```
Welcome to PyLog 1.0

Natural Deduction Proof Assistant and Proof Checker

(c) 2020  C. Lewis Protin

>>> Load("Kelley-Morse")
True
>>> ShowAxioms()
0. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))
1. Set(x) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ x) -> (z ε y)))
2. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x ∪ y))
3. (Function(f) & Set(domain(f))) -> Set(range(f))
4. Set(x) -> Set(∪x)
5. ¬(x = 0) -> ∃y.((y ε x) & ((y ∩ x) = 0))
6. ∃y.((Set(y) & (0 ε y)) & ∀x.((x ε y) -> (suc x ε y)))
7. ∃f.(Choice(f) & (domain(f) = (U ~ {0})))
>>> ShowDefinitions()
Set(x) <-> ∃y.(x ε y)
(x ⊂ y) <-> ∀z.((z ε x) -> (z ε y))
Relation(r) <-> ∀z.((z ε r) -> ∃x.∃y.(z = (x,y)))
Function(f) <-> (Relation(f) & ∀x.∀y.∀z.((((x,y) ε f) & ((x,z) ε f)) -> (y = z)))
Trans(r) <-> ∀x.∀y.∀z.((((x,y) ε r) & ((y,z) ε r)) -> ((x,z) ε r))
Connects(r,x) <-> ∀y.∀z.(((y ε x) & (z ε x)) -> ((y = z) v (((y,z) ε r) v ((z,y) ε r))))
Asymmetric(r,x) <-> ∀y.∀z.(((y ε x) & (z ε x)) -> (((y,z) ε r) -> ¬((z,y) ε r)))
First(r,x,z) <-> ((z ε x) & ∀y.((y ε x) -> ¬((y,z) ε r)))
WellOrders(r,x) <-> (Connects(r,x) & ∀y.(((y ⊂ x) & ¬(y = 0)) -> ∃z.First(r,y,z)))
Section(r,x,y) <-> (((y ⊂ x) & WellOrders(r,x)) & ∀u.∀v.((((u ε x) & (v ε y)) & ((u,v) ε
r)) -> (u ε y)))
OrderPreserving(f,r,s) <-> ((Function(f) & (WellOrders(r,domain(f)) &
WellOrders(r,range(f)))) & ∀u.∀v.((((u ε domain(f)) & (v ε domain(f))) & ((u,v) ε r)) ->
(((f'u),(f'v)) ε r)))
1-to-1(f) <-> (Function(f) & Function((f)⁻¹))
Full(x) <-> ∀y.((y ε x) -> (y ⊂ x))
Ordinal(x) <-> (Full(x) & Connects(E,x))
Integer(x) <-> (Ordinal(x) & WellOrders((E)⁻¹,x))
Choice(f) <-> (Function(f) & ∀y.((y ε domain(f)) -> ((f'y) ε y)))
Equi(x,y) <-> ∃f.(1-to-1(f) & ((domain(f) = x) & (range(f) = y)))
Card(x) <-> (Ordinal(x) & ∀y.(((y ε x) & (y ε ord)) -> ¬Equi(y,x)))
TransIn(r,x) <-> ∀u.∀v.∀w.(((u ε x) & ((v ε x) & (w ε x))) -> ((((u,v) ε r) & ((v,w) ε
r)) -> ((u,w) ε r)))
>>> ShowDefEquations()
0. (x ∪ y) = {z: ((z ε x) v (z ε y))}
1. (x ∩ y) = {z: ((z ε x) & (z ε y))}
2. ~x = {y: ¬(y ε x)}
3. (x ~ y) = (x ∩ ~y)
4. 0 = {x: ¬(x = x)}
5. U = {x: (x = x)}
6. ∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))}
7. ∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))}
8. Px = {y: (y ⊂ x)}
9. {x} = {z: ((x ε U) -> (z = x))}
10. {x,y} = ({x} ∪ {y})
11. (x,y) = {{x},{x,y}}
12. proj1(x) = ∩∩x
13. proj2(x) = (∩∪x ∪ (∪∪x ~ ∪∩x))
14. (a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}
15. (r)⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))}
16. domain(f) = {x: ∃y.((x,y) ε f)}
17. range(f) = {y: ∃x.((x,y) ε f)}
18. (f'x) = ∩{y: ((x,y) ε f)}
19. (x X y) = {z: ∃a.∃b.((z = (a,b)) & ((a ε x) & (b ε y)))}
20. func(x,y) = {f: (Function(f) & ((domain(f) = x) & (range(f) = y)))}
21. E = {z: ∃x.∃y.((z = (x,y)) & (x ε y))}
22. ord = {x: Ordinal(x)}
23. suc x = (x ∪ {x})
24. (f|x) = (f ∩ (x X U))
25. ω = {x: Integer(x)}
```

```
>>>CheckTheory(["Th4","Th5","Th6","Th7","Th8","Th11","Th12","Th14","Th16","Th17","Th19","
Th20", "Th21","Th24","Th26","Th27","Th28","Th29","Th30", "Th31","Th32","Th33",
"Th34","Th35", "Th37","Th38", "Th39","Th41",
"Th42","Th43","Th44","Th46","Th47","Th49","Th50","Th53","Th54","Th55", "Th58", "Th59",
"Th61", "Th62", "Th64"])

Th4. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))

0. z ε (x U y)  Hyp
1. (x U y) = {z: ((z ε x) v (z ε y))}  DefEqInt
2. z ε {z: ((z ε x) v (z ε y))}  EqualitySub 0 1
3. Set(z) & ((z ε x) v (z ε y))  ClassElim 2
4. (z ε x) v (z ε y)  AndElimR 3
5. (z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y))  ImpInt 4
6. (z ε x) v (z ε y)  Hyp
7. z ε x  Hyp
8. ∃x.(z ε x)  ExistsInt 7
9. Set(z)  DefSub 8
10. z ε y  Hyp
11. ∃y.(z ε y)  ExistsInt 10
12. Set(z)  DefSub 11
13. Set(z)  OrElim 6 7 9 10 12
14. Set(z) & ((z ε x) v (z ε y))  AndInt 13 6
15. z ε {z: ((z ε x) v (z ε y))}  ClassInt 14
16. {z: ((z ε x) v (z ε y))} = (x U y)  Symmetry 1
17. z ε (x U y)  EqualitySub 15 16
18. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))  ImpInt 17
19. ((z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y)))
AndInt 5 18
20. (z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))  EquivConst 19
21. z ε (x ∩ y)  Hyp
22. (x ∩ y) = {z: ((z ε x) & (z ε y))}  DefEqInt
23. z ε {z: ((z ε x) & (z ε y))}  EqualitySub 21 22
24. Set(z) & ((z ε x) & (z ε y))  ClassElim 23
25. (z ε x) & (z ε y)  AndElimR 24
26. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))  ImpInt 25
27. (z ε x) & (z ε y)  Hyp
28. z ε x  AndElimL 27
29. ∃x.(z ε x)  ExistsInt 28
30. Set(z)  DefSub 29
31. Set(z) & ((z ε x) & (z ε y))  AndInt 30 27
32. z ε {z: ((z ε x) & (z ε y))}  ClassInt 31
33. {z: ((z ε x) & (z ε y))} = (x ∩ y)  Symmetry 22
34. z ε (x ∩ y)  EqualitySub 32 33
35. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))  ImpInt 34
36. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)))
AndInt 26 35
37. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))  EquivConst 36
38. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
AndInt 20 37 Qed

Used Theorems


Th5. ((x U x) = x) & ((x ∩ x) = x)

0. z ε (x U x)  Hyp
1. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
2. (z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 1
3. ((z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y)))
EquivExp 2
4. (z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 3
5. ∀y.((z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y)))  ForallInt 4
6. (z ε (x U x)) -> ((z ε x) v (z ε x))  ForallElim 5
7. (z ε x) v (z ε x)  ImpElim 0 6
8. z ε x  Hyp
9. z ε x  Hyp
10. z ε x  OrElim 7 8 8 9 9
```

11. (z ε (x U x)) -> (z ε x) ImpInt 10
12. z ε x Hyp
13. (z ε x) v (z ε x) OrIntL 12
14. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y)) AndElimR 3
15. ∀y.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) ForallInt 14
16. ((z ε x) v (z ε x)) -> (z ε (x U x)) ForallElim 15
17. z ε (x U x) ImpElim 13 16
18. (z ε x) -> (z ε (x U x)) ImpInt 17
19. ((z ε (x U x)) -> (z ε x)) & ((z ε x) -> (z ε (x U x))) AndInt 11 18
20. (z ε (x U x)) <-> (z ε x) EquivConst 19
21. ∀z.((z ε (x U x)) <-> (z ε x)) ForallInt 20
22. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
23. ∀y.(((x U x) = y) <-> ∀z.((z ε (x U x)) <-> (z ε y))) ForallElim 22
24. ((x U x) = x) <-> ∀z.((z ε (x U x)) <-> (z ε x)) ForallElim 23
25. (((x U x) = x) -> ∀z.((z ε (x U x)) <-> (z ε x))) & (∀z.((z ε (x U x)) <-> (z ε x)) -> ((x U x) = x)) EquivExp 24
26. ∀z.((z ε (x U x)) <-> (z ε x)) -> ((x U x) = x) AndElimR 25
27. (x U x) = x ImpElim 21 26
28. z ε (x ∩ x) Hyp
29. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 1
30. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) EquivExp 29
31. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimL 30
32. ∀y.((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) ForallInt 31
33. (z ε (x ∩ x)) -> ((z ε x) & (z ε x)) ForallElim 32
34. (z ε x) & (z ε x) ImpElim 28 33
35. z ε x AndElimR 34
36. (z ε (x ∩ x)) -> (z ε x) ImpInt 35
37. z ε x Hyp
38. (z ε x) & (z ε x) AndInt 37 37
39. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)) AndElimR 30
40. ∀y.(((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) ForallInt 39
41. ((z ε x) & (z ε x)) -> (z ε (x ∩ x)) ForallElim 40
42. z ε (x ∩ x) ImpElim 38 41
43. (z ε x) -> (z ε (x ∩ x)) ImpInt 42
44. ((z ε (x ∩ x)) -> (z ε x)) & ((z ε x) -> (z ε (x ∩ x))) AndInt 36 43
45. (z ε (x ∩ x)) <-> (z ε x) EquivConst 44
46. ∀y.(((x ∩ x) = y) <-> ∀z.((z ε (x ∩ x)) <-> (z ε y))) ForallElim 22
47. ((x ∩ x) = x) <-> ∀z.((z ε (x ∩ x)) <-> (z ε x)) ForallElim 46
48. (((x ∩ x) = x) -> ∀z.((z ε (x ∩ x)) <-> (z ε x))) & (∀z.((z ε (x ∩ x)) <-> (z ε x)) -> ((x ∩ x) = x)) EquivExp 47
49. ∀z.((z ε (x ∩ x)) <-> (z ε x)) -> ((x ∩ x) = x) AndElimR 48
50. ∀z.((z ε (x ∩ x)) <-> (z ε x)) ForallInt 45
51. (x ∩ x) = x ImpElim 50 49
52. ((x U x) = x) & ((x ∩ x) = x) AndInt 27 51 Qed

Used Theorems

1. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))

Th6. ((x U y) = (y U x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))

0. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) TheoremInt
1. (z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 0
2. ((z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) EquivExp 1
3. (z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 2
4. z ε (x U y) Hyp
5. (z ε x) v (z ε y) ImpElim 4 3
6. (A v B) -> (B v A) TheoremInt
7. ((z ε x) v B) -> (B v (z ε x)) PolySub 6
8. ((z ε x) v (z ε y)) -> ((z ε y) v (z ε x)) PolySub 7
9. (z ε y) v (z ε x) ImpElim 5 8
10. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y)) AndElimR 2
11. ∀x.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) ForallInt 10
12. ((z ε w) v (z ε y)) -> (z ε (w U y)) ForallElim 11
13. ∀y.(((z ε w) v (z ε y)) -> (z ε (w U y))) ForallInt 12
14. ((z ε w) v (z ε x)) -> (z ε (w U x)) ForallElim 13
15. ∀w.(((z ε w) v (z ε x)) -> (z ε (w U x))) ForallInt 14
16. ((z ε y) v (z ε x)) -> (z ε (y U x)) ForallElim 15

```
17. z ε (y ∪ x)  ImpElim 9 16
18. (z ε (x ∪ y)) -> (z ε (y ∪ x))  ImpInt 17
19. ∀x.((z ε (x ∪ y)) -> (z ε (y ∪ x)))  ForallInt 18
20. (z ε (w ∪ y)) -> (z ε (y ∪ w))  ForallElim 19
21. ∀y.((z ε (w ∪ y)) -> (z ε (y ∪ w)))  ForallInt 20
22. (z ε (w ∪ v)) -> (z ε (v ∪ w))  ForallElim 21
23. ∀w.((z ε (w ∪ v)) -> (z ε (v ∪ w)))  ForallInt 22
24. (z ε (y ∪ v)) -> (z ε (v ∪ y))  ForallElim 23
25. ∀v.((z ε (y ∪ v)) -> (z ε (v ∪ y)))  ForallInt 24
26. (z ε (y ∪ x)) -> (z ε (x ∪ y))  ForallElim 25
27. ((z ε (x ∪ y)) -> (z ε (y ∪ x))) & ((z ε (y ∪ x)) -> (z ε (x ∪ y)))  AndInt 18 26
28. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
29. ∀e.(((x ∪ y) = e) <-> ∀z.((z ε (x ∪ y)) <-> (z ε e)))  ForallElim 28
30. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) <-> ∀z.((z ε (x ∪ y)) <-> (z ε (y ∪ x)))  ForallElim 29
31. (((x ∪ y) = (y ∪ x)) -> ∀z.((z ε (x ∪ y)) <-> (z ε (y ∪ x)))) & (∀z.((z ε (x ∪ y)) <-
> (z ε (y ∪ x))) -> ((x ∪ y) = (y ∪ x)))  EquivExp 30
32. ∀z.((z ε (x ∪ y)) <-> (z ε (y ∪ x))) -> ((x ∪ y) = (y ∪ x))  AndElimR 31
33. (z ε (x ∪ y)) <-> (z ε (y ∪ x))  EquivConst 27
34. ∀z.((z ε (x ∪ y)) <-> (z ε (y ∪ x)))  ForallInt 33
35. (x ∪ y) = (y ∪ x)  ImpElim 34 32
36. z ε (x ∩ y)  Hyp
37. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))  AndElimR 0
38. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)))
EquivExp 37
39. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))  AndElimL 38
40. (z ε x) & (z ε y)  ImpElim 36 39
41. (A & B) -> (B & A)  TheoremInt
42. ((z ε x) & B) -> (B & (z ε x))  PolySub 41
43. ((z ε x) & (z ε y)) -> ((z ε y) & (z ε x))  PolySub 42
44. (z ε y) & (z ε x)  ImpElim 40 43
45. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))  AndElimR 38
46. ∀w.(((z ε w) & (z ε y)) -> (z ε (w ∩ y)))  ForallInt 45
47. ∀v.∀w.(((z ε w) & (z ε v)) -> (z ε (w ∩ v)))  ForallInt 46
48. ∀w.(((z ε w) & (z ε x)) -> (z ε (w ∩ x)))  ForallElim 47
49. ((z ε y) & (z ε x)) -> (z ε (y ∩ x))  ForallElim 48
50. z ε (y ∩ x)  ImpElim 44 49
51. (z ε (x ∩ y)) -> (z ε (y ∩ x))  ImpInt 50
52. ∀v.((z ε (v ∩ y)) -> (z ε (y ∩ v)))  ForallInt 51
53. ∀w.∀v.((z ε (v ∩ w)) -> (z ε (w ∩ v)))  ForallInt 52
54. ∀v.((z ε (v ∩ x)) -> (z ε (x ∩ v)))  ForallElim 53
55. (z ε (y ∩ x)) -> (z ε (x ∩ y))  ForallElim 54
56. ((z ε (x ∩ y)) -> (z ε (y ∩ x))) & ((z ε (y ∩ x)) -> (z ε (x ∩ y)))  AndInt 51 55
57. ∀g.(((x ∩ y) = g) <-> ∀z.((z ε (x ∩ y)) <-> (z ε g)))  ForallElim 28
58. ((x ∩ y) = (y ∩ x)) <-> ∀z.((z ε (x ∩ y)) <-> (z ε (y ∩ x)))  ForallElim 57
59. (((x ∩ y) = (y ∩ x)) -> ∀z.((z ε (x ∩ y)) <-> (z ε (y ∩ x)))) & (∀z.((z ε (x ∩ y)) <-
> (z ε (y ∩ x))) -> ((x ∩ y) = (y ∩ x)))  EquivExp 58
60. ∀z.((z ε (x ∩ y)) <-> (z ε (y ∩ x))) -> ((x ∩ y) = (y ∩ x))  AndElimR 59
61. (z ε (x ∩ y)) <-> (z ε (y ∩ x))  EquivConst 56
62. ∀z.((z ε (x ∩ y)) <-> (z ε (y ∩ x)))  ForallInt 61
63. (x ∩ y) = (y ∩ x)  ImpElim 62 60
64. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))  AndInt 35 63 Qed
```

Used Theorems

```
2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
1. (A v B) -> (B v A)
3. (A & B) -> (B & A)
```

Th7. (((x ∪ y) ∪ z) = (x ∪ (y ∪ z))) & (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z)))

```
0. w ε ((x ∪ y) ∪ z)  Hyp
1. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
2. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 1
3. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))
EquivExp 2
4. (z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 3
5. ∀z.((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y)))  ForallInt 4
6. (w ε (x ∪ y)) -> ((w ε x) v (w ε y))  ForallElim 5
7. ∀x.((w ε (x ∪ y)) -> ((w ε x) v (w ε y)))  ForallInt 6
8. (w ε (a ∪ y)) -> ((w ε a) v (w ε y))  ForallElim 7
```

9. ∀y.((w ε (a U y)) -> ((w ε a) v (w ε y))) ForallInt 8
10. (w ε (a U z)) -> ((w ε a) v (w ε z)) ForallElim 9
11. ∀a.((w ε (a U z)) -> ((w ε a) v (w ε z))) ForallInt 10
12. (w ε ((x U y) U z)) -> ((w ε (x U y)) v (w ε z)) ForallElim 11
13. (w ε (x U y)) v (w ε z) ImpElim 0 12
14. w ε (x U y) Hyp
15. (w ε x) v (w ε y) ImpElim 14 6
16. ((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z) OrIntR 15
17. w ε z Hyp
18. ((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z) OrIntL 17
19. ((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z) OrElim 13 14 16 17 18
20. ((A v B) v C) <-> (A v (B v C)) TheoremInt
21. (((w ε x) v B) v C) <-> ((w ε x) v (B v C)) PolySub 20
22. (((w ε x) v (w ε y)) v C) <-> ((w ε x) v ((w ε y) v C)) PolySub 21
23. (((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z)) <-> ((w ε x) v ((w ε y) v (w ε z))) PolySub 22
24. ((((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z)) -> ((w ε x) v ((w ε y) v (w ε z)))) & (((w ε x) v ((w ε y) v (w ε z))) -> (((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z))) EquivExp 23
25. (((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z)) -> ((w ε x) v ((w ε y) v (w ε z))) AndElimL 24
26. (w ε x) v ((w ε y) v (w ε z)) ImpElim 19 25
27. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y)) AndElimR 3
28. ∀z.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) ForallInt 27
29. ((w ε x) v (w ε y)) -> (w ε (x U y)) ForallElim 28
30. ∀x.(((w ε x) v (w ε y)) -> (w ε (x U y))) ForallInt 29
31. ((w ε a) v (w ε y)) -> (w ε (a U y)) ForallElim 30
32. ∀y.(((w ε a) v (w ε y)) -> (w ε (a U y))) ForallInt 31
33. ((w ε a) v (w ε z)) -> (w ε (a U z)) ForallElim 32
34. ∀a.(((w ε a) v (w ε z)) -> (w ε (a U z))) ForallInt 33
35. ((w ε y) v (w ε z)) -> (w ε (y U z)) ForallElim 34
36. (w ε y) v (w ε z) Hyp
37. w ε (y U z) ImpElim 36 35
38. (w ε x) v (w ε (y U z)) OrIntL 37
39. ∀y.(((w ε a) v (w ε y)) -> (w ε (a U y))) ForallInt 31
40. ((w ε a) v (w ε (y U z))) -> (w ε (a U (y U z))) ForallElim 32
41. ∀a.(((w ε a) v (w ε (y U z))) -> (w ε (a U (y U z)))) ForallInt 40
42. ((w ε x) v (w ε (y U z))) -> (w ε (x U (y U z))) ForallElim 41
43. w ε (x U (y U z)) ImpElim 38 42
44. w ε x Hyp
45. (w ε x) v (w ε (y U z)) OrIntR 44
46. ∀y.(((w ε a) v (w ε y)) -> (w ε (a U y))) ForallInt 31
47. ((w ε a) v (w ε (y U z))) -> (w ε (a U (y U z))) ForallElim 32
48. ∀a.(((w ε a) v (w ε (y U z))) -> (w ε (a U (y U z)))) ForallInt 47
49. ((w ε x) v (w ε (y U z))) -> (w ε (x U (y U z))) ForallElim 48
50. w ε (x U (y U z)) ImpElim 45 49
51. w ε (x U (y U z)) OrElim 26 44 50 36 43
52. (w ε ((x U y) U z)) -> (w ε (x U (y U z))) ImpInt 51
53. w ε (x U (y U z)) Hyp
54. ∀y.((w ε (a U y)) -> ((w ε a) v (w ε y))) ForallInt 8
55. (w ε (a U (y U z))) -> ((w ε a) v (w ε (y U z))) ForallElim 9
56. ∀a.((w ε (a U (y U z))) -> ((w ε a) v (w ε (y U z)))) ForallInt 55
57. (w ε (x U (y U z))) -> ((w ε x) v (w ε (y U z))) ForallElim 56
58. (w ε x) v (w ε (y U z)) ImpElim 53 57
59. w ε x Hyp
60. (w ε x) v ((w ε y) v (w ε z)) OrIntR 59
61. w ε (y U z) Hyp
62. ∀a.((w ε (a U z)) -> ((w ε a) v (w ε z))) ForallInt 10
63. (w ε (y U z)) -> ((w ε y) v (w ε z)) ForallElim 11
64. (w ε y) v (w ε z) ImpElim 61 63
65. (w ε x) v ((w ε y) v (w ε z)) OrIntL 64
66. (w ε x) v ((w ε y) v (w ε z)) OrElim 58 59 60 61 65
67. ((w ε x) v ((w ε y) v (w ε z))) -> (((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z)) AndElimR 24
68. ((w ε x) v (w ε y)) v (w ε z) ImpElim 66 67
69. (w ε x) v (w ε y) Hyp
70. ∀z.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) ForallInt 27
71. ((w ε x) v (w ε y)) -> (w ε (x U y)) ForallElim 28
72. w ε (x U y) ImpElim 69 71
73. (w ε (x U y)) v (w ε z) OrIntR 72
74. w ε z Hyp
75. (w ε (x U y)) v (w ε z) OrIntL 74
76. (w ε (x U y)) v (w ε z) OrElim 68 69 73 74 75
77. ∀a.(((w ε a) v (w ε z)) -> (w ε (a U z))) ForallInt 33
78. ((w ε (x U y)) v (w ε z)) -> (w ε ((x U y) U z)) ForallElim 34

