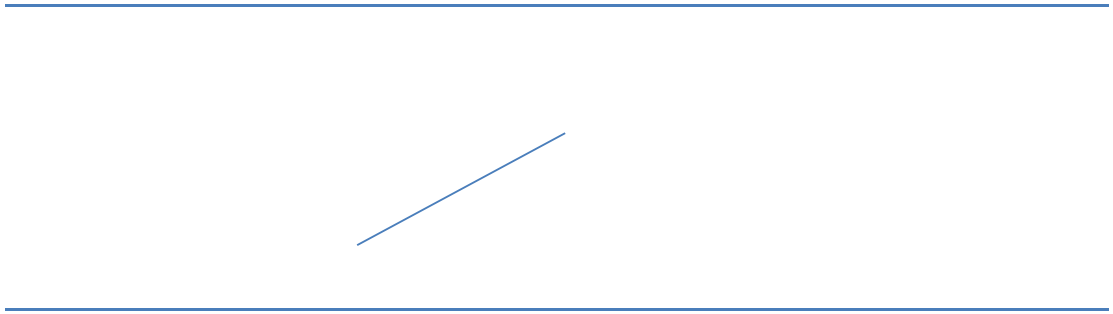
Algoritmi aleatorii

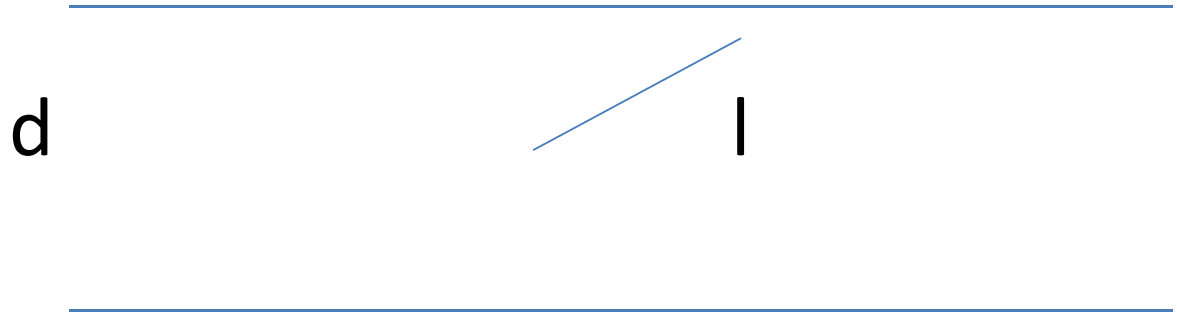
Calculul lui π

Problema lui Buffon



Problema lui Buffon

- $P=2l/d\pi$
- $P=E(m)/n$
- $\pi=n2l/md$



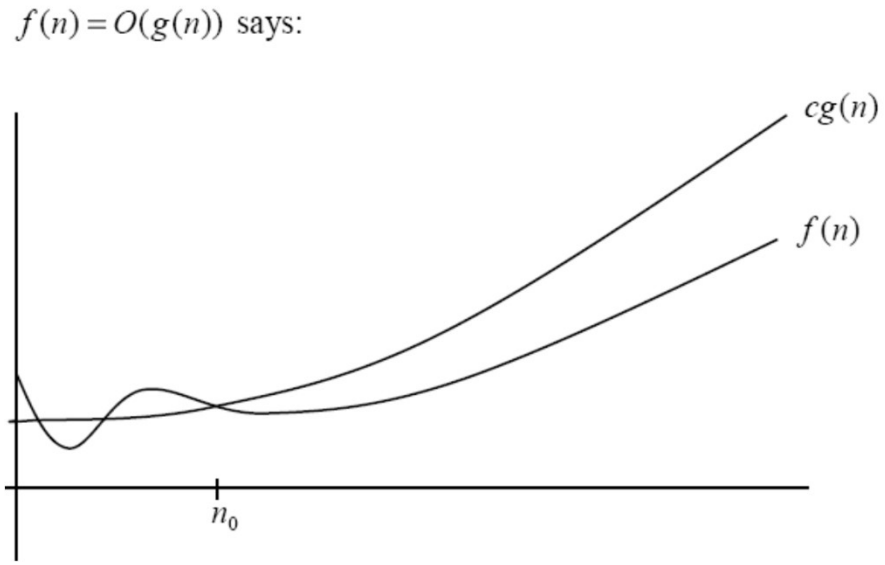
Algoritmi Monte Carlo

- Gasesc o solutie garantat corecta doar dupa un timp infinit de rezolvare
- Probabilitatea ca solutia sa fie corecta creste o data cu timpul de rezolvare
- Solutia gasita intr-un timp acceptabil este aproape corecta

Complexitatea algoritmilor

$$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n) \}$$

- g(n) limita asimptotica superioara pentru f(n)



http://www.soe.ucsc.edu/classes/cmps102/Spring04/TantaloAsymp.pdf

Complexitate algoritmi Monte Carlo

- algoritm Monte Carlo are complexitatea **$f(n)=\H{O}(g(n))$**

