de 15°.
- DB.DIAG.LINE.3.2: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos que varía entre 15° y 30°.
- DB.DIAG.LINE.3.3: 10 000 contraseñas gráficas que siguen patrones DIAG o LINE con una anchura máxima entre dos segmentos consecutivos que varía entre 30° y 45°.

### Resultados del experimento #3

Los resultados obtenidos por el *test* para cada una de las bases de datos y los niveles de significación preestablecidos, se muestran en las tablas 2.7.

El *test* propuesto durante este experimento mostró una alta capacidad para detectar las contraseñas encontradas en BD.DIAG.LINE.3.1, pues detectó el 100 % de estas para todos los niveles de significación, en BD.DIAG.LINE.3.2 detectó el 100 % para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$  y 99 % para  $\alpha = 0.02$  . Para las contraseñas de BD.DIAG.LINE.2.3 los resultados fueron mejores que en los dos *test* anteriores pues para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$  la prueba detectó el 100 %, 99 % y 85 % en cada caso.

| $\alpha$ | BD.DIAG.LINE.3.1 | BD.DIAG.LINE.3.2 | BD.DIAG.LINE.3.3 |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| 0.2      | 0                | 0                | 0                |
| 0.1      | 0                | 0                | 0.0094           |
| 0.05     | 0                | 0                | 0.1439           |
| 0.02     | 0                | 0.0019           | 0.9753           |
| 0.01     | 0                | 0.7365           | 1.0000           |

Tabla 2.7: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ ) del error de tipo II derivado de la prueba.

## 2.4. Discusión de los resultados de los *test* anteriores y comparación con [13]

Los experimentos encontrados en las secciones 2.1.4, 2.2.4 y 2.3.4 muestran claramente la eficacia de los *test* propuestos para detectar contraseñas que sigan patrones DIAG o LINE. Los patrones cuyos ángulos están comprendidos entre  $0^\circ$  y  $15^\circ$ , que son los que más se aproximan a la forma típica de los patrones DIAG y LINE que han sido simulados en las bases de datos BD.DIAG.LINE.1.1, BD.DIAG.LINE.2.1 y BD.DIAG.LINE.3.1 son detectados por el *test* propuesto con una efectividad del 100 % para todos los niveles de significación. Mientras que para las contraseñas con ángulos comprendidos entre  $15^\circ$  y  $30^\circ$  se logró detectar el 100 % para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$ , excepto en BD.DIAG.LINE.1.2, que para  $\alpha=0.05$  logró un 99.7 %. En el caso de  $\alpha=0.02$  se logró detectar el 90 %, 93 % y 99 % para BD.DIAG.LINE.1.2, BD.DIAG.LINE.2.2 y BD.DIAG.LINE.3.2 respectivamente. Donde más se evidencia la diferencia entre el primer *test* y los dos últimos es en las contraseñas detectadas cuando la amplitud entre segmentos se encuentra entre  $30^\circ$  a  $45^\circ$ , los resultados se muestran en la tabla 2.8. Los resultados más significante son los obtenidos para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.2, 0.1\}$ , pues en BD.DIAG.LINE.2.3 y BD.DIAG.LINE.3.3 se logra detectar prácticamente el 100 % de las contraseñas para  $\alpha=0.2$ , y para  $\alpha=0.1$  se logró detectar 98 % y 99 %, notable diferencia con el 73 % que se detecta el *test* 1 en BD.DIAG.LINE.1.3. En el caso de los restantes niveles de significación no se obtuvieron los resultados esperados.

| $\alpha$ | BD.DIAG.LINE.1.3 | BD.DIAG.LINE.2.3 | BD.DIAG.LINE.3.3 |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| 0.2      | 0.0571           | 0.0001           | 0                |
| 0.1      | 0.2721           | 0.0174           | 0.0094           |
| 0.05     | 0.5222           | 0.2577           | 0.1439           |
| 0.02     | 0.8508           | 0.9798           | 0.9753           |
| 0.01     | 0.9871           | 1.0000           | 1.0000           |

Tabla 2.8: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\beta}$ ) de error tipo II para contraseñas con ángulos entre segmentos de  $30^\circ$  a  $45^\circ$ .

