**1 Система координат в пространстве.**

**Декартова система координат в пространстве** определяется точкой и базисом из трех векторов. Точка O называется **началом координат**. Прямые, проведенныечерез начало координат в направлении базисных векторов, называются **осями координат**. В трехмерном пространстве они называются **осями абсцисс, ординат и аппликат**. Оси координат являются числовыми осями с началом в точке O , положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора. **Координатами точки** Mназываются координаты вектора OM (**радиус–вектора**) (см. рис. 1). Если базис ортонормированный, то связанная с ним декартова система координат называется **прямоугольной**.

**Скалярным произведением** двух векторов a и b будет скаляр, величина которого равна сумме попарного произведения координат векторов a и b.

Например для векторов a = {ax; ay; az} и b = {bx; by; bz} скалярное произведение:

a · b = ax · bx + ay · by + az · bz

a = {1; 2; 3}

b = {4; 5; 6}

a · b = ax · bx + ay · by + az · bz

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a · b = | 1 | · | 4 | + | 2 | · | 5 | + | 3 | · | 6 | = | 4 | + | 10 | + | 18 | = | 32 |
|

## Свойства

1. Коммутативность: $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$ для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
2. Ассоциативность: $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b})=$$\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$ для любого действительного чиспа $\alpha$ и любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
3. Дистрибутивность: $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=$$(\mathbf{a},\mathbf{c})+$$(\mathbf{b},\mathbf{c})$ для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.
4. Положительная определенность: $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geqslant 0$ для любого вектора $\mathbf{a}$, причем $(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$ в том и только том случае, когда $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

**2 Произведение векторов.**

**Векторное произведение** двух векторов a = {ax; ay; az} и b = {bx; by; bz} в декартовой системе координат - это вектор, значение которого можно вычислить, используя следующие формулы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a × b = | **i** | **j** | **k** | = **i**(aybz - azby) - **j**(axbz - azbx) + **k**(axby - aybx) |
| ax | ay | az |
| bx | by | bz |

a × b = {aybz - azby; azbx - axbz; axby - aybx}

***Пример 1.***

 Найти векторное произведение векторов a = {1; 2; 3} и b = {2; 1; -2}.

**Решение:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a × b = | **i** | **j** | **k** | = |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | -2 |

= **i**(2 · (-2) - 3 · 1) - **j**(1 · (-2) - 2 · 3) + **k**(1 · 1 - 2 · 2) =  
  
= **i**(-4 - 3) - **j**(-2 - 6) + **k**(1 - 4) = -7**i** + 8**j** - 7**k** = {-7; 8; -3}

**3 Смешанное произведение векторов.**

**Смешанное произведение векторов** равно определителю матрицы, составленной из этих векторов.

***Пример 1.***

 Найти смешанное произведение векторов a = {1; 2; 3}, b = {1; 1; 1}, c = {1; 2; 1}.

**Решение:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a · [b × с] = | 1 | 2 | 3 | = |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |

= 1·1·1 + 1·1·2 + 1·2·3 - 1·1·3 - 1·1·2 - 1·1·2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2

17. Расстояние от точки до прямой.

|  |  |
| --- | --- |
| d = | |M0M1×s| |
| |s| |

 Найти расстояние между точкой M(0, 2, 3) и прямой

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x - 3 | = | y - 1 | = | z + 1 |
| 2 | 1 | 2 |

**4 Задание плоскости точкой и направляющим подпространством. Задание плоскости по 3 точкам.**

**Уравнения плоскости** θ, заданной точкой *M*0 и направляющим подпространством *L*(*a*→,*b*→)  
  
Исходные данные:  
  
Точка *M*0(*x*0,*y*0,*z*0);  
  



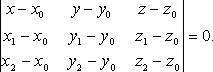

**Уравнение плоскости по трем точкам**

Есть точки M0(x0, y0, z0), M1(x1, y1, z1) и M3(x2, y2, z3) не лежат на одной прямой, то происходящая через них плоскость представляется уравнением

