Oblig 2 Mat 121 Ole Kristian Westby

Oppgave 1)

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-10-3 & 2+0-1 \\ 2-5+9 & 4+0+3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}}}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4 & 2+2 & -1+6 \\ -5+0 & -10+0 & 5+0 \\ 3+2 & 6+1 & -3+3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -5 & -10 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}}}$$

1b)

T og S kan defineres som

$T(a) = Aa$ og $S(b) = Bb$

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3-2+2\\6-1-6\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}}$$

$$x = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$S(x) = S\left(\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\-5 & 0\\3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3-2\\-15+0\\9-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\-15\\8\end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{x = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \text{ og } y = \begin{bmatrix}1\\-15\\8\end{bmatrix}}}$$

Oppgave 2)

a) Vi regner ut determinanten til matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ a & 0 & b \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Vi bruker rekke-ekspansjon:

$$\det(A) = 2\{(0\cdot 7) - (b\cdot 2)\} - (-1)\{(a\cdot 7) - (b\cdot 1)\}$$
$$+ 4\{(a\cdot 2) - (0\cdot 1)\}$$

$$= 2\{0 - 2b\} + 1\{7a - b\} + 4\{2a\}$$

$$= 2(-2b) + 7a - b + 8a$$

$$= -4b - b + 7a + 8a$$

$$= -5b + 15a$$

$$\underline{\underline{= 15a - 5b}}$$

b) $15a - 5b = 5 \quad | /5$

$3a - b = 1$

$a = 1$
$b = 2$ gir $3\cdot 1 - 2 = 1$ ✓

$$\underline{\underline{a = 1,\ b = 2}}$$

2c) Vi har $a=1$, $b=3$ altså $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 2(0-6) - (-1)(7-3) + 4(2-0) = \underline{\underline{0}}$$

Når determinanten er 0 og ingen andre matriser 3x3 i A enn A selv vil $R(A) \neq 3$

Dermed, rekkene i A utspenner ikke $\mathbb{R}^3$ når $a=1$ og $b=3$.

2d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ a & 0 & b \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ Part 1

$a=2$, $b=0$, så $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = -2(-7-8) = 30 \neq 0$$

Dermed har $Ax = b$ én løsning for hver $b \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

2d) Part 2

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = b_1 \\ 2x + 0y + 0z = b_2 \\ x + 2y + 7z = b_3 \end{cases}$$

I)
$$2x = b_2$$
$$x = \frac{b_2}{2}$$

II)
$$y = \frac{\begin{bmatrix} 2 & b_1 & 4 \\ 2 & b_2 & 0 \\ 1 & b_3 & 7 \end{bmatrix}}{30} = \frac{-2(7b_1 - 4b_3) + 10b_2}{30}$$
$$= \frac{-7b_1 + 4b_3 + 5b_2}{15}$$

III)
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & b_1 \\ 2 & 0 & b_2 \\ 1 & 2 & b_3 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-2(-b_3 - 2b_1) - b_2(4+1)}{30}$$
$$= \frac{4b_1 - 5b_2 + 2b_3}{30}$$

Når $\det(A) \neq 0$ så eksisterer A^{-1}

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}(b)$$
$$x = A^{-1}b$$

Oppgave 3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -6 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & -6 & -5 \\ 3 & -6 & 2 & -9 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Vi løser $Ax = 0$

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & -4 & 3 & -6 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & -6 & -5 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -9 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

(Bytter pen) → Basis for nullrom

$$= \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & \frac{3}{2} & -3 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

Vi kan sette inn hva som helst for x og det blir fortsatt riktig

Et basis for NulA er da:

$$\text{Nul}A = \{(2,1,0,0,1,0),\ (-\tfrac{3}{2},0,1,1,0,0),\ (3,0,0,0,0,1)\}$$

Part 1

3b) Ved å se på den reduserte matrisen A at kolonne 1, 3, ~~6~~ har alle "pivots" og er lineært uavhengig

dermed er basis for Kol A = [illegible]

$= \{(2, -1, 3), (3, 2, 2)\}$

Rad A finner vi ved å se på A igjen.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Første og ~~tredje~~ andre rad er lineært uavhengige og den siste raden er bare nuller, såkalt "zero row"

Et basis for Rad A $= \{(2, -4, 3, -6, -2, 3), (0, 0, 1, -3, -2, 4)\}$

3c) Dette kan vi sjekke med skalar x, y, z:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -6 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & -6 & -5 \\ 3 & -6 & 2 & -9 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 8 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Som blir dette systemet:

$2x - y + 3z = 33$

$-4x + 2y - 6z = 8$

$3x + 2y + 2z = 32$

$-6x + 3y - 9z = 0$

$-2x - 6y + 2z = 0$

$3x - 5y + 7z = 0$

part 1

3c)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 33 = 0 \\ -4x + 2y - 6z - 8 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 32 = 0 \\ -6x + 3y - 9z = 0 \\ -2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

Ja, $\begin{bmatrix} 33 \\ 8 \\ 32 \end{bmatrix}$ er i KolA

Litt usikker på neste steg...
men tror vi kan sjekke om rank(coeffisient) = rank(augmented)
Da er $\begin{bmatrix} 33 \\ 8 \\ 32 \end{bmatrix}$ i Kol A.

