Data Advanced

Hoofdstuk 1: Combinatieleer

PXL DIGITAL

Lector:
Heidi Tans
Sam van Rijn

1. Doel combinatieleer

Na het bestuderen van dit deel kan je

- in toepassingen bepalen om welk soort groepering het gaat
- m.b.v. een formularium het aantal elementen in een verzameling berekenen

2. Inleiding

In heel wat problemen, vooral in het domein van de kansrekening, moeten we het aantal elementen van een verzameling tellen.

Willen we bvb. de kans berekenen om een aas te trekken uit een spel kaarten, dan tellen we het aantal azen en het totaal aantal kaarten in een kaartspel en vinden we als kans 4/52.

Het tellen van deze aantallen elementen is niet altijd even eenvoudig als in voorgaand geval en wordt daarom verduidelijkt in volgende paragraaf.

3. Soorten groeperingen

3.1 Permutaties

Voorbeeld 1

Een voetbaltornooi wordt georganiseerd met 4 ploegen: A, B, C en D

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

Zijn de mogelijke eindrangschikkingen van dit tornooi.

We zien hier onmiddellijk dat ABCD een andere eindrangschikking is dan DCBA. Dit betekent dat de **volgorde** van **belang** is. Verder is AABB geen geldige eindrangschikking. **Herhaling** is **niet** mogelijk.

Definitie

Een **permutatie** van n elementen is een **geordend n - tal** van **verschillende** elementen gekozen uit een gegeven verzameling van n elementen.

P_n is het aantal permutaties uit n elementen en is gelijk aan:

$$P_n = n!$$

Oplossing voorbeeld 1:

$P_4 = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$

Voorbeeld 2

De code van de kluis (met de examenvragen) bestaat uit 6 verschillende klinkers. (a – e – i – o – u – y). Hoeveel mogelijkheden moet jij maximaal uitproberen om de code te kraken?

Voorbeeld 3

a. Op hoeveel manieren kunnen vijf jongens en vier meisjes naast elkaar op een rij zitten?
b. Op hoeveel manieren kunnen ze naast elkaar zitten op een rij, als de jongens zowel als de meisjes gegroepeerd wensen te blijven?

3.2 Variaties

Voorbeeld 4

Beschouw voetbalwedstrijden (uit- en thuismatchen) van vier verschillende ploegen: A, B, C en D.

AB	AC	AD
BA	BC	BD
CA	CB	CD
DA	DB	DC

zijn alle mogelijke verschillende wedstrijden die gespeeld kunnen worden (12).

We zien hier onmiddellijk dat AB een andere wedstrijd is dan BA; wat betekent dat de **volgorde van belang** is bij het tellen van alle mogelijke wedstrijden en dat AA niet kan voorkomen **(geen herhaling**).

We noemen dit een variatie van 2 elementen uit 4.

Definitie

Een **variatie** van p elementen uit n elementen **(**$\boldsymbol{p \leq n}$**)** is een **geordend** p - tal van p **verschillende** elementen gekozen uit de gegeven verzameling van n elementen.

Voorbeeld 5

20 voetbalploegen (A, B, … , T) nemen deel aan een tornooi. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om de top 3 te voorspellen? De winnaar krijgt een gouden medaille, de tweede een zilveren en de derde een bronzen.

ABC ABD ABE ABF … ABT

…

TAB TAC TAD TAE … TAF

Hieruit blijkt dat er nood is aan een algemene formule voor het tellen van dit soort variaties.

Definitie

V_n^p is het aantal **variaties** van *p* **verschillende** elementen uit *n* elementen en

$V_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ met $V_n^n = n!$ en $V_n^0 = 1$

Merk op: Een variatie van n elementen uit n is een permutatie: $V_n^n = P_n$

Oplossing voorbeeld 5:

Voorbeeld 6

In een vergadering van 220 personen moet een bestuur van 4 personen gekozen worden uit 10 kandidaten. Ieder aanwezige moet stemmen voor 4 kandidaten in voorkeurvolgorde. Op hoeveel manieren kan elke stemgerechtigde zijn stembiljet geldig invullen?

3.3 Herhalingsvariatie

Definitie

Een **herhalingsvariatie** van *p* elementen uit *n* elementen is een **geordend** *p* - tal van elementen gekozen uit een gegeven verzameling van *n* elementen; waarbij hetzelfde element meermaals gekozen mag worden.

