Nombres Complexes

Qu'est-ce qu'un nombre complexe

On a pas assez de nombre dans $\mathbb{R}$ pour résoudre certains problèmes, on étend donc cet ensemble en ajoutant un nombre i ayant la propriété suivante

$$\boxed{i^2 = -1}$$

aucun nombre dans $\mathbb{R}$ au carré vaut -1 (toujours >0)

$(-1)\cdot(-1) = 1$; $1 \cdot 1 = 1$; $2 \cdot 2 = 4$; $(-2)\cdot(-2) = 4$

Définition formelle de l'ensemble $\mathbb{C}$

l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est formellement défini de la façon suivante.

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib \mid (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}$$

On note

$a = \mathrm{Re}(z)$ Partie réelle de z

$b = \mathrm{Im}(z)$ Partie imaginaire de z

Plan de Gauss

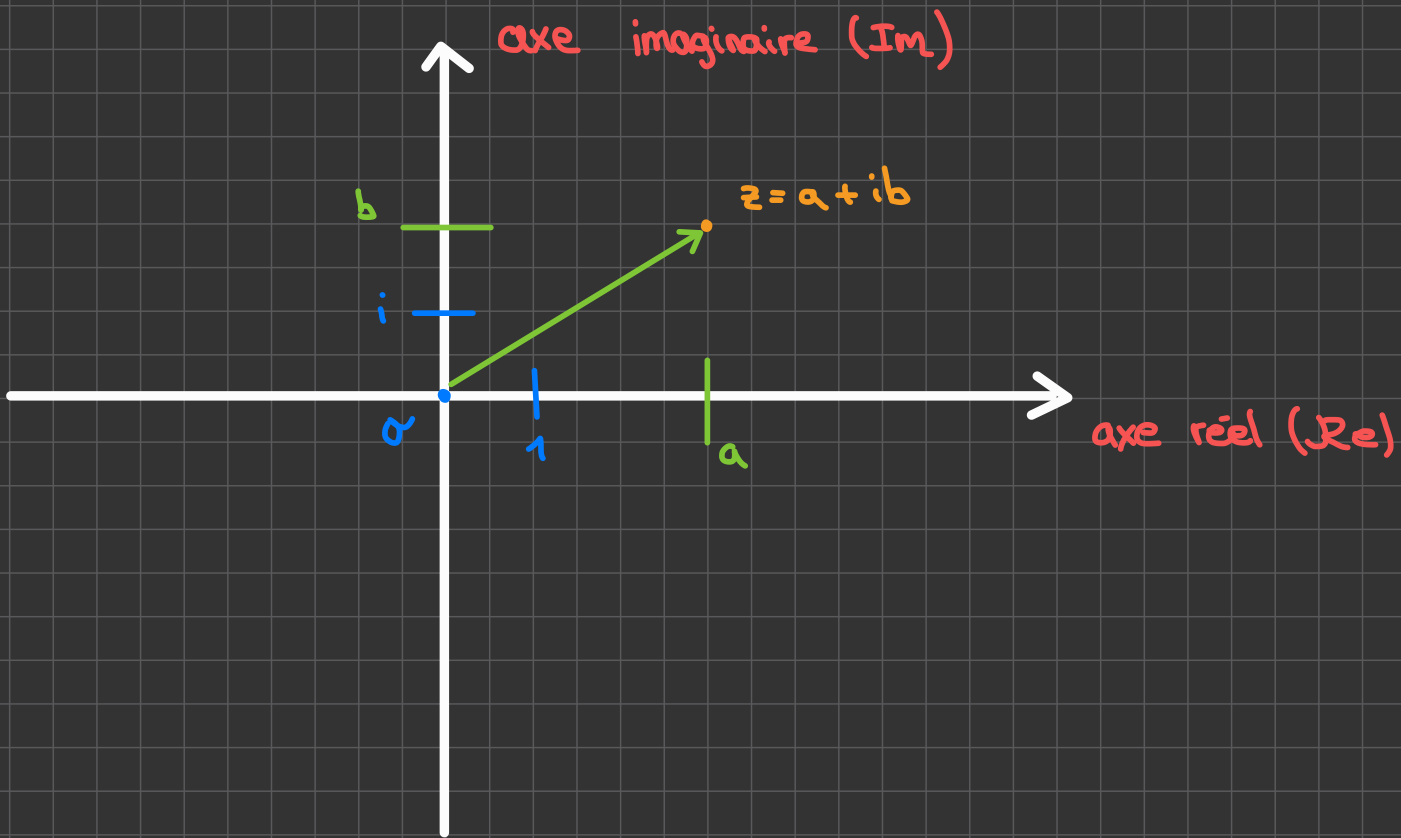
On va représenter un nombre complexe $z = a + ib$ par les deux scalaires qui compose ce nombre dans un plan muni de deux axes.

le point représentant z se trouve alors à

$z_p(a;b)$

mais un utilise plutôt un vecteur pour se le représenter et celui-ci a pour composantes:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