  dacă $\exists c>0$ si $n_0>0$ a.î.

  - $\forall n \geq n_0$ $0<f(n)\leq c\alpha g(n)$ cu o probabilitate de cel puțin $1-n^{-\alpha}$ pentru $\alpha>0$ fixat și suficient de mare
  - Probabilitatea ca soluția determinată de algoritm să fie corectă este cel puțin $1-n^{-\alpha}$

Algoritmi Las Vegas

- Gasesc solutia corecta a problemei, insa timpul de rezolvare nu poate fi determinat cu exactitate.
- Cresterea timpului de rezolvare => cresterea probabilitatii de terminare a algoritmului
- Timp=∞=>algoritmul se termina sigur
- Probabilitatea de gasire a solutiei creste suficient de repede incat sa se determine solutia intr-un timp suficient de scurt

Complexitatea algoritmilor Las Vegas

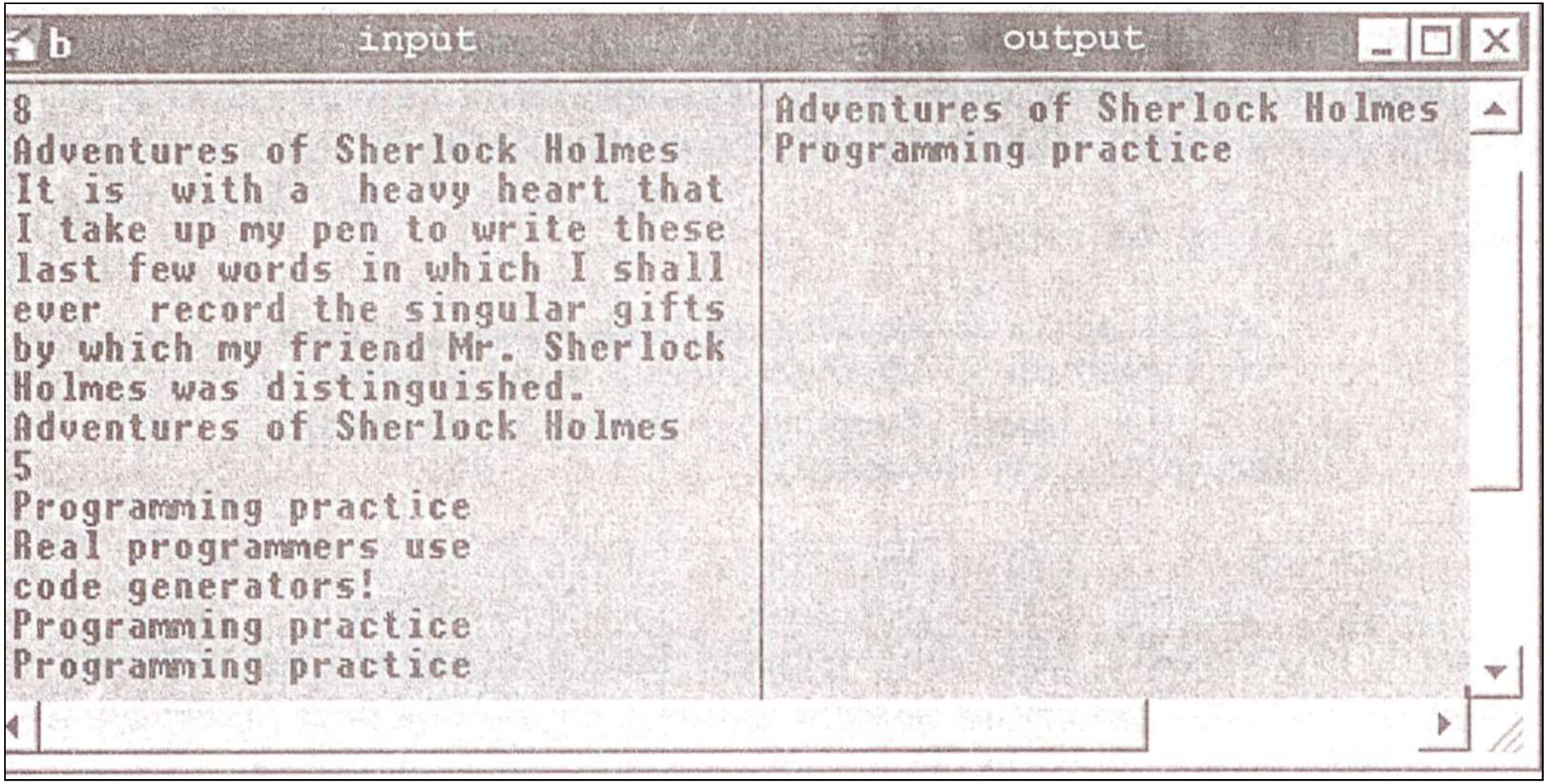
- Un algoritm Las Vegas are complexitatea **$f(n)=\H{O}(g(n))$**

