МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Благовещенский государственный педагогический университет»

(ФГБОУ ВПО «БГПУ»)

КУРСОВАЯ РАБОТА

на тему: «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом LU разложений »

по дисциплине: Математика

Исполнитель:

Студент группы 2 «А»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Д.А. Пацура

дата подпись

Руководитель: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_П.П. Алутин

к.ф-м.н, доцент, дата подпись

заведующий

кафедры математики

и МОМ

Благовещенск 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

1 LU-разложение 4

1.1 Понятие LU-разложение 4

2 Применения 6

2.1 Решение систем алгебраических линейных уравнений 6

2.2 Обращение матриц 6

2.3 Вычисление определителя матрицы 6

2 Алгоритмы 8

2.1 Алгоритм Халецкого 8

2.2 Алгоритм Краута 10

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 14

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 15

ПРИЛОЖЕНИЯ 16

# ВВЕДЕНИЕ

Одним из лучших методов решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида является метод, основанный на разложении исходной матрицы на произведение треугольных, или метод LU-факторизации. Алгоритмы этого метода близки к алгоритмам метода Гаусса, хотя вычисления могут производиться в различной последовательности. Главным преимуществом метода LU-факторизации в сравнении с методом Гаусса является возможность более быстрого получения решений для различных векторов свободных членов, а также для транспонированной системы уравнений.

По числу операций, необходимых для решения конкретной системы, методы Гаусса и LU-факторизации практически неразличимы. Однако из всех операций решения в методе LU-разложения почти половина приходится на этап факторизации и следующая половина - на собственно решение двух треугольных систем. В силу этого факта при необходимости решения системы, отличающейся лишь вектором свободных членов, получаем экономию на операциях разложения. Аналогично, когда необходимо решать транспонированную систему после исходной, можно воспользоваться предыдущей факторизацией и лишь сменить порядок решения треугольных систем в силу операции транспонирования.

Объект курсового исследования – решение систем линейных алгебраических уравнений методом LU - разложения.

Предмет курсового исследования – аффинные преобразования плоскости и их свойства.

Целью данной курсовой работы является изучение/решение систем линейных алгебраических уравнений методом Краута. А так же программная реализация данного метода.

# 1 LU-разложение

## 1.1 Понятие LU-разложение

**LU-разложение** (**LU-декомпозиция**, **LU-факторизация**) — представление матрицы A в виде произведения двух матриц, A = L \* U, где L — нижняя треугольная матрица, а U — верхняя треугольная матрица.

**Матрица** - математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы.

В методе решения систем линейных уравнений, основанном на факторизации, предполагается, что исходная система  (6.12) может быть представлена в виде

т.е.

.

Причем для определенности полагается, что матрица L является нижнетреугольной, а U–верхнетреугольной, причем с единичной диагональю.

Забегая несколько вперед, сразу отметим, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, а определитель произведения матриц равен произведению их определителей. Откуда следует, что определитель матрицы A равен произведению диагональных элементов нижнетреугольной матрицы L:

Ограничившись для наглядности порядком n = 4, запишем L- и U-матрицы:

,

# 2 Применения

## 2.1 Решение систем алгебраических линейных уравнений

Полученное LU-разложение матрицы **A** (матрица коэффициентов системы) может быть использовано для решения семейства систем линейных уравнений с различными векторами **b** в правой части:

Если известно LU-разложение матрицы **A**, , исходная система может быть записана как

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система

Поскольку I - нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

На втором шаге решается система

Поскольку U - верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

## 2.2 Обращение матриц

Обращение матрицы https://upload.wikimedia.org/math/7/f/c/7fc56270e7a70fa81a5935b72eacbe29.png эквивалентно решению линейной системы

,

где **X** - неизвестная матрица, **I** - единичная матрица. Решение **X** этой системы является обратной матрицей .

Систему можно решить описанным выше методом **LU**-разложения.

## 2.3 Вычисление определителя матрицы

**Определитель** (или **детерминант**) – это многочлен, комбинирующий элементы квадратной матрицы таким образом, что его значение сохраняется при транспонировании и линейных комбинациях строк или столбцов.  
То есть, определитель характеризует содержание матрицы. В частности, если в матрице есть линейно-зависимые строки или столбцы, — определитель равен нулю.  
Определитель играет ключевую роль в решении в общем виде систем линейных уравнений, на его основе вводятся базовые понятия.

Имея LU-разложение матрицы **A**,

,

можно непосредственно вычислить её определитель,

где **n** — размер матрицы **A**,  и  - диагональные элементы матриц **L** и **U**.

# 2 Алгоритмы

## 2.1 Алгоритм Халецкого

Предполагая возможным разложение (6.14), вводя вспомогательный вектор

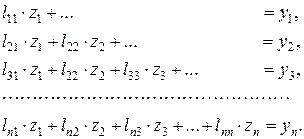
 (6.16)

и подставив данное выражение в уравнение (6.13), получим

­(6.17)

две треугольные системы, эквивалентные исходной системе. Поскольку обе системы (6.16) и (6.17) треугольные, их решения достаточно тривиальны, причем в начале решаем систему (6.17) и находим вектор http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image989.gif, а затем из (6.16) окончательно находим http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image852.gif.

Распишем подробнее алгоритм решения. Записывая систему (6.17) в виде



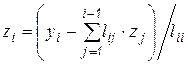
Для первых компонент вектора http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image989.gifможем записать

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image999.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1001.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1003.gif.

Обобщая последовательность этих операций, называемых прямой подстановкой или прямым ходом, можем записать

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1005.gif; , (6.18)

при http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1009.gif.