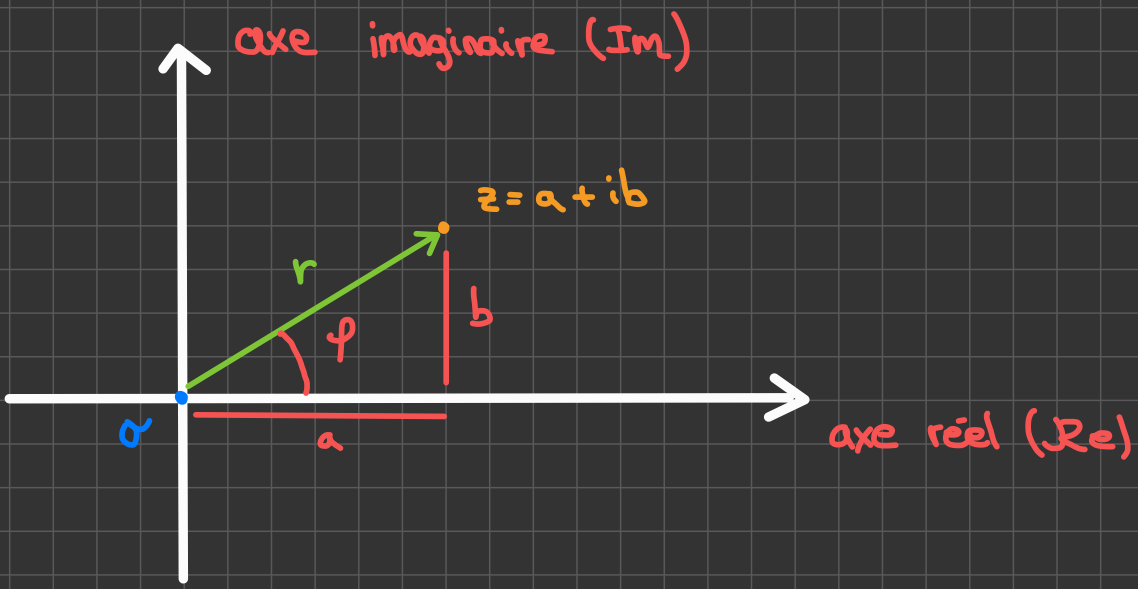


Module et argument

Il est possible de retrouver notre point z_p avec une distance r depuis l'origine ainsi qu'un angle φ par rapport à l'axe O_x (axe des réel)

r est le module de z noté $|z|$

φ est l'argument de z noté $\mathrm{Arg}(z)$



On obtient le module et l'argument de cette façon:

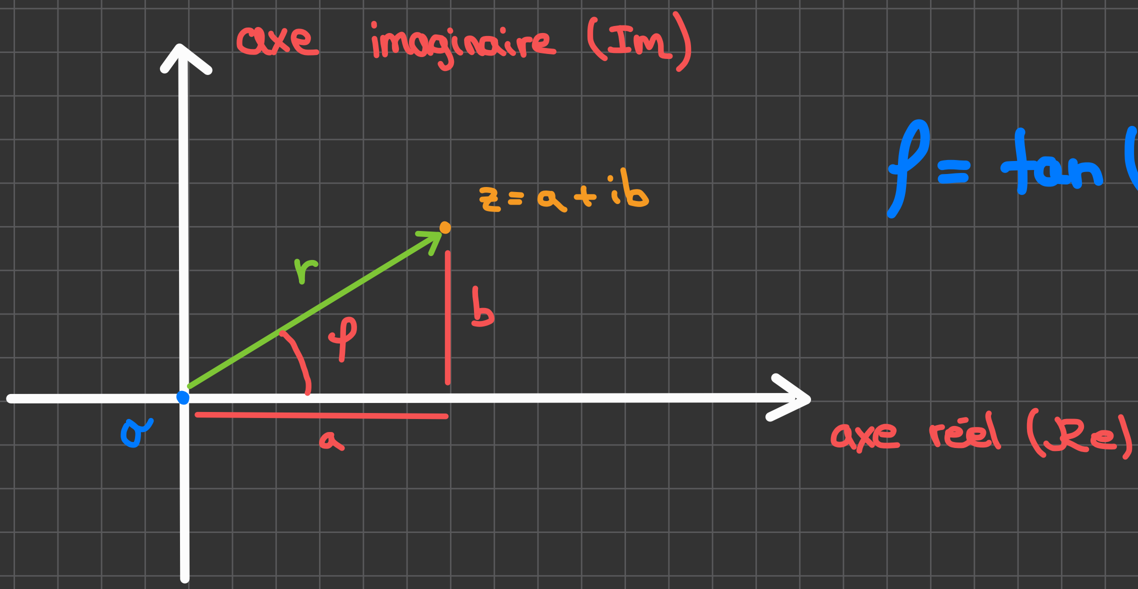
module (pythagore) : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

argument (tan) : $\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \tan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \tan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Précision sur l'argument

