**1 Система координат в пространстве. Простейшие задачи в координатах. Скалярное произведение в пространстве.**

***Определение.***

Декартова система координат в пространстве определяется точкой и базисом из трех векторов. Точка O называется началом координат. Прямые, проведенныечерез начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. В трехмерном пространстве они называются осями абсцисс, ординат и аппликат. Оси координат являются числовыми осями с началом в точке O , положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора. Координатами точки Mназываются координаты вектора OM (радиус–вектора) (см. рис. 1). Если базис ортонормированный, то связанная с ним декартова система координат называется прямоугольной.

**Скалярным произведением** двух векторов a и b будет скаляр, величина которого равна сумме попарного произведения координат векторов a и b.

Например для векторов a = {ax; ay; az} и b = {bx; by; bz} скалярное произведение:

a · b = ax · bx + ay · by + az · bz

a = {1; 2; 3}

b = {4; 5; 6}

a · b = ax · bx + ay · by + az · bz

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a · b = | 1 | · | 4 | + | 2 | · | 5 | + | 3 | · | 6 | = | 4 | + | 10 | + | 18 | = | 32 |
|

## Геометрический смысл

## $(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos~\varphi$,

## Свойства

1. Коммутативность: $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$ для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
2. Ассоциативность: $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b})=$$\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$ для любого действительного чиспа $\alpha$ и любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
3. Дистрибутивность: $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=$$(\mathbf{a},\mathbf{c})+$$(\mathbf{b},\mathbf{c})$ для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.
4. Положительная определенность: $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geqslant 0$ для любого вектора $\mathbf{a}$, причем $(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$ в том и только том случае, когда $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

### *Пример вычисления скалярного произведения векторов для пространственных задач*

***Пример 4.***

 Найти скалярное произведение векторов a = {1; 2; -5} и b = {4; 8; 1}.

**Решение:** a · b = 1 · 4 + 2 · 8 + (-5) · 1 = 4 + 16 - 5 = 15.

### *Примеры вычисления скалярного произведения векторов для плоских задач*

***Пример 1.***

 Найти скалярное произведение векторов a = {1; 2} и b = {4; 8}.

**Решение:** a · b = 1 · 4 + 2 · 8 = 4 + 16 = 20.

***Пример 2.***

 Найти скалярное произведение векторов a и b, если их длины |a| = 3, |b| = 6, а угол между векторами равен 60˚.

**Решение:** a · b = |a| · |b| cos α = 3 · 6 · cos 60˚ = 9.

***Пример 3.***

 Найти скалярное произведение векторов p = a + 3b и q = 5a - 3 b, если их длины |a| = 3, |b| = 2, а угол между векторами a и b равен 60˚.

**Решение:**

p·q=(a+3b)·(5a-3b)=5a·a-3a·b+15b·a-9b·b = 5|a|2 + 12 a · b - 9 |b|2 = 5 · 32 + 12 · 3 · 2 · cos 60˚ - 9 · 22 = 45 +36 -36 = 45.

**2 Произведение векторов.**

***Определение.***

**Векторное произведение** двух векторов a = {ax; ay; az} и b = {bx; by; bz} в декартовой системе координат - это вектор, значение которого можно вычислить, используя следующие формулы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a × b = | **i** | **j** | **k** | = **i**(aybz - azby) - **j**(axbz - azbx) + **k**(axby - aybx) |
| ax | ay | az |
| bx | by | bz |

a × b = {aybz - azby; azbx - axbz; axby - aybx}

***Пример 1.***

 Найти векторное произведение векторов a = {1; 2; 3} и b = {2; 1; -2}.

**Решение:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a × b = | **i** | **j** | **k** | = |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | -2 |

= **i**(2 · (-2) - 3 · 1) - **j**(1 · (-2) - 2 · 3) + **k**(1 · 1 - 2 · 2) =  
  
= **i**(-4 - 3) - **j**(-2 - 6) + **k**(1 - 4) = -7**i** + 8**j** - 7**k** = {-7; 8; -3}

**3 Смешанное произведение векторов.**

***Определение.***

**Смешанное произведение векторов** — скалярное произведение вектора a на векторное произведение векторов b и c. (равно определителю матрицы, составленной из этих векторов)

***Пример 1.***

 Найти смешанное произведение векторов a = {1; 2; 3}, b = {1; 1; 1}, c = {1; 2; 1}.