Merk op dat *p* hier groter kan zijn dan *n*.

$\bar{V}_n^p$ is het aantal herhalingsvariaties van *p* elementen uit *n* en is gelijk aan

$\bar{V}_n^p = n^p$ met $\bar{V}_n^0 = n^0 = 1$

Voorbeeld 7

A = {a, b, c}

- De herhalingsvariaties van 1 element uit *A* zijn: (a) (b) (c)

  Hun aantal is $\bar{V}_3^1 = 3^1 = 3$

- De herhalingsvariaties van 2 elementen uit A zijn:

  (a,a) (a,b) (a,c)

  (b,a) (b,b) (b,c)

  (c,a) (c,b) (c,c)

  Hun aantal is $\bar{V}_3^2 = 3^2 = 9$

- Het aantal herhalingsvariaties van 4 elementen uit A is: $\bar{V}_3^4 = 3^4 = 81$

Voorbeeld 8

Op hoeveel manieren kunnen we een test invullen als de test dertig vragen omvat en als er op elke vraag vier antwoorden mogelijk zijn?

Voorbeeld 9

a. Een dobbelsteen wordt twee keer achtereen opgeworpen. Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?
b. Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij het aantal ogen op beide dobbelstenen gelijk is?

3.4 Combinatie

Voorbeeld 10

Er is een voetbalcompetitie met 16 ploegen. De eerste 5 ploegen mogen door naar de volgende ronde (ongeacht of je op plaats 1 of op plaats 5 eindigt). Op hoeveel verschillende manieren kan je een pronostiek maken van de eerste 5 ploegen?

Definitie

Een combinatie van *p* elementen uit *n* elementen **($p \leq n$)** is een deelverzameling van *p* **verschillende** elementen gekozen uit een gegeven verzameling van *n* elementen waarbij de **volgorde niet** van belang is.

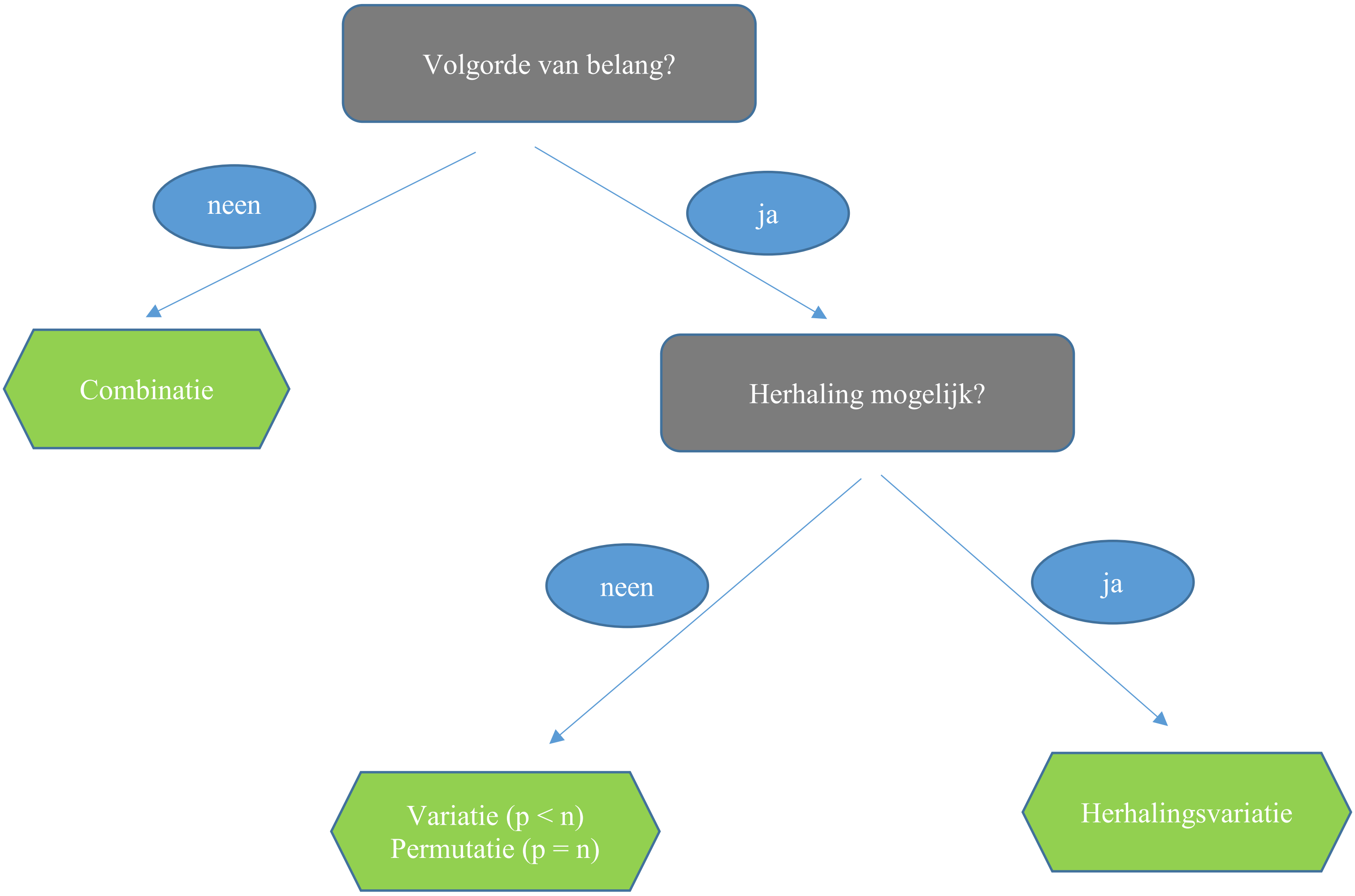
C_n^p is het aantal combinaties van *p* elementen uit *n* en is gelijk aan

