Trigonométrie

Mesure d'angle

- π [rad] = 180 [deg]
- $\frac{\pi}{180}$ [rad] = 1 [deg]
- 1 [rad] = $\frac{180}{\pi}$ [deg]

multiplie l'équation par 40°

40° en rad :

$\frac{\pi}{180} \cdot 40$ [rad] = $40 \cdot 1$ [deg]

multiplie l'equation par $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$ rad en degrés :

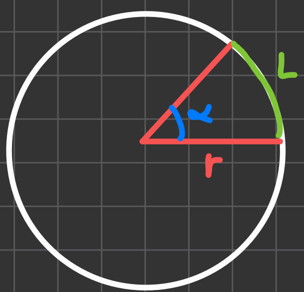
$\frac{\pi}{2} \cdot 1$ [rad] = $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$ [deg]

pour passer de radian aux degrés, remplacer $n\pi$ par $n \cdot 180$ et inversement pour passer de degrées en radians

radians

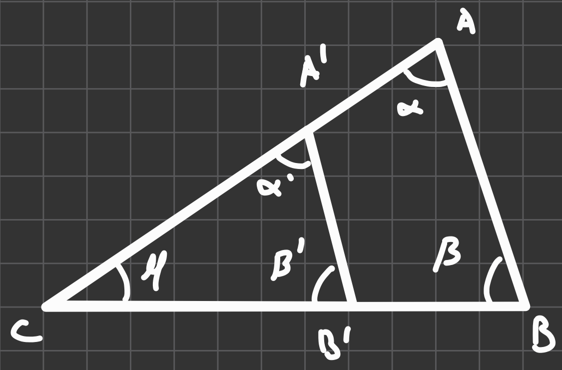
la mesure en radian est un rapport

le radian n'est pas une unité mais bien un rapport
(x [rad] précise juste que un travail en radians)



$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Thalès

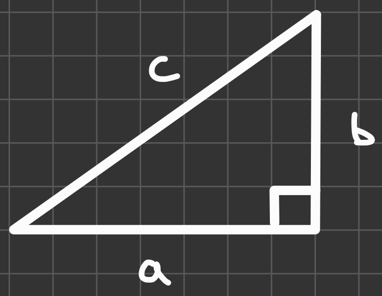


Si les triangles sont homothetique l'on a des rapports de longueurs partout (λ)