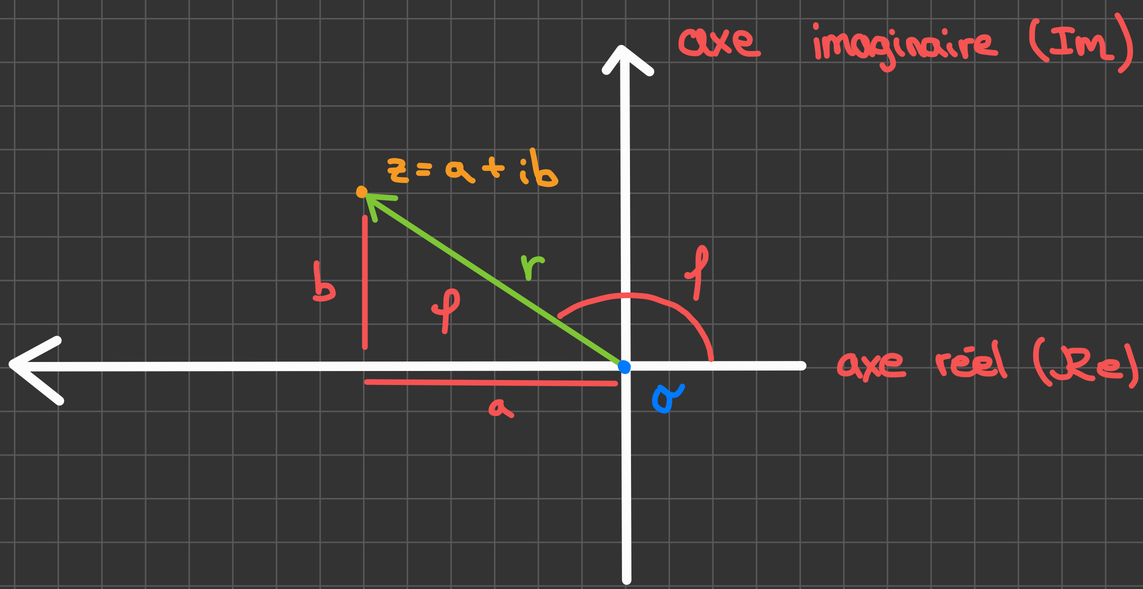
argument (tan) : $\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \tan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \tan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$

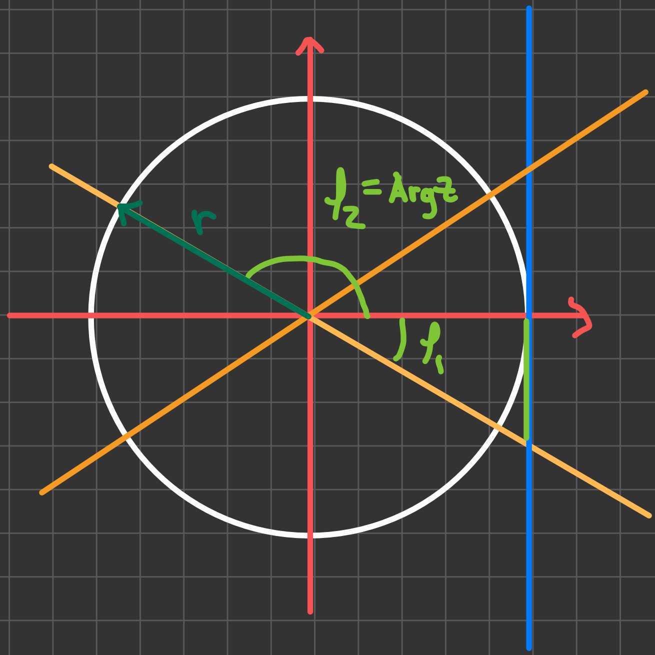
cas où $a > 0$



$$\varphi = \tan\left(\frac{b}{a}\right)$$

cas où $a < 0$





$$\varphi_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{\varphi_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi}$$

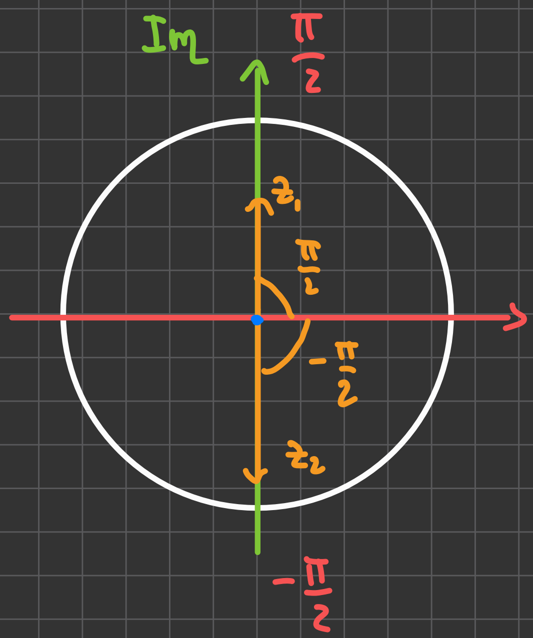
Retrouver a et b avec l'argument et le module

$$\begin{cases} a = Im(z) = |z| \cos(Arg(z)) \\ b = Re(z) = |z| \cdot \sin(Arg(z)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = Im(z) = r \cos(\varphi) \\ b = Re(z) = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$$