79. w ε ((x ∪ y) ∪ z) ImpElim 76 78
80. (w ε (x ∪ (y ∪ z))) -> (w ε ((x ∪ y) ∪ z)) ImpInt 79
81. ((w ε ((x ∪ y) ∪ z)) -> (w ε (x ∪ (y ∪ z)))) & ((w ε (x ∪ (y ∪ z))) -> (w ε ((x ∪ y) ∪ z))) AndInt 52 80
82. (w ε ((x ∪ y) ∪ z)) <-> (w ε (x ∪ (y ∪ z))) EquivConst 81
83. w ε ((x ∩ y) ∩ z) Hyp
84. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 1
85. ∀z.((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) ForallInt 84
86. (w ε (x ∩ y)) <-> ((w ε x) & (w ε y)) ForallElim 85
87. ∀x.((w ε (x ∩ y)) <-> ((w ε x) & (w ε y))) ForallInt 86
88. (w ε (a ∩ y)) <-> ((w ε a) & (w ε y)) ForallElim 87
89. ∀y.((w ε (a ∩ y)) <-> ((w ε a) & (w ε y))) ForallInt 88
90. (w ε (a ∩ b)) <-> ((w ε a) & (w ε b)) ForallElim 89
91. ∀a.((w ε (a ∩ b)) <-> ((w ε a) & (w ε b))) ForallInt 90
92. (w ε ((x ∩ y) ∩ b)) <-> ((w ε (x ∩ y)) & (w ε b)) ForallElim 91
93. ∀b.((w ε ((x ∩ y) ∩ b)) <-> ((w ε (x ∩ y)) & (w ε b))) ForallInt 92
94. (w ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> ((w ε (x ∩ y)) & (w ε z)) ForallElim 93
95. ((w ε ((x ∩ y) ∩ z)) -> ((w ε (x ∩ y)) & (w ε z))) & (((w ε (x ∩ y)) & (w ε z)) -> (w ε ((x ∩ y) ∩ z))) EquivExp 94
96. (w ε ((x ∩ y) ∩ z)) -> ((w ε (x ∩ y)) & (w ε z)) AndElimL 95
97. (w ε (x ∩ y)) & (w ε z) ImpElim 83 96
98. w ε (x ∩ y) AndElimL 97
99. ((w ε (x ∩ y)) -> ((w ε x) & (w ε y))) & (((w ε x) & (w ε y)) -> (w ε (x ∩ y))) EquivExp 86
100. (w ε (x ∩ y)) -> ((w ε x) & (w ε y)) AndElimL 99
101. (w ε x) & (w ε y) ImpElim 98 100
102. w ε z AndElimR 97
103. w ε x AndElimL 101
104. w ε y AndElimR 101
105. (w ε y) & (w ε z) AndInt 104 102
106. ((w ε (a ∩ b)) -> ((w ε a) & (w ε b))) & (((w ε a) & (w ε b)) -> (w ε (a ∩ b))) EquivExp 90
107. ((w ε a) & (w ε b)) -> (w ε (a ∩ b)) AndElimR 106
108. ∀a.(((w ε a) & (w ε b)) -> (w ε (a ∩ b))) ForallInt 107
109. ((w ε y) & (w ε b)) -> (w ε (y ∩ b)) ForallElim 108
110. ∀b.(((w ε y) & (w ε b)) -> (w ε (y ∩ b))) ForallInt 109
111. ((w ε y) & (w ε z)) -> (w ε (y ∩ z)) ForallElim 110
112. w ε (y ∩ z) ImpElim 105 111
113. (w ε x) & (w ε (y ∩ z)) AndInt 103 112
114. ∀a.(((w ε a) & (w ε b)) -> (w ε (a ∩ b))) ForallInt 107
115. ((w ε x) & (w ε b)) -> (w ε (x ∩ b)) ForallElim 108
116. ∀b.(((w ε x) & (w ε b)) -> (w ε (x ∩ b))) ForallInt 115
117. ((w ε x) & (w ε (y ∩ z))) -> (w ε (x ∩ (y ∩ z))) ForallElim 116
118. w ε (x ∩ (y ∩ z)) ImpElim 113 117
119. (w ε ((x ∩ y) ∩ z)) -> (w ε (x ∩ (y ∩ z))) ImpInt 118
120. w ε (x ∩ (y ∩ z)) Hyp
121. (w ε (a ∩ b)) -> ((w ε a) & (w ε b)) AndElimL 106
122. ∀a.((w ε (a ∩ b)) -> ((w ε a) & (w ε b))) ForallInt 121
123. (w ε (x ∩ b)) -> ((w ε x) & (w ε b)) ForallElim 122
124. ∀b.((w ε (x ∩ b)) -> ((w ε x) & (w ε b))) ForallInt 123
125. ∀b.((w ε (x ∩ b)) -> ((w ε x) & (w ε b))) ForallInt 123
126. (w ε (x ∩ (y ∩ z))) -> ((w ε x) & (w ε (y ∩ z))) ForallElim 124
127. (w ε x) & (w ε (y ∩ z)) ImpElim 120 126
128. w ε (y ∩ z) AndElimR 127
129. w ε x AndElimL 127
130. ∀a.((w ε (a ∩ b)) -> ((w ε a) & (w ε b))) ForallInt 121
131. (w ε (y ∩ b)) -> ((w ε y) & (w ε b)) ForallElim 122
132. ∀b.((w ε (y ∩ b)) -> ((w ε y) & (w ε b))) ForallInt 131
133. (w ε (y ∩ z)) -> ((w ε y) & (w ε z)) ForallElim 132
134. (w ε y) & (w ε z) ImpElim 128 133
135. w ε y AndElimL 134
136. w ε z AndElimR 134
137. (w ε x) & (w ε y) AndInt 129 135
138. ((w ε x) & (w ε y)) -> (w ε (x ∩ y)) AndElimR 99
139. w ε (x ∩ y) ImpElim 137 138
140. (w ε (x ∩ y)) & (w ε z) AndInt 139 136
141. ∀a.((w ε (a ∩ b)) -> ((w ε a) & (w ε b))) ForallInt 121
142. ∀a.(((w ε a) & (w ε b)) -> (w ε (a ∩ b))) ForallInt 107
143. ((w ε (x ∩ y)) & (w ε b)) -> (w ε ((x ∩ y) ∩ b)) ForallElim 108
144. ∀b.(((w ε (x ∩ y)) & (w ε b)) -> (w ε ((x ∩ y) ∩ b))) ForallInt 143
145. ((w ε (x ∩ y)) & (w ε z)) -> (w ε ((x ∩ y) ∩ z)) ForallElim 144

146. w ε ((x ∩ y) ∩ z) ImpElim 140 145
147. (w ε (x ∩ (y ∩ z))) -> (w ε ((x ∩ y) ∩ z)) ImpInt 146
148. ((w ε ((x ∩ y) ∩ z)) -> (w ε (x ∩ (y ∩ z)))) & ((w ε (x ∩ (y ∩ z))) -> (w ε ((x ∩ y) ∩ z))) AndInt 119 147
149. (w ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (w ε (x ∩ (y ∩ z))) EquivConst 148
150. ((w ε ((x U y) U z)) <-> (w ε (x U (y U z)))) & ((w ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (w ε (x ∩ (y ∩ z)))) AndInt 82 149
151. (w ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (w ε (x ∩ (y ∩ z))) AndElimR 150
152. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
153. ∀h.((((x ∩ y) ∩ z) = h) <-> ∀i.((i ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (i ε h))) ForallElim 152
154. (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z))) <-> ∀i.((i ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (i ε (x ∩ (y ∩ z)))) ForallElim 153
155. ∀w.((w ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (w ε (x ∩ (y ∩ z)))) ForallInt 151
156. ((((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z))) -> ∀i.((i ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (i ε (x ∩ (y ∩ z))))) & (∀i.((i ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (i ε (x ∩ (y ∩ z)))) -> (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z)))) EquivExp 154
157. ∀i.((i ε ((x ∩ y) ∩ z)) <-> (i ε (x ∩ (y ∩ z)))) -> (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z))) AndElimR 156
158. ((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z)) ImpElim 155 157
159. ∀j.((((x U y) U z) = j) <-> ∀k.((k ε ((x U y) U z)) <-> (k ε j))) ForallElim 152
160. (((x U y) U z) = (x U (y U z))) <-> ∀k.((k ε ((x U y) U z)) <-> (k ε (x U (y U z)))) ForallElim 159
161. ((((x U y) U z) = (x U (y U z))) -> ∀k.((k ε ((x U y) U z)) <-> (k ε (x U (y U z))))) & (∀k.((k ε ((x U y) U z)) <-> (k ε (x U (y U z)))) -> (((x U y) U z) = (x U (y U z)))) EquivExp 160
162. ∀k.((k ε ((x U y) U z)) <-> (k ε (x U (y U z)))) -> (((x U y) U z) = (x U (y U z))) AndElimR 161
163. (w ε ((x U y) U z)) <-> (w ε (x U (y U z))) AndElimL 150
164. ∀w.((w ε ((x U y) U z)) <-> (w ε (x U (y U z)))) ForallInt 163
165. ((x U y) U z) = (x U (y U z)) ImpElim 164 162
166. (((x U y) U z) = (x U (y U z))) & (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z))) AndInt 165 158
Qed

Used Theorems

3. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
1. ((A v B) v C) <-> (A v (B v C))

Th8. ((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) & ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z)))

0. w ε (x ∩ (y U z)) Hyp
1. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) TheoremInt
2. ∀z.(((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))) ForallInt 1
3. ((w ε (x U y)) <-> ((w ε x) v (w ε y))) & ((w ε (x ∩ y)) <-> ((w ε x) & (w ε y))) ForallElim 2
4. ∀y.(((w ε (x U y)) <-> ((w ε x) v (w ε y))) & ((w ε (x ∩ y)) <-> ((w ε x) & (w ε y)))) ForallInt 3
5. ((w ε (x U a)) <-> ((w ε x) v (w ε a))) & ((w ε (x ∩ a)) <-> ((w ε x) & (w ε a))) ForallElim 4
6. (w ε (x ∩ a)) <-> ((w ε x) & (w ε a)) AndElimR 5
7. ((w ε (x ∩ a)) -> ((w ε x) & (w ε a))) & (((w ε x) & (w ε a)) -> (w ε (x ∩ a))) EquivExp 6
8. (w ε (x ∩ a)) -> ((w ε x) & (w ε a)) AndElimL 7
9. ∀a.((w ε (x ∩ a)) -> ((w ε x) & (w ε a))) ForallInt 8
10. (w ε (x ∩ (y U z))) -> ((w ε x) & (w ε (y U z))) ForallElim 9
11. (w ε x) & (w ε (y U z)) ImpElim 0 10
12. w ε (y U z) AndElimR 11
13. w ε x AndElimL 11
14. (w ε (x U a)) <-> ((w ε x) v (w ε a)) AndElimL 5
15. ∀x.((w ε (x U a)) <-> ((w ε x) v (w ε a))) ForallInt 14
16. (w ε (b U a)) <-> ((w ε b) v (w ε a)) ForallElim 15
17. ∀b.((w ε (b U a)) <-> ((w ε b) v (w ε a))) ForallInt 16
18. (w ε (y U a)) <-> ((w ε y) v (w ε a)) ForallElim 17
19. ∀a.((w ε (y U a)) <-> ((w ε y) v (w ε a))) ForallInt 18
20. (w ε (y U z)) <-> ((w ε y) v (w ε z)) ForallElim 19
21. ((w ε (y U z)) -> ((w ε y) v (w ε z))) & (((w ε y) v (w ε z)) -> (w ε (y U z))) EquivExp 20
22. (w ε (y U z)) -> ((w ε y) v (w ε z)) AndElimL 21
23. (w ε y) v (w ε z) ImpElim 12 22

24. (w ε x) & ((w ε y) v (w ε z)) AndInt 13 23
25. (A & (B v C)) <-> ((A & B) v (A & C)) TheoremInt
26. ((w ε x) & (B v C)) <-> (((w ε x) & B) v ((w ε x) & C)) PolySub 25
27. ((w ε x) & ((w ε y) v C)) <-> (((w ε x) & (w ε y)) v ((w ε x) & C)) PolySub 26
28. ((w ε x) & ((w ε y) v (w ε z))) <-> (((w ε x) & (w ε y)) v ((w ε x) & (w ε z))) PolySub 27
29. (((w ε x) & ((w ε y) v (w ε z))) -> (((w ε x) & (w ε y)) v ((w ε x) & (w ε z)))) & ((((w ε x) & (w ε y)) v ((w ε x) & (w ε z))) -> ((w ε x) & ((w ε y) v (w ε z)))) EquivExp 28
30. ((w ε x) & ((w ε y) v (w ε z))) -> (((w ε x) & (w ε y)) v ((w ε x) & (w ε z))) AndElimL 29
31. ((w ε x) & (w ε y)) v ((w ε x) & (w ε z)) ImpElim 24 30
32. (w ε x) & (w ε y) Hyp
33. (w ε (x ∩ y)) <-> ((w ε x) & (w ε y)) AndElimR 3
34. ((w ε (x ∩ y)) -> ((w ε x) & (w ε y))) & (((w ε x) & (w ε y)) -> (w ε (x ∩ y))) EquivExp 33
35. ((w ε x) & (w ε y)) -> (w ε (x ∩ y)) AndElimR 34
36. w ε (x ∩ y) ImpElim 32 35
37. (w ε (x ∩ y)) v (w ε (x ∩ z)) OrIntR 36
38. (w ε x) & (w ε z) Hyp
39. ∀y.(((w ε x) & (w ε y)) -> (w ε (x ∩ y))) ForallInt 35
40. ((w ε x) & (w ε z)) -> (w ε (x ∩ z)) ForallElim 39
41. w ε (x ∩ z) ImpElim 38 40
42. (w ε (x ∩ y)) v (w ε (x ∩ z)) OrIntL 41
43. (w ε (x ∩ y)) v (w ε (x ∩ z)) OrElim 31 32 37 38 42
44. ((w ε (b ∪ a)) -> ((w ε b) v (w ε a))) & (((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b ∪ a))) EquivExp 16
45. ((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b ∪ a)) AndElimR 44
46. ∀b.(((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b ∪ a))) ForallInt 45
47. ((w ε (x ∩ y)) v (w ε a)) -> (w ε ((x ∩ y) ∪ a)) ForallElim 46
48. ∀a.(((w ε (x ∩ y)) v (w ε a)) -> (w ε ((x ∩ y) ∪ a))) ForallInt 47
49. ((w ε (x ∩ y)) v (w ε (x ∩ z))) -> (w ε ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z))) ForallElim 48
50. w ε ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z)) ImpElim 43 49
51. (w ε (x ∩ (y ∪ z))) -> (w ε ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z))) ImpInt 50
52. w ε ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z)) Hyp
53. (w ε (b ∪ a)) -> ((w ε b) v (w ε a)) AndElimL 44
54. ∀b.((w ε (b ∪ a)) -> ((w ε b) v (w ε a))) ForallInt 53
55. (w ε ((x ∩ y) ∪ a)) -> ((w ε (x ∩ y)) v (w ε a)) ForallElim 54
56. ∀a.((w ε ((x ∩ y) ∪ a)) -> ((w ε (x ∩ y)) v (w ε a))) ForallInt 55
57. (w ε ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z))) -> ((w ε (x ∩ y)) v (w ε (x ∩ z))) ForallElim 56
58. (w ε (x ∩ y)) v (w ε (x ∩ z)) ImpElim 52 57
59. ∀a.((w ε (x ∩ a)) -> ((w ε x) & (w ε a))) ForallInt 8
60. (w ε (x ∩ y)) -> ((w ε x) & (w ε y)) ForallElim 9
61. ∀a.((w ε (x ∩ a)) -> ((w ε x) & (w ε a))) ForallInt 8
62. (w ε (x ∩ z)) -> ((w ε x) & (w ε z)) ForallElim 9
63. w ε (x ∩ y) Hyp
64. (w ε x) & (w ε y) ImpElim 63 60
65. w ε y AndElimR 64
66. (w ε y) v (w ε z) OrIntR 65
67. ((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b ∪ a)) AndElimR 44
68. ∀b.(((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b ∪ a))) ForallInt 67
69. ((w ε y) v (w ε a)) -> (w ε (y ∪ a)) ForallElim 68
70. ∀a.(((w ε y) v (w ε a)) -> (w ε (y ∪ a))) ForallInt 69
71. ((w ε y) v (w ε z)) -> (w ε (y ∪ z)) ForallElim 70
72. w ε (y ∪ z) ImpElim 66 71
73. w ε x AndElimL 64
74. (w ε x) & (w ε (y ∪ z)) AndInt 73 72
75. ((w ε x) & (w ε a)) -> (w ε (x ∩ a)) AndElimR 7
76. ∀a.(((w ε x) & (w ε a)) -> (w ε (x ∩ a))) ForallInt 75
77. ((w ε x) & (w ε (y ∪ z))) -> (w ε (x ∩ (y ∪ z))) ForallElim 76
78. w ε (x ∩ (y ∪ z)) ImpElim 74 77
79. w ε (x ∩ z) Hyp
80. (w ε x) & (w ε z) ImpElim 79 62
81. w ε x AndElimL 80
82. w ε z AndElimR 80
83. (w ε y) v (w ε z) OrIntL 82
84. w ε (y ∪ z) ImpElim 83 71
85. (w ε x) & (w ε (y ∪ z)) AndInt 81 84
86. w ε (x ∩ (y ∪ z)) ImpElim 85 77
87. w ε (x ∩ (y ∪ z)) OrElim 58 63 78 79 86
88. (w ε ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z))) -> (w ε (x ∩ (y ∪ z))) ImpInt 87

89. ((w ε (x ∩ (y U z))) -> (w ε ((x ∩ y) U (x ∩ z)))) & ((w ε ((x ∩ y) U (x ∩ z))) -> (w ε (x ∩ (y U z)))) AndInt 51 88
90. (w ε (x ∩ (y U z))) <-> (w ε ((x ∩ y) U (x ∩ z))) EquivConst 89
91. w ε (x U (y ∩ z)) Hyp
92. ((w ε (b U a)) -> ((w ε b) v (w ε a))) & (((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b U a))) EquivExp 16
93. ∀b.(((w ε (b U a)) -> ((w ε b) v (w ε a))) & (((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b U a)))) ForallInt 92
94. ((w ε (x U a)) -> ((w ε x) v (w ε a))) & (((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a))) ForallElim 93
95. ∀a.(((w ε (x U a)) -> ((w ε x) v (w ε a))) & (((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a)))) ForallInt 94
96. ((w ε (x U (y ∩ z))) -> ((w ε x) v (w ε (y ∩ z)))) & (((w ε x) v (w ε (y ∩ z))) -> (w ε (x U (y ∩ z)))) ForallElim 95
97. (w ε (x U (y ∩ z))) -> ((w ε x) v (w ε (y ∩ z))) AndElimL 96
98. (w ε x) v (w ε (y ∩ z)) ImpElim 91 97
99. w ε x Hyp
100. (w ε x) v (w ε y) OrIntR 99
101. ((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b U a)) AndElimR 92
102. ∀b.(((w ε b) v (w ε a)) -> (w ε (b U a))) ForallInt 101
103. ((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a)) ForallElim 102
104. ∀a.(((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a))) ForallInt 103
105. ((w ε x) v (w ε y)) -> (w ε (x U y)) ForallElim 104
106. w ε (x U y) ImpElim 100 105
107. (w ε x) v (w ε z) OrIntR 99
108. ∀a.(((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a))) ForallInt 103
109. ((w ε x) v (w ε z)) -> (w ε (x U z)) ForallElim 104
110. w ε (x U z) ImpElim 107 109
111. (w ε (x U y)) & (w ε (x U z)) AndInt 106 110
112. ∀x.((w ε (x ∩ a)) <-> ((w ε x) & (w ε a))) ForallInt 6
113. (w ε (b ∩ a)) <-> ((w ε b) & (w ε a)) ForallElim 112
114. ((w ε (b ∩ a)) -> ((w ε b) & (w ε a))) & (((w ε b) & (w ε a)) -> (w ε (b ∩ a))) EquivExp 113
115. ((w ε b) & (w ε a)) -> (w ε (b ∩ a)) AndElimR 114
116. ∀b.(((w ε b) & (w ε a)) -> (w ε (b ∩ a))) ForallInt 115
117. ((w ε (x U y)) & (w ε a)) -> (w ε ((x U y) ∩ a)) ForallElim 116
118. ∀a.(((w ε (x U y)) & (w ε a)) -> (w ε ((x U y) ∩ a))) ForallInt 117
119. ((w ε (x U y)) & (w ε (x U z))) -> (w ε ((x U y) ∩ (x U z))) ForallElim 118
120. w ε ((x U y) ∩ (x U z)) ImpElim 111 119
121. w ε (y ∩ z) Hyp
122. (w ε (b ∩ a)) -> ((w ε b) & (w ε a)) AndElimL 114
123. ∀b.((w ε (b ∩ a)) -> ((w ε b) & (w ε a))) ForallInt 122
124. (w ε (y ∩ a)) -> ((w ε y) & (w ε a)) ForallElim 123
125. ∀a.((w ε (y ∩ a)) -> ((w ε y) & (w ε a))) ForallInt 124
126. (w ε (y ∩ z)) -> ((w ε y) & (w ε z)) ForallElim 125
127. (w ε y) & (w ε z) ImpElim 121 126
128. w ε y AndElimL 127
129. w ε z AndElimR 127
130. (w ε x) v (w ε y) OrIntL 128
131. (w ε x) v (w ε z) OrIntL 129
132. w ε (x U z) ImpElim 131 109
133. (z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 1
134. ((z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) EquivExp 133
135. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y)) AndElimR 134
136. ∀z.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) ForallInt 135
137. ((w ε x) v (w ε y)) -> (w ε (x U y)) ForallElim 136
138. w ε (x U y) ImpElim 130 137
139. (w ε (x U y)) & (w ε (x U z)) AndInt 138 132
140. w ε ((x U y) ∩ (x U z)) ImpElim 139 119
141. w ε ((x U y) ∩ (x U z)) OrElim 98 99 120 121 140
142. (w ε (x U (y ∩ z))) -> (w ε ((x U y) ∩ (x U z))) ImpInt 141
143. w ε ((x U y) ∩ (x U z)) Hyp
144. (w ε (b ∩ a)) -> ((w ε b) & (w ε a)) AndElimL 114
145. ∀b.(((w ε (b ∩ a)) -> ((w ε b) & (w ε a))) & (((w ε b) & (w ε a)) -> (w ε (b ∩ a)))) ForallInt 114
146. ((w ε ((x U y) ∩ a)) -> ((w ε (x U y)) & (w ε a))) & (((w ε (x U y)) & (w ε a)) -> (w ε ((x U y) ∩ a))) ForallElim 145
147. ∀a.(((w ε ((x U y) ∩ a)) -> ((w ε (x U y)) & (w ε a))) & (((w ε (x U y)) & (w ε a)) -> (w ε ((x U y) ∩ a)))) ForallInt 146