Для того чтобы соотношение (6.18) имело смысл, http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1011.gifне должны равняться нулю.

Теперь решим систему (6.16) в координатной форме:

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1013.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1015.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1017.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1019.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1021.gif.

Начиная с последней формулы, запишем выражения для нескольких компонент вектора решений http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image852.gif:

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1023.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1025.gif,

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1027.gif.

Обобщая эту последовательность действий, называемую обратной подстановкой или обратным ходом, запишем

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1029.gif, (6.19)

при http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1031.gif.

Число операций, требуемых для выполнения как прямой, так и обратной подстановок, равно примерно http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1033.gif, а в сумме для решения вместе с разложением требуется примерно http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1035.gifопераций.

Изучение соотношений (6.16) и (6.17) показывает, что компоненты http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1037.gifиспользуются только для определения http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1039.gifи позднее не требуются. Аналогично http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1039.gifне нужны после вычисления http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1041.gif. Следовательно, при такой системе расчетов векторы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1043.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image852.gifмогут быть размещены в одних и тех же ячейках памяти ЭВМ. Коэффициенты треугольных систем – матрицы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image979.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image981.gif, если не хранить единичную диагональ матрицы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image981.gif, могут быть размещены на месте исходной матрицы коэффициентов A. Следует также отметить эквивалентность обратных подстановок в схеме Халецкого и в методе Гаусса.

## 2.2 Алгоритм Краута

Суть алгоритма Краута. Предполагая, что разложение A = L \* U существует, запишем произведение L \* U:

Сравнивая компоненты этого произведения с компонентами матрицы *A*, видим, что первый столбец произведения *L \* U* равен первому столбцу матрицы *A*, т.е. , при i = 1,…,4. Первая строка произведения может быть использована для определения первой строки матрицы *U*.

Действительно, т.к.

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1062.gif,

при http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1064.gif, получаем

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1066.gif.

Поскольку во втором столбце элементы и  известны, можем определить второй столбец матрицы *L*:

,

где *i = 2,…,4*. Теперь, т.к. известны http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1077.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1079.gif, можно по второй строке произведения определить вторую строку матрицы U:

,

при j = 3,…,4. Далее, чередуя строки и столбцы, можно аналогичным образом найти остальные элементы матриц L и U.

Чтобы получить общие соотношения, запишем произвольный элемент произведения L\*U:

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1088.gif,

где верхний предел суммы учитывает наличие нулевых элементов в матрицах L и U. Рассмотрим произвольный элемент на или под главной диагональю матрицы A, для которого http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1093.gif, и заменим индекс http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image248.gifна http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image877.gif. Учитывая при этом, что http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1097.gif, получим

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1099.gif,

откуда

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1101.gif, (6.20)

при http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1103.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image915.gif. Аналогичным образом, рассматривая произвольный элемент над главной диагональю, для которого http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1106.gif, и используя http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image877.gifвместо http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image254.gif, находим

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1110.gif,

откуда

http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1112.gif, (6.21)

при http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1114.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image915.gif.

Эти соотношения для http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1116.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1118.gifесть алгоритм разложения на треугольные матрицы – алгоритм Краута. Заметим, что текущие элементы матриц http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image979.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image981.gifопределяются текущим элементом матрицы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image884.gifи предыдущими элементами матриц http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image979.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image981.gif. Отсюда, т.к. нулевые элементы и единичную диагональ матрицы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image981.gifзапоминать не нужно, в процессе вычислений матрицы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image979.gifи http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image981.gifмогут быть записаны на месте матрицы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image884.gif, причем http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image979.gifрасположена в нижнем треугольнике http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1130.gif, а http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image981.gif– соответственно в верхнем треугольнике http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image1133.gifматрицы http://ok-t.ru/studopediaru/baza3/660669179441.files/image884.gif.

Коротко алгоритм Краута как вариант чередования столбцов и строк можно представить следующей последовательностью действий:

1) положим k = 1 и перейдем к пункту 3;

2) используя выражение (6.20), рассчитываем k-ый столбец матрицы L и, если k = n, закончим процедуру разложения;

3) используя выражение (6.21), рассчитываем *k*-ую строку матрицы ***U***;

4) положим *k = k + 1* и перейдем к пункту 2.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе курсового исследования нами была проделана следующая работа:

1. Изучены основные понятия теории решения СЛАУ.
2. Рассмотрены определение LU-разложения.
3. Приведены примеры программной реализация исследуемого метода.

В результате чего, считаем, что цель курсового исследования нами достигнута, аминь.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Г.С. Шевцов, О.Г. Крюкова, Б.И. Мызникова. Численные методы линейной алгебры. Изд-во "Лань". 2011.
2. Интернет-проект «Википедия» [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/LU-разложение
3. Интернет-проект «Студопедия» [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: http://studopedia.ru/3\_67266\_LU-faktorizatsiya-algoritmom-krauta.html
4. Интернет-проект «Кибер гуру» [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: http://www.cyberguru.ru/sources/php-sources/algorithms/algoritm-krauta-nizhne-verkhnyaya-lu-dekompozitsiya-matritsy.html

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение A

Программная реализация алгоритма

Так как задачей данной курсовой работы это исследование и программная реализация интерполяции кубическими сплайнами в текущем параграфе мною представлен программный код реализованный через язык программирования C++

Результат выполнения программы представлен ниже (Рис. А.1).

Рис.A.1

Программная реализация алгоритма

Так как задачей данной курсовой работы это исследование и программная реализация интерполяции кубическими сплайнами в текущем параграфе мною представлен программный код реализованный через язык программирования C++

(Рис. B.1).

Рис.B.1