En cuanto a los falsos positivos el segundo *test* tuvo ligeramente mayor eficacia que el tercer *test* mostrando gran similitud entre ambos, mientras que el primer *test* las probabilidades estimadas son ligeramente superiores que las preestablecidas, véase en la tabla 2.9

| $\alpha$ | <i>test</i> 1 | <i>test</i> 2 | <i>test</i> 3 |
|----------|---------------|---------------|---------------|
| 0.2      | 0.2221        | 0.2032        | 0.1943        |
| 0.1      | 0.1178        | 0.1083        | 0.1074        |
| 0.05     | 0.0605        | 0.0552        | 0.057         |
| 0.02     | 0.0251        | 0.0134        | 0.0181        |
| 0.01     | 0.0132        | 0.0034        | 0.0051        |

Tabla 2.9: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) de error tipo 1 para cada *test*.

### 2.4.1. Comparación con [13]

Un resumen de los resultados del *test* propuesto en [13] se encuentran en la sección 1.4.2. En la tabla 2.10 se encuentra la estimación de la probabilidad de cometer un error de tipo I por el *test* propuesto en [13], realizando una comparación entre esta tabla y la tabla 2.9 se observa que la probabilidad de los *test* 2 y 3 de cometer este error es menor, mientras que con respecto al *test* 1 posee más similitud.

| $\alpha$       | $\alpha = 0,2$ | $\alpha = 0,1$ | $\alpha = 0,05$ | $\alpha = 0,02$ | $\alpha = 0,01$ |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\hat{\alpha}$ | 0.2146         | 0.1098         | 0.0558          | 0.0253          | 0.0147          |

Tabla 2.10: Estimación de la probabilidad ( $\hat{\alpha}$ ) del error de tipo I del *test* propuesto en [13].

En cuanto a los falsos negativos, el *test* propuesto en [13] es superior a los *test* realizados en este trabajo, pues para contraseñas con ángulos entre segmentos de  $0^\circ$  a  $30^\circ$  detectó el 100 % de las contraseñas para todos los niveles de significación mientras que en los *test* realizados para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.02, 0.01\}$  ya no se cumplía. Para el caso de las contraseñas que poseen ángulos entre segmentos de  $30^\circ$  a  $45^\circ$  el *test* propuesto en [13] para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.2, 0.1\}$  detectó 100 % y para  $\alpha \in \{0.5, 0.02, 0.01\}$  la eficacia fue aproximadamente del 88 %, 42 % y 16 % respectivamente, comparando estos resultados con los que se encuentran en la tabla 2.8 se muestra una mayor eficacia para todos los niveles de significación por parte del *test* propuesto en [13].

### 3. Conclusiones

En este trabajo se analizó cómo distribuyen los promedios de los ángulos máximos de los triángulos de las triangulaciones de Delaunay para distintos números de triángulos en su triangulación en contraseñas de 5 puntos. Para ello, se crearon tres bases de datos (BD.1, BD.2 y BD.3), cada una con 1000 contraseñas aleatorias de 5 puntos en una imagen de 1920x1080. A partir de estas configuraciones, se construyeron sus respectivas triangulaciones de Delaunay y se calcularon los promedios de los ángulos máximos de los triángulos en cada caso. Usando el software EasyFit, se estimaron las distribuciones de estos valores, encontrando que para BD.1, correspondiente a contraseñas con 3 triángulos, la distribución que mejor se ajusta es la *Johnson SB*, mientras que para BD.2, con contraseñas de 4 triángulos, y BD.3, con contraseñas de 5 triángulos, la distribución más adecuada en ambos casos es la Log-Logistic (3P). Se demostró que para ningún número de triángulos en la triangulación, el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay se ajustan a una distribución Normal, rechazando los tres *test* de bondad de ajuste para todos los niveles de significación en cada caso.

Se diseñó un *test* estadístico específico para cada caso, basado en la distribución correspondiente, y se desarrolló su implementación en Python. Tanto el *test* como su implementación son aplicables a imágenes de cualquier tamaño que mantengan una relación de aspecto 16:9, ya que estas dimensiones proporcionales aseguran que los triángulos generados sean semejantes.