148. ((w ε ((x U y) ∩ (x U z))) -> ((w ε (x U y)) & (w ε (x U z)))) & (((w ε (x U y)) & (w ε (x U z))) -> (w ε ((x U y) ∩ (x U z)))) ForallElim 147
149. (w ε ((x U y) ∩ (x U z))) -> ((w ε (x U y)) & (w ε (x U z))) AndElimL 148
150. (w ε (x U y)) & (w ε (x U z)) ImpElim 143 149
151. w ε (x U y) AndElimL 150
152. w ε (x U z) AndElimR 150
153. (z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 134
154. ∀z.((z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) ForallInt 153
155. (w ε (x U y)) -> ((w ε x) v (w ε y)) ForallElim 154
156. ∀y.((w ε (x U y)) -> ((w ε x) v (w ε y))) ForallInt 155
157. (w ε (x U z)) -> ((w ε x) v (w ε z)) ForallElim 156
158. (w ε x) v (w ε y) ImpElim 151 155
159. (w ε x) v (w ε z) ImpElim 152 157
160. w ε x Hyp
161. (w ε x) v (w ε (y ∩ z)) OrIntR 160
162. ((w ε (x U a)) -> ((w ε x) v (w ε a))) & (((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a))) EquivExp 14
163. ((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a)) AndElimR 162
164. ∀a.(((w ε x) v (w ε a)) -> (w ε (x U a))) ForallInt 163
165. ((w ε x) v (w ε (y ∩ z))) -> (w ε (x U (y ∩ z))) ForallElim 164
166. w ε (x U (y ∩ z)) ImpElim 161 165
167. (w ε x) -> (w ε (x U (y ∩ z))) ImpInt 166
168. w ε y Hyp
169. w ε x Hyp
170. w ε (x U (y ∩ z)) ImpElim 169 167
171. w ε z Hyp
172. (w ε y) & (w ε z) AndInt 168 171
173. ∀a.(((w ε b) & (w ε a)) -> (w ε (b ∩ a))) ForallInt 115
174. ((w ε y) & (w ε a)) -> (w ε (y ∩ a)) ForallElim 116
175. ∀a.(((w ε y) & (w ε a)) -> (w ε (y ∩ a))) ForallInt 174
176. ((w ε y) & (w ε z)) -> (w ε (y ∩ z)) ForallElim 175
177. w ε (y ∩ z) ImpElim 172 176
178. (w ε x) v (w ε (y ∩ z)) OrIntL 177
179. w ε (x U (y ∩ z)) ImpElim 178 165
180. w ε (x U (y ∩ z)) OrElim 159 169 170 171 179
181. w ε (x U (y ∩ z)) OrElim 158 160 166 168 180
182. (w ε ((x U y) ∩ (x U z))) -> (w ε (x U (y ∩ z))) ImpInt 181
183. ((w ε (x U (y ∩ z))) -> (w ε ((x U y) ∩ (x U z)))) & ((w ε ((x U y) ∩ (x U z))) -> (w ε (x U (y ∩ z)))) AndInt 142 182
184. (w ε (x U (y ∩ z))) <-> (w ε ((x U y) ∩ (x U z))) EquivConst 183
185. ((w ε (x ∩ (y U z))) <-> (w ε ((x ∩ y) U (x ∩ z)))) & ((w ε (x U (y ∩ z))) <-> (w ε ((x U y) ∩ (x U z)))) AndInt 90 184
186. (w ε (x U (y ∩ z))) <-> (w ε ((x U y) ∩ (x U z))) AndElimR 185
187. (w ε (x ∩ (y U z))) <-> (w ε ((x ∩ y) U (x ∩ z))) AndElimL 185
188. ∀w.((w ε (x U (y ∩ z))) <-> (w ε ((x U y) ∩ (x U z)))) ForallInt 186
189. ∀w.((w ε (x ∩ (y U z))) <-> (w ε ((x ∩ y) U (x ∩ z)))) ForallInt 187
190. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
191. ∀j.(((x ∩ (y U z)) = j) <-> ∀k.((k ε (x ∩ (y U z))) <-> (k ε j))) ForallElim 190
192. ((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) <-> ∀k.((k ε (x ∩ (y U z))) <-> (k ε ((x ∩ y) U (x ∩ z)))) ForallElim 191
193. (((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) -> ∀k.((k ε (x ∩ (y U z))) <-> (k ε ((x ∩ y) U (x ∩ z))))) & (∀k.((k ε (x ∩ (y U z))) <-> (k ε ((x ∩ y) U (x ∩ z)))) -> ((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z)))) EquivExp 192
194. ∀k.((k ε (x ∩ (y U z))) <-> (k ε ((x ∩ y) U (x ∩ z)))) -> ((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) AndElimR 193
195. (x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z)) ImpElim 189 194
196. ∀l.(((x U (y ∩ z)) = l) <-> ∀m.((m ε (x U (y ∩ z))) <-> (m ε l))) ForallElim 190
197. ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z))) <-> ∀m.((m ε (x U (y ∩ z))) <-> (m ε ((x U y) ∩ (x U z)))) ForallElim 196
198. (((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z))) -> ∀m.((m ε (x U (y ∩ z))) <-> (m ε ((x U y) ∩ (x U z))))) & (∀m.((m ε (x U (y ∩ z))) <-> (m ε ((x U y) ∩ (x U z)))) -> ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z)))) EquivExp 197
199. ∀m.((m ε (x U (y ∩ z))) <-> (m ε ((x U y) ∩ (x U z)))) -> ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z))) AndElimR 198
200. (x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z)) ImpElim 188 199
201. ((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) & ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z))) AndInt 195 200 Qed

Used Theorems

1. ((z ε (x U y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))

```
2. (A & (B v C)) <-> ((A & B) v (A & C))
```

Th11. ~~x = x

```
0. z ε ~~x  Hyp
1. ~x = {y: ¬(y ε x)}  DefEqInt
2. ∀x.(~x = {y: ¬(y ε x)})  ForallInt 1
3. ~~x = {y: ¬(y ε ~x)}  ForallElim 2
4. z ε {y: ¬(y ε ~x)}  EqualitySub 0 3
5. Set(z) & ¬(z ε ~x)  ClassElim 4
6. ¬(z ε ~x)  AndElimR 5
7. ¬(z ε x)  Hyp
8. Set(z)  AndElimL 5
9. Set(z) & ¬(z ε x)  AndInt 8 7
10. z ε {y: ¬(y ε x)}  ClassInt 9
11. {y: ¬(y ε x)} = ~x  Symmetry 1
12. z ε ~x  EqualitySub 10 11
13. _|_  ImpElim 12 6
14. ¬¬(z ε x)  ImpInt 13
15. D <-> ¬¬D  TheoremInt
16. (z ε x) <-> ¬¬(z ε x)  PolySub 15
17. ((z ε x) -> ¬¬(z ε x)) & (¬¬(z ε x) -> (z ε x))  EquivExp 16
18. ¬¬(z ε x) -> (z ε x)  AndElimR 17
19. z ε x  ImpElim 14 18
20. (z ε ~~x) -> (z ε x)  ImpInt 19
21. z ε x  Hyp
22. (z ε x) -> ¬¬(z ε x)  AndElimL 17
23. ¬¬(z ε x)  ImpElim 21 22
24. z ε ~x  Hyp
25. z ε {y: ¬(y ε x)}  EqualitySub 24 1
26. Set(z) & ¬(z ε x)  ClassElim 25
27. ¬(z ε x)  AndElimR 26
28. _|_  ImpElim 27 23
29. ¬(z ε ~x)  ImpInt 28
30. ∃y.(z ε y)  ExistsInt 21
31. Set(z)  DefSub 30
32. Set(z) & ¬(z ε ~x)  AndInt 31 29
33. z ε {y: ¬(y ε ~x)}  ClassInt 32
34. {y: ¬(y ε ~x)} = ~~x  Symmetry 3
35. z ε ~~x  EqualitySub 33 34
36. (z ε x) -> (z ε ~~x)  ImpInt 35
37. ((z ε ~~x) -> (z ε x)) & ((z ε x) -> (z ε ~~x))  AndInt 20 36
38. (z ε ~~x) <-> (z ε x)  EquivConst 37
39. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
40. ∀y.((~~x = y) <-> ∀z.((z ε ~~x) <-> (z ε y)))  ForallElim 39
41. (~~x = x) <-> ∀z.((z ε ~~x) <-> (z ε x))  ForallElim 40
42. ((~~x = x) -> ∀z.((z ε ~~x) <-> (z ε x))) & (∀z.((z ε ~~x) <-> (z ε x)) -> (~~x = x))
EquivExp 41
43. ∀z.((z ε ~~x) <-> (z ε x)) -> (~~x = x)  AndElimR 42
44. ∀z.((z ε ~~x) <-> (z ε x))  ForallInt 38
45. ~~x = x  ImpElim 44 43 Qed
```

Used Theorems

```
1. D <-> ¬¬D
```

Th12. (~(x ∪ y) = (~x ∩ ~y)) & (~(x ∩ y) = (~x ∪ ~y))

```
0. z ε ~(x ∪ y)  Hyp
1. ~x = {y: ¬(y ε x)}  DefEqInt
2. ∀a.(~a = {y: ¬(y ε a)})  ForallInt 1
3. ~(x ∪ y) = {k: ¬(k ε (x ∪ y))}  ForallElim 2
4. z ε {k: ¬(k ε (x ∪ y))}  EqualitySub 0 3
5. Set(z) & ¬(z ε (x ∪ y))  ClassElim 4
6. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
7. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 6
8. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))
EquivExp 7
9. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))  AndElimR 8
10. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)  TheoremInt
```

11. (((z ε x) v (z ε y)) -> B) -> (¬B -> ¬((z ε x) v (z ε y))) PolySub 10
12. (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) -> (¬(z ε (x U y)) -> ¬((z ε x) v (z ε y))) PolySub 11
13. ¬(z ε (x U y)) -> ¬((z ε x) v (z ε y)) ImpElim 9 12
14. ¬(z ε (x U y)) AndElimR 5
15. ¬((z ε x) v (z ε y)) ImpElim 14 13
16. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B)) TheoremInt
17. (¬((z ε x) v B) <-> (¬(z ε x) & ¬B)) & (¬((z ε x) & B) <-> (¬(z ε x) v ¬B)) PolySub 16
18. (¬((z ε x) v (z ε y)) <-> (¬(z ε x) & ¬(z ε y))) & (¬((z ε x) & (z ε y)) <-> (¬(z ε x) v ¬(z ε y))) PolySub 17
19. ¬((z ε x) v (z ε y)) <-> (¬(z ε x) & ¬(z ε y)) AndElimL 18
20. (¬((z ε x) v (z ε y)) -> (¬(z ε x) & ¬(z ε y))) & ((¬(z ε x) & ¬(z ε y)) -> ¬((z ε x) v (z ε y))) EquivExp 19
21. ¬((z ε x) v (z ε y)) -> (¬(z ε x) & ¬(z ε y)) AndElimL 20
22. ¬(z ε x) & ¬(z ε y) ImpElim 15 21
23. Set(z) AndElimL 5
24. ¬(z ε x) AndElimL 22
25. ¬(z ε y) AndElimR 22
26. Set(z) & ¬(z ε y) AndInt 23 25
27. z ε {z: ¬(z ε y)} ClassInt 26
28. Set(z) & ¬(z ε x) AndInt 23 24
29. z ε {z: ¬(z ε x)} ClassInt 28
30. ~x = {y: ¬(y ε x)} DefEqInt
31. {y: ¬(y ε x)} = ~x Symmetry 30
32. z ε ~x EqualitySub 29 31
33. ∀w.(~w = {y: ¬(y ε w)}) ForallInt 30
34. ~y = {l: ¬(l ε y)} ForallElim 33
35. {l: ¬(l ε y)} = ~y Symmetry 34
36. z ε ~y EqualitySub 27 35
37. (z ε ~x) & (z ε ~y) AndInt 32 36
38. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 6
39. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) EquivExp 38
40. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)) AndElimR 39
41. ∀x.(((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) ForallInt 40
42. ((z ε ~x) & (z ε y)) -> (z ε (~x ∩ y)) ForallElim 41
43. ∀y.(((z ε ~x) & (z ε y)) -> (z ε (~x ∩ y))) ForallInt 42
44. ((z ε ~x) & (z ε ~y)) -> (z ε (~x ∩ ~y)) ForallElim 43
45. z ε (~x ∩ ~y) ImpElim 37 44
46. (z ε ~(x U y)) -> (z ε (~x ∩ ~y)) ImpInt 45
47. z ε (~x ∩ ~y) Hyp
48. ∀x.((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) ForallInt 38
49. (z ε (~x ∩ y)) <-> ((z ε ~x) & (z ε y)) ForallElim 48
50. ∀y.((z ε (~x ∩ y)) <-> ((z ε ~x) & (z ε y))) ForallInt 49
51. (z ε (~x ∩ ~y)) <-> ((z ε ~x) & (z ε ~y)) ForallElim 50
52. ((z ε (~x ∩ ~y)) -> ((z ε ~x) & (z ε ~y))) & (((z ε ~x) & (z ε ~y)) -> (z ε (~x ∩ ~y))) EquivExp 51
53. (z ε (~x ∩ ~y)) -> ((z ε ~x) & (z ε ~y)) AndElimL 52
54. (z ε ~x) & (z ε ~y) ImpElim 47 53
55. z ε ~y AndElimR 54
56. z ε ~x AndElimL 54
57. z ε {y: ¬(y ε x)} EqualitySub 56 30
58. z ε {l: ¬(l ε y)} EqualitySub 55 34
59. Set(z) & ¬(z ε x) ClassElim 57
60. Set(z) & ¬(z ε y) ClassElim 58
61. ¬(z ε x) AndElimR 59
62. ¬(z ε y) AndElimR 60
63. ¬(z ε x) & ¬(z ε y) AndInt 61 62
64. (¬(z ε x) & ¬(z ε y)) -> ¬((z ε x) v (z ε y)) AndElimR 20
65. ¬((z ε x) v (z ε y)) ImpElim 63 64
66. z ε (x U y) Hyp
67. (z ε (x U y)) -> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 8
68. (z ε x) v (z ε y) ImpElim 66 67
69. _|_ ImpElim 68 65
70. ¬(z ε (x U y)) ImpInt 69
71. Set(z) AndElimL 59
72. Set(z) & ¬(z ε (x U y)) AndInt 71 70
73. z ε {w: ¬(w ε (x U y))} ClassInt 72
74. ∀y.({l: ¬(l ε y)} = ~y) ForallInt 35
75. {l: ¬(l ε (x U y))} = ~(x U y) ForallElim 74

```
76. z ε ~(x ∪ y)  EqualitySub 73 75
77. (z ε (~x ∩ ~y)) -> (z ε ~(x ∪ y))  ImpInt 76
78. ((z ε ~(x ∪ y)) -> (z ε (~x ∩ ~y))) & ((z ε (~x ∩ ~y)) -> (z ε ~(x ∪ y)))  AndInt 46 77
79. (z ε ~(x ∪ y)) <-> (z ε (~x ∩ ~y))  EquivConst 78
80. z ε ~(x ∩ y)  Hyp
81. ∀y.(~y = {l: ¬(l ε y)})  ForallInt 34
82. ~(x ∩ y) = {l: ¬(l ε (x ∩ y))}  ForallElim 81
83. z ε {l: ¬(l ε (x ∩ y))}  EqualitySub 80 82
84. Set(z) & ¬(z ε (x ∩ y))  ClassElim 83
85. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))  AndElimR 39
86. (((z ε x) & (z ε y)) -> B) -> (¬B -> ¬((z ε x) & (z ε y)))  PolySub 10
87. (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) -> (¬(z ε (x ∩ y)) -> ¬((z ε x) & (z ε y))) PolySub 86
88. ¬(z ε (x ∩ y)) -> ¬((z ε x) & (z ε y))  ImpElim 85 87
89. ¬(z ε (x ∩ y))  AndElimR 84
90. ¬((z ε x) & (z ε y))  ImpElim 89 88
91. ¬(A & B) <-> (¬A v ¬B)  AndElimR 16
92. ¬((z ε x) & B) <-> (¬(z ε x) v ¬B)  PolySub 91
93. ¬((z ε x) & (z ε y)) <-> (¬(z ε x) v ¬(z ε y))  PolySub 92
94. (¬((z ε x) & (z ε y)) -> (¬(z ε x) v ¬(z ε y))) & ((¬(z ε x) v ¬(z ε y)) -> ¬((z ε x) & (z ε y)))  EquivExp 93
95. ¬((z ε x) & (z ε y)) -> (¬(z ε x) v ¬(z ε y))  AndElimL 94
96. ¬(z ε x) v ¬(z ε y)  ImpElim 90 95
97. ¬(z ε x)  Hyp
98. Set(z)  AndElimL 84
99. Set(z) & ¬(z ε x)  AndInt 98 97
100. z ε {w: ¬(w ε x)}  ClassInt 99
101. (z ε {w: ¬(w ε x)}) v (z ε {w: ¬(w ε y)})  OrIntR 100
102. {y: ¬(y ε x)} = ~x  Symmetry 30
103. ∀x.({y: ¬(y ε x)} = ~x)  ForallInt 102
104. {m: ¬(m ε y)} = ~y  ForallElim 103
105. (z ε ~x) v (z ε {w: ¬(w ε y)})  EqualitySub 101 102
106. (z ε ~x) v (z ε ~y)  EqualitySub 105 104
107. ∀x.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))  ForallInt 9
108. ((z ε ~x) v (z ε y)) -> (z ε (~x ∪ y))  ForallElim 107
109. ∀y.(((z ε ~x) v (z ε y)) -> (z ε (~x ∪ y)))  ForallInt 108
110. ((z ε ~x) v (z ε ~y)) -> (z ε (~x ∪ ~y))  ForallElim 109
111. z ε (~x ∪ ~y)  ImpElim 106 110
112. ¬(z ε y)  Hyp
113. Set(z) & ¬(z ε y)  AndInt 98 112
114. z ε {z: ¬(z ε y)}  ClassInt 113
115. (z ε {z: ¬(z ε x)}) v (z ε {z: ¬(z ε y)})  OrIntL 114
116. (z ε ~x) v (z ε {z: ¬(z ε y)})  EqualitySub 115 102
117. (z ε ~x) v (z ε ~y)  EqualitySub 116 104
118. z ε (~x ∪ ~y)  ImpElim 117 110
119. z ε (~x ∪ ~y)  OrElim 96 97 111 112 118
120. (z ε ~(x ∩ y)) -> (z ε (~x ∪ ~y))  ImpInt 119
121. z ε (~x ∪ ~y)  Hyp
122. (z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 8
123. ∀x.((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y)))  ForallInt 122
124. (z ε (~x ∪ y)) -> ((z ε ~x) v (z ε y))  ForallElim 123
125. ∀y.((z ε (~x ∪ y)) -> ((z ε ~x) v (z ε y)))  ForallInt 124
126. (z ε (~x ∪ ~y)) -> ((z ε ~x) v (z ε ~y))  ForallElim 125
127. (z ε ~x) v (z ε ~y)  ImpElim 121 126
128. z ε ~x  Hyp
129. z ε {y: ¬(y ε x)}  EqualitySub 128 30
130. Set(z) & ¬(z ε x)  ClassElim 129
131. ¬(z ε x)  AndElimR 130
132. z ε ~y  Hyp
133. ∀x.(~x = {y: ¬(y ε x)})  ForallInt 30
134. ~y = {n: ¬(n ε y)}  ForallElim 133
135. z ε {n: ¬(n ε y)}  EqualitySub 132 134
136. Set(z) & ¬(z ε y)  ClassElim 135
137. ¬(z ε y)  AndElimR 136
138. ¬(z ε x) v ¬(z ε y)  OrIntR 131
139. ¬(z ε x) v ¬(z ε y)  OrIntL 137
140. ¬(z ε x) v ¬(z ε y)  OrElim 127 128 138 132 139
141. ¬(A & B) <-> (¬A v ¬B)  AndElimR 16
142. (¬(A & B) -> (¬A v ¬B)) & ((¬A v ¬B) -> ¬(A & B))  EquivExp 141
143. (¬A v ¬B) -> ¬(A & B)  AndElimR 142
```