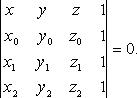
В векторном виде

http://www.pm298.ru/Math/f1105.JPG

В координатах



или



**5 Параметрическое уравнение плоскости**

**Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору**

В векторном виде

http://www.pm298.ru/Math/f1101.JPG

В координатах

http://www.pm298.ru/Math/f1102.JPG

**Уравнение плоскости в отрезках**

http://www.pm298.ru/Math/f1095.JPG

**Параметрические уравнения плоскости** 

В векторном виде

http://www.pm298.ru/Math/f1108.JPG

В координатах

http://www.pm298.ru/Math/f1109.JPG

http://www.pm298.ru/Math/f1110.JPG

http://www.pm298.ru/Math/f1111.JPG

**6 Общее уравнение плоскости**

Каждую плоскость в пространстве можно представить как линейное уравнение, называемое *общим уравнением* плоскости

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht95.gif ,                                           (8)

где http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht96.gif

Коэффициенты http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht97.gif  являются координатами *нормального вектора* плоскости http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht98.gif . Вектор http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht99.gif  перпендикулярен плоскости.

*Теорема.*

Всякое уравнение вида формула, где *A*, *B*, *C* и *D* – некоторые действительные числа, причем *А*, *В* и *C* одновременно не равны нулю, определяет плоскость в заданной прямоугольной системе координат *Oxyz* в трехмерном пространстве, и всякая плоскость в прямоугольной системе координат *Oxyz* в трехмерном пространстве определяется уравнением вида формула при некотором наборе чисел *A*, *B*, *C* и *D*.

**Возможны следующие частные случаи:**

А = 0 – плоскость параллельна оси Ох

В = 0 – плоскость параллельна оси Оу

С = 0 – плоскость параллельна оси Оz

D = 0 – плоскость проходит через начало координат

А = В = 0 – плоскость параллельна плоскости хОу

А = С = 0 – плоскость параллельна плоскости хОz

В = С = 0 – плоскость параллельна плоскости yOz

А = D = 0 – плоскость проходит через ось Ох

В = D = 0 – плоскость проходит через ось Оу

С = D = 0 – плоскость проходит через ось Oz

А = В = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью хОу

А = С = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOz

В = С = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью yOz

**9 Угол между двумя плоскостями**

***Определение.***

**Двугранный угол между плоскостями** равен углу образованному нормальными векторами этих плоскостей.

**Формула для вычисления угла между плоскостями**

Если заданы уравнения плоскостей A1x + B1y + C1z + D1 = 0 и A2x + B2y + C2z + D2 = 0, то угол между плоскостями можно найти, используя следующую формулу

|  |  |
| --- | --- |
| cos α = | |A1·A2 + B1·B2 + C1·C2| |
| √A12 + B12 + C12√A22 + B22 + C22 |

***Пример 1.***

 Найти угол между плоскостями 2x + 4y - 4z - 6 = 0 и 4x + 3y + 9 = 0.

**Решение.** Подставим в формулу вычисления угла между плоскостями соответствующие коэффициенты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cos α = | |2·4 + 4·3 + (-4)·0| | = | |8 + 12| | = | 20 | = | 2 |
| √22 + 42 + (-4)2√42 + 32 + 02 | √36√25 | 30 | 3 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ответ:** косинус угла между плоскостями равен  cos α   = | 2 | . |
| 3 |

**10 Расстояние от точки до плоскости**

Расстояние от точки до плоскости определяется через [расстояние от точки до точки](http://www.cleverstudents.ru/vectors/distance_from_point_to_point.html), одна из которых заданная точка, а другая – проекция заданной точки на заданную плоскость.

|  |  |
| --- | --- |
| d = | |A·Mx + B·My + C·Mz + D| |
| √A2 + B2 + C |

***Пример 1.***

Найти расстояние между плоскостью 2x + 4y - 4z - 6 = 0 и точкой M(0, 3, 6).