  dacă $\exists c>0$ si $n_0>0$ a.î.

  - $\forall n \geq n_0$ avem $0<f(n)<c\alpha g(n)$ cu o probabilitate de cel puțin $1-n^{-\alpha}$ pentru $\alpha>0$ fixat și suficient de mare

Exemplu algoritm Las Vegas

- Problema:
  - Capitolele unei carti sunt stocate intr-un fisier text sub forma unei secvente nevide de linii
  - Fiecare secventa este precedata de o linie contor ce indica numarul de linii din secventa
  - Fiecare linie din fisier este terminata prin CR,LF
  - Toate liniile din secventa au aceeasi lungime
  - Fiecare secventa de linii contine o linie ce se repeta si care apare in cel putin 10% din numarul de linii al secventei.
  - secventele sunt lungi
- Cerinta:
  - Pentru fiecare secventa de linii sa se tipareasca linia care se repeta


b
input
output
8
Adventures of Sherlock Holmes
It is with a heavy heart that
I take up my pen to write these
last few words in which I shall
ever record the singular gifts
by which my friend Mr. Sherlock
Holmes was distinguished.
Adventures of Sherlock Holmes
5
Programming practice
Real programmers use
code generators!
Programming practice
Programming practice
Adventures of Sherlock Holmes
Programming practice

Rezolvare “clasica”

detecteaza_linii(fisier)

pentru fiecare Secv∈fisier

Repeta i←0 cat timp i<dim(Secv)

Repeta j←i+1 cat timp j<dim(Secv)

Daca (linie(i,Secv)=linie(j,Secv)

atunci print(linie(i,Secv); i=j=dim(Secv))

prelucrare secventa

complexitate – $O(n^2)$

Algoritm Las Vegas pentru rezolvarea problemei

- sectiunea “prelucrare secventa” se inlocuieste cu urmatoarea functie:

```
selectie_linii(n,Secv) //n=dim secv
    Repeta
        i←random(0,n-1)
        J←random(0,n-1)
        Daca (I # j si linie(i,Secv)=linie(j,Secv))
          atunci return linie(i,Secv)
```