**Решение:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a · [b × с] = | 1 | 2 | 3 | = |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |

= 1·1·1 + 1·1·2 + 1·2·3 - 1·1·3 - 1·1·2 - 1·1·2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2

17. Расстояние от точки до прямой.

|  |  |
| --- | --- |
| d = | |M0M1×s| |
| |s| |

 Найти расстояние между точкой M(0, 2, 3) и прямой

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x - 3 | = | y - 1 | = | z + 1 |
| 2 | 1 | 2 |

**4 Задание плоскости точкой и направляющим подпространством. Задание плоскости по 3 точкам.**

**Уравнения плоскости** θ, заданной точкой *M*0 и направляющим подпространством *L*(*a*,*b*)  
  
Исходные данные: Точка *M*0(*x*0,*y*0,*z*0);  
  




Витя сказал что правильно так

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x-x0 | y-y0 | z-z0 |
| a1 | a2 | a3 |
| a1 | b2 | b3 |

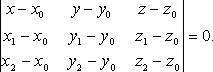
**Уравнение плоскости по трем точкам**

Есть точки M0(x0, y0, z0), M1(x1, y1, z1) и M3(x2, y2, z3) не лежат на одной прямой, то происходящая через них плоскость представляется уравнением

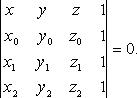
В векторном виде

http://www.pm298.ru/Math/f1105.JPG

В координатах



или



**5 Параметрическое уравнение плоскости**

**Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору**

В векторном виде

http://www.pm298.ru/Math/f1101.JPG

В координатах

http://www.pm298.ru/Math/f1102.JPG

**Уравнение плоскости в отрезках**

http://www.pm298.ru/Math/f1095.JPG

**Параметрические уравнения плоскости** 

В векторном виде

http://www.pm298.ru/Math/f1108.JPG

В координатах

http://www.pm298.ru/Math/f1109.JPG

http://www.pm298.ru/Math/f1110.JPG

http://www.pm298.ru/Math/f1111.JPG

**6 Общее уравнение плоскости**

Каждую плоскость в пространстве можно представить как линейное уравнение, называемое *общим уравнением* плоскости

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht95.gif ,                                           (8)

где http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht96.gif

Коэффициенты http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht97.gif  являются координатами *нормального вектора* плоскости http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht98.gif . Вектор http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/PRMATEM/V_MATEM/METOD/SULYANDZ2/2.3/2_3.ht99.gif  перпендикулярен плоскости.

*Теорема.*

Всякое уравнение вида формула, где *A*, *B*, *C* и *D* – некоторые действительные числа, причем *А*, *В* и *C* одновременно не равны нулю, определяет плоскость в заданной прямоугольной системе координат *Oxyz* в трехмерном пространстве, и всякая плоскость в прямоугольной системе координат *Oxyz* в трехмерном пространстве определяется уравнением вида формула при некотором наборе чисел *A*, *B*, *C* и *D*.

**Возможны следующие частные случаи:**

А = 0 – плоскость параллельна оси Ох

В = 0 – плоскость параллельна оси Оу

С = 0 – плоскость параллельна оси Оz

D = 0 – плоскость проходит через начало координат

А = В = 0 – плоскость параллельна плоскости хОу

А = С = 0 – плоскость параллельна плоскости хОz

В = С = 0 – плоскость параллельна плоскости yOz

А = D = 0 – плоскость проходит через ось Ох

В = D = 0 – плоскость проходит через ось Оу

С = D = 0 – плоскость проходит через ось Oz

А = В = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью хОу

А = С = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOz

В = С = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью yOz

**7 Расположение плоскости в системе координат**

Ax + By + Cz + D = 0

Вопрос взаимного расположения плоскостей — это вопрос об общих точках для этих плоскостей.