$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ met $C_n^0 = 1$ en $C_n^n = 1.$

Voorbeeld 11

Op hoeveel manieren kunnen we zeven kaarten trekken uit een spel van tweeënvijftig kaarten (de getrokken kaart wordt niet telkens teruggestoken)?

4. Samenvatting



Samenvattende tabel

Soort Groepering	**# gekozen elementen uit *n***	**Volgorde van belang?**	**Herhaling mogelijk**	**Berekening**
Permutatie	n	ja	neen	$P_n = n!$
Variatie	$p \leq n$	ja	neen	$V_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
Herh. variatie	p willekeurig	ja	ja	$\overline{V}_n^p = n^p$
Combinatie	$p \leq n$	neen	neen	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

In de literatuur kan je andere soorten telproblemen tegenkomen oa. herhalingscombinaties, herhalingspermutaties…

5. Oefeningen

Oefening 1

Bereken C_{10}^{5} ; P_9 ; V_4^0 ; $\overline{V}_7^2$

Oefening 2

Bij een kansspel komt het erop aan 6 verschillende cijfers te kiezen uit 42.
Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Oefening 3

Hoeveel getallen kan men vormen met 5 cijfers

a. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5}
b. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
c. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5} en zonder gelijke cijfers
d. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} en zonder gelijke cijfers

Oefening 4

Aan de finale van de 110 meter horden doen 6 atleten mee.

a. Op hoeveel verschillende volgorden kunnen de plaatsen 1 tot en met 6 worden bezet?

b. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de medailles voor de eerste, tweede en derde plaats worden verdeeld?

c. De nummers 1 en 2 worden opgenomen in de Belgische selectie. Hoeveel verschillende tweetallen zijn er mogelijk?

Oefening 5

a. Op hoeveel manieren kan men een commissie van drie personen kiezen uit 150 kandidaten?

b. Stel dat de Tweede kamer bestaat uit drie partijen: A, B en C, die ieder 50 leden hebben. Op hoeveel manieren kan men een commissie van drie personen kiezen als alle partijen één commissielid leveren.

c. Op hoeveel manieren kan men een commissie van zes personen kiezen als alle partijen twee vertegenwoordigers kiezen?

Oefening 6

Het sleutelwoord van een geheime code bestaat uit 6 verschillende letters (het woord hoeft geen betekenis te hebben). Hoeveel mogelijkheden zijn er met 26 letters?

