

《音乐与数学》期中研究题

2017 — 2018 学年第二学期

每个同学从下列九个大题中任选一题, 独立完成

一、拉弓的弦振动问题.

给定实数 $L > 0$, 假定一条均匀的细弦被固定在 x 轴上 $(0, 0)$ 和 $(L, 0)$ 之间. 记这条弦的位移函数为 $u(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t \geq 0$. 则弦的振动满足一维振动方程及其边值条件

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0; \text{ (边值条件)} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $c > 0$ 是常数. 研读下列参考文献的相关内容, 讨论拉弓条件下的一维振动方程的边值条件和初值条件问题, 进而弄清拉弓时弦的振动模态.

二、敲击弦

对于弦的一维振动方程, 讨论敲击弦的情况下弦的振动模态.

三、鼓的振动模态

研读参考文献的相关内容, 讨论鼓所对应的二维振动方程, 试得出其一般解, 进而弄清其振动模态.

一~三题的参考文献:

- [1] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer-Verlag, New York, 1991, 第2章、第3章.
- [2] David J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, 第3章.
- [3] Gareth Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*, Vol. I, The MIT Press, Cambridge, 2006, 第8章.

四、关于三分损益的问题

研读下列参考文献, 分析《吕氏春秋》中所描述的律生过程与《管子·地员》中描述的“三分损益”过程有何异同?

- [1] 刘永福, 《吕氏春秋》音律相生法的分析和解读, 中国音乐学, 2017 (3): 67 - 74.
- [2] 宋克宾, 需回归原典、分清语境解读古代乐律问题, 音乐探索, 2014 (1): 80 - 85.

五、“蕤宾重上”问题

研读下列参考文献, 讨论在《吕氏春秋》的律生过程中, 为何上生得到蕤宾后, 没有按照三分损益的规则进行下生, 而是再次上生得到大吕.

- [1] 陇菲, “重上生”与“再下徵”·“新音阶”与“旧音阶”, 文化艺术研究, Vol. 3 (2010), no. 5, 121-128.
- [2] 丁慧, “大阴阳与蕤宾重上”和“小阴阳与蕤宾下生”, 湖北师范学院学报(哲学社会科学版), Vol. 32 (2012), no. 1, 58-69.
- [3] 程贞一著, 王翼勋译, 《黄钟大吕》, 上海科技教育出版社, 上海, 2007.

六、毕达哥拉斯五度相生法的文献研究

试找出尽可能早期的, 清楚、完整地描述了毕达哥拉斯五度相生法的文献. 这样的文献应当明确指出以 $3/2$ 为生律元素, 具体说明产生至少包含 C D E F G A B 七个音级的过程.

七、编程实现三种律制

1. 借助你熟悉的任一软件工具, 分别依照五度相生律、纯律和12平均律产生两个八度的各个音级 (包括自然音级和变化音级);
2. 充分考虑三种律制的差异, 适当选取一段长度在 30" - 90" 的乐曲, 分别以三种律制演奏并录制;
3. 试对实验结果进行描述和分析.

八、纯律的实际应用问题.

选取下列 任意一个 子题目, 讨论纯律在音乐实践中的应用:

1. 声乐 (有伴奏或者无伴奏的情形);
2. 无品 (fret) 弦乐器 (如提琴、二胡等);
3. 管弦乐队中各组乐器的律制协调;
4. 民族乐器与西洋乐器之间的配合;
5. 其他.

可以采用的研究方法: 根据自己的音乐实践体会; 查找并研读相关文献; 开展社会调查, 走访专业人士; 等等.

九、马尔科夫链

任选一首你熟悉的歌曲或者乐曲, 截取其中适当长度的一段 (例如 8~10 小节).

1. 统计计算出这段音乐的 1 阶和 2 阶马尔科夫链的转移概率矩阵;
2. 考虑音符的时值, 即把相同音高但时值不同的音符当作不同的状态, 求出相应的状态空间和 1 阶马尔科夫链的转移概率矩阵;
3. 分别用 1, 2 小题得到的三个转移概率矩阵各产生一段随机音乐, 比较并描述它们的异同.
4. 试对比较得到的结果作出理论解释.

第九题参考文献:

- [1] F. Brooks, A. Hopkins, P. Neumann, and W. Wright, An experiment in musical composition, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-6** (1957), 175–182.
- [2] Martin Gardner, White and brown music, fractal curves and one-over-f fluctuations, *Scientific American*, **238** (1978), No. 4, 16–33.
- [3] Gareth Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*, Volume I, The MIT Press, Cambridge, 2006, §9.19.