1. R = r = 2 система совместно т.к 2 < 3 (3 кол-во пер) т.к 2 плоскости имеет бесконечная кол-во общих точек.

A1/A2 ≠ B1/B2 ≠ C1/C2 => P1 пересек P2

1. r = R = 1 система совместная общих точек, строки пропорциональны => n1 || n2 плоскости совпадают

A1/A2 = B1/B2 = C1/C2 = D1/D2 ⬄ P1 ≡ P2

1. r < R, r = 1; R = 2 система не совместная => решений нет => общих точек нет у плоскостей нет => n1 || n2 => P1 || P2

A1/A2 = B1/B2 = C1/C2 ≠ D1/D2 ⬄ P1 || P2

**8 Взаимное расположение двух, трех плоскостей**

**Двух плоскостей**

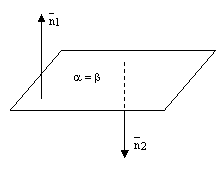


                                           рис.3.

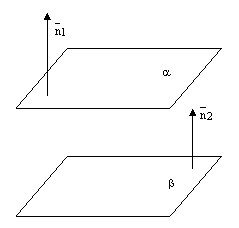
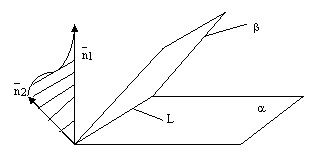


                                                рис.4.



**Трех плоскостей**

1) Все три [плоскости](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) совпадают: http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image117.gif. Очевидно, что в этом случае http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image118.gif. Ранг = 1

2) Две [плоскости](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) совпадают, а [третья](http://fxdx.ru/page/tretja-chast-kursa) параллельна им, например: http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image119.gif и в этом случае http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image118.gif.

3) две [плоскости](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) совпадают, а [третья](http://fxdx.ru/page/tretja-chast-kursa) пересекает их, например: http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image120.gif – прямая пересечения.

   В этом случае, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image121.gif

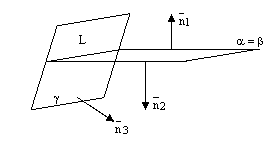


                                               рис.9.

4) Все три [плоскости](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) параллельны друг другу: http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image123.gif. Тогда http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image118.gif.

5) Две [плоскости](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) параллельны, а [третья](http://fxdx.ru/page/tretja-chast-kursa) пересекает их, например: http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image124.gif. В этом случае http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image125.gif – прямая пересечения плоскостей http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image113.gif, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image126.gif – прямая пересечения плоскостей http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image090.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image113.gif и, как известно из[курса](http://fxdx.ru/page/vtoraja-chast-kursa) геометрии, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image127.gif. Нормальные [векторы](http://fxdx.ru/page/linejnye-operacii-s-vektorami-ortogonalnye-vektory-ortonormirovannyj-bazis) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image121.gif.

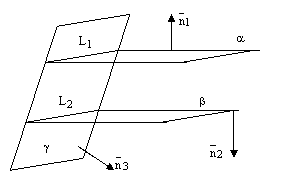


                                                рис.10.

6) Все три [плоскости](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) пересекаются по одной [прямой](http://fxdx.ru/page/parametricheskie-i-kanonicheskie-uravnenija-prjamoj) и тогда http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image129.gif, но все три [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image114.gif, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image115.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image116.gif лежат в одной плоскости.

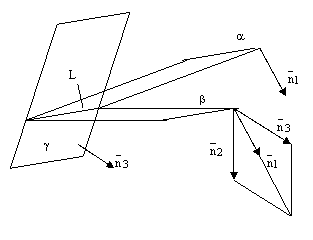


                                            рис.11.

7) Каждая пара плоскостей пересекается по своей прямой, образуя треугольную "трубу" и  http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image129.gif, но все три [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image114.gif, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image115.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image116.gif лежат в одной плоскости.