Para estimar los falsos positivos, se crearon tres bases de datos de prueba, cada una con 10 000 contraseñas, clasificadas según el número de triángulos en sus triangulaciones de Delaunay. Los errores tipo I estimados en cada caso estuvieron muy cerca de los valores teóricos preestablecidos, e incluso fueron menores para la mayoría de los niveles de significación evaluados. En cuanto a los falsos negativos o errores tipo II, para cada *test* se construyeron 30 000 contraseñas con sus respectivas cantidades de triángulos en su triangulación, divididas según la amplitud de los segmentos consecutivos de las mismas. Para las contraseñas donde la amplitud de sus segmentos consecutivos estaba entre 0° y 15°, se logró detectar el 100 %, en el caso de las que oscilaban entre 15° y 30° se logró detectar el 100 % para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.02, 0.01\}$ . En el caso de las contraseñas con ángulos entre segmentos de 30° a 45° los resultados no fueron los esperados, pues a nivel general, para los tres *test* la eficacia es muy baja.

En la comparación con el *test* propuesto en [13], se demostró la superioridad de este a los realizados en este trabajo, a pesar de trabajar el promedio de los ángulos máximos de los triángulos de Delaunay de manera general, es decir, sin tener en cuenta la cantidad de triángulos en la triangulación. Este detecta el 100 % de las contraseñas que poseen los ángulos entre segmentos consecutivos de 0° a 30°, algo que los *test* realizados en este trabajo para los niveles de significación  $\alpha \in \{0.02, 0.01\}$  no cumplían, en el caso de las contraseñas que los ángulos entre segmentos se encuentran entre 30° y 45° para los niveles  $\alpha \in \{0.2, 0.1\}$  el *test* propuesto en [13] logra detectar el 100 %, mientras que los realizados



en este trabajo no en todos los casos detecta el 100 % , y en los niveles de significación restantes sigue siendo más efectivo. En cuanto a los falsos positivos los *test* propuestos en las secciones 2.2.2 y 2.3.2 poseen valores ligeramente menores que al propuesto en [13].

## Bibliografía

- [1] Wiedenbeck, S.; Waters, J.; Birget, J.C.; Brodskly, A.; Memon, N.: *Passpoints: Design and longitudinal evaluation of a graphical pass- word system*. International Journal of Human-Computer Studies, Vol. 63(1-2):102-127, 2005.
- [2] Sunil, S.S; Prakash, D.; Shivaji, Y.R.: *Cued click points: Graphical password authentication technique for security*. International Journal of Computer Science and Information Technologies, 5(2), 2014.
- [3] Rodríguez, O.: *Algoritmo para la detección de claves débiles en la técnica de autenticación gráfica passpoints*. Tesis presentada en opción al título Máster en Ciencias Matemáticas, Universidad de la Habana, Facultad de Matemática y Computación, Instituto de Criptografía, 2019.
- [4] Rodríguez, O.; Legón, C.M.; Socorro, R.: *Seguridad y usabilidad de los esquemas y técnicas de autenticación gráfica*. Revista Cubana de Ciencias Informáticas, Vol. 12, No. Especial UCIENCIA, 13-27, 2018.
- [5] Sonia Chiasson; Alain Forge; Robert Biddle: *User interface design affects security: Patterns in click-based graphical passwords*. School of Computer Science and Human Oriented Technology Lab. Carleton University
- [6] Herrera, J.A.; Suárez, L.; Legón, C.M.; Piñeiro, L.R.; Rojas, O.; Sosa, G. *Effectiveness of Some Tests of Spatial Randomness in the Detection of Weak Graphical Passwords in Passpoint*. In *Computer Science and Health Engineering in Health Services*; Marmolejo-Saucedo, J.A., Vasant, P., Litvinech, I., Rodriguez-Aguilar, R., Martinez-Rios, F., Eds.; COMPSE 2020; Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering; Springer: Cham, Switzerland, 2020; Volume 359.
- [7] Herrera, J.A.; Legón, C.M.; Suárez, L.; Piñeiro, L.R.; Rojas, O.; Sosa, G. Test for Detection of Weak Graphic Passwords in Passpoint Based on the Mean Distance between Points. *Symmetry* 2021,13, 777
- [8] Suárez, L; Legón, C.M.; Herrera, J.A; Socorro, R.; Rojas, O.; Sosa, G.: *Weak Pass-Point passwords detected by the perimeter of Delaunay triangles*. Enviado a publicación 16 Marzo 2021, Journal Sensors. Security and Communication Networks, Issue 1,3624587.
- [9] L. Suárez. *Test para la detección de contraseñas gráficas débiles en PassPoint, basado en el promedio de los perímetros de los triángulos de Delaunay*. Master's thesis, Universidad de la Habana, 2021.