$$\lambda = \frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

les angles sont les mêmes

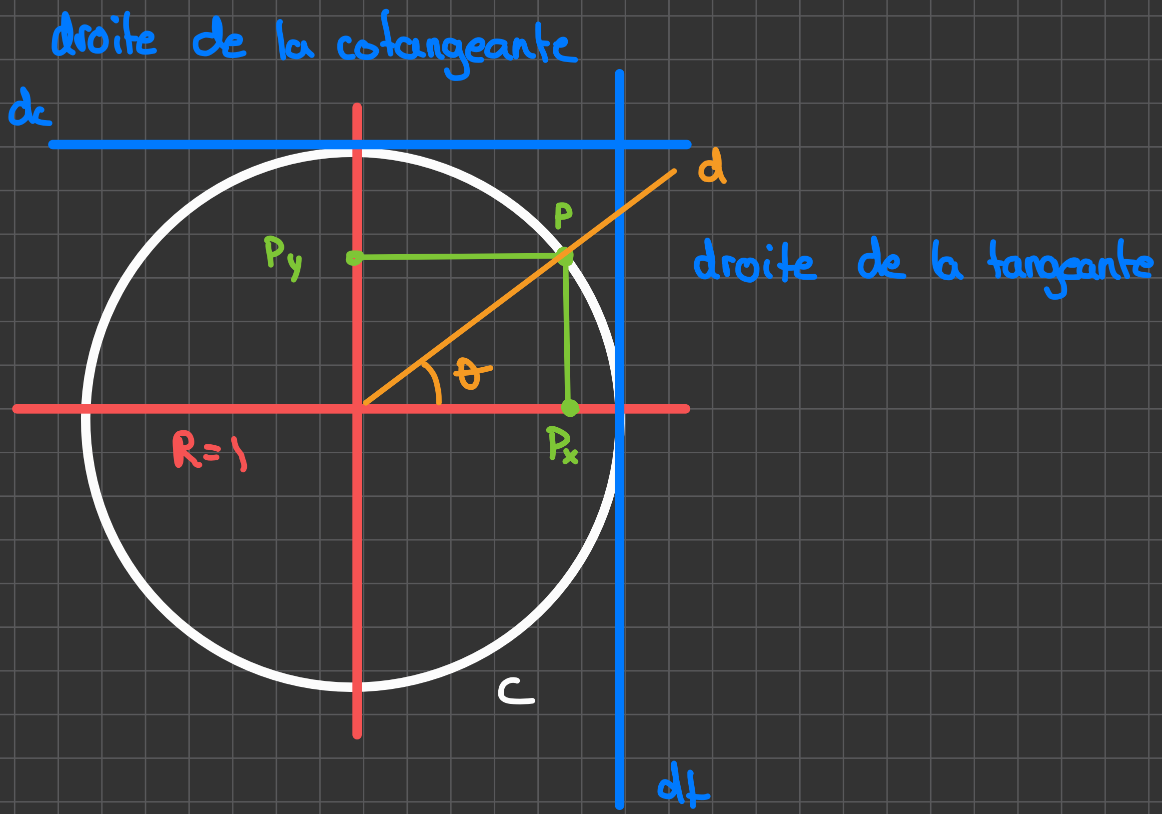
Pythagore



dans un triangle rectangle :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Cercle trigonométrique



Position intersection de d et du cercle C

$P_x = \cos\theta$

$P_y = \sin\theta$

Position intersection de d et d_t

$x = 1$

$y = \tan\theta$

Position intersection de d et d_c

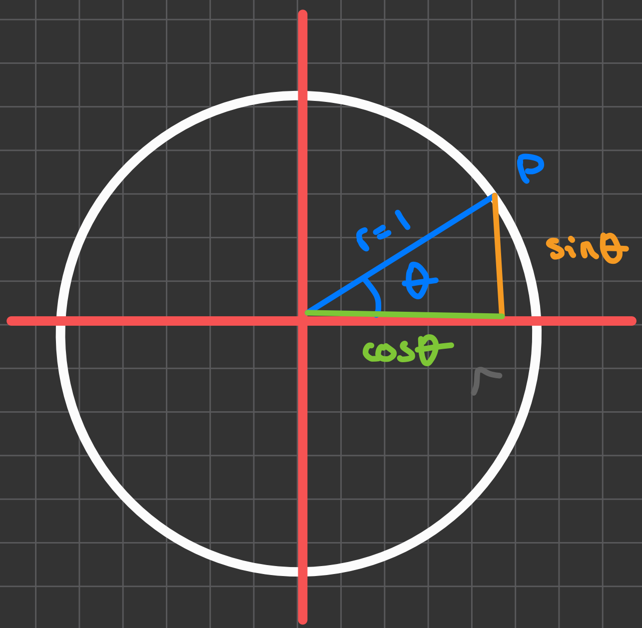
$x = \cot\theta$

$y = 1$

rapports trigonométriques

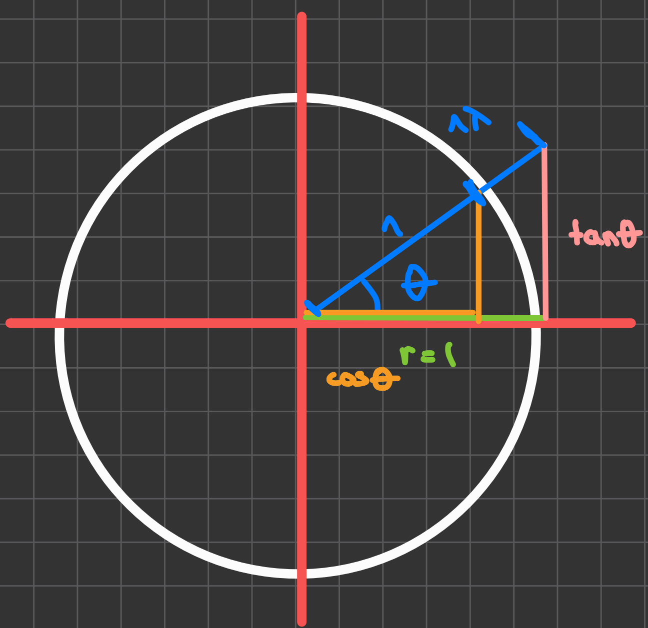
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Par pythagore