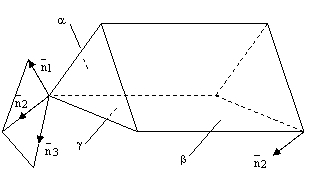
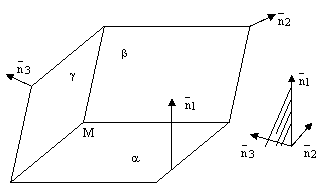


                                               рис.12.

8) все три [плоскости](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) пересекаются в одной точке и их нормальные[векторы](http://fxdx.ru/page/linejnye-operacii-s-vektorami-ortogonalnye-vektory-ortonormirovannyj-bazis) некомпланарны.



**9 Угол между двумя плоскостями**

***Определение.***

**Двугранный угол между плоскостями** равен углу образованному нормальными векторами этих плоскостей.

**Формула для вычисления угла между плоскостями**

Если заданы уравнения плоскостей A1x + B1y + C1z + D1 = 0 и A2x + B2y + C2z + D2 = 0, то угол между плоскостями можно найти, используя следующую формулу

|  |  |
| --- | --- |
| cos α = | |A1·A2 + B1·B2 + C1·C2| |
| √A12 + B12 + C12√A22 + B22 + C22 |

***Пример 1.***

 Найти угол между плоскостями 2x + 4y - 4z - 6 = 0 и 4x + 3y + 9 = 0.

**Решение.** Подставим в формулу вычисления угла между плоскостями соответствующие коэффициенты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cos α = | |2·4 + 4·3 + (-4)·0| | = | |8 + 12| | = | 20 | = | 2 |
| √22 + 42 + (-4)2√42 + 32 + 02 | √36√25 | 30 | 3 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ответ:** косинус угла между плоскостями равен  cos α   = | 2 | . |
| 3 |

**10 Расстояние от точки до плоскости**

Расстояние от точки до плоскости определяется через [расстояние от точки до точки](http://www.cleverstudents.ru/vectors/distance_from_point_to_point.html), одна из которых заданная точка, а другая – проекция заданной точки на заданную плоскость.

|  |  |
| --- | --- |
| d = | |A·Mx + B·My + C·Mz + D| |
| √A2 + B2 + C |

***Пример 1.***

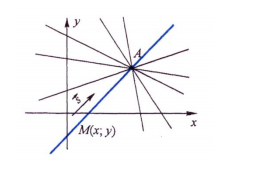
Найти расстояние между плоскостью 2x + 4y - 4z - 6 = 0 и точкой M(0, 3, 6).

**Решение.** Подставим в формулу коэффициенты плоскости и координаты точки

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| d = | |2·0 + 4·3 + (-4)·6 - 6| | = | |0 + 12 - 24 - 6| | = | |- 18| | = 3 |
| √4 + 16 + 16 | √36 | 6 |

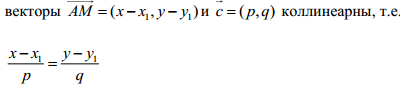
**11 Задание прямой точкой и направляющим вектором. Задание прямой двумя точками.**

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой. Всякая прямая полностью определяется какой-нибудь своей точкой точкой А и направляющим вектором s. Действительно, через точку А можно провести бесконечно много различных прямых. Из этого множества прямых вектором s выделяется одна прямая, а именно та, для которой этот вектор является направляющим. Выведем уравнение прямой, проходящей через точку A (x ; y ) и имеющей заданный направляющий вектор

С(p ; q). Пусть М (х, у) – произвольная точка

плоскости. Тогда точка М лежит на рассматриваемой прямой в том и только том случае, когда

векторы



Полученное уравнение и является искомым уравнением прямой, проходящей через данную точку

**Задание прямой двумя точками**

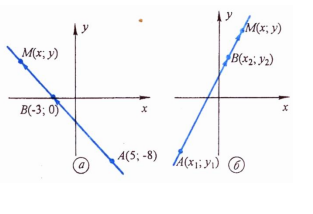
Уравнение прямой, проходящей через две точки

A ( х1 ; у1 ) B (х2 ;у2)

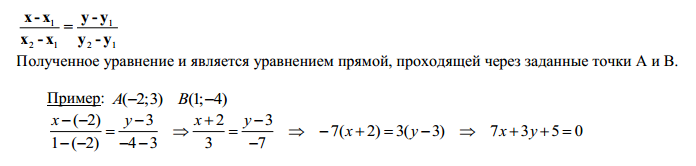
Как мы знаем, через две различные точки можно провести одну и только одну прямую. Поэтому две

заданные точки однозначно определяют прямую и должны позволить составить уравнение этой прямой.