**Решение.** Подставим в формулу коэффициенты плоскости и координаты точки

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| d = | |2·0 + 4·3 + (-4)·6 - 6| | = | |0 + 12 - 24 - 6| | = | |- 18| | = 3 |
| √4 + 16 + 16 | √36 | 6 |

**13 Взаимное расположение двух прямых**

Взаимное расположение двух прямых и пространстве характеризуется следующими тремя возможностями.

1. Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — параллельные прямые.
2. Прямые лежат и одной плоскости и имеют одну общую точку — прямые пересекаются.
3. В пространстве две прямые могут быть расположены еще так, что не лежат ни в одной плоскости. Такие прямые называются скрещивающимися (не пересекаются и не параллельны).

Возможны четыре различных случая расположения двух прямых в пространстве:

– прямые скрещивающиеся, т.е. не лежат в одной плоскости;

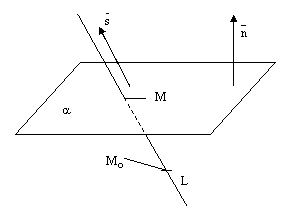
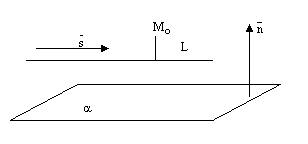
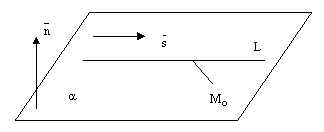
– прямые пересекаются, т.е. лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку;

– прямые параллельные, т.е. лежат в одной плоскости и не пересекаются;

– прямые совпадают.

**14 Взаимное расположение прямой и плоскостей**

   Прямая может лежать на данной плоскости, быть параллельна данной плоскости или пересекать ее в одной точке, см. следующие рисунки.



Теорема. Пусть [плоскость](http://fxdx.ru/page/kompleksnaja-ploskost) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif задана общим уравнением http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image094.gif,

а прямая L задана каноническими уравнениями

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image095.gif

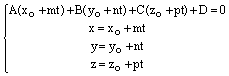
или параметрическими уравнениями

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image096.gif,   http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image097.gif,

в которых http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image098.gif – [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) нормального [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) плоскости http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image099.gif – [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) произвольной фиксированной точки прямой L,  http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image100.gif –

координаты направляющего [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) прямой L. Тогда:

1) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image101.gif, то прямая L пересекает [плоскость](http://fxdx.ru/page/kompleksnaja-ploskost) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif в точке, [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) которой http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image102.gif можно найти из [системы](http://fxdx.ru/page/delenie-otrezka-v-dannom-otnoshenii-geometricheskij-centr-tjazhesti-sistemy-iz-dvuh-materialnyh-tochek) уравнений

;           (7)

2) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image104.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image105.gif, то прямая лежит на плоскости;

3) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image104.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image106.gif, то прямая параллельна плоскости.

   Доказательство. Условие http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image107.gif говорит о том, что вектроры http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image108.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image109.gif не ортогональны, а значит прямая не параллельна плоскости и не лежит в плоскости, а значит пересекает ее в некоторой точке М. [Координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk)точки М удовлетворяют как уравнению плоскости, так и уравнениям прямой, т.е. системе (7). Решаем первое [уравнение](http://fxdx.ru/page/uravnenie-linii-i-poverhnosti-1) [системы](http://fxdx.ru/page/delenie-otrezka-v-dannom-otnoshenii-geometricheskij-centr-tjazhesti-sistemy-iz-dvuh-materialnyh-tochek) (7) относительно неизвестной t и затем, подставляя найденное значение t в остальные [уравнения](http://fxdx.ru/page/parametricheskie-i-kanonicheskie-uravnenija-prjamoj) системы, находим [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) искомой точки.

   Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image110.gif, то это означает, что http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image111.gif. А такое возможно лишь тогда, когда прямая лежит на плоскости или параллельна ей. Если прямая лежит на плоскости, то любая точка прямой является точкой плоскости и[координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) любой точки прямой удовлетворяют уравнению плоскости. Поэтому достаточно проверить, лежит ли на плоскости точка http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image099.gif. Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image105.gif, то точка http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image112.gif – лежит на плоскости, а это означает, что и сама прямая лежит на плоскости.

   Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image110.gif, а http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image106.gif, то точка на прямой не лежит на плоскости, а это означает, что прямая параллельна плоскости.

Теорема доказана.

**15 Угол между прямой и плоскостью**

***Определение.***

**Угол между прямой и плоскостью** — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

**Формула вычисления угла между прямой и плоскостью**

Если в пространстве заданы направляющий вектор прямой L

s = {l; m; n}

и уравнение плоскости

Ax + By + Cz + D = 0,

то угол между этой прямой и плоскостью можно найти используя формулу

|  |  |
| --- | --- |
| sin φ = | | A · l + B · m + C · n | |
| √A2 + B2 + C2 · √l2 + m2 + n2 |

***Пример 1.***

 Найти угол между прямой

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x - 4 | = | y + 2 | = - | z - 6 |
| 2 | 6 | 3 |

и плоскостью x - 2y + 3z + 4 = 0.

**Решение.**

Из уравнения прямой найдем направляющий вектор прямой

s = {2; 6; -3}

Из уравнения плоскости найдем вектор нормали плоскости

q = {1; -2; 3}

Воспользовавшись формулой, найдем угол между прямой и плоскостью

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| sin φ = | | 2 · 1 + 6 · (-2) + (-3) · 3 | | = |
| √22 + 62 + (-3)2 · √12 + (-2)2 + 32 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| sin φ = | | 2 - 12 - 9 | | = | 19 | = | 19 |
| √4 + 36 + 9 · √1 + 4 + 9 | √49 · √14 | 7√14 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ответ:** | |  |  | | --- | --- | | sin φ = | 19 | | 7√14 | |

**16 Угол между двумя прямыми**

***Определение.***

**Угол между двумя пересекающимися прямыми** – это мера меньшего из четырех углов, образованных этими прямыми.

***Пример 1.***

**Найти угол между двумя прямыми 3*x* + 4*y* - 7 = 0 и 4*x* - 3*y* + 8 = 0.**

Решение

Воспользуемся форулой

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z05207.JPG

так как уравнения прямых заданы в общем виде.

У нас *A*1 = 3; *B*1 = 4; *A*2 = 4; *B*2 = -3;

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z05208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z06208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z07208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z08208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z09208.JPG

и так как деление на нуль невозможно, то http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01209.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02209.JPG не существует. Угол http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01210.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02210.JPG, т. е. прямые перпендикулярны. Их перпендикулярность можно было усмотреть и сразу, составив выражение *A*1*A*2 + *B*1*B*2 и убедившись, что оно равно нулю (выполняется условие перпендикулярности двух прямых).

**17 Расстояние от точки до прямой**

***Определение.***

**Расстояние от точки до прямой** — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

**Формула для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве**

Если s = {m; n; p} - направляющий вектор прямой l, M1(x1, y1, z1) - точка лежащей на прямой, тогда расстояние от точки M0(x0, y0, z0) до прямой l можно найти, используя формулу

|  |  |
| --- | --- |
| d = | |M0M1×s| |
| |s| |

***Пример 1.***

 Найти расстояние между точкой M(0, 2, 3) и прямой

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x - 3 | = | y - 1 | = | z + 1 |
| 2 | 1 | 2 |

**Решение.**

Из уравнения прямой получим:

S{2;1;2}направляющийвекторпрямой;  
M1(3; 1; -1) - точка лежащая на прямой.

Тогда

M0M1 = {3 - 0; 1 - 2; -1 - 3} = {3; -1; -4}

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| M0M1×s = | **i** | **j** | **k** | = |
| 3 | -1 | -4 |
| 2 | 1 | 2 |

= **i** ((-1)·2 - (-4)·1) - **j** (3·2 - (-4)·2) + **k** (3·1 -(-1)·2) = {2; -14; 5}

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| d = | |M0M1×s| | = | √22 + (-14)2 + 52 | = | √225 | = | 15 | = 5 |
| |s| | √22 + 12 + 22 | √9 | 3 |

**Ответ:** расстояние от точки до прямой равно 5.