$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

Par pythagore et thales car c'est λ le triangle de la démonstration au-dessus



$(1\cdot\lambda)^2 = \tan^2\theta + 1^2 = \lambda^2 = \tan^2\theta + 1$

thales sur l'axe x :

$\lambda = \dfrac{1}{\cos\theta}$

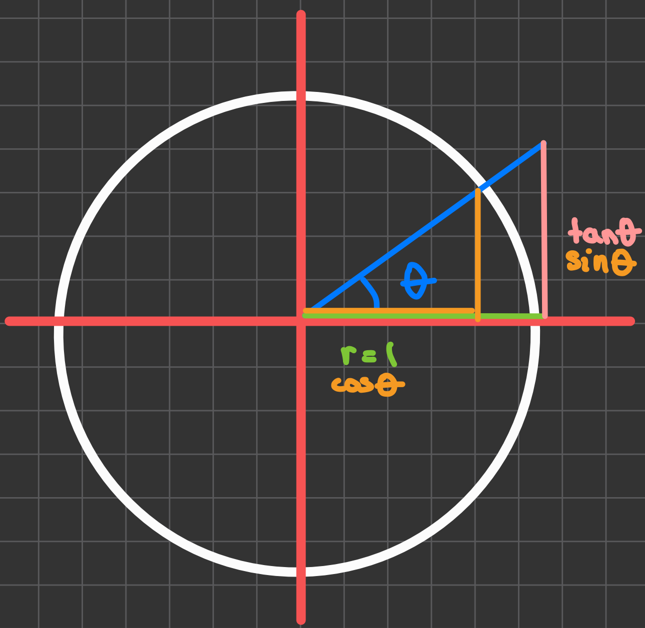
$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1$

$$1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

même logique qu'au dessus

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Par Thalès

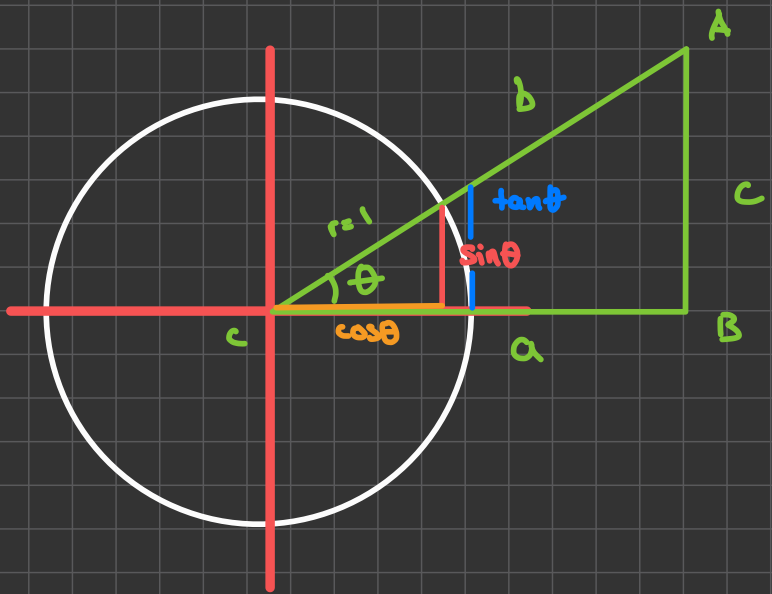


$$\frac{\tan\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Rapports trigonométriques sur triangle rectangle