Пусть даны точки A ( х1 ; у1 ) , B ( х2 ; у2 ) . Рассмотрим

векторы AB (x2 – x1 , y2 – y1 ) и AM (x – x1 , y – y1 , ).

Тогда точка М(х, у) лежит на прямой АВ в том и только том случае, когда векторы AB и AM коллинеарны (параллельны), т.е. когда



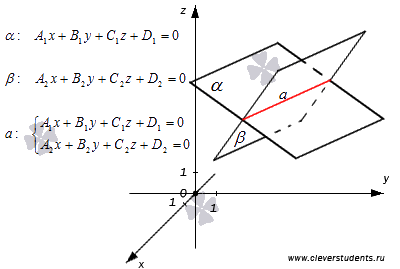
**12 Задание прямой двумя пересекающимися плоскостями.**

Пусть в трехмерном пространстве зафиксирована [прямоугольная система координат](http://www.cleverstudents.ru/vectors/cartesian_rectangular_coordinates.html) *Oxyz* и пусть даны две пересекающиеся и несовпадающие плоскости формула и формула. Так как любую плоскость в прямоугольной системе координат *Oxyz* определяет [общее уравнение плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/general_equation_of_plane.html)вида формула при некотором наборе значений *А*, *В*, *С* и *D*, то будем считать, что плоскостям формула и формула соответствуют уравнения формула и формула. Тогда формула - [нормальный вектор плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/normal_vector_of_plane.html) формула, а формула - нормальный вектор плоскости формула. Эти векторы не коллинеарны, так как плоскости формула и формула не совпадают и не параллельны. На языке математики это условие запишется как формула (при необходимости смотрите статью [параллельность плоскостей](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/parallel_planes.html)). Обозначим буквой *a* прямую, по которой пересекаются плоскости формула и формула, то есть, формула.

Прямая *а* представляет собой множество всех общих точек плоскостей формула и формула. Следовательно, координаты любой точки прямой *a* удовлетворяют одновременно и уравнениюформула и уравнению формула, то есть, являются частным решением системы уравнений

формула

Тогда [общее решение системы линейных уравнений](http://www.cleverstudents.ru/system_of_equations/solving_systems_of_linear_equations.html#fundamental_system_of_solutions) вида формула определяет координаты каждой точки прямой, по которой пересекаются плоскости формула и формула, а значит, определяет прямую *a* в прямоугольной системе координат *Oxyz* в пространстве.



Приведем пример прямой в пространстве, которая задана уравнениями двух пересекающихся плоскостей.

Очевидно, что координатная прямая *Ox* является прямой, по которой пересекаются координатные плоскости *Oxy* и *Oxz*. Плоскость *Oxy* задается уравнением *z = 0*, а плоскость*Oxz* уравнением *y = 0* (при необходимости смотрите раздел [неполное общее уравнение плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/general_equation_of_plane.html#incomplete_equations)). Таким образом, координатная прямая *Ox* в прямоугольной системе координат *Oxyz*определяется системой из двух уравнений следующего вида .

формула

**13 Взаимное расположение двух прямых**

Взаимное расположение двух прямых и пространстве характеризуется следующими тремя возможностями.

1. Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — параллельные прямые.
2. Прямые лежат и одной плоскости и имеют одну общую точку — прямые пересекаются.
3. В пространстве две прямые могут быть расположены еще так, что не лежат ни в одной плоскости. Такие прямые называются скрещивающимися (не пересекаются и не параллельны).