144. (¬(z ε x) v ¬B) -> ¬((z ε x) & B) PolySub 143
145. (¬(z ε x) v ¬(z ε y)) -> ¬((z ε x) & (z ε y)) PolySub 144
146. ¬((z ε x) & (z ε y)) ImpElim 140 145
147. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 6
148. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) EquivExp 147
149. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimL 148
150. ((z ε (x ∩ y)) -> B) -> (¬B -> ¬(z ε (x ∩ y))) PolySub 10
151. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) -> (¬((z ε x) & (z ε y)) -> ¬(z ε (x ∩ y))) PolySub 150
152. ¬((z ε x) & (z ε y)) -> ¬(z ε (x ∩ y)) ImpElim 149 151
153. ¬(z ε (x ∩ y)) ImpElim 146 152
154. Set(z) AndElimL 130
155. Set(z) & ¬(z ε (x ∩ y)) AndInt 154 153
156. z ε {w: ¬(w ε (x ∩ y))} ClassInt 155
157. ∀x.({y: ¬(y ε x)} = ~x) ForallInt 31
158. {o: ¬(o ε (x ∩ y))} = ~(x ∩ y) ForallElim 157
159. z ε ~(x ∩ y) EqualitySub 156 158
160. (z ε (~x ∪ ~y)) -> (z ε ~(x ∩ y)) ImpInt 159
161. ((z ε ~(x ∩ y)) -> (z ε (~x ∪ ~y))) & ((z ε (~x ∪ ~y)) -> (z ε ~(x ∩ y))) AndInt 120 160
162. (z ε ~(x ∩ y)) <-> (z ε (~x ∪ ~y)) EquivConst 161
163. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
164. ∀p.((~(x ∪ y) = p) <-> ∀z.((z ε ~(x ∪ y)) <-> (z ε p))) ForallElim 163
165. (~(x ∪ y) = (~x ∩ ~y)) <-> ∀z.((z ε ~(x ∪ y)) <-> (z ε (~x ∩ ~y))) ForallElim 164
166. ∀z.((z ε ~(x ∪ y)) <-> (z ε (~x ∩ ~y))) ForallInt 79
167. ((~(x ∪ y) = (~x ∩ ~y)) -> ∀z.((z ε ~(x ∪ y)) <-> (z ε (~x ∩ ~y)))) & (∀z.((z ε ~(x ∪ y)) <-> (z ε (~x ∩ ~y))) -> (~(x ∪ y) = (~x ∩ ~y))) EquivExp 165
168. ∀z.((z ε ~(x ∪ y)) <-> (z ε (~x ∩ ~y))) -> (~(x ∪ y) = (~x ∩ ~y)) AndElimR 167
169. ~(x ∪ y) = (~x ∩ ~y) ImpElim 166 168
170. ∀q.((~(x ∩ y) = q) <-> ∀z.((z ε ~(x ∩ y)) <-> (z ε q))) ForallElim 163
171. (~(x ∩ y) = (~x ∪ ~y)) <-> ∀z.((z ε ~(x ∩ y)) <-> (z ε (~x ∪ ~y))) ForallElim 170
172. ((~(x ∩ y) = (~x ∪ ~y)) -> ∀z.((z ε ~(x ∩ y)) <-> (z ε (~x ∪ ~y)))) & (∀z.((z ε ~(x ∩ y)) <-> (z ε (~x ∪ ~y))) -> (~(x ∩ y) = (~x ∪ ~y))) EquivExp 171
173. ∀z.((z ε ~(x ∩ y)) <-> (z ε (~x ∪ ~y))) -> (~(x ∩ y) = (~x ∪ ~y)) AndElimR 172
174. ∀z.((z ε ~(x ∩ y)) <-> (z ε (~x ∪ ~y))) ForallInt 162
175. ~(x ∩ y) = (~x ∪ ~y) ImpElim 174 173
176. (~(x ∪ y) = (~x ∩ ~y)) & (~(x ∩ y) = (~x ∪ ~y)) AndInt 169 175 Qed

Used Theorems

2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
3. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)
1. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B))

Th14. (x ∩ (y ~ z)) = ((x ∩ y) ∩ ~z)

0. (x ~ y) = (x ∩ ~y) DefEqInt
1. ∀a.((a ~ y) = (a ∩ ~y)) ForallInt 0
2. ∀b.∀a.((a ~ b) = (a ∩ ~b)) ForallInt 1
3. ∀a.((a ~ z) = (a ∩ ~z)) ForallElim 2
4. (y ~ z) = (y ∩ ~z) ForallElim 3
5. (x ∩ (y ~ z)) = (x ∩ (y ~ z)) Identity
6. (x ∩ (y ~ z)) = (x ∩ (y ∩ ~z)) EqualitySub 5 4
7. (((x ∪ y) ∪ z) = (x ∪ (y ∪ z))) & (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z))) TheoremInt
8. ((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z)) AndElimR 7
9. (x ∩ (y ∩ z)) = ((x ∩ y) ∩ z) Symmetry 8
10. ∀z.((x ∩ (y ∩ z)) = ((x ∩ y) ∩ z)) ForallInt 9
11. (x ∩ (y ∩ ~z)) = ((x ∩ y) ∩ ~z) ForallElim 10
12. (x ∩ (y ~ z)) = ((x ∩ y) ∩ ~z) EqualitySub 6 11 Qed

Used Theorems

4. (((x ∪ y) ∪ z) = (x ∪ (y ∪ z))) & (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z)))

Th16. ¬(x ε 0)

0. x ε 0 Hyp
1. 0 = {x: ¬(x = x)} DefEqInt
2. x ε {x: ¬(x = x)} EqualitySub 0 1
3. Set(x) & ¬(x = x) ClassElim 2

```
4. ¬(x = x)  AndElimR 3
5. x = x  Identity
6. _|_  ImpElim 5 4
7. ¬(x ε 0)  ImpInt 6 Qed
```

Used Theorems

Th17. ((0 ∪ x) = x) & ((0 ∩ x) = 0)

```
0. z ε (0 ∪ x)  Hyp
1. (x ∪ y) = {z: ((z ε x) v (z ε y))}  DefEqInt
2. ∀x.((x ∪ y) = {z: ((z ε x) v (z ε y))})  ForallInt 1
3. (0 ∪ y) = {z: ((z ε 0) v (z ε y))}  ForallElim 2
4. ∀y.((0 ∪ y) = {z: ((z ε 0) v (z ε y))})  ForallInt 3
5. (0 ∪ x) = {z: ((z ε 0) v (z ε x))}  ForallElim 4
6. z ε {z: ((z ε 0) v (z ε x))}  EqualitySub 0 5
7. Set(z) & ((z ε 0) v (z ε x))  ClassElim 6
8. (z ε 0) v (z ε x)  AndElimR 7
9. z ε 0  Hyp
10. ¬(x ε 0)  TheoremInt
11. ∀x.¬(x ε 0)  ForallInt 10
12. ¬(z ε 0)  ForallElim 11
13. _|_  ImpElim 9 12
14. z ε x  AbsI 13
15. z ε x  Hyp
16. z ε x  OrElim 8 9 14 15 15
17. (z ε (0 ∪ x)) -> (z ε x)  ImpInt 16
18. z ε x  Hyp
19. (z ε 0) v (z ε x)  OrIntL 18
20. ∃x.(z ε x)  ExistsInt 18
21. Set(z)  DefSub 20
22. Set(z) & ((z ε 0) v (z ε x))  AndInt 21 19
23. z ε {z: ((z ε 0) v (z ε x))}  ClassInt 22
24. {z: ((z ε 0) v (z ε x))} = (0 ∪ x)  Symmetry 5
25. z ε (0 ∪ x)  EqualitySub 23 24
26. (z ε x) -> (z ε (0 ∪ x))  ImpInt 25
27. ((z ε (0 ∪ x)) -> (z ε x)) & ((z ε x) -> (z ε (0 ∪ x)))  AndInt 17 26
28. (z ε (0 ∪ x)) <-> (z ε x)  EquivConst 27
29. ∀z.((z ε (0 ∪ x)) <-> (z ε x))  ForallInt 28
30. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
31. ∀y.(((0 ∪ x) = y) <-> ∀z.((z ε (0 ∪ x)) <-> (z ε y)))  ForallElim 30
32. ((0 ∪ x) = x) <-> ∀z.((z ε (0 ∪ x)) <-> (z ε x))  ForallElim 31
33. (((0 ∪ x) = x) -> ∀z.((z ε (0 ∪ x)) <-> (z ε x))) & (∀z.((z ε (0 ∪ x)) <-> (z ε x)) -
> ((0 ∪ x) = x))  EquivExp 32
34. ∀z.((z ε (0 ∪ x)) <-> (z ε x)) -> ((0 ∪ x) = x)  AndElimR 33
35. (0 ∪ x) = x  ImpElim 29 34
36. z ε (0 ∩ x)  Hyp
37. (x ∩ y) = {z: ((z ε x) & (z ε y))}  DefEqInt
38. ∀x.((x ∩ y) = {z: ((z ε x) & (z ε y))})  ForallInt 37
39. (0 ∩ y) = {z: ((z ε 0) & (z ε y))}  ForallElim 38
40. ∀y.((0 ∩ y) = {z: ((z ε 0) & (z ε y))})  ForallInt 39
41. (0 ∩ x) = {z: ((z ε 0) & (z ε x))}  ForallElim 40
42. z ε {z: ((z ε 0) & (z ε x))}  EqualitySub 36 41
43. Set(z) & ((z ε 0) & (z ε x))  ClassElim 42
44. (z ε 0) & (z ε x)  AndElimR 43
45. z ε 0  AndElimL 44
46. (z ε (0 ∩ x)) -> (z ε 0)  ImpInt 45
47. z ε 0  Hyp
48. _|_  ImpElim 47 12
49. z ε (0 ∩ x)  AbsI 48
50. (z ε 0) -> (z ε (0 ∩ x))  ImpInt 49
51. ((z ε (0 ∩ x)) -> (z ε 0)) & ((z ε 0) -> (z ε (0 ∩ x)))  AndInt 46 50
52. (z ε (0 ∩ x)) <-> (z ε 0)  EquivConst 51
53. ∀z.((z ε (0 ∩ x)) <-> (z ε 0))  ForallInt 52
54. ∀y.(((0 ∩ x) = y) <-> ∀z.((z ε (0 ∩ x)) <-> (z ε y)))  ForallElim 30
55. ((0 ∩ x) = 0) <-> ∀z.((z ε (0 ∩ x)) <-> (z ε 0))  ForallElim 54
56. (((0 ∩ x) = 0) -> ∀z.((z ε (0 ∩ x)) <-> (z ε 0))) & (∀z.((z ε (0 ∩ x)) <-> (z ε 0)) -
> ((0 ∩ x) = 0))  EquivExp 55
57. ∀z.((z ε (0 ∩ x)) <-> (z ε 0)) -> ((0 ∩ x) = 0)  AndElimR 56
58. (0 ∩ x) = 0  ImpElim 53 57
```

59. ((0 ∪ x) = x) & ((0 ∩ x) = 0) AndInt 35 58 Qed

Used Theorems

2. ¬(x ε 0)

Th19. (x ε U) <-> Set(x)

0. x ε U Hyp
1. U = {x: (x = x)} DefEqInt
2. x ε {x: (x = x)} EqualitySub 0 1
3. Set(x) & (x = x) ClassElim 2
4. Set(x) AndElimL 3
5. (x ε U) -> Set(x) ImpInt 4
6. Set(x) Hyp
7. x = x Identity
8. Set(x) & (x = x) AndInt 6 7
9. x ε {x: (x = x)} ClassInt 8
10. {x: (x = x)} = U Symmetry 1
11. x ε U EqualitySub 9 10
12. Set(x) -> (x ε U) ImpInt 11
13. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) AndInt 5 12
14. (x ε U) <-> Set(x) EquivConst 13 Qed

Used Theorems

Th20. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x)

0. z ε (x ∪ U) Hyp
1. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) TheoremInt
2. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 1
3. ∀y.((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) ForallInt 2
4. (z ε (x ∪ U)) <-> ((z ε x) v (z ε U)) ForallElim 3
5. ((z ε (x ∪ U)) -> ((z ε x) v (z ε U))) & (((z ε x) v (z ε U)) -> (z ε (x ∪ U))) EquivExp 4
6. (z ε (x ∪ U)) -> ((z ε x) v (z ε U)) AndElimL 5
7. (z ε x) v (z ε U) ImpElim 0 6
8. z ε x Hyp
9. ∃y.(z ε y) ExistsInt 8
10. Set(z) DefSub 9
11. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
12. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 11
13. Set(x) -> (x ε U) AndElimR 12
14. ∀x.(Set(x) -> (x ε U)) ForallInt 13
15. Set(z) -> (z ε U) ForallElim 14
16. z ε U ImpElim 10 15
17. z ε U Hyp
18. z ε U OrElim 7 8 16 17 17
19. (z ε (x ∪ U)) -> (z ε U) ImpInt 18
20. z ε U Hyp
21. (z ε x) v (z ε U) OrIntL 20
22. ((z ε x) v (z ε U)) -> (z ε (x ∪ U)) AndElimR 5
23. z ε (x ∪ U) ImpElim 21 22
24. (z ε U) -> (z ε (x ∪ U)) ImpInt 23
25. ((z ε (x ∪ U)) -> (z ε U)) & ((z ε U) -> (z ε (x ∪ U))) AndInt 19 24
26. (z ε (x ∪ U)) <-> (z ε U) EquivConst 25
27. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
28. ∀y.(((x ∪ U) = y) <-> ∀z.((z ε (x ∪ U)) <-> (z ε y))) ForallElim 27
29. ((x ∪ U) = U) <-> ∀z.((z ε (x ∪ U)) <-> (z ε U)) ForallElim 28
30. ∀z.((z ε (x ∪ U)) <-> (z ε U)) ForallInt 26
31. (((x ∪ U) = U) -> ∀z.((z ε (x ∪ U)) <-> (z ε U))) & (∀z.((z ε (x ∪ U)) <-> (z ε U)) -> ((x ∪ U) = U)) EquivExp 29
32. ∀z.((z ε (x ∪ U)) <-> (z ε U)) -> ((x ∪ U) = U) AndElimR 31
33. (x ∪ U) = U ImpElim 30 32
34. z ε (x ∩ U) Hyp
35. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 1
36. ∀y.((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) ForallInt 35
37. (z ε (x ∩ U)) <-> ((z ε x) & (z ε U)) ForallElim 36

38. ((z ε (x ∩ U)) -> ((z ε x) & (z ε U))) & (((z ε x) & (z ε U)) -> (z ε (x ∩ U)))
EquivExp 37
39. (z ε (x ∩ U)) -> ((z ε x) & (z ε U)) AndElimL 38
40. (z ε x) & (z ε U) ImpElim 34 39
41. z ε x AndElimL 40
42. (z ε (x ∩ U)) -> (z ε x) ImpInt 41
43. z ε x Hyp
44. ∃y.(z ε y) ExistsInt 43
45. Set(z) DefSub 44
46. z ε U ImpElim 45 15
47. (z ε x) & (z ε U) AndInt 43 46
48. ((z ε x) & (z ε U)) -> (z ε (x ∩ U)) AndElimR 38
49. z ε (x ∩ U) ImpElim 47 48
50. (z ε x) -> (z ε (x ∩ U)) ImpInt 49
51. ((z ε (x ∩ U)) -> (z ε x)) & ((z ε x) -> (z ε (x ∩ U))) AndInt 42 50
52. (z ε (x ∩ U)) <-> (z ε x) EquivConst 51
53. ∀z.((z ε (x ∩ U)) <-> (z ε x)) ForallInt 52
54. ∀y.(((x ∩ U) = y) <-> ∀z.((z ε (x ∩ U)) <-> (z ε y))) ForallElim 27
55. ((x ∩ U) = x) <-> ∀z.((z ε (x ∩ U)) <-> (z ε x)) ForallElim 54
56. (((x ∩ U) = x) -> ∀z.((z ε (x ∩ U)) <-> (z ε x))) & (∀z.((z ε (x ∩ U)) <-> (z ε x)) -
> ((x ∩ U) = x)) EquivExp 55
57. ∀z.((z ε (x ∩ U)) <-> (z ε x)) -> ((x ∩ U) = x) AndElimR 56
58. (x ∩ U) = x ImpElim 53 57
59. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x) AndInt 33 58 Qed

Used Theorems

1. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
2. (x ε U) <-> Set(x)

Th21. (~0 = U) & (~U = 0)

0. z ε ~0 Hyp
1. ~x = {y: ¬(y ε x)} DefEqInt
2. ∀x.(~x = {y: ¬(y ε x)}) ForallInt 1
3. ∀x.(~x = {y: ¬(y ε x)}) ForallInt 1
4. ~0 = {y: ¬(y ε 0)} ForallElim 3
5. z ε {y: ¬(y ε 0)} EqualitySub 0 4
6. Set(z) & ¬(z ε 0) ClassElim 5
7. Set(z) AndElimL 6
8. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
9. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 8
10. Set(x) -> (x ε U) AndElimR 9
11. ∀x.(Set(x) -> (x ε U)) ForallInt 10
12. Set(z) -> (z ε U) ForallElim 11
13. z ε U ImpElim 7 12
14. (z ε ~0) -> (z ε U) ImpInt 13
15. z ε U Hyp
16. (x ε U) -> Set(x) AndElimL 9
17. ∀x.((x ε U) -> Set(x)) ForallInt 16
18. (z ε U) -> Set(z) ForallElim 17
19. Set(z) ImpElim 15 18
20. ¬(x ε 0) TheoremInt
21. ∀x.¬(x ε 0) ForallInt 20
22. ¬(z ε 0) ForallElim 21
23. Set(z) & ¬(z ε 0) AndInt 19 22
24. z ε {y: ¬(y ε 0)} ClassInt 23
25. {y: ¬(y ε 0)} = ~0 Symmetry 4
26. z ε ~0 EqualitySub 24 25
27. (z ε U) -> (z ε ~0) ImpInt 26
28. ((z ε ~0) -> (z ε U)) & ((z ε U) -> (z ε ~0)) AndInt 14 27
29. (z ε ~0) <-> (z ε U) EquivConst 28
30. ∀z.((z ε ~0) <-> (z ε U)) ForallInt 29
31. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
32. ∀y.((~0 = y) <-> ∀z.((z ε ~0) <-> (z ε y))) ForallElim 31
33. (~0 = U) <-> ∀z.((z ε ~0) <-> (z ε U)) ForallElim 32
34. ((~0 = U) -> ∀z.((z ε ~0) <-> (z ε U))) & (∀z.((z ε ~0) <-> (z ε U)) -> (~0 = U))
EquivExp 33
35. ∀z.((z ε ~0) <-> (z ε U)) -> (~0 = U) AndElimR 34
36. ~0 = U ImpElim 30 35
37. z ε ~U Hyp

38. ∀x.(~x = {y: ¬(y ε x)}) ForallInt 1
39. ~U = {y: ¬(y ε U)} ForallElim 38
40. z ε {y: ¬(y ε U)} EqualitySub 37 39
41. Set(z) & ¬(z ε U) ClassElim 40
42. ¬(z ε U) AndElimR 41
43. Set(z) AndElimL 41
44. z ε U ImpElim 43 12
45. _|_ ImpElim 44 42
46. z ε 0 AbsI 45
47. (z ε ~U) -> (z ε 0) ImpInt 46
48. z ε 0 Hyp
49. 0 = {x: ¬(x = x)} DefEqInt
50. z ε {x: ¬(x = x)} EqualitySub 46 49
51. Set(z) & ¬(z = z) ClassElim 50
52. Set(z) AndElimL 51
53. ¬(z = z) AndElimR 51
54. z = z Identity
55. _|_ ImpElim 54 53
56. z ε ~U AbsI 55
57. (z ε 0) -> (z ε ~U) ImpInt 56
58. ((z ε ~U) -> (z ε 0)) & ((z ε 0) -> (z ε ~U)) AndInt 47 57
59. (z ε ~U) <-> (z ε 0) EquivConst 58
60. ∀z.((z ε ~U) <-> (z ε 0)) ForallInt 59
61. ∀y.((~U = y) <-> ∀z.((z ε ~U) <-> (z ε y))) ForallElim 31
62. (~U = 0) <-> ∀z.((z ε ~U) <-> (z ε 0)) ForallElim 61
63. ((~U = 0) -> ∀z.((z ε ~U) <-> (z ε 0))) & (∀z.((z ε ~U) <-> (z ε 0)) -> (~U = 0)) EquivExp 62
64. ∀z.((z ε ~U) <-> (z ε 0)) -> (~U = 0) AndElimR 63
65. ~U = 0 ImpElim 60 64
66. (~0 = U) & (~U = 0) AndInt 36 65 Qed

Used Theorems

1. (x ε U) <-> Set(x)
2. ¬(x ε 0)

Th24. (∩0 = U) & (∪0 = 0)

0. x ε ∩0 Hyp
1. ∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))} DefEqInt
2. ∀x.(∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))}) ForallInt 1
3. ∩0 = {z: ∀y.((y ε 0) -> (z ε y))} ForallElim 2
4. x ε {z: ∀y.((y ε 0) -> (z ε y))} EqualitySub 0 3
5. Set(x) & ∀y.((y ε 0) -> (x ε y)) ClassElim 4
6. Set(x) AndElimL 5
7. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
8. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 7
9. Set(x) -> (x ε U) AndElimR 8
10. x ε U ImpElim 6 9
11. (x ε ∩0) -> (x ε U) ImpInt 10
12. x ε U Hyp
13. y ε 0 Hyp
14. ¬(x ε 0) TheoremInt
15. ∀x.¬(x ε 0) ForallInt 14
16. ¬(y ε 0) ForallElim 15
17. _|_ ImpElim 13 16
18. x ε y AbsI 17
19. (y ε 0) -> (x ε y) ImpInt 18
20. ∀y.((y ε 0) -> (x ε y)) ForallInt 19
21. (x ε U) -> Set(x) AndElimL 8
22. Set(x) ImpElim 12 21
23. Set(x) & ∀y.((y ε 0) -> (x ε y)) AndInt 22 20
24. x ε {z: ∀y.((y ε 0) -> (z ε y))} ClassInt 23
25. {z: ∀y.((y ε 0) -> (z ε y))} = ∩0 Symmetry 3
26. x ε ∩0 EqualitySub 24 25
27. (x ε U) -> (x ε ∩0) ImpInt 26
28. ((x ε ∩0) -> (x ε U)) & ((x ε U) -> (x ε ∩0)) AndInt 11 27
29. (x ε ∩0) <-> (x ε U) EquivConst 28
30. ∀z.((z ε ∩0) <-> (z ε U)) ForallInt 29
31. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
32. ∀y.((∩0 = y) <-> ∀z.((z ε ∩0) <-> (z ε y))) ForallElim 31

33. (∩0 = U) <-> ∀z.((z ε ∩0) <-> (z ε U)) ForallElim 32
34. ((∩0 = U) -> ∀z.((z ε ∩0) <-> (z ε U))) & (∀z.((z ε ∩0) <-> (z ε U)) -> (∩0 = U)) EquivExp 33
35. ∀z.((z ε ∩0) <-> (z ε U)) -> (∩0 = U) AndElimR 34
36. ∩0 = U ImpElim 30 35
37. z ε ∪0 Hyp
38. ∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))} DefEqInt
39. ∀x.(∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))}) ForallInt 38
40. ∪0 = {z: ∃y.((y ε 0) & (z ε y))} ForallElim 39
41. z ε {z: ∃y.((y ε 0) & (z ε y))} EqualitySub 37 40
42. Set(z) & ∃y.((y ε 0) & (z ε y)) ClassElim 41
43. ∃y.((y ε 0) & (z ε y)) AndElimR 42
44. (a ε 0) & (z ε a) Hyp
45. ∀x.¬(x ε 0) ForallInt 14
46. ¬(a ε 0) ForallElim 45
47. a ε 0 AndElimL 44
48. _|_ ImpElim 47 46
49. z ε 0 AbsI 48
50. z ε 0 ExistsElim 43 44 49
51. (z ε ∪0) -> (z ε 0) ImpInt 50
52. z ε 0 Hyp
53. ∀x.¬(x ε 0) ForallInt 14
54. ¬(z ε 0) ForallElim 53
55. _|_ ImpElim 52 54
56. z ε ∪0 AbsI 55
57. (z ε 0) -> (z ε ∪0) ImpInt 56
58. ((z ε ∪0) -> (z ε 0)) & ((z ε 0) -> (z ε ∪0)) AndInt 51 57
59. (z ε ∪0) <-> (z ε 0) EquivConst 58
60. ∀z.((z ε ∪0) <-> (z ε 0)) ForallInt 59
61. ∀y.((∪0 = y) <-> ∀z.((z ε ∪0) <-> (z ε y))) ForallElim 31
62. (∪0 = 0) <-> ∀z.((z ε ∪0) <-> (z ε 0)) ForallElim 61
63. ((∪0 = 0) -> ∀z.((z ε ∪0) <-> (z ε 0))) & (∀z.((z ε ∪0) <-> (z ε 0)) -> (∪0 = 0)) EquivExp 62
64. ∀z.((z ε ∪0) <-> (z ε 0)) -> (∪0 = 0) AndElimR 63
65. ∪0 = 0 ImpElim 60 64
66. (∩0 = U) & (∪0 = 0) AndInt 36 65 Qed