Oefening 7

Aan een paardenkoers nemen 8 paarden deel. Er wordt gevraagd de eerste 4 paarden in de juiste volgorde te geven. Hoeveel van dergelijke voorspellingen zijn er mogelijk?

Oefening 8

Een nummerplaat moet bestaan uit 1 cijfer (ofwel 1 ofwel 9) gevolgd door 3 letters gekozen uit het alfabet, gevolgd door 3 cijfers gekozen uit 0, … , 9. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Oefening 9

Een groep van acht mannen en vier vrouwen wordt getraind op een ruimtevaartcentrum voor een bemande vlucht naar Mars. Uiteindelijk zullen later vijf personen (drie mannen en twee vrouwen) worden geselecteerd om de vlucht mee te maken. Een krant looft een grote prijs uit voor de persoon die precies voorspelt wie de vijf geselecteerde deelnemers zijn. Op hoeveel manieren kan hier een verschillend vijftal worden gekozen?

Oefening 10

Een examen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, elk met 4 keuzemogelijkheden (slechts 1 antwoord is juist). Op hoeveel verschillende manieren kan een student dit examen beantwoorden (indien telkens 1 antwoord per vraag gegeven wordt)? Op hoeveel verschillende manieren kan een student een totaal verkeerd examen afleveren?

Oefening 11

Bij de finale 100 meter schoolslag op de Olympische Spelen doen acht deelnemers mee. Het aantal verschillende volgorden waarop de drie medailles kunnen worden verdeeld bedraagt:

a. 8 b. 336 c. 8! d. 56

Oefening 12

Van een groep van 30 studenten worden drie studenten op basis van prestaties geselecteerd voor een studie in het buitenland. Het aantal verschillende groepjes dat kan worden gevormd bedraagt:

a. 10 b. 30 * 29 * 28 c. 30 * 3! d. 5 * 29 * 28

Oefening 13

Bij een onderwijsinstituut moeten studenten bij hun studieprogramma drie keuzevakken kiezen, namelijk een economievak, een vreemde taal en een kwantitatief vak. Wat het economievak betreft zijn er drie keuzemogelijkheden, voor de taal moet worden gekozen uit vier cursussen en voor het kwantitatieve vak zijn er drie keuzes voorhanden. Het aantal verschillende pakketten van drie vakken dat studenten hieruit kunnen samenstellen, bedraagt:

a. 1312 b. 10 c. 36 d. 864

Oefening 14

Hoeveel getallen van 3 symbolen kan men vormen in het hexadecimaal stelsel? (16-tallig)

Oefening 15

Hoeveel “woorden" van vijf verschillende letters kunnen we vormen met acht gegeven medeklinkers en twee gegeven klinkers

a. als ieder woord moet bestaan uit drie medeklinkers en twee klinkers;
b. als ieder woord drie bepaalde letters moet bevatten die
   - van elkaar gescheiden zijn;
   - samen moeten blijven en in een willekeurige volgorde geplaatst mogen worden;
   - samen moeten blijven en in een gegeven volgorde geplaatst moeten worden?

Vraag 16

Hoeveel vlaggen met 3 verticale strepen van verschillende kleur kan men maken als men beschikt over 5 verschillende kleuren?

Vraag 17

a. Hoeveel verschillende getallen van 3 cijfers kunnen we vormen met de cijfers 0, 1, 2, 4, 5, 7, 9?

b. Hoeveel van die getallen beginnen met een 1?

c. Als we de getallen rangschikken in stijgende volgorde, welk is dan het 150^{ste} getal?

Vraag 18

Hoeveel pincodes van vier cijfers kan men vormen men juist twee verschillende cijfers? Voorbeelden van geldige pincodes: 0011 - 7887 - 6565

Vraag 19

Het morsealfabet bevat twee tekens: punt en streep. Hoeveel tekens moet je minstens achter elkaar gebruiken om elke letter van het alfabet voor te kunnen stellen?

Vraag 20

De code van het alarm van de PXL bestaat uit 2 cijfers gevolgd door 3 verschillende letters. Jij beschikt over volgende informatie: De eerste letter is een X. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?

Vraag 21

Een geheime code bestaat uit een rij van punten, driehoeken en strepen. Hoeveel verschillende codes kunnen er gevormd worden door een rij van hoogstens 4 tekens?