- [10] Herrera, J.A.; Suárez, L.; Legón, C.M.; Sosa, G. *Comparison and combination of two effective tests in the detection of nonrandom graphical passwords in Passpoints*. Revista Cubana de Ciencias Informáticas 2023, 17, 1
- [11] Herrera, J.A.; Suárez, L.; Legón, C.M.; Sosa, G. and O. Rojas: *New test to detect clustered graphical passwords in Passpoints, based on the perimeter of the convex hull*. Information 2024, 15, 447
- [12] Chiu, S.N. *Spatial point pattern analysis by using Voronoi diagrams and Delaunay tessellations-A comparative study*. Biometr. J. 2003, 45, 367–376.
- [13] L. Suárez, J. A. Herrera, C. M. Legón, G. Sosa, and O. Rojas. *Detection of DIAG and LINE Patterns in PassPoints Graphical Passwords Based on the Maximum Angles of Their Delaunay Triangles*. Sensors, 22 (5), 2022a.
- [14] Birget, J.C.; Hong, D.; Memon, N.D.: *Robust discretization, with an application to graphical passwords*. IACR Cryptology ePrint Archive, 2003:168, 2003.
- [15] Chiasson, S.; Srinivasan, J.; Biddle, R.; van Oorschot, P.C.: *Centered discretization with application to graphical passwords*. In UPSEC, Citeseer, 2008.
- [16] Bicakci, K.: *Optimal discretization for high-entropy graphical passwords*. In *Computer and Information Sciences*. ISCIS'08, 23rd International Symposium on, pages 1-6, IEEE, 2008.
- [17] Kirovski, D.; Jogic, N.; Roberts, P.: *Click Passwords*. Microsoft Research, One Microsoft Way, Redmond, WA 98052, USA, 2007.
- [18] Dirik, A.E.; Memón, N.; Birget, J.C. Modeling user choice in the PassPoints graphical password scheme. In *Proceedings of the 3rd Symposium on Usable Privacy and Security 2007*, Pittsburgh, PA, USA, 20–28 July 2007.
- [19] Thorpe, J.; Al-Badawi, M.; MacRae, B.; Salehi-Abari, A. The presentation effect on graphical passwords. In *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, Toronto, ON, Canada, 26 April–1 May 2014.
- [20] Thorpe, J.; Van Oorschot, P.C. Human-Seeded Attacks and Exploiting Hot-Spots in Graphical Passwords. In *USENIX 07: Proceedings of the 16th USENIX Security Symposium*; USENIX: Berkeley, CA, USA, 2007; pp. 103–118.
- [21] Salehi, A.; Thorpe, J.; Van Oorschot, P.C. On Purely Automated Attacks and Click-Based Graphical Passwords. In *Proceedings of the 24th Annual Computer Security Applications Conference (ACSAC)*, Anaheim, CA, USA, 8–12 December 2008.
- [22] Van Oorschot, P.C.; Salehi, A.; Thorpe, J. Purely automated attacks on passpoints style graphical passwords. *IEEE Trans. Inf. Forensics Secur.* 2010, 5, 393–405.
- [23] Vorster, J.S.; Van Heerden, R.P.; Irwin, B. The patterns-richness of graphical passwords. In *Proceedings of the 15th International Information Security South Africa Conference (ISSA 2016)*, Pretoria, South Africa, 17–18 August 2016.