3d) For å sjekke om $(1, -2, 1, -3, 0, 5)$ er i RadA må vi sjekke om x, y skalarer eksisterer slik at

$$(2, -4, 3, -6, -2, 3)x + (0, 0, 1, -3, -2, 4)y$$
$$= (1, -2, 1, -3, 0, 5)$$

Lager systemet..

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ -4x - 6y &= -2 \\ 3x + 2y &= 1 \quad \text{gir} \\ -6x - 9y &= -3 \\ -2x - 2y &= 0 \\ 3x + 4y &= 5 \end{aligned}$$

$$[b] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vi setter opp matrisen $[A|b]$:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 0 & -4 & -6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -6 & -9 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Systemet har ingen løsning fordi siste rad $0 = 0$. Dermed, vektor $(1, -2, 1, -3, 0, 5)$ ikke i Rad A.

Oppgave 4)

a)

Augmented matrix $= [A \mid B]$

$A = \{e_1, e_2\}$

$B = \{b_1, b_2\}$

$$[A \mid B] = [e_1 \; e_2 \mid b_1, b_2]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{P_b = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}}$$

La $x = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$Q_{B \leftarrow e} = P^{-1}_{e \leftarrow B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \left(\frac{-1}{5} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$[X]_B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}_B}}$$

4b)

$$P_{C\leftarrow B} = P_{C\leftarrow e} \cdot P_{e\leftarrow B}$$

Vi vet allerede $P_{e\leftarrow B}$

$$P_{e\leftarrow C} = \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$P_{C\leftarrow e} = P_{e\leftarrow C}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{-5}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$P_{C\leftarrow B} = P_{C\leftarrow e} \cdot P_{e\leftarrow B} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

4c) $P_{B\leftarrow C} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$[y]_B = P_{B\Leftarrow C} \cdot [y]_C = \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -4\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}7\\ -3\end{bmatrix}}}$

$\underline{\underline{[y]_B = \begin{bmatrix}7\\ -3\end{bmatrix}}}$

$\underline{\underline{[y]_C = \begin{bmatrix}5\\ -4\end{bmatrix}}}$

Oppgave 5) part 1

$A_x = b$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 3(0+3) - 2(0+3) - 1(1) = \underline{2}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 3 - 2(-3a) - 1(-3-a)}{2} = \underline{\frac{7a+9}{2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \underline{\frac{-9a-9}{2}}$$

5) part 2

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3a+5}{2}$$

I) $\frac{7a+9}{2}$

II) $\frac{-9a-9}{2}$

III) $\frac{3a+5}{2}$

$a=-1$ gir

I) $\frac{7(-1)+9}{2} = \frac{2}{2} = \underline{1}$

II) $\frac{-9(-1)-9}{2} = \frac{9-9}{2} = \frac{0}{2} = \underline{0}$

III) $\frac{3(-1)+5}{2} = \frac{2}{2} = \underline{1}$

5) part 3

Vi tester,

$3x + 2y - z = 2$

$3(1) + 2(0) - 1 = 2$ ✓

$y + 3z = 3$

$0 + 3(1) = 3$ ✓

$-x - y = a$

$-1 - 0 = -1$ ✓

Vi ser at det blir riktig

Oppgave 6)

a) Finn determinanten

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Siden tredje kolonne består av bare nuller vil $\underline{\underline{\det(A) = 0}}$

Dette er fordi når vi regner ut determinanten må vi gange med disse 0-ellere.

b) $$A = \begin{bmatrix} a & -2a & x & 3 \\ b & -2b & y & -1 \\ c & -2c & z & 5 \\ d & -2d & w & 3 \end{bmatrix}$$

$$a\underbrace{\begin{bmatrix} -2b & y & -1 \\ -2c & z & 5 \\ -2d & w & 3 \end{bmatrix}} - b\underbrace{\begin{bmatrix} -2a & x & 3 \\ -2c & z & 5 \\ -2d & w & 3 \end{bmatrix}} + c\underbrace{\begin{bmatrix} -2a & x & 3 \\ -2b & y & -1 \\ -2d & w & 3 \end{bmatrix}} - d\underbrace{\begin{bmatrix} 2a & x & 3 \\ -2b & y & -1 \\ -2c & z & 5 \end{bmatrix}}$$

Vi regner ut hver individuelt

I) $a(-6bz + 10bw + 6cy + 2cw - 10dy - 2dz)$

II) $-b(-6az + 10aw + 6cx - 6w - 10dx + 6dz)$

III) $c(-6ay - 2aw + 6bx - 6bw + 2dx + 6dy)$

IV) $-d(-10ay - 2az + 10bx - 6bz + 2cx + 6cy)$

Forenkler uttrykkene og får $\underline{\underline{\det(A) = 0}}$

6c)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a+1 & b+2 & c+3 & d+4 & e+5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w & t \end{bmatrix}$$

det(A) kan skrives som

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w & t \end{vmatrix}$$

Vi vet at dersom to rader eller kolonner er like så er det = 0.

I første determinant er rad 1 og 3 lik

I andre er 2 og 3 lik.

Dermed,

$$\underline{\underline{\det(A) = 0 + 0 = 0}}$$