Возможны четыре различных случая расположения двух прямых в пространстве:

– прямые скрещивающиеся, т.е. не лежат в одной плоскости;

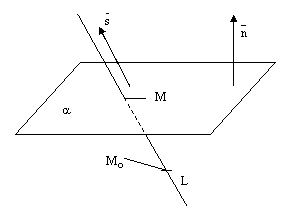
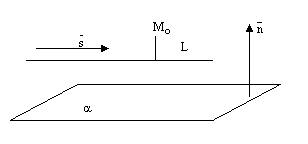
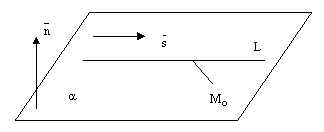
– прямые пересекаются, т.е. лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку;

– прямые параллельные, т.е. лежат в одной плоскости и не пересекаются;

– прямые совпадают.

**14 Взаимное расположение прямой и плоскостей**

   Прямая может лежать на данной плоскости, быть параллельна данной плоскости или пересекать ее в одной точке, см. следующие рисунки.



Теорема. Пусть [плоскость](http://fxdx.ru/page/kompleksnaja-ploskost) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif задана общим уравнением http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image094.gif,

а прямая L задана каноническими уравнениями

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image095.gif

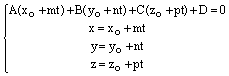
или параметрическими уравнениями

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image096.gif,   http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image097.gif,

в которых http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image098.gif – [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) нормального [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) плоскости http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image099.gif – [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) произвольной фиксированной точки прямой L,  http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image100.gif –

координаты направляющего [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) прямой L. Тогда:

1) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image101.gif, то прямая L пересекает [плоскость](http://fxdx.ru/page/kompleksnaja-ploskost) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif в точке, [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) которой http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image102.gif можно найти из [системы](http://fxdx.ru/page/delenie-otrezka-v-dannom-otnoshenii-geometricheskij-centr-tjazhesti-sistemy-iz-dvuh-materialnyh-tochek) уравнений

;           (7)

2) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image104.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image105.gif, то прямая лежит на плоскости;

3) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image104.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image106.gif, то прямая параллельна плоскости.

   Доказательство. Условие http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image107.gif говорит о том, что вектроры http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image108.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image109.gif не ортогональны, а значит прямая не параллельна плоскости и не лежит в плоскости, а значит пересекает ее в некоторой точке М. [Координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk)точки М удовлетворяют как уравнению плоскости, так и уравнениям прямой, т.е. системе (7). Решаем первое [уравнение](http://fxdx.ru/page/uravnenie-linii-i-poverhnosti-1) [системы](http://fxdx.ru/page/delenie-otrezka-v-dannom-otnoshenii-geometricheskij-centr-tjazhesti-sistemy-iz-dvuh-materialnyh-tochek) (7) относительно неизвестной t и затем, подставляя найденное значение t в остальные [уравнения](http://fxdx.ru/page/parametricheskie-i-kanonicheskie-uravnenija-prjamoj) системы, находим [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) искомой точки.

   Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image110.gif, то это означает, что http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image111.gif. А такое возможно лишь тогда, когда прямая лежит на плоскости или параллельна ей. Если прямая лежит на плоскости, то любая точка прямой является точкой плоскости и[координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) любой точки прямой удовлетворяют уравнению плоскости. Поэтому достаточно проверить, лежит ли на плоскости точка http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image099.gif. Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image105.gif, то точка http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image112.gif – лежит на плоскости, а это означает, что и сама прямая лежит на плоскости.

   Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image110.gif, а http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image106.gif, то точка на прямой не лежит на плоскости, а это означает, что прямая параллельна плоскости.

Теорема доказана.