- [24] Princes, P.S.S.; Andrews, J. Analysis of various authentication schemes for passwords using images to enhance network security through online services. In Proceedings of the 2017 International Conference on Information Communication and Embedded Systems (ICICES), Chennai, India, 23–24 February 2017.
- [25] Parish, Z.; Salehi, A.; Thorpe, J. A study on priming methods for graphical passwords. *J. Inf. Secur. Appl.* 2021, 62, 102913.
- [26] Okabe, A.; Boots, B.; Sugihara, K.; Chiu, S.N.: *Spatial tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. British Library Cataloguing in Publication Data, ISBN 0-471-98635-6, 2000.
- [27] Romero, N.; Barrón, R.: Validación de la triangulación de Delaunay empleando geometría conforme. *Sist.* Vol.20, No.4, ISSN 1405-5546, <http://doi.org/10.13053/cys-20-4-2387>, 2016.
- [28] Romero, J.N.: *Álgebra geométrica para la generación de regiones de Voronoi*. Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Computación, Instituto Politécnico Nacional, Laboratorio de Inteligencia Artificial, México D.F., 2017.
- [29] De Berg, M.; Cheong, O.; Van Kreveld, M.; Overmars, M. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 3rd ed.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2008; ISBN 978-3-540-77973-5.
- [30] Lagos, I.J.; Vargas, J.A.: *Sistemas de familias de distribuciones de Johnson, una alternativa para el manejo de datos no normales en cartas de control*. *Revista Colombiana de Estadística*, Vol. 26, No. 1, 25-40, 2003.

## A. Anexos

| Distribución       | Número de aceptaciones | K-S       | A-D       | $\chi$     |
|--------------------|------------------------|-----------|-----------|------------|
| Johnson SB         | 15/15                  | 0.92216   | Aceptado  | 0.79971    |
| Fatigue Life (3P)  | 15/15                  | 0.50895   | Aceptado  | 0.21879    |
| Inv. Gaussian (3P) | 15/15                  | 0.48811   | Aceptado  | 0.21822    |
| Gen. Gamma (4P)    | 14/15                  | 0.45476   | Aceptado  | 0.19151    |
| Gamma(3P)          | 14/15                  | 0.44293   | Aceptado  | 0.26767    |
| Beta               | 14/15                  | 0.43868   | Aceptado  | 0.14114    |
| Normal             | 0/15                   | 3,1737E-5 | Rechazado | 2.4425E-15 |

Tabla A.1: 6 disribuciones mas ajustadas teóricamente a BD.1

| Distribución       | Número de aceptaciones | K-S       | A-D       | $\chi$    |
|--------------------|------------------------|-----------|-----------|-----------|
| Log-Logistic       | 15/15                  | 0.9947    | Aceptado  | 0.99974   |
| Burr               | 15/15                  | 0.99346   | Aceptado  | 0.99871   |
| Gen. Extreme Value | 15/15                  | 0.72374   | Aceptado  | 0.7896    |
| Pearson 5(3P)      | 15/15                  | 0.6707    | Aceptado  | 0.60216   |
| Pearson 6(4P)      | 15/15                  | 0.66972   | Aceptado  | 0.6023    |
| Lognormal(3P)      | 15/15                  | 0.60738   | Aceptado  | 0.60497   |
| Normal             | 0/15                   | 3.1924E-4 | Rechazado | 5.3173E-9 |

Tabla A.2: 6 disribuciones mas ajustadas teóricamente a BD.2

| Distribución       | Número de aceptaciones | K-S       | A-D       | $\chi$     |
|--------------------|------------------------|-----------|-----------|------------|
| Log-Logistic       | 15/15                  | 0.63408   | Aceptado  | 0.22209    |
| Burr(4P)           | 15/15                  | 0.67192   | Aceptado  | 0.23406    |
| Burr               | 14/15                  | 0.43187   | Aceptado  | 0.14748    |
| Gumbel Max         | 9/15                   | 0.22473   | Rechazado | 0.00277    |
| Gen. Extreme Value | 8/15                   | 0.18435   | Rechazado | 0.00476    |
| Chi-Squared(2P)    | 5/15                   | 0.12837   | Rechazado | 4.0307E-4  |
| Normal             | 0/15                   | 9.9684E-7 | Rechazado | 4.6094E-12 |

Tabla A.3: 6 disribuciones mas ajustadas teóricamente a BD.3