Analiza algoritmului Las Vegas (I)

- Notatii:
  - n=numarul de linii din secventa curenta
  - q=procentul de linii repetate in secventa
  - r=numarul de aparitii al liniei repetate: r=n*q/100
  - m=numarul de pasi necesari terminarii algoritmului
  - Pk=probabilitatea ca la pasul k sa fie satisfacuta conditia de terminare a algoritmului
  - P(m)= probabilitatea ca algoritmul sa se termine dupa m pasi

Analiza algoritmului Las Vegas (II)

- probabilitatea ca la pasul k linia **i** sa fie una din liniile repetate este r/n
- probabilitatea ca la pasul k linia **j** sa fie una din liniile repetate este (r-1)/n
- conditia de terminare= cele 2 evenimente trebuie sa se produca simultan=>

  Pk=r/n*(r-1)/n=q/100*(q/100-1/n)

Analiza algoritmului Las Vegas (III)

- Probabilitatea ca algoritmul sa nu se termine dupa m pasi=

  $\Pi_{k=1->m}(1-Pk)=(1-q/100*(q/100-1/n))^m$
- $=>P(m)=1-(1-q/100*(q/100-1/n))^m$
- $n>100$; $q>10\%$
- $=>P(m)\geq 1-(1-q(q-1)/10000)^m$

q / m	10%	20%	30%
100	0.595083523989	0.979226618172	0.999888550595
300	0.933610966591	0.999991035592	0.999999999999
500	0.989115029844	0.999999996132	1
1000	0.999881517425	1	1
1500	0.999998710321	1	1
2000	0.999999985962	1	1
2500	0.999999999847	1	1
3000	0.999999999998	1	1
3500	1	1	1

Comparatie timp de rulare

- q=10% - 3500 pasi P=1; 1000 pasi – P=0,9988
- q=20% - 1000pasi P=1
- q=30% 500 pasi P=1
- varianta clasica: cazul cel mai defavorabil – 10000 pasi

Complexitate algoritm Las Vegas

- algoritmul Las Vegas are complexitatea **f(n)=Ő(g(n))** daca $\exists c>0$ si $n_0>0$ a.i. $\forall n \geq n_0$ avem $0<f(n)<c\alpha g(n)$ cu o probabilitate de cel putin $1-n^{-\alpha}$ pentru $\alpha>0$ fixat si suficient de mare
- aratam ca f(n)= **Ő(lg(n))**
  - a=(1-q(q-1)/10000)
  - calculam $P(c\alpha \lg(n)) \geq 1-n^{-\alpha}$ $(c \geq \lg^{-1}(1/a))$

Exemplu algoritm Monte Carlo

- Problema – testarea daca un numar n dat este prim
- rezolvare “clasica”
- prim-clasic(n)