Cas remarquable où $a=0$
(z est purement imaginaire)

$$\varphi = \mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } b>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } b<0 \end{cases}$$



Egalité de deux nombres complexes

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases}$$

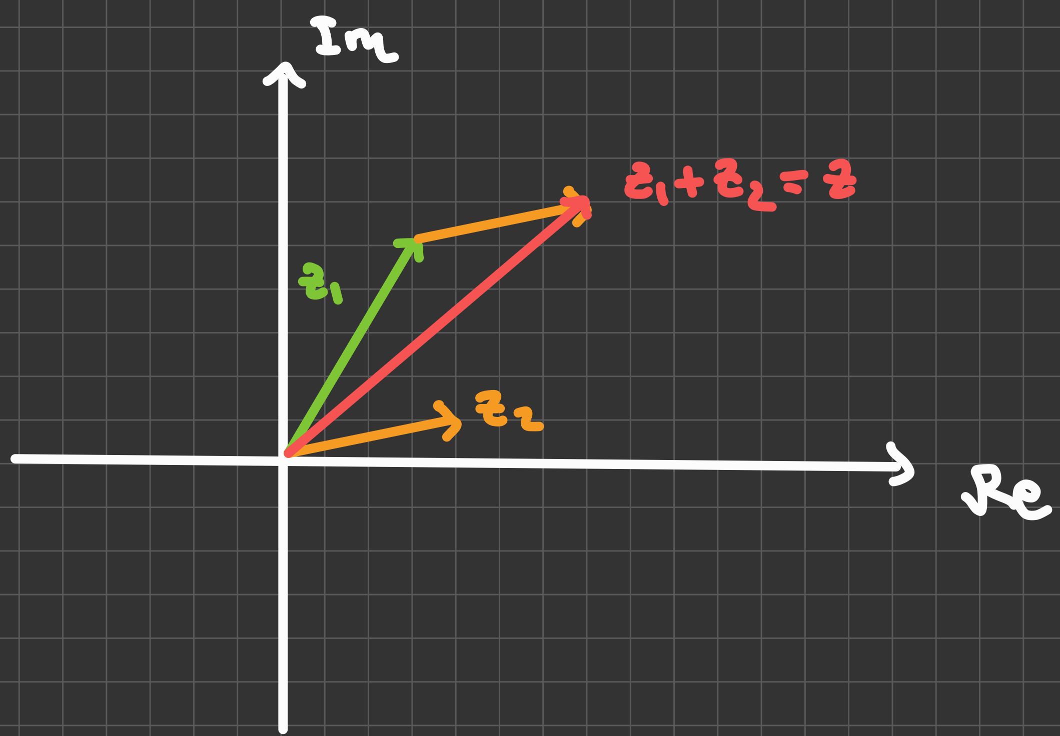
Somme et différence

mise en évidence

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

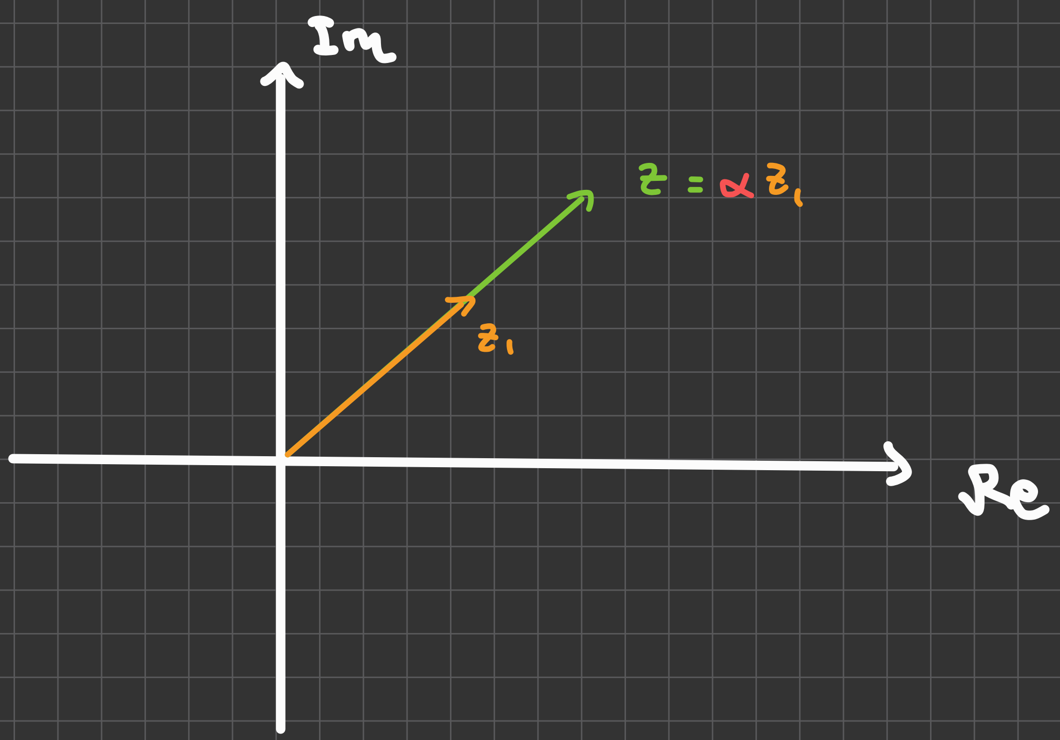
implique une translation dans le plan de Gausse