tan - opp - adj   sin - opp - hyp   cos - adj - hyp



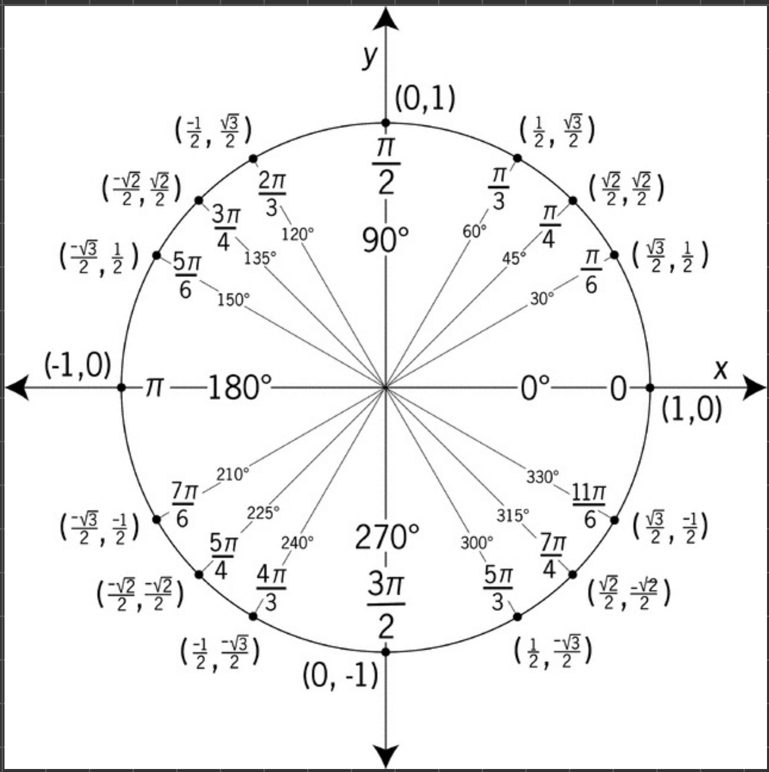
$$\tan\theta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{b}$$

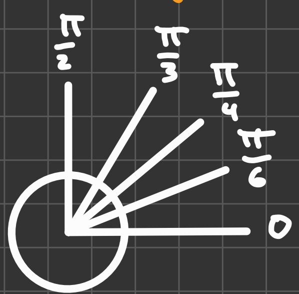
$$\sin\theta = \frac{c}{b}$$

angles particuliers

ils donnent des valeurs exactes pour les fonctions trigonométriques (sin, cos, tan)



Technique de la main



$$\sin\theta = \frac{\text{nombre de doigts en dessous}}{2}$$

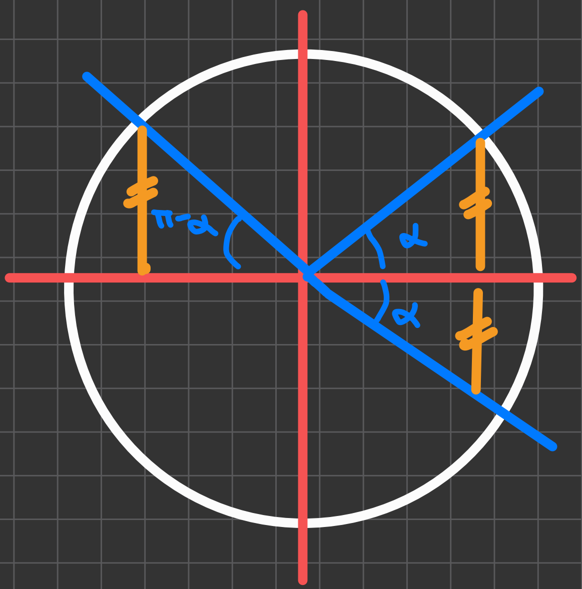
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{nombre de doigts en dessus}}{2}$$

1 malin si nécessaire par exemple si on a: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

égalités des fonctions trigonométriques

Pour s'aider il est pratique d'utiliser le cercle trigonométrique (dessiné)



$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$

$\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$

...

$\tan\theta$

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ impaire

période : π

$\tan 0 = 0$

réciproque : $\theta = \operatorname{atan}(x) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin\theta$

$\mathbb{R} \to [-1 ; 1]$

$\sin 0 = 0$

période : 2π

réciproque :

$$\begin{cases} \theta = \sin x + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \theta = \pi - \sin x + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ impaire

$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

$\sin(\theta - \pi) = -\sin\theta$

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$-\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

$\cos\theta$

$\mathbb{R} \to [-1 ; 1]$

$\cos 0 = 1$

période : 2π

réciproque :

$$\begin{cases} \theta = \cos x + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \theta = -\cos x + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ paire