  Pentru i←2 la sqrt(n) repeta

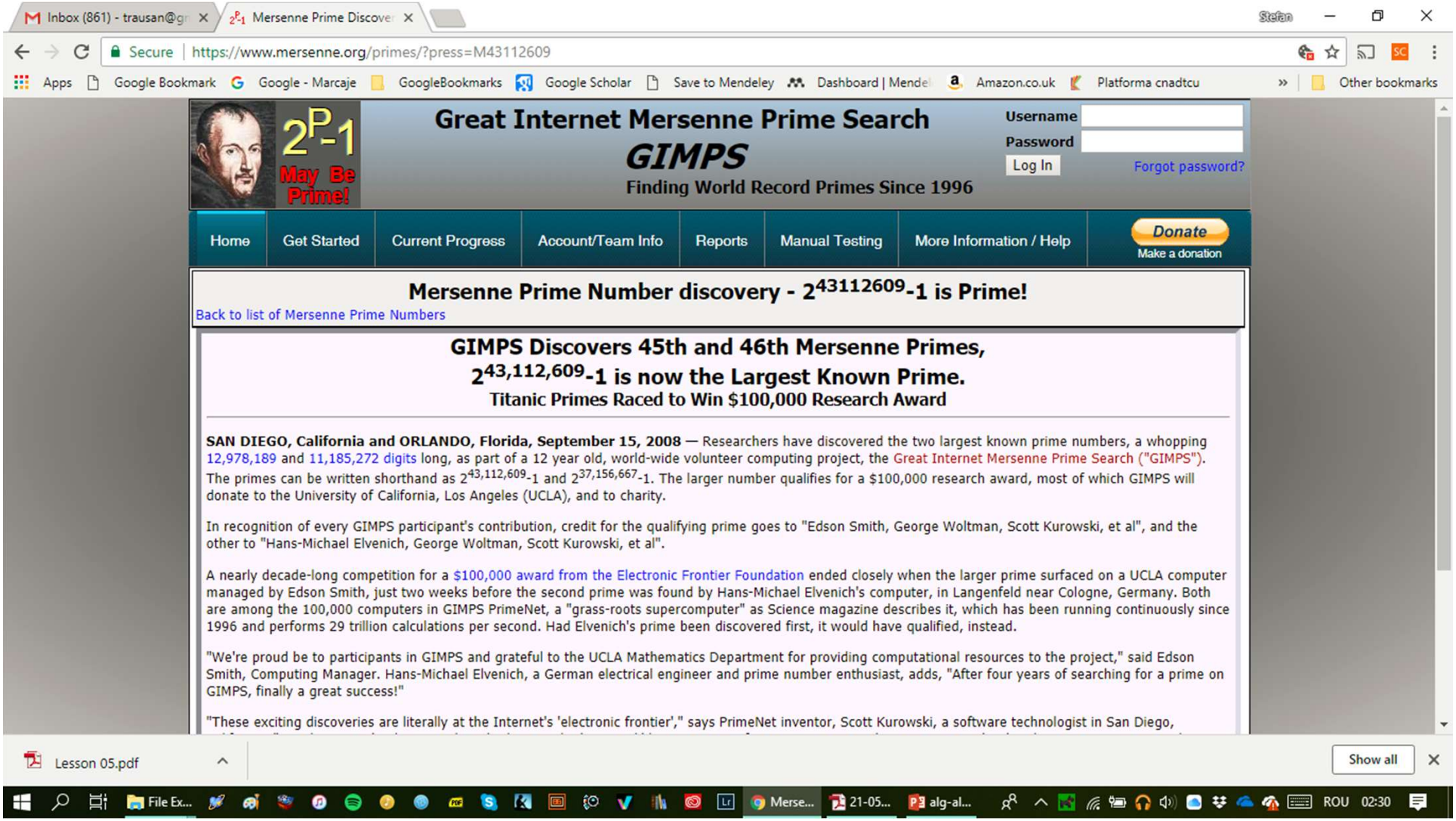
  Daca (n mod i=0) atunci return false

  return true

Determinarea numerelor prime - complexitate

- complexitate O(sqrt(n))
- pentru numere mari – operatiile nu mai dureaza O(1)
- estimam numarul de operatii in functie de numarul de biti pe care este exprimat numarul
- =>prim_clasic – $O(2^{k/2})$ unde k este numarul de biti ocupat de n

Complexitate nesatisfacatoare!



Algoritm aleator (I)

- Teorema mică a lui Fermat:
  n este prim => $\forall 0<x<n$, $(x^{n-1} \bmod n) = 1$
- prim1(n,α)
  Daca (n<=1 sau (n mod 2)=0) atunci 'numar compus'
  limit←limita_calcul(n,α)
  Pentru i←0 la limit repeta
  x←random(1,n-1)
  Daca (pow_mod(x,n) # 1) atunci return false
  return true
- pow_mod(x,n)
  r←1
  Pentru m←n-1 cat timp m>0, pas: m←m/2
  Daca (m mod 2 # 0) atunci r←x*r mod n
  x←(x*x) mod n
  return r

Algoritm aleator (II)

- problema – nu putem stabili cu exactitate care este limita de calcul
  - nu se poate estima pentru un numar compus n numarul de numere x, 2<x<n pentru care nu se verifica ecuatia
  - exista numere compuse (Carmichael) pentru care orice numar x<n si prim in raport cu n satisface ecuatia lui Fermat
- => nu stim cu exactitate cate numere sunt=> nu putem calcula probabilitatea

Alta varianta de algoritm aleator

- **Teorema** Pentru orice numar prim ecuatia $x^2 \bmod n = 1$ are exact 2 solutii:

  x1=1

  x2=n-1

- **Definitie** Fie n>1 si 0<x<n 2 numere a.i.

