Mat121 Oblig 01 Ole Kristian W.

Oppgave 1.

a) $4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0$ gjennom origo

Først finner vi normalvektoren

som er $[4,-7,3]$

Deretter velger vi at

$u = [1,0,0]$

$x = su + tv$

$x_1 = s$

$x_2 = 0$

$x_3 = t, \frac{v}{3}$

s og t varierer for alle $\mathbb{R}$

Parameterframstillingen blir da

$$x = s[1,0,0] + \frac{t}{3}[0,0,1]$$

b) $4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 2$

Denne gangen ikke gjennom Origo.

Normalvektor = $[4, -7, 3]$

$u = [1, 0, 0]$ $v = [0, 0, 1]$

Først ønsker vi å finne et punkt P som ligger i planet.

Vi kan la

$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$

Det gir:

$4(1) - 7(0) + 3(0) = 2$

$4 = 2$

Dermed ligger $P = [1, 0, 0]$ i planet.

$$\begin{pmatrix} x_1 = s + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{t}{3} \end{pmatrix}$$

$x = P + su + tv$

$$\underline{\underline{x = [1,0,0] + s[1,0,0] + \frac{t}{3}[0,0,1]}}$$

2. a)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi kan allerede se at

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ er det samme som } -2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dermed er de to vektorene lineært avhengige.

Vi kunne også ha sjekket ved å se om

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Det gir:

$3 = a \cdot -6$

$-2 = a \cdot 4$

$1 = a \cdot -2$

og hvis alle tre gir samme svar vil de være lineært avhengige.

$a = -0.5$

$a = -0.5$

$a = -0.5$

b) $\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-8\\-2\\-5\end{bmatrix}$

Disse vektorene kan skrives som

$$a\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\-1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\-8\\-2\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Deretter løser vi et system med likninga:

$$2\cdot a + 1\cdot b + 1\cdot c = 0 \qquad (1)$$
$$-1\cdot a + 2\cdot b - 8\cdot c = 0 \qquad (2)$$
$$2\cdot a + 2\cdot b - 2\cdot c = 0 \qquad (3)$$
$$-1\cdot a - 1\cdot b - 5\cdot c = 0 \qquad (4)$$

Når vi løser disse vil vi få at

$a=b=c=0$ dermed lineært uavhengig

Alternativt finne RREF

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

1. Deler R_1 på 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \leftarrow$$

2. $R_2 = R_2 + R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \leftarrow$$

3. $R_3 = R_3 - 2 \cdot R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \leftarrow$$

4. $R_4 = R_4 + R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \leftarrow$$

5. $R_2 = \frac{2R_2}{5}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \leftarrow$$

Step 6. $R_1 = R_1 - \frac{R_2}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \leftarrow$$

7. $R_3 = R_3 - R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

8. $R_4 = R_4 + \frac{R_2}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \leftarrow$$

Vi bytter på R_3 og R_4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. $R_3 = -\frac{R_3}{6}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$

10. $R_1 = R_1 - 2R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11. $R_2 = R_2 + 3R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$ Lineært uavhengige

3. La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -k \end{bmatrix}$$

a) Vi ønsker å vite om hvilket verdier av k gjør $Ax = \begin{bmatrix} -17 \\ 34 \end{bmatrix}$ konsistent.

I dette tilfellet definerer vi

$$B = \begin{bmatrix} -17 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -17 \\ -2 & -4 & -k & 34 \end{array}\right] \qquad 1. \quad R_2 = R_2 + 2 \cdot R_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & -k+6 & 0 \end{array}\right]$$

Hvis $k = 6$, $r(A) = 1$, $r(A|B) = 1$

I tillegg er $\begin{bmatrix} -17 \\ 34 \end{bmatrix} = -17 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

dermed "linear multiple".

<u>konsistent for alle k-verdier</u>

$$-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{k} = -\frac{17}{34}$$

<u>Sant!</u>

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -k \end{bmatrix}$

$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 34 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -k \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 4x_2 - kx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 34 \end{bmatrix}$$

① $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

② $-2x_1 - 4x_2 - kx_3 = 34$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = \frac{3}{-k} = \frac{1}{34}$$

$$\frac{3}{-6} \neq \frac{1}{34} \quad \text{for } k=6$$

dermed ingen løsning og

Ikke konsistent

c) Lineæravbildingen T er "på"

hvis og bare hvis kolonnene til A er i $\mathbb{R}^2$
(spenner over)

Hvis vi ser på ligningssystemet
$Ax = b$ hvor b er en vilkårlig vektor
i $\mathbb{R}^2$. Hvis kolonnene til A danner
grunnlag for $\mathbb{R}^2$ vil systemet alltid
ha en unique løsning for x, dermed
er T "på" for alle k-verdier

d) For at T skal være "en-til-en"

~~T være både injektiv og surjektiv~~

må hver vektor b i $\mathbb{R}^2$
gi at $T(x) = b$ ha på det meste
ha en løsning x i $\mathbb{R}^3$

$[1,2,3]^T$ og $[-2,-4,-k]^T$

Sjekker lineær uavhengighet med cross product

$$[1,2,3]^T \times [-2,-4,-k]^T = [k+8,-8,4]$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

T er "en-til-en" for alle k-verdier

4) Avgjør om avbildingene er lineæravbildinger:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{T}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ -x_2 + 7x_1 \end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ -x_2 + 7x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \left(a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= aT\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bevis ved matrise så ser vi at dette <u>er</u> en lineæravbilding

Standard-matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} x_4 + 2x_1 \\ x_3 - 3x_1 + 1 \end{bmatrix}$

La $c = 3$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$T(cu) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \underline{\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$= c(T(u)) = 3T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\begin{bmatrix} 1+2 \\ 0-3+1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}}$$

$$\therefore \underline{T(c \cdot u) \neq c \cdot T(u)}$$

<u>Dermed ikke en lineær avbilding</u>

c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$c = 5 \in \mathbb{R}$

$c \cdot u = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore T(c \cdot u) = T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$c \cdot T(u) = 5T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore T(c \cdot u) \neq c \cdot T(u)$

Dermed T er ikke en lineær avbilding

5. Diagram over vei og veikryss

$$180 = x_1 + x_2$$

$$x_2 = 30 + x_3 + x_4$$

$$x_1 + x_3 = 80 + x_5$$

$$x_4 + x_5 = 70$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ 80 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ 80 \\ 70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ -100 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ -70 \\ 70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 100 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cont.

$$x_1 = 180 - x_2$$

$$-x_3 = 100 - x_2 - x_5$$

$$x_4 = 70 - x_5$$

Den generelle løsningen blir da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 - x_2 \\ x_2 \\ x_2 + x_5 - 100 \\ 70 - x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ -100 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jeg mener dette skal være riktig. Uansett.. sorry for stygge paranteser.. ☺

$$x_1 = 180 - x_2$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_3 = x_2 + x_5 - 100$$
$$x_4 = 70 - x_5$$
$$x_5 = x_5$$

generelle løsning

c)

Hvis x_4 var stengt altså

$x_4 = 0$ dvs. $x_5 = 70$

så ville den generelle løsningen blit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 180 - x_2$

$x_2 = x_2$

$x_3 \; x_2 - 30$

$x_4 = x_4 \leftarrow 0$

$x_5 = x_5 \leftarrow 70$

d) $x_4 = 0$ og $x_5 = 70$

$x_1 = 150$ $x_3 = 0$

da er $\underline{\underline{x_2 = 30}}$ minste mulige verdi.