$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha - \pi) = -\cos(\alpha)$

$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$

forme généralisée

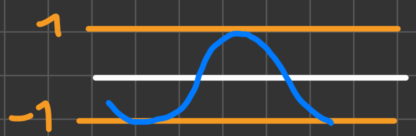
où $fn \in \{\sin, \tan, \cos\}$

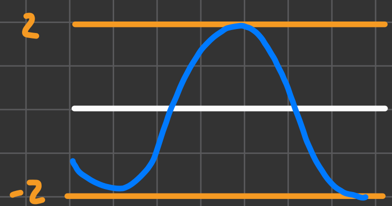
$$x = A \cdot fn(B\alpha - C) + D$$

$$x = A \cdot fn[B(\alpha - C)] + D$$ plus simple pour le déplacement sur Ox

où

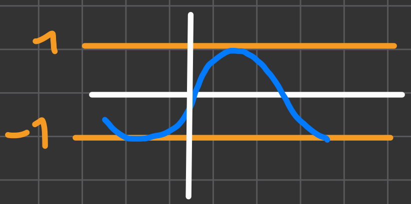
A est l'amplitude

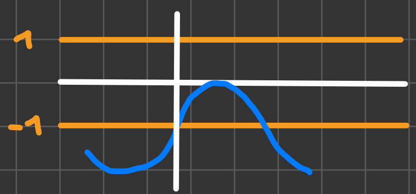




$2 \cdot fn(x)$

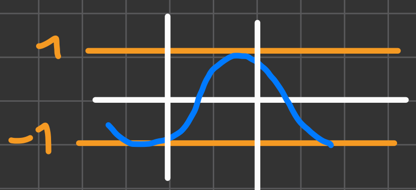
D est le déplacement vertical

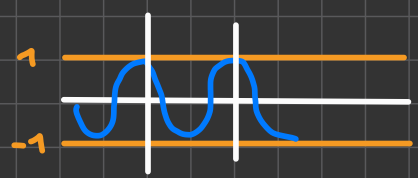




$fn(x) - 1$

B va modifier la période, c'est la vitesse angulaire





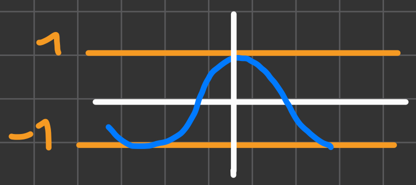
$fn(2x)$

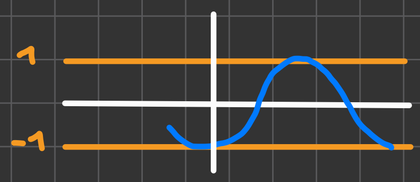
ceci divise la période en 2.

de façon générale : $T = \dfrac{T_{base}}{B}$, $T_{base} = 2\pi$ pour sin/cos
$= \pi$ pour tan

réduit car : $\sin(\underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1}) = \sin(2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\tfrac{1}{2}})$

C est le décalage horizontal





$fn(x-\pi)$

attention car la forme

$$x = A \cdot fn(B\alpha - E) + D$$

ne donne par directement C, il faut mettre B en évidence:

$$x = A \cdot fn\left[B\left(\alpha - \frac{E}{B}\right)\right] + D$$

ducoup le décalage est :

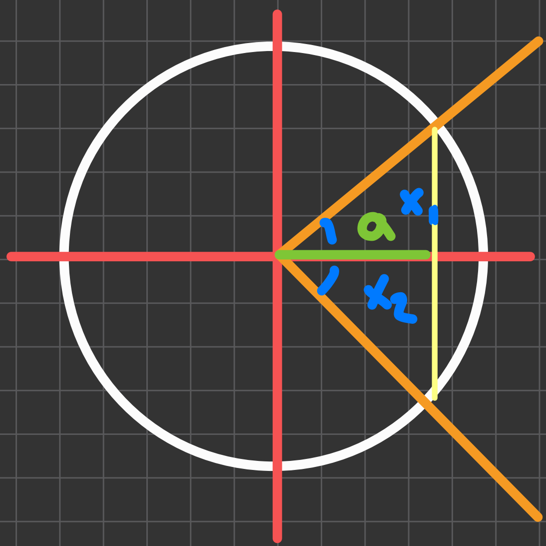
$$C_x = -\frac{E}{B}$$

équations trigonométriques

il y'a plusieurs outils qui permettent de résoudre des équations trigonométriques

- Cercle trigonométrique
- Représentation graphique
- Propriétés de la fonction trigonométrique
- Fonction réciproque de la fonction trigonométrique