Used Theorems

1. (x ε U) <-> Set(x)
2. ¬(x ε 0)

Th26. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)

0. z ε 0 Hyp
1. ¬(x ε 0) TheoremInt
2. ∀x.¬(x ε 0) ForallInt 1
3. ¬(z ε 0) ForallElim 2
4. _|_ ImpElim 0 3
5. z ε x AbsI 4
6. (z ε 0) -> (z ε x) ImpInt 5
7. ∀z.((z ε 0) -> (z ε x)) ForallInt 6
8. 0 ⊂ x DefSub 7
9. z ε x Hyp
10. ∃y.(z ε y) ExistsInt 9
11. Set(z) DefSub 10
12. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
13. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 12
14. Set(x) -> (x ε U) AndElimR 13
15. ∀x.(Set(x) -> (x ε U)) ForallInt 14
16. Set(z) -> (z ε U) ForallElim 15
17. z ε U ImpElim 11 16
18. (z ε x) -> (z ε U) ImpInt 17
19. ∀z.((z ε x) -> (z ε U)) ForallInt 18
20. x ⊂ U DefSub 19
21. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U) AndInt 8 20 Qed

Used Theorems

1. ¬(x ε 0)
2. (x ε U) <-> Set(x)

Th27. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))

```
0. a = b  Hyp
1. z ε a  Hyp
2. z ε b  EqualitySub 1 0
3. (z ε a) -> (z ε b)  ImpInt 2
4. ∀z.((z ε a) -> (z ε b))  ForallInt 3
5. a ⊂ b  DefSub 4
6. z ε b  Hyp
7. b = a  Symmetry 0
8. z ε a  EqualitySub 6 7
9. (z ε b) -> (z ε a)  ImpInt 8
10. ∀z.((z ε b) -> (z ε a))  ForallInt 9
11. b ⊂ a  DefSub 10
12. (a ⊂ b) & (b ⊂ a)  AndInt 5 11
13. (a = b) -> ((a ⊂ b) & (b ⊂ a))  ImpInt 12
14. (a ⊂ b) & (b ⊂ a)  Hyp
15. a ⊂ b  AndElimL 14
16. b ⊂ a  AndElimR 14
17. z ε a  Hyp
18. ∀z.((z ε a) -> (z ε b))  DefExp 15
19. (z ε a) -> (z ε b)  ForallElim 18
20. z ε b  ImpElim 17 19
21. (z ε a) -> (z ε b)  ImpInt 20
22. z ε b  Hyp
23. ∀z.((z ε b) -> (z ε a))  DefExp 16
24. (z ε b) -> (z ε a)  ForallElim 23
25. z ε a  ImpElim 22 24
26. (z ε b) -> (z ε a)  ImpInt 25
27. ((z ε a) -> (z ε b)) & ((z ε b) -> (z ε a))  AndInt 21 26
28. (z ε a) <-> (z ε b)  EquivConst 27
29. ∀z.((z ε a) <-> (z ε b))  ForallInt 28
30. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
31. ∀y.((a = y) <-> ∀z.((z ε a) <-> (z ε y)))  ForallElim 30
32. (a = b) <-> ∀z.((z ε a) <-> (z ε b))  ForallElim 31
33. ((a = b) -> ∀z.((z ε a) <-> (z ε b))) & (∀z.((z ε a) <-> (z ε b)) -> (a = b))
EquivExp 32
34. ∀z.((z ε a) <-> (z ε b)) -> (a = b)  AndElimR 33
35. a = b  ImpElim 29 34
36. ((a ⊂ b) & (b ⊂ a)) -> (a = b)  ImpInt 35
37. ((a = b) -> ((a ⊂ b) & (b ⊂ a))) & (((a ⊂ b) & (b ⊂ a)) -> (a = b))  AndInt 13 36
38. (a = b) <-> ((a ⊂ b) & (b ⊂ a))  EquivConst 37
39. ∀a.((a = b) <-> ((a ⊂ b) & (b ⊂ a)))  ForallInt 38
40. (x = b) <-> ((x ⊂ b) & (b ⊂ x))  ForallElim 39
41. ∀b.((x = b) <-> ((x ⊂ b) & (b ⊂ x)))  ForallInt 40
42. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))  ForallElim 41 Qed
```

Used Theorems

Th28. ((x ⊂ y) & (y ⊂ z)) -> (x ⊂ z)

```
0. (a ⊂ b) & (b ⊂ c)  Hyp
1. b ⊂ c  AndElimR 0
2. a ⊂ b  AndElimL 0
3. ∀z.((z ε b) -> (z ε c))  DefExp 1
4. ∀z.((z ε a) -> (z ε b))  DefExp 2
5. (z ε b) -> (z ε c)  ForallElim 3
6. (z ε a) -> (z ε b)  ForallElim 4
7. z ε a  Hyp
8. z ε b  ImpElim 7 6
9. z ε c  ImpElim 8 5
10. (z ε a) -> (z ε c)  ImpInt 9
11. ∀z.((z ε a) -> (z ε c))  ForallInt 10
12. a ⊂ c  DefSub 11
13. ((a ⊂ b) & (b ⊂ c)) -> (a ⊂ c)  ImpInt 12
14. ∀a.(((a ⊂ b) & (b ⊂ c)) -> (a ⊂ c))  ForallInt 13
15. ((x ⊂ b) & (b ⊂ c)) -> (x ⊂ c)  ForallElim 14
16. ∀b.(((x ⊂ b) & (b ⊂ c)) -> (x ⊂ c))  ForallInt 15
17. ((x ⊂ y) & (y ⊂ c)) -> (x ⊂ c)  ForallElim 16
```

18. ∀c.(((x ⊂ y) & (y ⊂ c)) -> (x ⊂ c)) ForallInt 17
19. ((x ⊂ y) & (y ⊂ z)) -> (x ⊂ z) ForallElim 18 Qed

Used Theorems

Th29. (x ⊂ y) <-> ((x ∪ y) = y)

0. a ⊂ b Hyp
1. z ε (a ∪ b) Hyp
2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
3. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 2
4. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))
EquivExp 3
5. ∀x.(((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))))
ForallInt 4
6. ((z ε (a ∪ y)) -> ((z ε a) v (z ε y))) & (((z ε a) v (z ε y)) -> (z ε (a ∪ y)))
ForallElim 5
7. ∀y.(((z ε (a ∪ y)) -> ((z ε a) v (z ε y))) & (((z ε a) v (z ε y)) -> (z ε (a ∪ y))))
ForallInt 6
8. ((z ε (a ∪ b)) -> ((z ε a) v (z ε b))) & (((z ε a) v (z ε b)) -> (z ε (a ∪ b)))
ForallElim 7
9. (z ε (a ∪ b)) -> ((z ε a) v (z ε b)) AndElimL 8
10. (z ε a) v (z ε b) ImpElim 1 9
11. z ε a Hyp
12. ∀z.((z ε a) -> (z ε b)) DefExp 0
13. (z ε a) -> (z ε b) ForallElim 12
14. z ε b ImpElim 11 13
15. z ε b Hyp
16. z ε b OrElim 10 11 14 15 15
17. (z ε (a ∪ b)) -> (z ε b) ImpInt 16
18. z ε b Hyp
19. (z ε a) v (z ε b) OrIntL 18
20. ((z ε a) v (z ε b)) -> (z ε (a ∪ b)) AndElimR 8
21. z ε (a ∪ b) ImpElim 19 20
22. (z ε b) -> (z ε (a ∪ b)) ImpInt 21
23. ((z ε (a ∪ b)) -> (z ε b)) & ((z ε b) -> (z ε (a ∪ b))) AndInt 17 22
24. (z ε (a ∪ b)) <-> (z ε b) EquivConst 23
25. ∀z.((z ε (a ∪ b)) <-> (z ε b)) ForallInt 24
26. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
27. ∀y.(((a ∪ b) = y) <-> ∀z.((z ε (a ∪ b)) <-> (z ε y))) ForallElim 26
28. ((a ∪ b) = b) <-> ∀z.((z ε (a ∪ b)) <-> (z ε b)) ForallElim 27
29. (((a ∪ b) = b) -> ∀z.((z ε (a ∪ b)) <-> (z ε b))) & (∀z.((z ε (a ∪ b)) <-> (z ε b)) -
> ((a ∪ b) = b)) EquivExp 28
30. ∀z.((z ε (a ∪ b)) <-> (z ε b)) -> ((a ∪ b) = b) AndElimR 29
31. (a ∪ b) = b ImpElim 25 30
32. (a ⊂ b) -> ((a ∪ b) = b) ImpInt 31
33. (a ∪ b) = b Hyp
34. z ε a Hyp
35. (z ε a) v (z ε b) OrIntR 34
36. ((z ε a) v (z ε b)) -> (z ε (a ∪ b)) AndElimR 8
37. z ε (a ∪ b) ImpElim 35 36
38. z ε b EqualitySub 37 33
39. (z ε a) -> (z ε b) ImpInt 38
40. ∀z.((z ε a) -> (z ε b)) ForallInt 39
41. a ⊂ b DefSub 40
42. ((a ∪ b) = b) -> (a ⊂ b) ImpInt 41
43. ((a ⊂ b) -> ((a ∪ b) = b)) & (((a ∪ b) = b) -> (a ⊂ b)) AndInt 32 42
44. (a ⊂ b) <-> ((a ∪ b) = b) EquivConst 43
45. ∀a.((a ⊂ b) <-> ((a ∪ b) = b)) ForallInt 44
46. (x ⊂ b) <-> ((x ∪ b) = b) ForallElim 45
47. ∀b.((x ⊂ b) <-> ((x ∪ b) = b)) ForallInt 46
48. (x ⊂ y) <-> ((x ∪ y) = y) ForallElim 47 Qed

Used Theorems

1. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))

Th30. (x ⊂ y) <-> ((x ∩ y) = x)

0. a ⊂ b Hyp
1. z ε (a ∩ b) Hyp
2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
3. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 2
4. ∀x.((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) ForallInt 3
5. (z ε (a ∩ y)) <-> ((z ε a) & (z ε y)) ForallElim 4
6. ∀y.((z ε (a ∩ y)) <-> ((z ε a) & (z ε y))) ForallInt 5
7. (z ε (a ∩ b)) <-> ((z ε a) & (z ε b)) ForallElim 6
8. ((z ε (a ∩ b)) -> ((z ε a) & (z ε b))) & (((z ε a) & (z ε b)) -> (z ε (a ∩ b)))
EquivExp 7
9. (z ε (a ∩ b)) -> ((z ε a) & (z ε b)) AndElimL 8
10. (z ε a) & (z ε b) ImpElim 1 9
11. z ε a AndElimL 10
12. (z ε (a ∩ b)) -> (z ε a) ImpInt 11
13. z ε a Hyp
14. ∀z.((z ε a) -> (z ε b)) DefExp 0
15. (z ε a) -> (z ε b) ForallElim 14
16. z ε b ImpElim 13 15
17. (z ε a) & (z ε b) AndInt 13 16
18. ((z ε a) & (z ε b)) -> (z ε (a ∩ b)) AndElimR 8
19. z ε (a ∩ b) ImpElim 17 18
20. (z ε a) -> (z ε (a ∩ b)) ImpInt 19
21. ((z ε (a ∩ b)) -> (z ε a)) & ((z ε a) -> (z ε (a ∩ b))) AndInt 12 20
22. (z ε (a ∩ b)) <-> (z ε a) EquivConst 21
23. ∀z.((z ε (a ∩ b)) <-> (z ε a)) ForallInt 22
24. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
25. ∀y.(((a ∩ b) = y) <-> ∀z.((z ε (a ∩ b)) <-> (z ε y))) ForallElim 24
26. ((a ∩ b) = a) <-> ∀z.((z ε (a ∩ b)) <-> (z ε a)) ForallElim 25
27. (((a ∩ b) = a) -> ∀z.((z ε (a ∩ b)) <-> (z ε a))) & (∀z.((z ε (a ∩ b)) <-> (z ε a)) -> ((a ∩ b) = a)) EquivExp 26
28. ∀z.((z ε (a ∩ b)) <-> (z ε a)) -> ((a ∩ b) = a) AndElimR 27
29. (a ∩ b) = a ImpElim 23 28
30. (a ⊂ b) -> ((a ∩ b) = a) ImpInt 29
31. (a ∩ b) = a Hyp
32. z ε a Hyp
33. a = (a ∩ b) Symmetry 31
34. z ε (a ∩ b) EqualitySub 32 33
35. (z ε a) & (z ε b) ImpElim 34 9
36. z ε b AndElimR 35
37. (z ε a) -> (z ε b) ImpInt 36
38. ∀z.((z ε a) -> (z ε b)) ForallInt 37
39. a ⊂ b DefSub 38
40. ((a ∩ b) = a) -> (a ⊂ b) ImpInt 39
41. ((a ⊂ b) -> ((a ∩ b) = a)) & (((a ∩ b) = a) -> (a ⊂ b)) AndInt 30 40
42. (a ⊂ b) <-> ((a ∩ b) = a) EquivConst 41
43. ∀a.((a ⊂ b) <-> ((a ∩ b) = a)) ForallInt 42
44. (x ⊂ b) <-> ((x ∩ b) = x) ForallElim 43
45. ∀b.((x ⊂ b) <-> ((x ∩ b) = x)) ForallInt 44
46. (x ⊂ y) <-> ((x ∩ y) = x) ForallElim 45 Qed

Used Theorems

1. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))

Th31. (x ⊂ y) -> ((∪x ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ ∩x))

0. a ⊂ b Hyp
1. z ε ∪a Hyp
2. ∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))} DefEqInt
3. ∀x.(∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))}) ForallInt 2
4. ∪a = {z: ∃y.((y ε a) & (z ε y))} ForallElim 3
5. z ε {z: ∃y.((y ε a) & (z ε y))} EqualitySub 1 4
6. Set(z) & ∃y.((y ε a) & (z ε y)) ClassElim 5
7. ∃y.((y ε a) & (z ε y)) AndElimR 6
8. (y ε a) & (z ε y) Hyp
9. ∀z.((z ε a) -> (z ε b)) DefExp 0
10. (y ε a) -> (y ε b) ForallElim 9
11. y ε a AndElimL 8
12. y ε b ImpElim 11 10
13. z ε y AndElimR 8

```
14. (y ε b) & (z ε y)  AndInt 12 13
15. ∃y.((y ε b) & (z ε y))  ExistsInt 14
16. Set(z)  AndElimL 6
17. Set(z) & ∃y.((y ε b) & (z ε y))  AndInt 16 15
18. z ε {z: ∃y.((y ε b) & (z ε y))}  ClassInt 17
19. ∀x.(∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))})  ForallInt 2
20. ∪b = {z: ∃y.((y ε b) & (z ε y))}  ForallElim 19
21. {z: ∃y.((y ε b) & (z ε y))} = ∪b  Symmetry 20
22. z ε ∪b  EqualitySub 18 21
23. z ε ∪b  ExistsElim 7 8 22
24. (z ε ∪a) -> (z ε ∪b)  ImpInt 23
25. ∀z.((z ε ∪a) -> (z ε ∪b))  ForallInt 24
26. ∪a ⊂ ∪b  DefSub 25
27. z ε ∩b  Hyp
28. ∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))}  DefEqInt
29. ∀x.(∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))})  ForallInt 28
30. ∩b = {z: ∀y.((y ε b) -> (z ε y))}  ForallElim 29
31. z ε {z: ∀y.((y ε b) -> (z ε y))}  EqualitySub 27 30
32. Set(z) & ∀y.((y ε b) -> (z ε y))  ClassElim 31
33. Set(z)  AndElimL 32
34. ∀y.((y ε b) -> (z ε y))  AndElimR 32
35. (y ε b) -> (z ε y)  ForallElim 34
36. y ε a  Hyp
37. y ε b  ImpElim 36 10
38. z ε y  ImpElim 37 35
39. (y ε a) -> (z ε y)  ImpInt 38
40. ∀y.((y ε a) -> (z ε y))  ForallInt 39
41. Set(z) & ∀y.((y ε a) -> (z ε y))  AndInt 33 40
42. z ε {z: ∀y.((y ε a) -> (z ε y))}  ClassInt 41
43. ∀x.(∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))})  ForallInt 28
44. ∩a = {z: ∀y.((y ε a) -> (z ε y))}  ForallElim 43
45. {z: ∀y.((y ε a) -> (z ε y))} = ∩a  Symmetry 44
46. z ε ∩a  EqualitySub 42 45
47. (z ε ∩b) -> (z ε ∩a)  ImpInt 46
48. ∀z.((z ε ∩b) -> (z ε ∩a))  ForallInt 47
49. ∩b ⊂ ∩a  DefSub 48
50. (∪a ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ ∩a)  AndInt 26 49
51. (a ⊂ b) -> ((∪a ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ ∩a))  ImpInt 50
52. ∀a.((a ⊂ b) -> ((∪a ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ ∩a)))  ForallInt 51
53. (x ⊂ b) -> ((∪x ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ ∩x))  ForallElim 52
54. ∀b.((x ⊂ b) -> ((∪x ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ ∩x)))  ForallInt 53
55. (x ⊂ y) -> ((∪x ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ ∩x))  ForallElim 54 Qed
```

Used Theorems

```
Th32. (x ε y) -> ((x ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ x))

0. a ε b  Hyp
1. x ε a  Hyp
2. (a ε b) & (x ε a)  AndInt 0 1
3. ∃y.((y ε b) & (x ε y))  ExistsInt 2
4. ∃y.(x ε y)  ExistsInt 1
5. Set(x)  DefSub 4
6. Set(x) & ∃y.((y ε b) & (x ε y))  AndInt 5 3
7. x ε {z: ∃y.((y ε b) & (z ε y))}  ClassInt 6
8. ∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))}  DefEqInt
9. {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))} = ∪x  Symmetry 8
10. ∀x.({z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))} = ∪x)  ForallInt 9
11. {z: ∃y.((y ε b) & (z ε y))} = ∪b  ForallElim 10
12. x ε ∪b  EqualitySub 7 11
13. (x ε a) -> (x ε ∪b)  ImpInt 12
14. ∀z.((z ε a) -> (z ε ∪b))  ForallInt 13
15. a ⊂ ∪b  DefSub 14
16. x ε ∩b  Hyp
17. ∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))}  DefEqInt
18. ∀x.(∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))})  ForallInt 17
19. ∩b = {z: ∀y.((y ε b) -> (z ε y))}  ForallElim 18
20. x ε {z: ∀y.((y ε b) -> (z ε y))}  EqualitySub 16 19
21. Set(x) & ∀y.((y ε b) -> (x ε y))  ClassElim 20
22. ∀y.((y ε b) -> (x ε y))  AndElimR 21
```

```
23. (a ε b) -> (x ε a)  ForallElim 22
24. x ε a  ImpElim 0 23
25. (x ε ∩b) -> (x ε a)  ImpInt 24
26. ∀z.((z ε ∩b) -> (z ε a))  ForallInt 25
27. ∩b ⊂ a  DefSub 26
28. (a ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ a)  AndInt 15 27
29. (a ε b) -> ((a ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ a))  ImpInt 28
30. ∀a.((a ε b) -> ((a ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ a)))  ForallInt 29
31. (x ε b) -> ((x ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ x))  ForallElim 30
32. ∀b.((x ε b) -> ((x ⊂ ∪b) & (∩b ⊂ x)))  ForallInt 31
33. (x ε y) -> ((x ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ x))  ForallElim 32 Qed
```

Used Theorems

Th33. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)

```
0. Set(a) & (b ⊂ a)  Hyp
1. Set(x) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ x) -> (z ε y)))  AxInt
2. ∀x.(Set(x) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ x) -> (z ε y))))  ForallInt 1
3. Set(a) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε y)))  ForallElim 2
4. Set(a)  AndElimL 0
5. ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε y)))  ImpElim 4 3
6. Set(w) & ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε w))  Hyp
7. ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε w))  AndElimR 6
8. (b ⊂ a) -> (b ε w)  ForallElim 7
9. b ⊂ a  AndElimR 0
10. b ε w  ImpElim 9 8
11. ∃z.(b ε z)  ExistsInt 10
12. Set(b)  DefSub 11
13. Set(b)  ExistsElim 5 6 12
14. (Set(a) & (b ⊂ a)) -> Set(b)  ImpInt 13
15. ∀a.((Set(a) & (b ⊂ a)) -> Set(b))  ForallInt 14
16. (Set(x) & (b ⊂ x)) -> Set(b)  ForallElim 15
17. ∀b.((Set(x) & (b ⊂ x)) -> Set(b))  ForallInt 16
18. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)  ForallElim 17 Qed
```