Multiplication par un scalaire

$$z = \alpha(a+ib) = \alpha a + \alpha i b$$

homothétie sur le plan de Gauss



Multiplication par un complexe

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$$

$$= a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 + \underbrace{i^2}_{=-1} b_1 b_2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

dans le plan de Gauss ceci est pas évident :

- multiplier les modules $|z_1| \cdot |z_2|$
- additionner les arguments $\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$

donc

$$z = z_1 \cdot z_2 \Rightarrow \begin{cases} |z| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \end{cases}$$

Conjugaison complexe

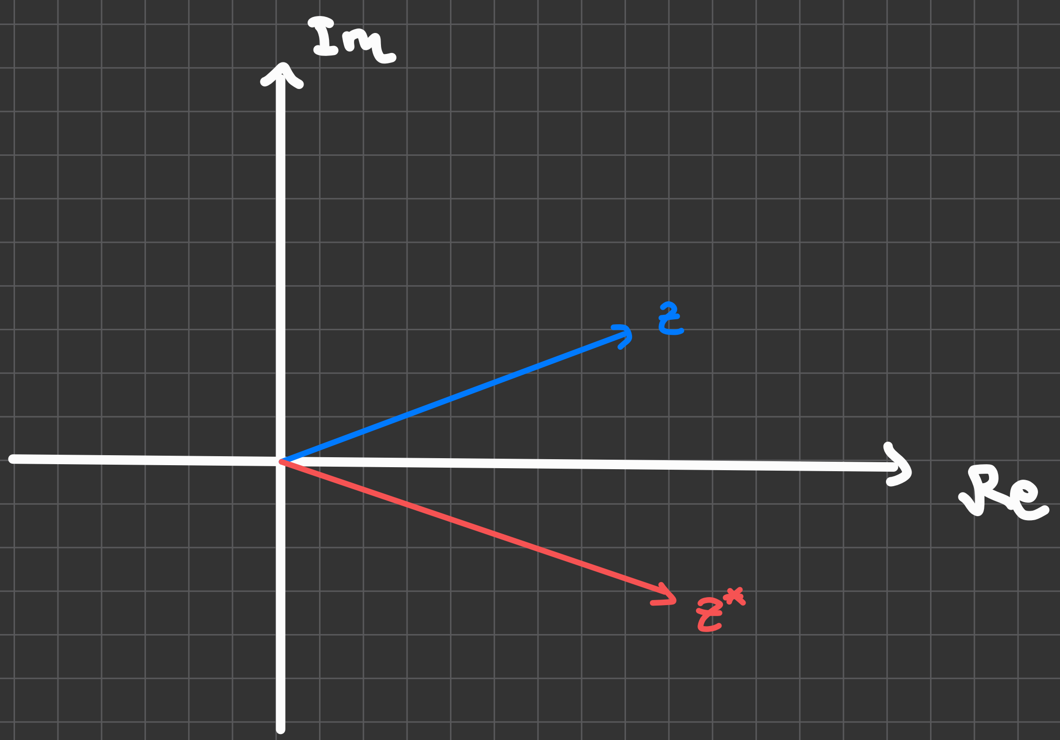
Soit

$z = a + ib$ et $z^* = a - ib$

alors

z et z^* sont conjugués complex l'un de l'autre

dans le plan de Gauss on a une symétrie axiale par rapport à l'axe des réels (Ox)



Propriétés de la conjugaison complexe

$$z \cdot z^* = |z|^2$$

$$(z^*)^* = z$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z - z^* = 2\,\mathrm{Im}(z)$$

$$(z^*)^n = (z^n)^*$$

Quotient de deux nombres complexes

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot z_2^*$$

Si on a le module et l'argument

- On divise les modules
- On soustrait les arguments

$$z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \\ \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) \end{cases}$$

Forme polaire des nombres complexes

Formule d'Euler et DeMoivre

e^x, $\sin x$ et $\cos x$ peuvent s'écrire:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$$

avec $x = i\theta$ dans e^x

$$e^x = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots + \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ...