Cercle trigonométrique

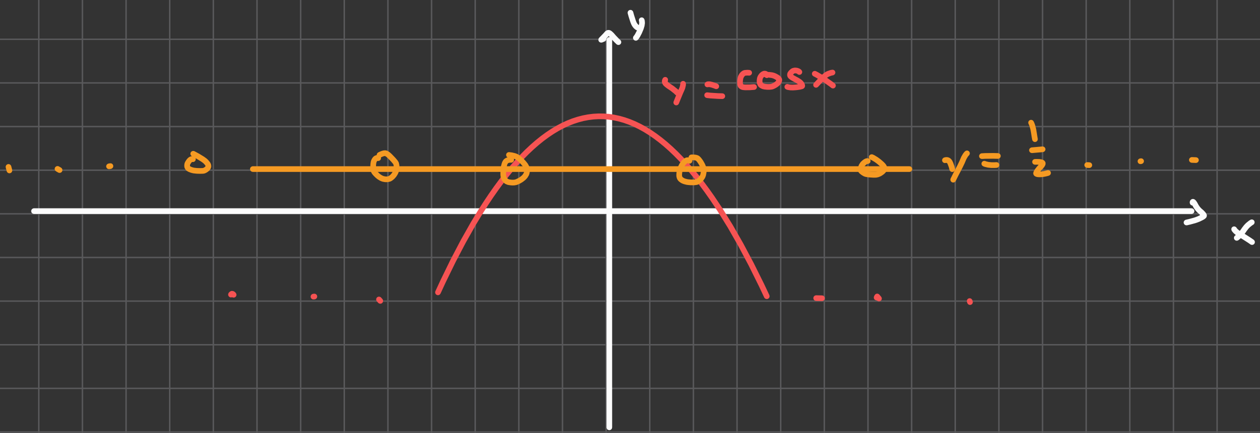


$\cos x_i = a$

a est fixé et on cherche les angles qui satisfont l'égalité

résolution graphique

il suffit de dessiner le graphe des deux fonctions et trouver les intersections.



ils y a dans la plupart des cas une infinité de solutions si on ne limite pas l'interval.

Les équations où n'apparait qu'une fonction trigonométrique

les équations particulières sont du type:

- $F(\sin x) = 0$
- $F(\cos x) = 0$
- $F(\tan x) = 0$

où F est une fonction quelconque égale à 0

par exemple $F(x) = 1+3x = 0 \Rightarrow f(\sin x) = 1+3\sin x = 0$

① On pose alors $t = \sin\theta$, $t = \cos\theta$ ou $t = \tan\theta$ suivant le cas

② l'équation devient alors:

$F(t) = 0$

③ En resolvant l'équation on obtient un ensemble de solutions
$S = \{t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; \ldots ; t_n\}$

④ Pour chaque solution t_i on pose (suivant le cas)

$\sin\theta = t_i$ $\qquad\qquad$ $\cos\theta = t_i$ $\qquad\qquad$ $\tan\theta = t_i$

Equations trigonométriques doubles

équation de la forme :

- $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$
- $\cos(f(x)) = \cos(g(x))$
- $\tan(f(x)) = \tan(f(x))$

Par exemple avec sin:

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{asin}(\sin(g(x))) + 2\pi k \\ \quad\;\; = g(x) + 2\pi k \\ f(x) = \pi - \operatorname{asin}(\sin(g(x))) + 2\pi k \\ \quad\;\; = \pi - g(x) + 2\pi k \end{cases} , \; k \in \mathbb{Z}$$