Used Theorems

Th34. (0 = ∩U) & (U = ∪U)

```
0. z ε 0  Hyp
1. 0 = {x: ¬(x = x)}  DefEqInt
2. z ε {x: ¬(x = x)}  EqualitySub 0 1
3. Set(z) & ¬(z = z)  ClassElim 2
4. ¬(z = z)  AndElimR 3
5. z = z  Identity
6. _|_  ImpElim 5 4
7. z ε ∩U  AbsI 6
8. (z ε 0) -> (z ε ∩U)  ImpInt 7
9. z ε ∩U  Hyp
10. U = {x: (x = x)}  DefEqInt
11. ∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))}  DefEqInt
12. ∀x.(∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))})  ForallInt 11
13. ∩U = {z: ∀y.((y ε U) -> (z ε y))}  ForallElim 12
14. z ε {z: ∀y.((y ε U) -> (z ε y))}  EqualitySub 9 13
15. Set(z) & ∀y.((y ε U) -> (z ε y))  ClassElim 14
16. ∀y.((y ε U) -> (z ε y))  AndElimR 15
17. (0 ε U) -> (z ε 0)  ForallElim 16
18. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)  TheoremInt
19. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)  TheoremInt
20. 0 ⊂ x  AndElimL 18
21. ∀x.(0 ⊂ x)  ForallInt 20
22. 0 ⊂ z  ForallElim 21
23. ∀x.((Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y))  ForallInt 19
24. (Set(z) & (y ⊂ z)) -> Set(y)  ForallElim 23
25. ∀y.((Set(z) & (y ⊂ z)) -> Set(y))  ForallInt 24
26. (Set(z) & (0 ⊂ z)) -> Set(0)  ForallElim 25
27. Set(z)  AndElimL 15
28. Set(z) & (0 ⊂ z)  AndInt 27 22
```

```
29. Set(0)  ImpElim 28 26
30. (x ε U) <-> Set(x)  TheoremInt
31. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U))  EquivExp 30
32. Set(x) -> (x ε U)  AndElimR 31
33. ∀x.(Set(x) -> (x ε U))  ForallInt 32
34. Set(0) -> (0 ε U)  ForallElim 33
35. 0 ε U  ImpElim 29 34
36. z ε 0  ImpElim 35 17
37. (z ε ∩U) -> (z ε 0)  ImpInt 36
38. ((z ε 0) -> (z ε ∩U)) & ((z ε ∩U) -> (z ε 0))  AndInt 8 37
39. (z ε 0) <-> (z ε ∩U)  EquivConst 38
40. ∀z.((z ε 0) <-> (z ε ∩U))  ForallInt 39
41. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
42. ∀y.((0 = y) <-> ∀z.((z ε 0) <-> (z ε y)))  ForallElim 41
43. (0 = ∩U) <-> ∀z.((z ε 0) <-> (z ε ∩U))  ForallElim 42
44. ((0 = ∩U) -> ∀z.((z ε 0) <-> (z ε ∩U))) & (∀z.((z ε 0) <-> (z ε ∩U)) -> (0 = ∩U))
EquivExp 43
45. ∀z.((z ε 0) <-> (z ε ∩U)) -> (0 = ∩U)  AndElimR 44
46. 0 = ∩U  ImpElim 40 45
47. z ε U  Hyp
48. ∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))}  DefEqInt
49. ∀x.(∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))})  ForallInt 48
50. ∪U = {z: ∃y.((y ε U) & (z ε y))}  ForallElim 49
51. Set(x) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ x) -> (z ε y)))  AxInt
52. (x ε U) -> Set(x)  AndElimL 31
53. ∀x.((x ε U) -> Set(x))  ForallInt 52
54. (z ε U) -> Set(z)  ForallElim 53
55. Set(z)  ImpElim 47 54
56. ∀x.(Set(x) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ x) -> (z ε y))))  ForallInt 51
57. Set(z) -> ∃y.(Set(y) & ∀i.((i ⊂ z) -> (i ε y)))  ForallElim 56
58. ∃y.(Set(y) & ∀i.((i ⊂ z) -> (i ε y)))  ImpElim 55 57
59. Set(a) & ∀i.((i ⊂ z) -> (i ε a))  Hyp
60. z = z  Identity
61. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))  TheoremInt
62. ∀x.((x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x)))  ForallInt 61
63. (z = y) <-> ((z ⊂ y) & (y ⊂ z))  ForallElim 62
64. ∀y.((z = y) <-> ((z ⊂ y) & (y ⊂ z)))  ForallInt 63
65. (z = z) <-> ((z ⊂ z) & (z ⊂ z))  ForallElim 64
66. ((z = z) -> ((z ⊂ z) & (z ⊂ z))) & (((z ⊂ z) & (z ⊂ z)) -> (z = z))  EquivExp 65
67. (z = z) -> ((z ⊂ z) & (z ⊂ z))  AndElimL 66
68. (z ⊂ z) & (z ⊂ z)  ImpElim 60 67
69. z ⊂ z  AndElimL 68
70. ∀i.((i ⊂ z) -> (i ε a))  AndElimR 59
71. (z ⊂ z) -> (z ε a)  ForallElim 70
72. z ε a  ImpElim 69 71
73. Set(a)  AndElimL 59
74. ∀x.(Set(x) -> (x ε U))  ForallInt 32
75. Set(a) -> (a ε U)  ForallElim 74
76. a ε U  ImpElim 73 75
77. (a ε U) & (z ε a)  AndInt 76 72
78. ∃y.((y ε U) & (z ε y))  ExistsInt 77
79. ∃y.((y ε U) & (z ε y))  ExistsElim 58 59 78
80. Set(z) & ∃y.((y ε U) & (z ε y))  AndInt 55 79
81. z ε {y: ∃j.((j ε U) & (y ε j))}  ClassInt 80
82. {z: ∃y.((y ε U) & (z ε y))} = ∪U  Symmetry 50
83. z ε ∪U  EqualitySub 81 82
84. (z ε U) -> (z ε ∪U)  ImpInt 83
85. z ε ∪U  Hyp
86. ∃y.(z ε y)  ExistsInt 85
87. Set(z)  DefSub 86
88. ∀x.(Set(x) -> (x ε U))  ForallInt 32
89. Set(z) -> (z ε U)  ForallElim 88
90. z ε U  ImpElim 87 89
91. (z ε ∪U) -> (z ε U)  ImpInt 90
92. ((z ε U) -> (z ε ∪U)) & ((z ε ∪U) -> (z ε U))  AndInt 84 91
93. (z ε U) <-> (z ε ∪U)  EquivConst 92
94. ∀z.((z ε U) <-> (z ε ∪U))  ForallInt 93
95. ∀y.((U = y) <-> ∀z.((z ε U) <-> (z ε y)))  ForallElim 41
96. (U = ∪U) <-> ∀z.((z ε U) <-> (z ε ∪U))  ForallElim 95
97. ((U = ∪U) -> ∀z.((z ε U) <-> (z ε ∪U))) & (∀z.((z ε U) <-> (z ε ∪U)) -> (U = ∪U))
EquivExp 96
```

```
98. ∀z.((z ε U) <-> (z ε ∪U)) -> (U = ∪U)  AndElimR 97
99. U = ∪U  ImpElim 94 98
100. (0 = ∩U) & (U = ∪U)  AndInt 46 99 Qed
```

Used Theorems

```
1. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)
2. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)
3. (x ε U) <-> Set(x)
4. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))
```

Th35. ¬(x = 0) -> Set(∩x)

```
0. ∀z.¬(z ε a)  Hyp
1. z ε a  Hyp
2. ¬(z ε a)  ForallElim 0
3. _|_  ImpElim 1 2
4. z ε 0  AbsI 3
5. (z ε a) -> (z ε 0)  ImpInt 4
6. z ε 0  Hyp
7. 0 = {x: ¬(x = x)}  DefEqInt
8. z ε {x: ¬(x = x)}  EqualitySub 6 7
9. Set(z) & ¬(z = z)  ClassElim 8
10. ¬(z = z)  AndElimR 9
11. z = z  Identity
12. _|_  ImpElim 11 10
13. z ε a  AbsI 12
14. (z ε 0) -> (z ε a)  ImpInt 13
15. ((z ε a) -> (z ε 0)) & ((z ε 0) -> (z ε a))  AndInt 5 14
16. (z ε a) <-> (z ε 0)  EquivConst 15
17. ∀z.((z ε a) <-> (z ε 0))  ForallInt 16
18. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
19. ∀y.((a = y) <-> ∀z.((z ε a) <-> (z ε y)))  ForallElim 18
20. (a = 0) <-> ∀z.((z ε a) <-> (z ε 0))  ForallElim 19
21. ((a = 0) -> ∀z.((z ε a) <-> (z ε 0))) & (∀z.((z ε a) <-> (z ε 0)) -> (a = 0))
EquivExp 20
22. ∀z.((z ε a) <-> (z ε 0)) -> (a = 0)  AndElimR 21
23. a = 0  ImpElim 17 22
24. ∀z.¬(z ε a) -> (a = 0)  ImpInt 23
25. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)  TheoremInt
26. (∀z.¬(z ε a) -> B) -> (¬B -> ¬∀z.¬(z ε a))  PolySub 25
27. (∀z.¬(z ε a) -> (a = 0)) -> (¬(a = 0) -> ¬∀z.¬(z ε a))  PolySub 26
28. ¬(a = 0) -> ¬∀z.¬(z ε a)  ImpElim 24 27
29. ¬∀z.¬(z ε a)  Hyp
30. ¬∃z.(z ε a)  Hyp
31. z ε a  Hyp
32. ∃z.(z ε a)  ExistsInt 31
33. _|_  ImpElim 32 30
34. ¬(z ε a)  ImpInt 33
35. ∀z.¬(z ε a)  ForallInt 34
36. ¬∃z.(z ε a) -> ∀z.¬(z ε a)  ImpInt 35
37. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)  TheoremInt
38. (¬∃z.(z ε a) -> B) -> (¬B -> ¬¬∃z.(z ε a))  PolySub 37
39. (¬∃x_0.(x_0 ε a) -> ∀z.¬(z ε a)) -> (¬∀z.¬(z ε a) -> ¬¬∃x_0.(x_0 ε a))  PolySub 38
40. ¬∀z.¬(z ε a) -> ¬¬∃x_0.(x_0 ε a)  ImpElim 36 39
41. D <-> ¬¬D  TheoremInt
42. ∃l.(l ε a) <-> ¬¬∃l.(l ε a)  PolySub 41
43. (∃l.(l ε a) -> ¬¬∃l.(l ε a)) & (¬¬∃l.(l ε a) -> ∃l.(l ε a))  EquivExp 42
44. ¬¬∃l.(l ε a) -> ∃l.(l ε a)  AndElimR 43
45. ¬(a = 0)  Hyp
46. ¬∀z.¬(z ε a)  ImpElim 45 28
47. ¬¬∃x_0.(x_0 ε a)  ImpElim 46 40
48. ∃l.(l ε a)  ImpElim 47 44
49. ¬(a = 0) -> ∃l.(l ε a)  ImpInt 48
50. ∃l.(l ε a)  Hyp
51. b ε a  Hyp
52. (x ε y) -> ((x ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ x))  TheoremInt
53. ∀x.((x ε y) -> ((x ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ x)))  ForallInt 52
54. (b ε y) -> ((b ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ b))  ForallElim 53
55. ∀y.((b ε y) -> ((b ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ b)))  ForallInt 54
56. (b ε a) -> ((b ⊂ ∪a) & (∩a ⊂ b))  ForallElim 55
```

57. (b ⊂ ∪a) & (∩a ⊂ b) ImpElim 51 56
58. ∩a ⊂ b AndElimR 57
59. ∃y.(b ε y) ExistsInt 51
60. Set(b) DefSub 59
61. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y) TheoremInt
62. ∀x.((Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)) ForallInt 61
63. (Set(b) & (y ⊂ b)) -> Set(y) ForallElim 62
64. ∀y.((Set(b) & (y ⊂ b)) -> Set(y)) ForallInt 63
65. (Set(b) & (∩a ⊂ b)) -> Set(∩a) ForallElim 64
66. Set(b) & (∩a ⊂ b) AndInt 60 58
67. Set(∩a) ImpElim 66 65
68. Set(∩a) ExistsElim 50 51 67
69. ∃l.(l ε a) -> Set(∩a) ImpInt 68
70. ¬(a = 0) Hyp
71. ∃l.(l ε a) ImpElim 70 49
72. Set(∩a) ImpElim 71 69
73. ¬(a = 0) -> Set(∩a) ImpInt 72
74. ∀a.(¬(a = 0) -> Set(∩a)) ForallInt 73
75. ¬(x = 0) -> Set(∩x) ForallElim 74 Qed

Used Theorems

1. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)
1. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)
2. D <-> ¬¬D
4. (x ε y) -> ((x ⊂ ∪y) & (∩y ⊂ x))
5. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)

Th37. U = PU

0. x ε U Hyp
1. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U) TheoremInt
2. x ⊂ U AndElimR 1
3. Px = {y: (y ⊂ x)} DefEqInt
4. ∀x.(Px = {y: (y ⊂ x)}) ForallInt 3
5. PU = {y: (y ⊂ U)} ForallElim 4
6. ∃y.(x ε y) ExistsInt 0
7. Set(x) DefSub 6
8. Set(x) & (x ⊂ U) AndInt 7 2
9. x ε {y: (y ⊂ U)} ClassInt 8
10. {y: (y ⊂ U)} = PU Symmetry 5
11. x ε PU EqualitySub 9 10
12. (x ε U) -> (x ε PU) ImpInt 11
13. x ε PU Hyp
14. ∃y.(x ε y) ExistsInt 13
15. Set(x) DefSub 14
16. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
17. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 16
18. Set(x) -> (x ε U) AndElimR 17
19. x ε U ImpElim 15 18
20. (x ε PU) -> (x ε U) ImpInt 19
21. ((x ε U) -> (x ε PU)) & ((x ε PU) -> (x ε U)) AndInt 12 20
22. (x ε U) <-> (x ε PU) EquivConst 21
23. ∀z.((z ε U) <-> (z ε PU)) ForallInt 22
24. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
25. ∀y.((U = y) <-> ∀z.((z ε U) <-> (z ε y))) ForallElim 24
26. (U = PU) <-> ∀z.((z ε U) <-> (z ε PU)) ForallElim 25
27. ((U = PU) -> ∀z.((z ε U) <-> (z ε PU))) & (∀z.((z ε U) <-> (z ε PU)) -> (U = PU))
EquivExp 26
28. ∀z.((z ε U) <-> (z ε PU)) -> (U = PU) AndElimR 27
29. U = PU ImpElim 23 28 Qed

Used Theorems

1. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)
2. (x ε U) <-> Set(x)

Th38. Set(x) -> (Set(Px) & ((y ⊂ x) <-> (y ε Px)))

0. Set(a) Hyp
1. Set(x) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ x) -> (z ε y))) AxInt

2. ∀x.(Set(x) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ x) -> (z ε y)))) ForallInt 1
3. Set(a) -> ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε y))) ForallElim 2
4. ∃y.(Set(y) & ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε y))) ImpElim 0 3
5. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y) TheoremInt
6. ∀y.((Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)) ForallInt 5
7. (Set(x) & (Pa ⊂ x)) -> Set(Pa) ForallElim 6
8. Set(b) & ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε b)) Hyp
9. ∀x.((Set(x) & (Pa ⊂ x)) -> Set(Pa)) ForallInt 7
10. (Set(b) & (Pa ⊂ b)) -> Set(Pa) ForallElim 9
11. z ε Pa Hyp
12. Px = {y: (y ⊂ x)} DefEqInt
13. ∀x.(Px = {y: (y ⊂ x)}) ForallInt 12
14. Pa = {y: (y ⊂ a)} ForallElim 13
15. z ε {y: (y ⊂ a)} EqualitySub 11 14
16. Set(z) & (z ⊂ a) ClassElim 15
17. ∀z.((z ⊂ a) -> (z ε b)) AndElimR 8
18. z ⊂ a AndElimR 16
19. (z ⊂ a) -> (z ε b) ForallElim 17
20. z ε b ImpElim 18 19
21. (z ε Pa) -> (z ε b) ImpInt 20
22. ∀z.((z ε Pa) -> (z ε b)) ForallInt 21
23. Pa ⊂ b DefSub 22
24. Set(b) AndElimL 8
25. Set(b) & (Pa ⊂ b) AndInt 24 23
26. Set(Pa) ImpElim 25 10
27. Set(Pa) ExistsElim 4 8 26
28. z ⊂ a Hyp
29. Set(a) & (z ⊂ a) AndInt 0 28
30. ∀x.((Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)) ForallInt 5
31. (Set(a) & (y ⊂ a)) -> Set(y) ForallElim 30
32. ∀y.((Set(a) & (y ⊂ a)) -> Set(y)) ForallInt 31
33. (Set(a) & (z ⊂ a)) -> Set(z) ForallElim 32
34. Set(z) ImpElim 29 33
35. Set(z) & (z ⊂ a) AndInt 34 28
36. z ε {y: (y ⊂ a)} ClassInt 35
37. {y: (y ⊂ a)} = Pa Symmetry 14
38. z ε Pa EqualitySub 36 37
39. (z ⊂ a) -> (z ε Pa) ImpInt 38
40. z ε Pa Hyp
41. z ε {y: (y ⊂ a)} EqualitySub 40 14
42. Set(z) & (z ⊂ a) ClassElim 41
43. z ⊂ a AndElimR 42
44. (z ε Pa) -> (z ⊂ a) ImpInt 43
45. ((z ⊂ a) -> (z ε Pa)) & ((z ε Pa) -> (z ⊂ a)) AndInt 39 44
46. (z ⊂ a) <-> (z ε Pa) EquivConst 45
47. Set(Pa) & ((z ⊂ a) <-> (z ε Pa)) AndInt 27 46
48. Set(a) -> (Set(Pa) & ((z ⊂ a) <-> (z ε Pa))) ImpInt 47
49. ∀a.(Set(a) -> (Set(Pa) & ((z ⊂ a) <-> (z ε Pa)))) ForallInt 48
50. Set(x) -> (Set(Px) & ((z ⊂ x) <-> (z ε Px))) ForallElim 49
51. ∀z.(Set(x) -> (Set(Px) & ((z ⊂ x) <-> (z ε Px)))) ForallInt 50
52. Set(x) -> (Set(Px) & ((y ⊂ x) <-> (y ε Px))) ForallElim 51 Qed

Used Theorems

1. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)

Th39. ¬Set(U)

0. rus = {z: ¬(z ε z)} DefEqInt
1. rus ε rus Hyp
2. rus ε {z: ¬(z ε z)} EqualitySub 1 0
3. Set(rus) & ¬(rus ε rus) ClassElim 2
4. ¬(rus ε rus) AndElimR 3
5. _|_ ImpElim 1 4
6. ¬Set(rus) AbsI 5
7. ¬(rus ε rus) Hyp
8. Set(rus) Hyp
9. Set(rus) & ¬(rus ε rus) AndInt 8 7
10. rus ε {z: ¬(z ε z)} ClassInt 9
11. {z: ¬(z ε z)} = rus Symmetry 0
12. rus ε rus EqualitySub 10 11

13. _|_ ImpElim 12 7
14. ¬Set(rus) ImpInt 13
15. A v ¬A TheoremInt
16. (rus ε rus) v ¬(rus ε rus) PolySub 15
17. ¬Set(rus) OrElim 16 1 6 7 14
18. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y) TheoremInt
19. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U) TheoremInt
20. x ⊂ U AndElimR 19
21. Set(U) Hyp
22. ∀x.(x ⊂ U) ForallInt 20
23. rus ⊂ U ForallElim 22
24. Set(U) & (rus ⊂ U) AndInt 21 23
25. ∀x.((Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)) ForallInt 18
26. (Set(U) & (y ⊂ U)) -> Set(y) ForallElim 25
27. ∀y.((Set(U) & (y ⊂ U)) -> Set(y)) ForallInt 26
28. (Set(U) & (rus ⊂ U)) -> Set(rus) ForallElim 27
29. Set(rus) ImpElim 24 28
30. _|_ ImpElim 29 17
31. ¬Set(U) ImpInt 30 Qed

Used Theorems

1. A v ¬A
2. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)
3. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)

Th41. Set(x) -> ((y ε {x}) <-> (y = x))

0. Set(x) Hyp
1. y ε {x} Hyp
2. {x} = {z: ((x ε U) -> (z = x))} DefEqInt
3. y ε {z: ((x ε U) -> (z = x))} EqualitySub 1 2
4. Set(y) & ((x ε U) -> (y = x)) ClassElim 3
5. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
6. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 5
7. Set(x) -> (x ε U) AndElimR 6
8. x ε U ImpElim 0 7
9. (x ε U) -> (y = x) AndElimR 4
10. y = x ImpElim 8 9
11. (y ε {x}) -> (y = x) ImpInt 10
12. y = x Hyp
13. x = y Symmetry 12
14. Set(y) EqualitySub 0 13
15. y = x Hyp
16. x ε U Hyp
17. (x ε U) -> (y = x) ImpInt 15
18. (y = x) -> ((x ε U) -> (y = x)) ImpInt 17
19. (x ε U) -> (y = x) ImpElim 12 18
20. Set(y) & ((x ε U) -> (y = x)) AndInt 14 19
21. y ε {z: ((x ε U) -> (z = x))} ClassInt 20
22. {z: ((x ε U) -> (z = x))} = {x} Symmetry 2
23. y ε {x} EqualitySub 21 22
24. (y = x) -> (y ε {x}) ImpInt 23
25. ((y ε {x}) -> (y = x)) & ((y = x) -> (y ε {x})) AndInt 11 24
26. (y ε {x}) <-> (y = x) EquivConst 25
27. Set(x) -> ((y ε {x}) <-> (y = x)) ImpInt 26 Qed

Used Theorems

1. (x ε U) <-> Set(x)

Th42. Set(x) -> Set({x})

0. Set(x) Hyp
1. z ε {x} Hyp
2. {x} = {z: ((x ε U) -> (z = x))} DefEqInt
3. z ε {z: ((x ε U) -> (z = x))} EqualitySub 1 2
4. Set(z) & ((x ε U) -> (z = x)) ClassElim 3
5. (x ε U) -> (z = x) AndElimR 4
6. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
7. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 6

8. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 6
9. Set(x) -> (x ε U) AndElimR 8
10. x ε U ImpElim 0 9
11. z = x ImpElim 10 5
12. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x)) TheoremInt
13. ((x = y) -> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))) & (((x ⊂ y) & (y ⊂ x)) -> (x = y)) EquivExp 12
14. (x = y) -> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x)) AndElimL 13
15. ∀x.((x = y) -> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))) ForallInt 14
16. (z = y) -> ((z ⊂ y) & (y ⊂ z)) ForallElim 15
17. ∀y.((z = y) -> ((z ⊂ y) & (y ⊂ z))) ForallInt 16
18. (z = x) -> ((z ⊂ x) & (x ⊂ z)) ForallElim 17
19. (z ⊂ x) & (x ⊂ z) ImpElim 11 18
20. z ⊂ x AndElimL 19
21. Set(x) -> (Set(Px) & ((y ⊂ x) <-> (y ε Px))) TheoremInt
22. Set(Px) & ((y ⊂ x) <-> (y ε Px)) ImpElim 0 21
23. (y ⊂ x) <-> (y ε Px) AndElimR 22
24. ((y ⊂ x) -> (y ε Px)) & ((y ε Px) -> (y ⊂ x)) EquivExp 23
25. (y ⊂ x) -> (y ε Px) AndElimL 24
26. ∀y.((y ⊂ x) -> (y ε Px)) ForallInt 25
27. (z ⊂ x) -> (z ε Px) ForallElim 26
28. z ε Px ImpElim 20 27
29. (z ε {x}) -> (z ε Px) ImpInt 28
30. ∀z.((z ε {x}) -> (z ε Px)) ForallInt 29
31. {x} ⊂ Px DefSub 30
32. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y) TheoremInt
33. ∀x.((Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)) ForallInt 32
34. (Set(Px) & (y ⊂ Px)) -> Set(y) ForallElim 33
35. ∀y.((Set(Px) & (y ⊂ Px)) -> Set(y)) ForallInt 34
36. (Set(Px) & ({x} ⊂ Px)) -> Set({x}) ForallElim 35
37. Set(Px) AndElimL 22
38. Set(Px) & ({x} ⊂ Px) AndInt 37 31
39. Set({x}) ImpElim 38 36
40. Set(x) -> Set({x}) ImpInt 39 Qed