**15 Угол между прямой и плоскостью**

***Определение.***

**Угол между прямой и плоскостью** — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

**Формула вычисления угла между прямой и плоскостью**

Если в пространстве заданы направляющий вектор прямой L

s = {l; m; n}

и уравнение плоскости

Ax + By + Cz + D = 0,

то угол между этой прямой и плоскостью можно найти используя формулу

|  |  |
| --- | --- |
| sin φ = | | A · l + B · m + C · n | |
| √A2 + B2 + C2 · √l2 + m2 + n2 |

***Пример 1.***

 Найти угол между прямой

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x - 4 | = | y + 2 | = - | z - 6 |
| 2 | 6 | 3 |

и плоскостью x - 2y + 3z + 4 = 0.

**Решение.**

Из уравнения прямой найдем направляющий вектор прямой

s = {2; 6; -3}

Из уравнения плоскости найдем вектор нормали плоскости

q = {1; -2; 3}

Воспользовавшись формулой, найдем угол между прямой и плоскостью

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| sin φ = | | 2 · 1 + 6 · (-2) + (-3) · 3 | | = |
| √22 + 62 + (-3)2 · √12 + (-2)2 + 32 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| sin φ = | | 2 - 12 - 9 | | = | 19 | = | 19 |
| √4 + 36 + 9 · √1 + 4 + 9 | √49 · √14 | 7√14 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ответ:** | |  |  | | --- | --- | | sin φ = | 19 | | 7√14 | |

**16 Угол между двумя прямыми**

***Определение.***

**Угол между двумя пересекающимися прямыми** – это мера меньшего из четырех углов, образованных этими прямыми.

***Пример 1.***

**Найти угол между двумя прямыми 3*x* + 4*y* - 7 = 0 и 4*x* - 3*y* + 8 = 0.**

Решение

Воспользуемся форулой

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04207.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z05207.JPG

так как уравнения прямых заданы в общем виде.

У нас *A*1 = 3; *B*1 = 4; *A*2 = 4; *B*2 = -3;

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z05208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z06208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z07208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z08208.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z09208.JPG

и так как деление на нуль невозможно, то http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01209.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02209.JPG не существует. Угол http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01210.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02210.JPG, т. е. прямые перпендикулярны. Их перпендикулярность можно было усмотреть и сразу, составив выражение *A*1*A*2 + *B*1*B*2 и убедившись, что оно равно нулю (выполняется условие перпендикулярности двух прямых).

**17 Расстояние от точки до прямой**

***Определение.***

**Расстояние от точки до прямой** — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

**Формула для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве**

Если s = {m; n; p} - направляющий вектор прямой l, M1(x1, y1, z1) - точка лежащей на прямой, тогда расстояние от точки M0(x0, y0, z0) до прямой l можно найти, используя формулу

|  |  |
| --- | --- |
| d = | |M0M1×s| |
| |s| |

***Пример 1.***

 Найти расстояние между точкой M(0, 2, 3) и прямой

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x - 3 | = | y - 1 | = | z + 1 |
| 2 | 1 | 2 |

**Решение.**

Из уравнения прямой получим:

S{2;1;2}направляющийвекторпрямой;  
M1(3; 1; -1) - точка лежащая на прямой.

Тогда

M0M1 = {3 - 0; 1 - 2; -1 - 3} = {3; -1; -4}

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| M0M1×s = | **i** | **j** | **k** | = |
| 3 | -1 | -4 |
| 2 | 1 | 2 |

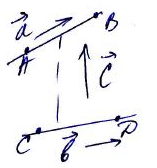
= **i** ((-1)·2 - (-4)·1) - **j** (3·2 - (-4)·2) + **k** (3·1 -(-1)·2) = {2; -14; 5}

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| d = | |M0M1×s| | = | √22 + (-14)2 + 52 | = | √225 | = | 15 | = 5 |
| |s| | √22 + 12 + 22 | √9 | 3 |

**Ответ:** расстояние от точки до прямой равно 5.

**18 Уравнение перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым**

A(0; 0; -1) B (0;1; 0) C(0;3;-2) D(1;3;2)

a = AB , b = CD

c= a \* b = | =4i+ j –k = {4;1;-1} – направляющий вектор искомого перпендикуляра

Зададим уравнение перпендикуляра в виде пересечения плоскостей: – уравнение плоскости , содержащий прямую AB компланарно вектору с.