donc

$$e^{i\theta} = 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \pm \ldots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} \pm \ldots\right)}_{\sin\theta}$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

donc

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

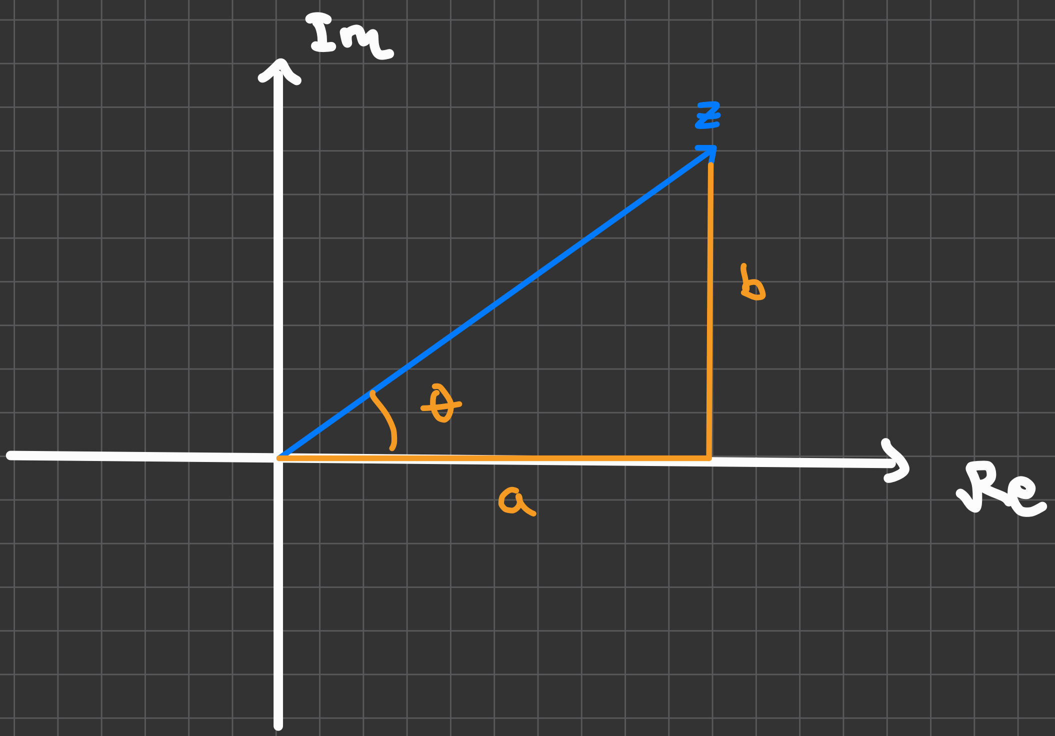
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de DeMoivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Nombres sous forme polaire

Si on revient au plan de Gauss avec notre nombre complexe z



$a = r\cos\theta$ où $r = |z|$

$b = r\sin\theta$ $\quad\theta = Arg(z)$

$z = a + ib = r\cdot\cos\theta + ir\cdot\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

donc

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

est la forme polaire de z

$z = a + ib$ est la forme cartésienne

On utilise de préférence la forme polaire pour :

- Multiplier
- diviser

On utilise de préférence la forme cartésienne pour :

- Additionner
- Soustraire

Passage de la forme cartésienne à polaire

$$r = |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Passage de la forme polaire à cartésienne

$z = re^{i\theta}$

$z = r\cos\theta + ir\sin(\varphi)$

$$z = a + ib \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = r\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(z) \\ b = r\sin(\varphi) = \mathrm{Im}(z) \end{cases}$$

Egalité sous forme polaire

$$\boxed{z_1 = z_2 \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k\ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

Conjugué complexe sous forme polaire

$$z = re^{i\varphi} = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

$$z^* = r\cos\varphi - ir\sin\varphi$$
$$= r\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right] = re^{-i\varphi}$$

$$\boxed{z = re^{i\varphi} \iff z^* = re^{-i\varphi}}$$

Produit de deux nombres complexes

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$$z = z_1 \cdot z_2 = \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{r} \cdot e^{i\overbrace{(\varphi_1 + \varphi_2)}^{\varphi}}$$

$r = r_1 r_2$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Quotient de deux nombres complexes

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Puissance entière sous forme polaire

$z^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{N}$

Racine d'un nombre complexe

dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$x^3 = 8$ a 1 solution

dans $\mathbb{C}$:

$x^3 = 8$ a 3 solutions

Plus généralement :

$(W_k)^n = z$ a n solutions $W_1, W_2, \dots, W_n$

$z = re^{ik}$ avec $W_k = r_k e^{i\varphi_k}$

$$r_k^n e^{in\varphi_k} = re^{i\varphi}$$

donc

$r_k^n = r$ $\qquad$ $r_k = \sqrt[n]{r}$

$n\varphi_k = \varphi + 2\pi k$ $\qquad$ $\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k$