Used Theorems

3. (x ε U) <-> Set(x)
2. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))
1. Set(x) -> (Set(Px) & ((y ⊂ x) <-> (y ε Px)))
4. (Set(x) & (y ⊂ x)) -> Set(y)

Th43. ({x} = U) <-> ¬Set(x)

0. Set(x) Hyp
1. Set(x) -> Set({x}) TheoremInt
2. Set({x}) ImpElim 0 1
3. ¬Set(U) TheoremInt
4. {x} = U Hyp
5. Set(U) EqualitySub 2 4
6. _|_ ImpElim 5 3
7. ¬({x} = U) ImpInt 6
8. ¬Set(x) Hyp
9. x ε U Hyp
10. ∃y.(x ε y) ExistsInt 9
11. Set(x) DefSub 10
12. _|_ ImpElim 11 8
13. ¬(x ε U) ImpInt 12
14. x ε U Hyp
15. _|_ ImpElim 14 13
16. y = x AbsI 15
17. (x ε U) -> (y = x) ImpInt 16
18. y ε U Hyp
19. (x ε U) <-> Set(x) TheoremInt
20. ((x ε U) -> Set(x)) & (Set(x) -> (x ε U)) EquivExp 19
21. (x ε U) -> Set(x) AndElimL 20
22. ∀x.((x ε U) -> Set(x)) ForallInt 21
23. (y ε U) -> Set(y) ForallElim 22
24. Set(y) ImpElim 18 23
25. Set(y) & ((x ε U) -> (y = x)) AndInt 24 17
26. y ε {z: ((x ε U) -> (z = x))} ClassInt 25
27. {x} = {z: ((x ε U) -> (z = x))} DefEqInt

28. {z: ((x ε U) -> (z = x))} = {x} Symmetry 27
29. y ε {x} EqualitySub 26 28
30. (y ε U) -> (y ε {x}) ImpInt 29
31. ∀z.((z ε U) -> (z ε {x})) ForallInt 30
32. U ⊂ {x} DefSub 31
33. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U) TheoremInt
34. ∀x.((0 ⊂ x) & (x ⊂ U)) ForallInt 33
35. (0 ⊂ {x}) & ({x} ⊂ U) ForallElim 34
36. {x} ⊂ U AndElimR 35
37. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x)) TheoremInt
38. ∀x.((x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))) ForallInt 37
39. ({x} = y) <-> (({x} ⊂ y) & (y ⊂ {x})) ForallElim 38
40. ∀y.(({x} = y) <-> (({x} ⊂ y) & (y ⊂ {x}))) ForallInt 39
41. ({x} = U) <-> (({x} ⊂ U) & (U ⊂ {x})) ForallElim 40
42. (({x} = U) -> (({x} ⊂ U) & (U ⊂ {x}))) & ((({x} ⊂ U) & (U ⊂ {x})) -> ({x} = U)) EquivExp 41
43. (({x} = U) -> (({x} ⊂ U) & (U ⊂ {x}))) & ((({x} ⊂ U) & (U ⊂ {x})) -> ({x} = U)) EquivExp 41
44. (({x} ⊂ U) & (U ⊂ {x})) -> ({x} = U) AndElimR 43
45. ({x} ⊂ U) & (U ⊂ {x}) AndInt 36 32
46. {x} = U ImpElim 45 44
47. ¬Set(x) -> ({x} = U) ImpInt 46
48. Set(x) -> ¬({x} = U) ImpInt 7
49. (A -> B) -> (¬B -> ¬A) TheoremInt
50. (Set(x) -> B) -> (¬B -> ¬Set(x)) PolySub 49
51. (Set(x) -> ¬({x} = U)) -> (¬¬({x} = U) -> ¬Set(x)) PolySub 50
52. ¬¬({x} = U) -> ¬Set(x) ImpElim 48 51
53. D <-> ¬¬D TheoremInt
54. (D -> ¬¬D) & (¬¬D -> D) EquivExp 53
55. D -> ¬¬D AndElimL 54
56. ({x} = U) -> ¬¬({x} = U) PolySub 55
57. {x} = U Hyp
58. ¬¬({x} = U) ImpElim 57 56
59. ¬Set(x) ImpElim 58 52
60. ({x} = U) -> ¬Set(x) ImpInt 59
61. (({x} = U) -> ¬Set(x)) & (¬Set(x) -> ({x} = U)) AndInt 60 47
62. ({x} = U) <-> ¬Set(x) EquivConst 61 Qed

Used Theorems

1. Set(x) -> Set({x})
2. ¬Set(U)
3. (x ε U) <-> Set(x)
4. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)
6. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))
10. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)
9. D <-> ¬¬D

Th44. (Set(x) -> ((∩{x} = x) & (∪{x} = x))) & (¬Set(x) -> ((∩{x} = 0) & (∪{x} = U)))

0. z ε ∩{x} Hyp
1. ∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))} DefEqInt
2. ∀x.(∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))}) ForallInt 1
3. ∩{x} = {z: ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y))} ForallElim 2
4. z ε {z: ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y))} EqualitySub 0 3
5. Set(z) & ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y)) ClassElim 4
6. ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y)) AndElimR 5
7. Set(x) Hyp
8. Set(x) -> ((y ε {x}) <-> (y = x)) TheoremInt
9. (y ε {x}) <-> (y = x) ImpElim 7 8
10. ((y ε {x}) -> (y = x)) & ((y = x) -> (y ε {x})) EquivExp 9
11. (y = x) -> (y ε {x}) AndElimR 10
12. ∀y.((y = x) -> (y ε {x})) ForallInt 11
13. (x = x) -> (x ε {x}) ForallElim 12
14. x = x Identity
15. x ε {x} ImpElim 14 13
16. (x ε {x}) -> (z ε x) ForallElim 6
17. z ε x ImpElim 15 16
18. (z ε ∩{x}) -> (z ε x) ImpInt 17
19. z ε x Hyp
20. y ε {x} Hyp

21. (y ε {x}) -> (y = x) AndElimL 10
22. y = x ImpElim 20 21
23. x = y Symmetry 22
24. z ε y EqualitySub 19 23
25. (y ε {x}) -> (z ε y) ImpInt 24
26. ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y)) ForallInt 25
27. ∃x.(z ε x) ExistsInt 19
28. Set(z) DefSub 27
29. Set(z) & ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y)) AndInt 28 26
30. z ε {z: ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y))} ClassInt 29
31. {z: ∀y.((y ε {x}) -> (z ε y))} = ∩{x} Symmetry 3
32. z ε ∩{x} EqualitySub 30 31
33. (z ε x) -> (z ε ∩{x}) ImpInt 32
34. ((z ε ∩{x}) -> (z ε x)) & ((z ε x) -> (z ε ∩{x})) AndInt 18 33
35. (z ε ∩{x}) <-> (z ε x) EquivConst 34
36. ∀z.((z ε ∩{x}) <-> (z ε x)) ForallInt 35
37. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
38. ∀y.((∩{x} = y) <-> ∀z.((z ε ∩{x}) <-> (z ε y))) ForallElim 37
39. (∩{x} = x) <-> ∀z.((z ε ∩{x}) <-> (z ε x)) ForallElim 38
40. ((∩{x} = x) -> ∀z.((z ε ∩{x}) <-> (z ε x))) & (∀z.((z ε ∩{x}) <-> (z ε x)) -> (∩{x} = x)) EquivExp 39
41. ∀z.((z ε ∩{x}) <-> (z ε x)) -> (∩{x} = x) AndElimR 40
42. ∩{x} = x ImpElim 36 41
43. z ε ∪{x} Hyp
44. ∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))} DefEqInt
45. ∀x.(∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))}) ForallInt 44
46. ∪{x} = {z: ∃y.((y ε {x}) & (z ε y))} ForallElim 45
47. z ε {z: ∃y.((y ε {x}) & (z ε y))} EqualitySub 43 46
48. Set(z) & ∃y.((y ε {x}) & (z ε y)) ClassElim 47
49. ∃y.((y ε {x}) & (z ε y)) AndElimR 48
50. (a ε {x}) & (z ε a) Hyp
51. ∀y.((y ε {x}) -> (y = x)) ForallInt 21
52. (a ε {x}) -> (a = x) ForallElim 51
53. a ε {x} AndElimL 50
54. a = x ImpElim 53 52
55. z ε a AndElimR 50
56. z ε x EqualitySub 55 54
57. (z ε ∪{x}) -> (z ε x) ImpInt 56
58. (z ε ∪{x}) -> (z ε x) ExistsElim 49 50 57
59. z ε x Hyp
60. (y = x) -> (y ε {x}) AndElimR 10
61. ∀y.((y = x) -> (y ε {x})) ForallInt 60
62. (x = x) -> (x ε {x}) ForallElim 61
63. x ε {x} ImpElim 14 62
64. (x ε {x}) & (z ε x) AndInt 63 59
65. ∃y.((y ε {x}) & (z ε y)) ExistsInt 64
66. ∃y.(z ε y) ExistsInt 59
67. Set(z) DefSub 66
68. Set(z) & ∃y.((y ε {x}) & (z ε y)) AndInt 67 65
69. z ε {z: ∃y.((y ε {x}) & (z ε y))} ClassInt 68
70. {z: ∃y.((y ε {x}) & (z ε y))} = ∪{x} Symmetry 46
71. z ε ∪{x} EqualitySub 69 70
72. (z ε x) -> (z ε ∪{x}) ImpInt 71
73. ((z ε ∪{x}) -> (z ε x)) & ((z ε x) -> (z ε ∪{x})) AndInt 58 72
74. (z ε ∪{x}) <-> (z ε x) EquivConst 73
75. ∀z.((z ε ∪{x}) <-> (z ε x)) ForallInt 74
76. ∀y.((∪{x} = y) <-> ∀z.((z ε ∪{x}) <-> (z ε y))) ForallElim 37
77. (∪{x} = x) <-> ∀z.((z ε ∪{x}) <-> (z ε x)) ForallElim 76
78. ((∪{x} = x) -> ∀z.((z ε ∪{x}) <-> (z ε x))) & (∀z.((z ε ∪{x}) <-> (z ε x)) -> (∪{x} = x)) EquivExp 77
79. ∀z.((z ε ∪{x}) <-> (z ε x)) -> (∪{x} = x) AndElimR 78
80. ∪{x} = x ImpElim 75 79
81. (∩{x} = x) & (∪{x} = x) AndInt 42 80
82. Set(x) -> ((∩{x} = x) & (∪{x} = x)) ImpInt 81
83. ¬Set(x) Hyp
84. ({x} = U) <-> ¬Set(x) TheoremInt
85. (({x} = U) -> ¬Set(x)) & (¬Set(x) -> ({x} = U)) EquivExp 84
86. ¬Set(x) -> ({x} = U) AndElimR 85
87. {x} = U ImpElim 83 86
88. (0 = ∩U) & (U = ∪U) TheoremInt
89. U = {x} Symmetry 87

90. (0 = ∩{x}) & (U = ∪{x}) EqualitySub 88 89
91. 0 = ∩{x} AndElimL 90
92. U = ∪{x} AndElimR 90
93. ∩{x} = 0 Symmetry 91
94. ∪{x} = U Symmetry 92
95. (∩{x} = 0) & (∪{x} = U) AndInt 93 94
96. ¬Set(x) -> ((∩{x} = 0) & (∪{x} = U)) ImpInt 95
97. (Set(x) -> ((∩{x} = x) & (∪{x} = x))) & (¬Set(x) -> ((∩{x} = 0) & (∪{x} = U)))
AndInt 82 96 Qed

Used Theorems

1. Set(x) -> ((y ε {x}) <-> (y = x))
2. ({x} = U) <-> ¬Set(x)
3. (0 = ∩U) & (U = ∪U)

Th46. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) &
(({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)))

0. Set(x) & Set(y) Hyp
1. Set(x) -> Set({x}) TheoremInt
2. Set(x) AndElimL 0
3. Set(y) AndElimR 0
4. Set({x}) ImpElim 2 1
5. ∀x.(Set(x) -> Set({x})) ForallInt 1
6. Set(y) -> Set({y}) ForallElim 5
7. Set({y}) ImpElim 3 6
8. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x ∪ y)) AxInt
9. ∀x.((Set(x) & Set(y)) -> Set((x ∪ y))) ForallInt 8
10. (Set({x}) & Set(y)) -> Set(({x} ∪ y)) ForallElim 9
11. ∀y.((Set({x}) & Set(y)) -> Set(({x} ∪ y))) ForallInt 10
12. (Set({x}) & Set({y})) -> Set(({x} ∪ {y})) ForallElim 11
13. Set({x}) & Set({y}) AndInt 4 7
14. Set(({x} ∪ {y})) ImpElim 13 12
15. {x,y} = ({x} ∪ {y}) DefEqInt
16. ({x} ∪ {y}) = {x,y} Symmetry 15
17. Set({x,y}) EqualitySub 14 16
18. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
19. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 18
20. z ε {x,y} Hyp
21. z ε ({x} ∪ {y}) EqualitySub 20 15
22. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))
EquivExp 19
23. (z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 22
24. ∀x.((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) ForallInt 23
25. (z ε ({x} ∪ y)) -> ((z ε {x}) v (z ε y)) ForallElim 24
26. ∀y.((z ε ({x} ∪ y)) -> ((z ε {x}) v (z ε y))) ForallInt 25
27. (z ε ({x} ∪ {y})) -> ((z ε {x}) v (z ε {y})) ForallElim 26
28. (z ε {x}) v (z ε {y}) ImpElim 21 27
29. z ε {x} Hyp
30. Set(x) -> ((y ε {x}) <-> (y = x)) TheoremInt
31. ∀y.(Set(x) -> ((y ε {x}) <-> (y = x))) ForallInt 30
32. Set(x) -> ((z ε {x}) <-> (z = x)) ForallElim 31
33. ∀x.(Set(x) -> ((z ε {x}) <-> (z = x))) ForallInt 32
34. Set(y) -> ((z ε {y}) <-> (z = y)) ForallElim 33
35. (z ε {x}) <-> (z = x) ImpElim 2 32
36. ((z ε {x}) -> (z = x)) & ((z = x) -> (z ε {x})) EquivExp 35
37. (z ε {x}) -> (z = x) AndElimL 36
38. z = x ImpElim 29 37
39. (z = x) v (z = y) OrIntR 38
40. z ε {y} Hyp
41. (z ε {y}) <-> (z = y) ImpElim 3 34
42. ((z ε {y}) -> (z = y)) & ((z = y) -> (z ε {y})) EquivExp 41
43. (z ε {y}) -> (z = y) AndElimL 42
44. z = y ImpElim 40 43
45. (z = x) v (z = y) OrIntL 44
46. (z = x) v (z = y) OrElim 28 29 39 40 45
47. (z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y)) ImpInt 46
48. (z = x) v (z = y) Hyp
49. z = x Hyp

```
50. (z = x) -> (z ε {x})  AndElimR 36
51. z ε {x}  ImpElim 49 50
52. (z ε {x}) v (z ε {y})  OrIntR 51
53. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))  AndElimR 22
54. ∀x.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))  ForallInt 53
55. ((z ε {x}) v (z ε y)) -> (z ε ({x} ∪ y))  ForallElim 54
56. ∀y.(((z ε {x}) v (z ε y)) -> (z ε ({x} ∪ y)))  ForallInt 55
57. ((z ε {x}) v (z ε {y})) -> (z ε ({x} ∪ {y}))  ForallElim 56
58. z ε ({x} ∪ {y})  ImpElim 52 57
59. z = y  Hyp
60. (z = y) -> (z ε {y})  AndElimR 42
61. z ε {y}  ImpElim 59 60
62. (z ε {x}) v (z ε {y})  OrIntL 61
63. z ε ({x} ∪ {y})  ImpElim 62 57
64. z ε ({x} ∪ {y})  OrElim 48 49 58 59 63
65. ((z = x) v (z = y)) -> (z ε ({x} ∪ {y}))  ImpInt 64
66. ((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y})  EqualitySub 65 16
67. ((z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y))) & (((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y}))  AndInt
47 66
68. (z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))  EquivConst 67
69. Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y)))  AndInt 17 68
70. (Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))  ImpInt 69
71. {x,y} = U  Hyp
72. ({x} ∪ {y}) = U  EqualitySub 71 15
73. ¬Set(U)  TheoremInt
74. U = ({x} ∪ {y})  Symmetry 72
75. ¬Set(({x} ∪ {y}))  EqualitySub 73 74
76. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x ∪ y))  AxInt
77. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)  TheoremInt
78. ((Set(x) & Set(y)) -> B) -> (¬B -> ¬(Set(x) & Set(y)))  PolySub 77
79. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x ∪ y))) -> (¬Set((x ∪ y)) -> ¬(Set(x) & Set(y)))  PolySub
78
80. ¬Set((x ∪ y)) -> ¬(Set(x) & Set(y))  ImpElim 76 79
81. ∀x.(¬Set((x ∪ y)) -> ¬(Set(x) & Set(y)))  ForallInt 80
82. ¬Set(({x} ∪ y)) -> ¬(Set({x}) & Set(y))  ForallElim 81
83. ∀y.(¬Set(({x} ∪ y)) -> ¬(Set({x}) & Set(y)))  ForallInt 82
84. ¬Set(({x} ∪ {y})) -> ¬(Set({x}) & Set({y}))  ForallElim 83
85. ¬(Set({x}) & Set({y}))  ImpElim 75 84
86. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B))  TheoremInt
87. ¬(A & B) <-> (¬A v ¬B)  AndElimR 86
88. ¬(Set({x}) & B) <-> (¬Set({x}) v ¬B)  PolySub 87
89. ¬(Set({x}) & Set({y})) <-> (¬Set({x}) v ¬Set({y}))  PolySub 88
90. (¬(Set({x}) & Set({y})) -> (¬Set({x}) v ¬Set({y}))) & ((¬Set({x}) v ¬Set({y})) ->
¬(Set({x}) & Set({y})))  EquivExp 89
91. ¬(Set({x}) & Set({y})) -> (¬Set({x}) v ¬Set({y}))  AndElimL 90
92. ¬Set({x}) v ¬Set({y})  ImpElim 85 91
93. ¬Set({x})  Hyp
94. Set(x) -> Set({x})  TheoremInt
95. (Set(x) -> B) -> (¬B -> ¬Set(x))  PolySub 77
96. (Set(x) -> Set({x})) -> (¬Set({x}) -> ¬Set(x))  PolySub 95
97. ¬Set({x}) -> ¬Set(x)  ImpElim 94 96
98. ¬Set(x)  ImpElim 93 97
99. ¬Set({x}) -> ¬Set(x)  ImpInt 98
100. ∀a.(¬Set({a}) -> ¬Set(a))  ForallInt 99
101. ¬Set({y})  Hyp
102. ¬Set({y}) -> ¬Set(y)  ForallElim 100
103. ¬Set(y)  ImpElim 101 102
104. ¬Set(x) v ¬Set(y)  OrIntR 98
105. ¬Set(x) v ¬Set(y)  OrIntL 103
106. ¬Set(x) v ¬Set(y)  OrElim 92 93 104 101 105
107. ({x,y} = U) -> (¬Set(x) v ¬Set(y))  ImpInt 106
108. ¬Set(x) v ¬Set(y)  Hyp
109. ¬Set(x)  Hyp
110. ({x} = U) <-> ¬Set(x)  TheoremInt
111. (({x} = U) -> ¬Set(x)) & (¬Set(x) -> ({x} = U))  EquivExp 110
112. ¬Set(x) -> ({x} = U)  AndElimR 111
113. {x} = U  ImpElim 109 112
114. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x)  TheoremInt
115. (x ∪ U) = U  AndElimL 114
116. ∀x.((x ∪ U) = U)  ForallInt 115
117. ({y} ∪ U) = U  ForallElim 116
```

118. U = {x} Symmetry 113
119. ({y} ∪ {x}) = U EqualitySub 117 118
120. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x)) TheoremInt
121. (x ∪ y) = (y ∪ x) AndElimL 120
122. ∀x.((x ∪ y) = (y ∪ x)) ForallInt 121
123. ({x} ∪ y) = (y ∪ {x}) ForallElim 122
124. ∀y.(({x} ∪ y) = (y ∪ {x})) ForallInt 123
125. ({x} ∪ {y}) = ({y} ∪ {x}) ForallElim 124
126. ({y} ∪ {x}) = ({x} ∪ {y}) Symmetry 125
127. ({x} ∪ {y}) = U EqualitySub 119 126
128. {x,y} = U EqualitySub 127 16
129. ¬Set(x) -> ({x,y} = U) ImpInt 128
130. ∀a.(¬Set(a) -> ({a,y} = U)) ForallInt 129
131. ∀b.∀a.(¬Set(a) -> ({a,b} = U)) ForallInt 130
132. ¬Set(y) Hyp
133. ∀a.(¬Set(a) -> ({a,z} = U)) ForallElim 131
134. ¬Set(y) -> ({y,z} = U) ForallElim 133
135. ∀z.(¬Set(y) -> ({y,z} = U)) ForallInt 134
136. ¬Set(y) -> ({y,x} = U) ForallElim 135
137. ∀x.({x,y} = ({x} ∪ {y})) ForallInt 15
138. {a,y} = ({a} ∪ {y}) ForallElim 137
139. ∀y.({a,y} = ({a} ∪ {y})) ForallInt 138
140. {a,b} = ({a} ∪ {b}) ForallElim 139
141. ∀a.({a,b} = ({a} ∪ {b})) ForallInt 140
142. {y,b} = ({y} ∪ {b}) ForallElim 141
143. ∀b.({y,b} = ({y} ∪ {b})) ForallInt 142
144. {y,x} = ({y} ∪ {x}) ForallElim 143
145. {y,x} = ({x} ∪ {y}) EqualitySub 144 126
146. {y,x} = {x,y} EqualitySub 145 16
147. ¬Set(y) -> ({x,y} = U) EqualitySub 136 146
148. {x,y} = U ImpElim 132 147
149. {x,y} = U OrElim 108 109 128 132 148
150. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ({x,y} = U) ImpInt 149
151. (({x,y} = U) -> (¬Set(x) v ¬Set(y))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ({x,y} = U)) AndInt 107 150
152. ({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)) EquivConst 151
153. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y))) AndInt 70 152 Qed