, -4x+17(y-3)+z+2=0 , 4x-17y-z+49 =0 – уравнение плоскости, содержащей прямую СD компланарно вектору с.

Тогда уравнение искомого перпендикуляра

**20 Поверхности второго порядка. Метод сечений**

***Определение.***

**Поверхность второго порядка** — [геометрическое место точек](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BE_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%B5%D0%BA) трёхмерного пространства, [прямоугольные координаты](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) которых удовлетворяют уравнению вида


a_{11}x^2 + a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0


### Цилиндрические поверхности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Эллиптический цилиндр:** | **Параболический цилиндр:** | **Гиперболический цилиндр:** |
| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\! | y^2=2px\! | \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\!=1 |
| [Cil.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Cil.png) | [Par.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Par.png) | [Hip el.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Hip_el.png) |
| **Пара совпавших прямых:** | **Пара совпавших плоскостей:** | **Пара пересекающихся плоскостей:** |
| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\! | y^2=0\! | \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\!=0 |

### Поверхности вращения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [**Эллипсоид**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%BB%D0%B8%D0%BF%D1%81%D0%BE%D0%B8%D0%B4)**:** | **Однополостной**[**гиперболоид**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B8%D0%B4)**:** | **Двуполостной гиперболоид:** | **Эллиптический**[**параболоид**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B8%D0%B4)**:** |
| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\! | \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\! | \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\! | \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\! |
| [Gnuplot ellipsoid.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gnuplot_ellipsoid.svg?uselang=ru) | [Hib com.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Hib_com.png) | [Hib sim.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Hib_sim.png) | [El Par.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:El_Par.png) |

### Эллиптический параболоид

\frac {x^2}{a^2} + \frac {y^2}{b^2} = z.

### Гиперболический параболоид

\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz.\!

**Метод сечений**

Для того чтобы изучить форму поверхности используют метод сечений который позволяет получить и настроить линии принадлежавшие рассмотренной поверхности по виду и набору линий сделать выводы о форме поверхности.

**Алгоритм:**

1. Рассматривается поверхность в прямоугольной системе координат {o, I,j, k} F(x, y, z) = 0 ур.пов
2. Пересекаем поверхность координатными плоскостями или плоскостями параллельными координатным
3. Рассматриваем и строим линию, получаем сечение
4. По виду и набору линий делаем вывод о форме поверхности



**29 Квалификация квадрик**

***Определение.***

Квадрикой в пространстве (или поверхностью второго порядка) называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению 2-го порядка с

тремя неизвестными, т. е. уравнению вида 
a_{11}x^2 + a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0
, где по крайней мере один из коэффициентов a11,a22,a33,a12,a13 и a23 отличен от нуля.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Название | Уравнение |
| 1 | Эллиптический цилиндр | X^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 |
| 2 | Гиперболический | X^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 |
| 3 | Вырожденный эл. Ц | X^2/a^2+y^2/b^2 = 0 |
| 4 | Мнимый | X^2/a + y^2/b = -1 |
| 5 | Параболический | X^2 = 2py |
| 6 | В виде пары пересек плоскостей | X^2/a^2 – y^2/b^2 = 0 |
| 7 | || Плоскостей | X^a=a^2 |
| 8 | Совпавших плоскостей | X^2=0 |
| 9 | Мнимых || Плоскостей | X^a/a^2 = -1 |
| 10 | Коническая пов | X^2/a^2 + y^2/b^2 – z^2/c2 = 1 |
| 11 | Эллипсоид | X^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c2 = 1 |
| 12 | Вырожденный эллипсоид | X^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0 |
| 13 | Мы эл-д | X^2/a^2 + Y^2/b^2 + z^2/c^2=0 |
| 14 | Однополосный гиперболоид | X^2/a^2 + y^2/b^2 – z^2/C^2 = 1 |
| 15 | 2 ух полосный гиперболоид | -x^2/a^2 – y^^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 |
| 16 | Эллиптический параболоид | X^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z |
| 17 | Гиперболический параболоид | -x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z |