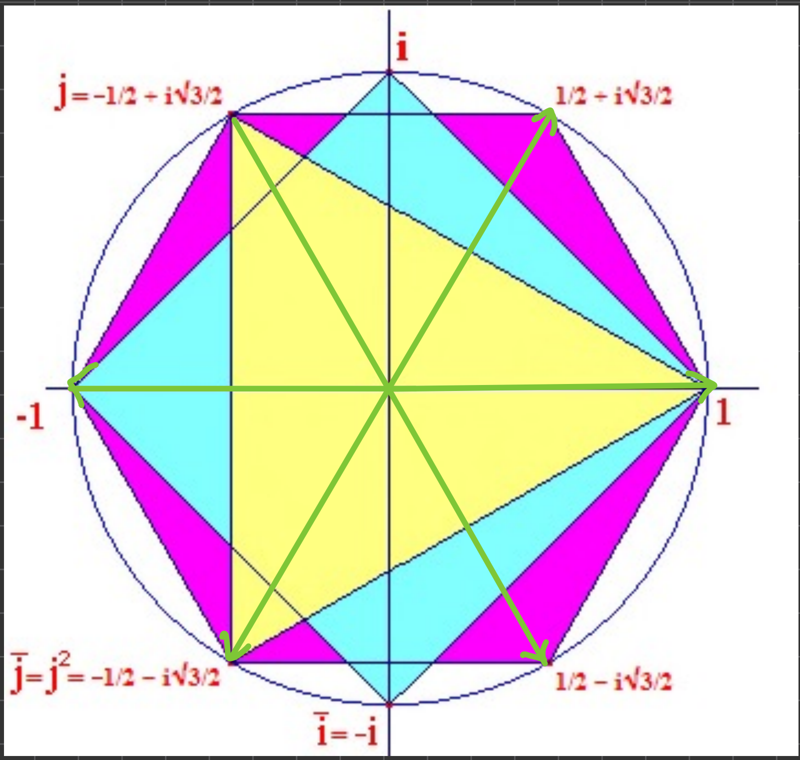
$$\boxed{\begin{gathered} w_k = \sqrt[n]{r}\; e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{gathered}}$$

les racines dans le plan de Gauss

1) elles ont toutes le même module $\sqrt[n]{r}$.
elles formes donc un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$

2) en partant de w_k à w_{k+1}, l'argument crois toujours de $\frac{1}{n} \cdot 2\pi$.
Les racines sont donc uniformément réparties sur le cercle

donc les racines formes un polygone régulier à n côtés



i
j = -1/2 + i√3/2
1/2 + i√3/2
-1
1
j̄ = j² = -1/2 - i√3/2
1/2 - i√3/2
ī = -i

Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes ou reels

Soit le polynome de degre n en z

$$P_n(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

il existe alors n solutions réelles ou complexes à l'equation

$$P_n(z) = 0$$

Corollaire 1 du théorème

Donc un polynôme en $z \in \mathbb{C}$ peut toujours s'écrire
$$P_n(z) = a(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

où $z_i \in \mathbb{C}$ sont les racines de $P_n(z)$

Corollaire 2 du théorème

racine conjuguée

Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels

(il y'en a $n+1$)

Soit le polynôme, coefficients réels et variable complexe

$$P_n(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Alors si

z_1 est une racine complexe de $P_n(z)$

(solution de $P_n(z) = 0$)

z_1^* est aussi une racine $P_n(z)$

$$P_n(z_1) = 0 \iff P_n(z_1^*) = 0$$

Fonction à variables complexes

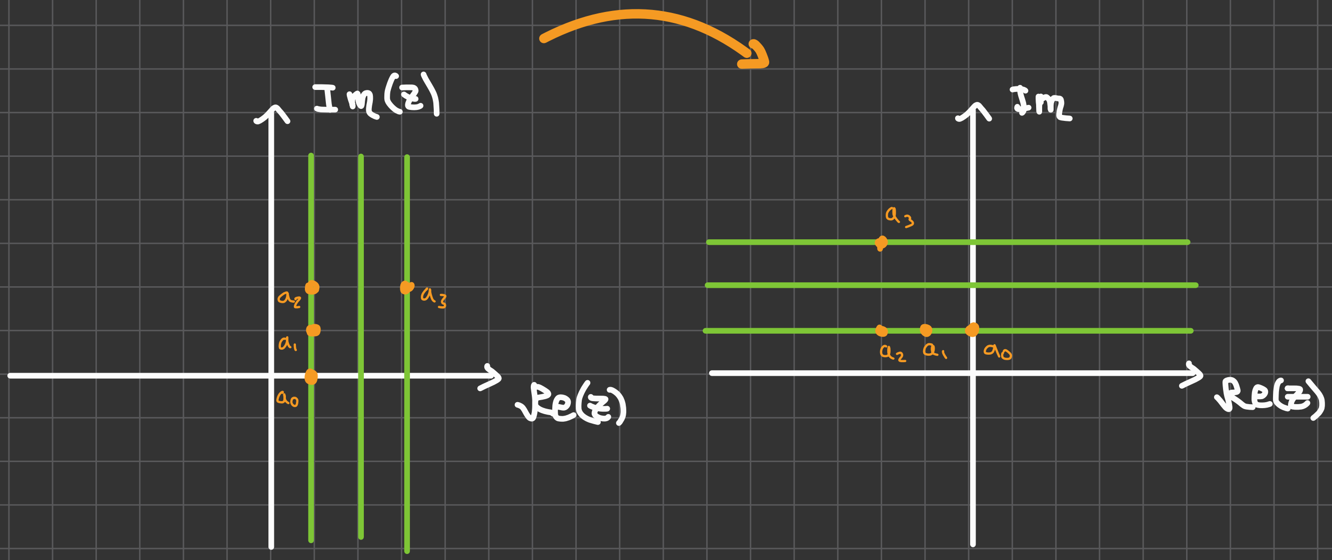
Une fonction à variable complexe f est appelée fonction complexe

