Facultatea de Automatica si Calculatoare, Universitatea Politehnica din Bucuresti

Computer Science & Engineering Department

Examen Partial MN

Student: ______________________	**Grupa:** __________

Descriere curs:	**MN, An I, Semestrul II**
Titlu curs:	**Metode Numerice**
Profesor:	**Conf.dr.ing. Florin POP**
Durata examenului:	90 minute
Tip Examen:	**Closed Book**
Materiale Aditionale:	**Nu! Fara telefoane mobile!!!**
Numar pagini:	______________

Rezultate Examen	
Subiect	Punctaj
1	/2
2	/2
3	/2
4	/2
5	/2
Σ	/10

Subiecte (Numarul 2)

2 puncte **1.** **P**artea 1 [1.0p]. Fie matricea `A = [1 2 1; 2 6 4; 3 10 8]`. Determinati factorizarea $A = L \times U$, unde L este o matrice inferior triunghiulara cu $L_{ii} = 1$ si U este o matrice superior triunghiulara. Folosind aceasta factorizare, rezolvati sistemul de ecuatii $Ax = b$, unde `b = [0 0 1]`^{T}.
Partea 2 [1.0p]. Deduceti formulele generale ale factorizarii $A = L \times U$ (cu $L_{ii} = 1$) si scrieti o functie Matlab `function [L U] = doolittle(A)` care implementeaza aceasta factorizare.
Bonus [0.4p]. Daca presupunem cunoscuta factorizarea $A = L \times U$, prezentati o metoda numerica de factorizare $\overline{A} = \overline{L} \times \overline{U}$, unde $\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ R & A \end{bmatrix}$ si R este superior triunghiulara.

2 puncte **2.** **P**artea 1 [0.5p]. Prezentati pe scurt metoda iterativa Jacobi pentru rezolvarea unui sistem liniar de ecuatii. Cum se alege aproximatia initiala?
Partea 2 [1.5p]. Scrieti o functie Matlab care rezolva un sistem liniar prin metoda iterativa Jacobi: `function [x xit] = Jacobi(A,b,x,e,maxit)`. Semnificatia parametrilor este: `A` - matrice coeficienti sistem liniar, `b` - vector termeni liberi, `x` - vectorul aproximatiei initiale a solutiei si final vectorul solutie, `e` - toleranta admisa, `maxit` - numarul maxim de iteratii admise, `xit` - matrice avand linia `k` solutia la pasul de iteratie `k`.
Bonus [0.4p]. Demonstrati ca $\rho(A) \leq ||A||$, unde $\rho(A)$ este raza spectrala a matricei A, iar $||.||$ este o norma consistenta.

2 puncte **3.** **P**artea 1 [1.0p]. Un vector $x \in R^n$ poate fi adus la un vector de norma 1 prin impartirea cu norma sa. Fie reflectorii Householder $U = I_n - 2uu^T$ si $V = I_n - vv^T$, cu $||u||_2 = 1$ si $||v||_2 = \sqrt{2}$. Calculati Uu si Vv. Construim $x = u + \frac{v}{||v||_2}$ si $H = I_n - xx^T$. Ce conditie trebuie sa impunem pentru ca H sa fie reflector ortogonal.

Partea 2 [1.0p]. Dati un exemplu numeric de vectori $u, v \in R^2$ care respecta conditiile descrise in Partea 1. Calculati reflectorii U, V si H.

Bonus [0.4p]. Este posibil ca $||x + y||_p = ||x||_p + ||y||_p$ pentru $p = 1, 2, \infty$? Justificati.

2 puncte **4.** **P**artea 1 [1.0p]. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$. Calculati valorile proprii si vectorii proprii normati. Efectuati o iteratie pentru metoda directa a puterilor pornind cu `y = [1 0]`^{T} si comparati rezultatul cu cel exact (valoarea proprie si vectorul propriu corespunzator). Schitati numeric metoda puterii inverse pentru acest exemplu.

Partea 2 [1.0p]. Scrieti o functie MATLAB care implementeaza metoda inversa a puterii. Explicati pe scurt efectul catului Rayleigh.

Bonus [0.3p]. Fie A si B doua matrici ortogonal echivalente, adica $B = P^T * A * Q$, unde P si Q sunt ortogonale. Aratati ca A si B au aceleasi valori singulare si calculati vectorii singulari ai lui B in functie de vectorii singulari ai lui A.

2 puncte **5.** **P**artea 1 [1.0p]. Fie functia $f(x)$ data prin $x = [-1, 0, 1, 2]$ si $f(x) = [5, 0, 1, 2]$. Calculati polinomul Lagrange de interpolare si scrieti expresia erorii. Calculati pe baza polinomului Lagrange $f(\frac{1}{2})$.

Partea 2 [1.0p]. Scrieti o functie MATLAB pentru calculul polinomului Lagrange intr-un punct a.

Bonus [0.4p]. Aratati ca multiplicatorii Lagrange sunt invarianti la transformarile liniare si ca $\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = 1$.