Si nécessaire on utilisera les transformations sin <-> cos

par exemple $\sin\theta = \cos\theta$

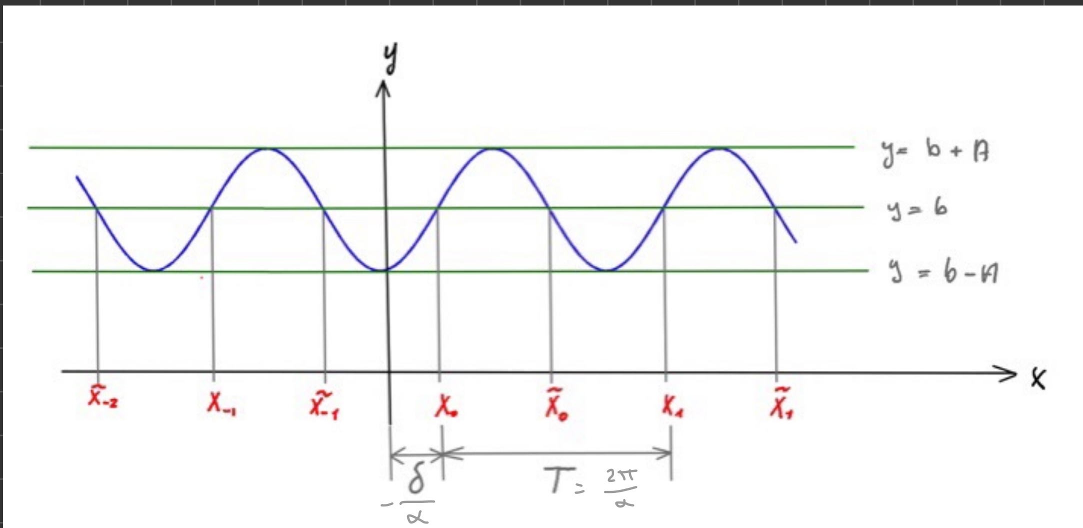
$\cos\theta$ en sin : $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

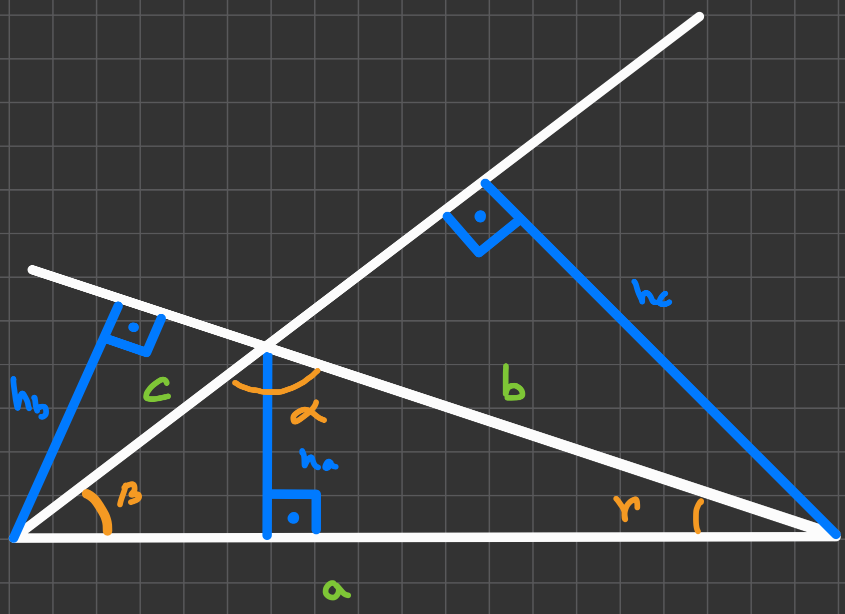
$$\begin{cases} \theta = \operatorname{asin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) + 2\pi k \\ \theta = \pi - \operatorname{asin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) + 2\pi k \end{cases} = \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} + \theta + 2\pi k \\ \theta = \pi - \frac{\pi}{2} + \theta + 2\pi k \end{cases}$$

Période, phase et vitesse angulaire

$y = A \cdot \sin(\alpha x - \delta) + b$



Théorème 1
Aire d'un triangle quelconque



$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ avec $\sin(\gamma) = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \cdot \sin\gamma$

$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\sin\gamma$

en listant les hauteurs

$h_a = b \cdot \sin\gamma$

$h_b = c \cdot \sin\alpha$

$h_c = a \cdot \sin\beta$

donc

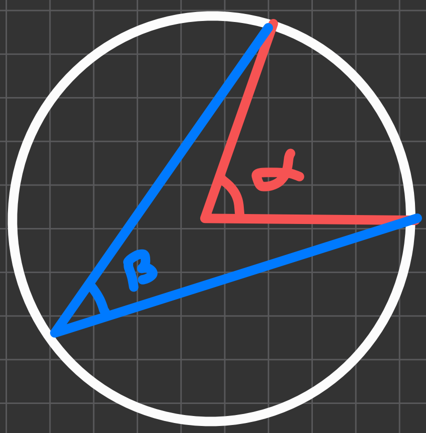
$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$ h_a