Elle associe un nombre complexe z, un autre nombre complexe $w = f(z)$

Contrairement à une fonction réelle $f(x) = y$, on ne pas pas représenter une fonction complexe graphiquement (4 dimensions)

le plus simple est de faire deux plan de Gauss un de départ et un d'arriver

Exemple: $w = f(z) = iz$



$z = re^{i\varphi}$

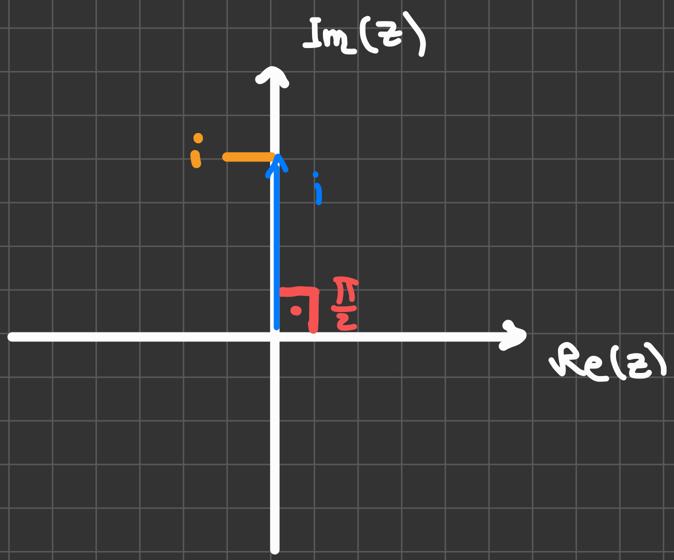
$f(z) = iz = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$

rotation de $\frac{\pi}{2}$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

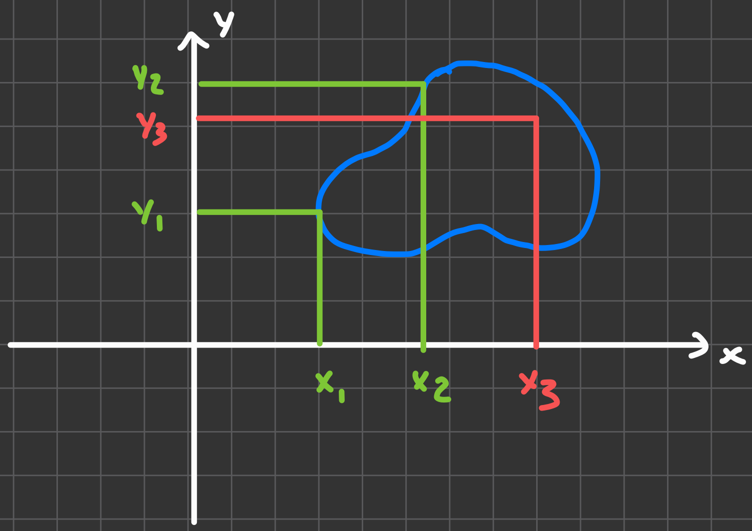
$$z = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = i$$

sur le plan de Gauss



Lieux géométrique dans le plan de Gauss

Dans le plan cartésien (O_x, O_y), un équation de la forme $f(x,y)=0$ définie une courbe du plan :



Seul les points sur cette courbe satisfont l'équation $f(x,y)=0$

$f(x_1, y_1)=0$

$f(x_2, y_2)=0$

$f(x_3, y_3)\neq 0$

c'est la même chose dans le plan de Gauss

pour dessiner $f(z)=0$, il faut trouver les valeurs $x=Re(z)$ et $y=Im(z)$ impliquant $f(Re(z), Im(z))=0$

On peut aussi trouver les valeurs $|z|$ et $Arg(z)$ impliquant $f(|z|, Arg(z))=0$

exemple :

$f(z) = |z| - 2 = 0$

méthode 1 :

$z = x + iy$, donc $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(z) = |z| = 2$

$\sqrt{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$

cercle de rayon 2 centré en $C(0,0)$

méthode 2

$z = re^{i\varphi} \Rightarrow |z| = r$

$f(z) = |z| = 2$

$r = 2$

cercle de rayon 2 centré en $C(0,0)$
(car uniquement l'angle φ varie)