  $x^{n-1} \bmod n \neq 1$ sau

  $x^2 \bmod n \neq 1$, $x \neq 1$ si $x \neq n-1$

  x este numit *martor al divizibilitatii* lui n

Algoritmul Miller-Rabin

- prim2(n,α)

  Daca (n<=1 sau n mod 2=0) atunci return false

  limit←limita_calcul(n,α)

  Pentru i←0 la limit repeta

    X←random(1,n-1)

    Daca martor_div(x,n) atunci return false

  return true

Algoritmul Miller-Rabin (II)

- martor_div(x,n)

  r←1; y←x;

  Pentru m←n-1 cat timp m>0, pas m←m/2 repeta

  Daca (m mod 2 # 0) atunci r←y*r mod n

  y←y*y mod n

  z←y

  Daca (y=1 si z#1 si z#n-1) atunci return 1

  return r # 1 //mica teorema

calcularea numarului de pasi

Teorema

Pentru orice numar n, impar si compus exista cel putin (n-1)/2 martori ai divizibilitatii lui n

x=element generat la un pas al algoritmului

P(x)=probabilitatea ca x sa fie martor al divizibilitatii.

$P(x) \geq (n-1)/2 * 1/(n-1) = 0.5$

$Pincorect(n) = \Pi_{1->limit}(1-P(x)) \leq 1/2^{limit}$

$=>Pcorect(n) = 1-2^{-limit} = 1-n^{-\alpha}$

$=>limit = \alpha \log n$

=>Complexitatea =**$\H{O}(\lg^2 n)$**

in functie de numarul de biti k=>complexitatea= $\H{O}(k^2)$

Exemplu de utilizare practica

- QUICKSORT(A, p, r)
  - **if** $p < r$
  - **then** $q \leftarrow$ PARTITION(A, p, r)
  - QUICKSORT(A, p, q - 1)
  - QUICKSORT(A, q + 1, r)
- PARTITION(A, p, r)
  - $x \leftarrow A[r]$
  - $i \leftarrow p$ - 1
  - **for** $j \leftarrow p$ **to** r - 1
    - **do if** $A[j] \leq x$
      - **then** $i \leftarrow i + 1$
        - » exchange $A[i] \leftrightarrow A[j]$
    - exchange $A[i$ ++ 1] $\leftrightarrow$ A[r]
  - return i + 1

Exemplu de utilizare practica (II)

- problema quicksort – cazul defavorabil – datele de intrare sunt sortate in ordine inversa
- Complexitate quicksort: $O(n^2)$
- folosind algoritmi aleatori eliminam acest caz

Quicksort-aleator

- RANDOMIZED-QUICKSORT(A, p, r)
  - **if** $p < r$
  - **then** $q \leftarrow$ RANDOMIZED-PARTITION(A, p, r)
  - RANDOMIZED-QUICKSORT(A, p, q - 1)
  - RANDOMIZED-QUICKSORT(A, q + 1, r)
- RANDOMIZED-PARTITION(A, p, r)
  - $i \leftarrow$ RANDOM(p, r)
  - exchange $A[r] \leftrightarrow A[i]$
  - **return** PARTITION(A, p, r)

Bibliografie

1. curs preluat din Introducere in Analiza Algoritmilor – C. Giumale, Ed. Polirom capitolul 6.1 – p 291-301
2. slide-urile 25-27 v. Cormen, Leiserson, Rivest – Introducere in Algoritmi, Cap. 7