$A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$ h_b

$A = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \sin\beta$ h_c

Théorème 2

Théorème de l'angle inscrit

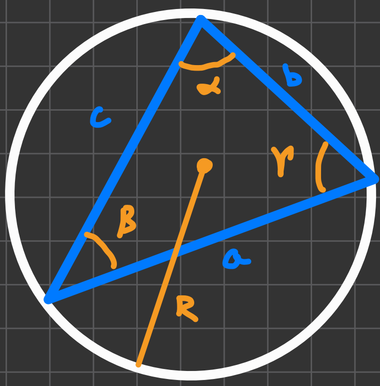


$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

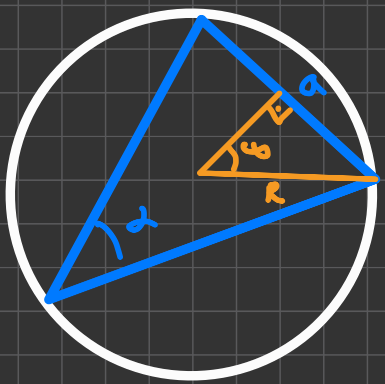
$$\alpha = 2\beta$$

Théorème 3

Théorème du sinus



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



on a $\sin\delta = \frac{a/2}{R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin\delta}$

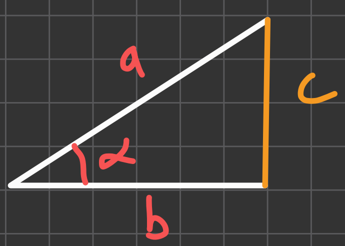
mais par le théorème de l'angle inscrit on a $2\delta = 2\alpha \Rightarrow \delta = \alpha$
donc

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha}$$

On l'utilise si

1) On connait 2 angles et 1 côté
2) On connait 1 angle et 2 côté

mais si l'angle connu est celui formé par les 2 côtés, le théorème nous permet pas d'obtenir directement le côté opposé c

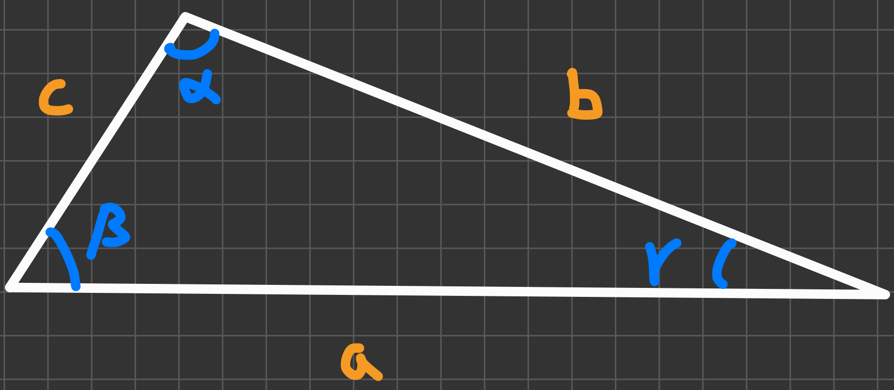


il est alors utile d'utiliser le théorème du cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\alpha)$$

Théorème 4

Théorème du cosinus



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

On l'utilise quand on connait 3 côtés, cela permet de démarrer la résolution complète du triangle

À savoir

Formules de base
Formules simples
Somme et différence de 2 angles
Les angles doubles
Les demi-angles
Les transformations produit -> somme
les transformations somme -> produit

par ⇔

Passage de formes

Formules de base

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$ $\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos(\alpha)$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\alpha)$

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\tan(\pi-\alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$
$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot(\alpha)$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cot(\alpha) = \cot(-\alpha)$

Formules simples

elles découlent des définitions + théorèmes de bases (thalès, pythagore)

	$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$	pythagore
thalès	$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
	$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Sommes et différence de 2 angles

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

inverse

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$S = SC + CS$

$C = CC - SS$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Formules des angles doubles

utilisez sommes et differences : $2\alpha = \alpha + \alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Formules des demis-angles

On substitu α par $\frac{\alpha}{2}$ dans les formule du dessus

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$
$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$
$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Transformation produit → Somme

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$
$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

Transformation somme -> produit

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = 2\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\tan(\alpha)+\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}$$

$$\tan(\alpha)-\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\ \cos\beta}$$