Used Theorems

1. Set(x) -> Set({x})
2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
3. Set(x) -> ((y ε {x}) <-> (y = x))
4. ¬Set(U)
5. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)
6. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B))
1. Set(x) -> Set({x})
7. ({x} = U) <-> ¬Set(x)
8. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x)
10. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))

Th47. ((Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y)))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y})))

0. Set(x) & Set(y) Hyp
1. z ε ∩{x,y} Hyp
2. ∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))} DefEqInt
3. ∀x.(∩x = {z: ∀y.((y ε x) -> (z ε y))}) ForallInt 2
4. ∩{x,y} = {z: ∀x_0.((x_0 ε {x,y}) -> (z ε x_0))} ForallElim 3
5. z ε {z: ∀x_0.((x_0 ε {x,y}) -> (z ε x_0))} EqualitySub 1 4
6. Set(z) & ∀x_0.((x_0 ε {x,y}) -> (z ε x_0)) ClassElim 5
7. ∀x_0.((x_0 ε {x,y}) -> (z ε x_0)) AndElimR 6
8. (x ε {x,y}) -> (z ε x) ForallElim 7
9. (y ε {x,y}) -> (z ε y) ForallElim 7
10. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y))) TheoremInt
11. (Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y)))) AndElimL 10
12. Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))) ImpElim 0 11
13. (z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y)) AndElimR 12

14. ((z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y))) & (((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y})) EquivExp 13
15. ((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y}) AndElimR 14
16. ∀z.(((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y})) ForallInt 15
17. ((x = x) v (x = y)) -> (x ε {x,y}) ForallElim 16
18. ∀z.(((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y})) ForallInt 15
19. ((y = x) v (y = y)) -> (y ε {x,y}) ForallElim 18
20. x = x Identity
21. y = y Identity
22. (x = x) v (x = y) OrIntR 20
23. x ε {x,y} ImpElim 22 17
24. z ε x ImpElim 23 8
25. (y = x) v (y = y) OrIntL 21
26. y ε {x,y} ImpElim 25 19
27. z ε y ImpElim 26 9
28. (z ε x) & (z ε y) AndInt 24 27
29. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) TheoremInt
30. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 29
31. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) EquivExp 30
32. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)) AndElimR 31
33. z ε (x ∩ y) ImpElim 28 32
34. (z ε ∩{x,y}) -> (z ε (x ∩ y)) ImpInt 33
35. z ε (x ∩ y) Hyp
36. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimL 31
37. (z ε x) & (z ε y) ImpElim 35 36
38. c ε {x,y} Hyp
39. (z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y)) AndElimL 14
40. ∀z.((z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y))) ForallInt 39
41. (c ε {x,y}) -> ((c = x) v (c = y)) ForallElim 40
42. (c = x) v (c = y) ImpElim 38 41
43. c = x Hyp
44. z ε x AndElimL 37
45. x = c Symmetry 43
46. z ε c EqualitySub 44 45
47. c = y Hyp
48. z ε y AndElimR 37
49. y = c Symmetry 47
50. z ε c EqualitySub 48 49
51. z ε c OrElim 42 43 46 47 50
52. (c ε {x,y}) -> (z ε c) ImpInt 51
53. ∀c.((c ε {x,y}) -> (z ε c)) ForallInt 52
54. ∃c.(z ε c) ExistsInt 35
55. Set(z) DefSub 54
56. Set(z) & ∀c.((c ε {x,y}) -> (z ε c)) AndInt 55 53
57. z ε {c: ∀x_2.((x_2 ε {x,y}) -> (c ε x_2))} ClassInt 56
58. {z: ∀x_0.((x_0 ε {x,y}) -> (z ε x_0))} = ∩{x,y} Symmetry 4
59. z ε ∩{x,y} EqualitySub 57 58
60. (z ε (x ∩ y)) -> (z ε ∩{x,y}) ImpInt 59
61. ((z ε ∩{x,y}) -> (z ε (x ∩ y))) & ((z ε (x ∩ y)) -> (z ε ∩{x,y})) AndInt 34 60
62. (z ε ∩{x,y}) <-> (z ε (x ∩ y)) EquivConst 61
63. ∀z.((z ε ∩{x,y}) <-> (z ε (x ∩ y))) ForallInt 62
64. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
65. ∀x_4.((∩{x,y} = x_4) <-> ∀z.((z ε ∩{x,y}) <-> (z ε x_4))) ForallElim 64
66. (∩{x,y} = (x ∩ y)) <-> ∀z.((z ε ∩{x,y}) <-> (z ε (x ∩ y))) ForallElim 65
67. ((∩{x,y} = (x ∩ y)) -> ∀z.((z ε ∩{x,y}) <-> (z ε (x ∩ y)))) & (∀z.((z ε ∩{x,y}) <-> (z ε (x ∩ y))) -> (∩{x,y} = (x ∩ y))) EquivExp 66
68. ∀z.((z ε ∩{x,y}) <-> (z ε (x ∩ y))) -> (∩{x,y} = (x ∩ y)) AndElimR 67
69. ∩{x,y} = (x ∩ y) ImpElim 63 68
70. z ε ∪{x,y} Hyp
71. ∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))} DefEqInt
72. ∀x.(∪x = {z: ∃y.((y ε x) & (z ε y))}) ForallInt 71
73. ∪{x,y} = {z: ∃x_6.((x_6 ε {x,y}) & (z ε x_6))} ForallElim 72
74. z ε {z: ∃x_6.((x_6 ε {x,y}) & (z ε x_6))} EqualitySub 70 73
75. Set(z) & ∃x_6.((x_6 ε {x,y}) & (z ε x_6)) ClassElim 74
76. ∃x_6.((x_6 ε {x,y}) & (z ε x_6)) AndElimR 75
77. (u ε {x,y}) & (z ε u) Hyp
78. u ε {x,y} AndElimL 77
79. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y))) TheoremInt

```
80. (Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))  AndElimL 79
81. Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y)))  ImpElim 0 80
82. (z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))  AndElimR 81
83. ((z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y))) & (((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y}))  EquivExp 82
84. (z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y))  AndElimL 83
85. ∀z.((z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y)))  ForallInt 84
86. (u ε {x,y}) -> ((u = x) v (u = y))  ForallElim 85
87. (u = x) v (u = y)  ImpElim 78 86
88. u = x  Hyp
89. z ε u  AndElimR 77
90. z ε x  EqualitySub 89 88
91. (z ε x) v (z ε y)  OrIntR 90
92. u = y  Hyp
93. z ε y  EqualitySub 89 92
94. (z ε x) v (z ε y)  OrIntL 93
95. (z ε x) v (z ε y)  OrElim 87 88 91 92 94
96. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) TheoremInt
97. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 96
98. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))) EquivExp 97
99. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))  AndElimR 98
100. z ε (x ∪ y)  ImpElim 95 99
101. z ε (x ∪ y)  ExistsElim 76 77 100
102. (z ε ∪{x,y}) -> (z ε (x ∪ y))  ImpInt 101
103. z ε (x ∪ y)  Hyp
104. (z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 98
105. (z ε x) v (z ε y)  ImpElim 103 104
106. z ε x  Hyp
107. ((z ε {x,y}) -> ((z = x) v (z = y))) & (((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y})) EquivExp 82
108. ((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y})  AndElimR 107
109. ∀z.(((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y}))  ForallInt 108
110. ((x = x) v (x = y)) -> (x ε {x,y})  ForallElim 109
111. x = x  Identity
112. (x = x) v (x = y)  OrIntR 111
113. x ε {x,y}  ImpElim 112 110
114. (x ε {x,y}) & (z ε x)  AndInt 113 106
115. ∃a.((a ε {x,y}) & (z ε a))  ExistsInt 114
116. ∃y.(z ε y)  ExistsInt 106
117. Set(z)  DefSub 116
118. Set(z) & ∃a.((a ε {x,y}) & (z ε a))  AndInt 117 115
119. z ε {b: ∃a.((a ε {x,y}) & (b ε a))}  ClassInt 118
120. {z: ∃x_6.((x_6 ε {x,y}) & (z ε x_6))} = ∪{x,y}  Symmetry 73
121. z ε ∪{x,y}  EqualitySub 119 120
122. z ε y  Hyp
123. y = y  Identity
124. ∀z.(((z = x) v (z = y)) -> (z ε {x,y}))  ForallInt 108
125. ((y = x) v (y = y)) -> (y ε {x,y})  ForallElim 124
126. (y = x) v (y = y)  OrIntL 123
127. y ε {x,y}  ImpElim 126 125
128. (y ε {x,y}) & (z ε y)  AndInt 127 122
129. ∃a.((a ε {x,y}) & (z ε a))  ExistsInt 128
130. ∃y.(z ε y)  ExistsInt 122
131. Set(z)  DefSub 130
132. Set(z) & ∃a.((a ε {x,y}) & (z ε a))  AndInt 131 129
133. z ε {b: ∃a.((a ε {x,y}) & (b ε a))}  ClassInt 132
134. z ε ∪{x,y}  EqualitySub 133 120
135. z ε ∪{x,y}  OrElim 105 106 121 122 134
136. (z ε (x ∪ y)) -> (z ε ∪{x,y})  ImpInt 135
137. ((z ε ∪{x,y}) -> (z ε (x ∪ y))) & ((z ε (x ∪ y)) -> (z ε ∪{x,y}))  AndInt 102 136
138. (z ε ∪{x,y}) <-> (z ε (x ∪ y))  EquivConst 137
139. ∀z.((z ε ∪{x,y}) <-> (z ε (x ∪ y)))  ForallInt 138
140. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
141. ∀x_8.((∪{x,y} = x_8) <-> ∀z.((z ε ∪{x,y}) <-> (z ε x_8)))  ForallElim 140
142. (∪{x,y} = (x ∪ y)) <-> ∀z.((z ε ∪{x,y}) <-> (z ε (x ∪ y)))  ForallElim 141
143. ((∪{x,y} = (x ∪ y)) -> ∀z.((z ε ∪{x,y}) <-> (z ε (x ∪ y)))) & (∀z.((z ε ∪{x,y}) <-> (z ε (x ∪ y))) -> (∪{x,y} = (x ∪ y)))  EquivExp 142
144. ∀z.((z ε ∪{x,y}) <-> (z ε (x ∪ y))) -> (∪{x,y} = (x ∪ y))  AndElimR 143
```

145. ∪{x,y} = (x ∪ y) ImpElim 139 144
146. (∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y)) AndInt 69 145
147. (Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y))) ImpInt 146
148. ¬Set(x) v ¬Set(y) Hyp
149. ({x} = U) <-> ¬Set(x) TheoremInt
150. (({x} = U) -> ¬Set(x)) & (¬Set(x) -> ({x} = U)) EquivExp 149
151. ¬Set(x) -> ({x} = U) AndElimR 150
152. ¬Set(x) Hyp
153. {x} = U ImpElim 152 151
154. {x,y} = ({x} ∪ {y}) DefEqInt
155. {x,y} = (U ∪ {y}) EqualitySub 154 153
156. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x) TheoremInt
157. (x ∪ U) = U AndElimL 156
158. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x)) TheoremInt
159. (x ∪ y) = (y ∪ x) AndElimL 158
160. ∀y.((x ∪ y) = (y ∪ x)) ForallInt 159
161. (x ∪ U) = (U ∪ x) ForallElim 160
162. (U ∪ x) = U EqualitySub 157 161
163. ∀x.((U ∪ x) = U) ForallInt 162
164. (U ∪ {y}) = U ForallElim 163
165. {x,y} = U EqualitySub 155 164
166. (0 = ∩U) & (U = ∪U) TheoremInt
167. U = {x,y} Symmetry 165
168. (0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y}) EqualitySub 166 167
169. ¬Set(y) Hyp
170. ∀x.(¬Set(x) -> ({x} = U)) ForallInt 151
171. ¬Set(y) -> ({y} = U) ForallElim 170
172. {y} = U ImpElim 169 171
173. {x,y} = ({x} ∪ U) EqualitySub 154 172
174. ∀x.((x ∪ U) = U) ForallInt 157
175. ({x} ∪ U) = U ForallElim 174
176. {x,y} = U EqualitySub 173 175
177. U = {x,y} Symmetry 176
178. (0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y}) EqualitySub 166 177
179. (0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y}) OrElim 148 152 168 169 178
180. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y})) ImpInt 179
181. ((Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y)))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y}))) AndInt 147 180 Qed

Used Theorems

1. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)))
2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
1. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)))
2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
3. ({x} = U) <-> ¬Set(x)
4. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x)
5. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))
6. (0 = ∩U) & (U = ∪U)

Th49. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))

0. Set(x) & Set(y) Hyp
1. Set(x) AndElimL 0
2. Set(x) -> Set({x}) TheoremInt
3. Set({x}) ImpElim 1 2
4. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y))) TheoremInt
5. (Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y)))) AndElimL 4
6. Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))) ImpElim 0 5
7. Set({x,y}) AndElimL 6
8. ∀x.((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) ForallInt 5
9. (Set({x}) & Set(y)) -> (Set({{x},y}) & ((z ε {{x},y}) <-> ((z = {x}) v (z = y)))) ForallElim 8
10. ∀y.((Set({x}) & Set(y)) -> (Set({{x},y}) & ((z ε {{x},y}) <-> ((z = {x}) v (z = y))))) ForallInt 9
11. (Set({x}) & Set({x,y})) -> (Set({{x},{x,y}}) & ((z ε {{x},{x,y}}) <-> ((z = {x}) v (z = {x,y})))) ForallElim 10

12. Set({x}) & Set({x,y}) AndInt 3 7
13. Set({{x},{x,y}}) & ((z ε {{x},{x,y}}) <-> ((z = {x}) v (z = {x,y}))) ImpElim 12 11
14. Set({{x},{x,y}}) AndElimL 13
15. (x,y) = {{x},{x,y}} DefEqInt
16. {{x},{x,y}} = (x,y) Symmetry 15
17. Set((x,y)) EqualitySub 14 16
18. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y)) ImpInt 17
19. ¬Set(x) v ¬Set(y) Hyp
20. ¬Set(x) Hyp
21. ({x} = U) <-> ¬Set(x) TheoremInt
22. (({x} = U) -> ¬Set(x)) & (¬Set(x) -> ({x} = U)) EquivExp 21
23. ¬Set(x) -> ({x} = U) AndElimR 22
24. {x} = U ImpElim 20 23
25. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y))) TheoremInt
26. ({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)) AndElimR 25
27. (({x,y} = U) -> (¬Set(x) v ¬Set(y))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ({x,y} = U)) EquivExp 26
28. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ({x,y} = U) AndElimR 27
29. ¬Set(x) v ¬Set(y) OrIntR 20
30. {x,y} = U ImpElim 29 28
31. ¬Set(U) TheoremInt
32. U = {x} Symmetry 24
33. ¬Set({x}) EqualitySub 31 32
34. ∀x.(¬Set(x) -> ({x} = U)) ForallInt 23
35. ¬Set({x}) -> ({{x}} = U) ForallElim 34
36. {{x}} = U ImpElim 33 35
37. {x,y} = ({x} ∪ {y}) DefEqInt
38. ∀x.({x,y} = ({x} ∪ {y})) ForallInt 37
39. {{x},y} = ({{x}} ∪ {y}) ForallElim 38
40. ∀y.({{x},y} = ({{x}} ∪ {y})) ForallInt 39
41. {{x},{x,y}} = ({{x}} ∪ {{x,y}}) ForallElim 40
42. U = {x,y} Symmetry 30
43. ¬Set({x,y}) EqualitySub 31 42
44. ∀x.(¬Set(x) -> ({x} = U)) ForallInt 23
45. ¬Set({x,y}) -> ({{x,y}} = U) ForallElim 44
46. {{x,y}} = U ImpElim 43 45
47. {{x},{x,y}} = ({{x}} ∪ U) EqualitySub 41 46
48. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x) TheoremInt
49. (x ∪ U) = U AndElimL 48
50. ∀x.((x ∪ U) = U) ForallInt 49
51. ({{x}} ∪ U) = U ForallElim 50
52. {{x},{x,y}} = U EqualitySub 47 51
53. (x,y) = U EqualitySub 15 52
54. U = (x,y) Symmetry 53
55. ¬Set((x,y)) EqualitySub 31 54
56. ¬Set(y) Hyp
57. ¬Set(x) v ¬Set(y) OrIntL 56
58. {x,y} = U ImpElim 57 28
59. U = {x,y} Symmetry 58
60. ¬Set({x,y}) EqualitySub 31 59
61. {{x,y}} = U ImpElim 60 45
62. {{x},{x,y}} = ({{x}} ∪ U) EqualitySub 41 61
63. {{x},{x,y}} = U EqualitySub 62 51
64. (x,y) = U EqualitySub 15 63
65. U = (x,y) Symmetry 64
66. ¬Set((x,y)) EqualitySub 31 65
67. ¬Set((x,y)) OrElim 19 20 55 56 66
68. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ¬Set((x,y)) ImpInt 67
69. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B)) TheoremInt
70. ¬(A & B) <-> (¬A v ¬B) AndElimR 69
71. (¬(A & B) -> (¬A v ¬B)) & ((¬A v ¬B) -> ¬(A & B)) EquivExp 70
72. ¬(A & B) -> (¬A v ¬B) AndElimL 71
73. ¬(Set(x) & B) -> (¬Set(x) v ¬B) PolySub 72
74. ¬(Set(x) & Set(y)) -> (¬Set(x) v ¬Set(y)) PolySub 73
75. ¬(Set(x) & Set(y)) Hyp
76. ¬Set(x) v ¬Set(y) ImpElim 75 74
77. ¬Set((x,y)) ImpElim 76 68
78. ¬(Set(x) & Set(y)) -> ¬Set((x,y)) ImpInt 77
79. (A -> B) -> (¬B -> ¬A) TheoremInt
80. (¬(Set(x) & Set(y)) -> B) -> (¬B -> ¬¬(Set(x) & Set(y))) PolySub 79

81. (¬(Set(x) & Set(y)) -> ¬Set((x,y))) -> (¬¬Set((x,y)) -> ¬¬(Set(x) & Set(y))) PolySub 80
82. ¬¬Set((x,y)) -> ¬¬(Set(x) & Set(y)) ImpElim 78 81
83. D <-> ¬¬D TheoremInt
84. (D -> ¬¬D) & (¬¬D -> D) EquivExp 83
85. D -> ¬¬D AndElimL 84
86. (D -> ¬¬D) & (¬¬D -> D) EquivExp 83
87. ¬¬D -> D AndElimR 86
88. Set((x,y)) -> ¬¬Set((x,y)) PolySub 85
89. ¬¬(Set(x) & Set(y)) -> (Set(x) & Set(y)) PolySub 87
90. Set((x,y)) Hyp
91. ¬¬Set((x,y)) ImpElim 90 88
92. ¬¬(Set(x) & Set(y)) ImpElim 91 82
93. Set(x) & Set(y) ImpElim 92 89
94. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)) ImpInt 93
95. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) AndInt 18 94
96. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y)) EquivConst 95
97. ¬Set((x,y)) Hyp
98. ((Set(x) & Set(y)) -> B) -> (¬B -> ¬(Set(x) & Set(y))) PolySub 79
99. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) -> (¬Set((x,y)) -> ¬(Set(x) & Set(y))) PolySub 98
100. ¬Set((x,y)) -> ¬(Set(x) & Set(y)) ImpElim 18 99
101. ¬(Set(x) & Set(y)) ImpElim 97 100
102. ¬Set(x) v ¬Set(y) ImpElim 101 74
103. ¬Set(x) Hyp
104. {x} = U ImpElim 103 23
105. U = {x} Symmetry 104
106. ¬Set({x}) EqualitySub 31 105
107. {{x}} = U ImpElim 106 35
108. {{x},{x,y}} = (U ∪ {{x,y}}) EqualitySub 41 107
109. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x)) TheoremInt
110. (x ∪ y) = (y ∪ x) AndElimL 109
111. ∀x.((x ∪ y) = (y ∪ x)) ForallInt 110
112. (U ∪ y) = (y ∪ U) ForallElim 111
113. ∀y.((U ∪ y) = (y ∪ U)) ForallInt 112
114. (U ∪ {{x,y}}) = ({{x,y}} ∪ U) ForallElim 113
115. {{x},{x,y}} = ({{x,y}} ∪ U) EqualitySub 108 114
116. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x) TheoremInt
117. (x ∪ U) = U AndElimL 116
118. ∀x.((x ∪ U) = U) ForallInt 117
119. ({{x,y}} ∪ U) = U ForallElim 118
120. (U ∪ {{x,y}}) = U EqualitySub 114 119
121. {{x},{x,y}} = U EqualitySub 108 120
122. (x,y) = U EqualitySub 15 121
123. ¬Set(y) Hyp
124. ({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)) AndElimR 25
125. (({x,y} = U) -> (¬Set(x) v ¬Set(y))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ({x,y} = U)) EquivExp 124
126. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ({x,y} = U) AndElimR 125
127. ¬Set(x) v ¬Set(y) OrIntL 123
128. {x,y} = U ImpElim 127 126
129. U = {x,y} Symmetry 128
130. ¬Set({x,y}) EqualitySub 31 129
131. {{x,y}} = U ImpElim 130 45
132. {{x},{x,y}} = ({{x}} ∪ U) EqualitySub 41 131
133. ∀x.((x ∪ U) = U) ForallInt 117
134. ({{x}} ∪ U) = U ForallElim 133
135. {{x},{x,y}} = U EqualitySub 132 134
136. (x,y) = U EqualitySub 15 135
137. (x,y) = U OrElim 102 103 122 123 136
138. ¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U) ImpInt 137
139. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U)) AndInt 96 138 Qed

Used Theorems

1. Set(x) -> Set({x})
2. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)))
3. ({x} = U) <-> ¬Set(x)
4. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)))
5. ¬Set(U)

6. ((x U U) = U) & ((x ∩ U) = x)
9. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B))
7. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)
8. D <-> ¬¬D
10. ((x U y) = (y U x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))
6. ((x U U) = U) & ((x ∩ U) = x)

Th50. ((Set(x) & Set(y)) -> ((((U(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((U∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x))) & ((UU(x,y) = (x U y)) & (∩U(x,y) = (x ∩ y)))))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> (((U∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((UU(x,y) = U) & (∩U(x,y) = 0))))

0. Set(x) & Set(y) Hyp
1. ((Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (U{x,y} = (x U y)))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = U{x,y}))) TheoremInt
2. (Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (U{x,y} = (x U y))) AndElimL 1
3. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y))) TheoremInt
4. (Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y)))) AndElimL 3
5. Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))) ImpElim 0 4
6. Set({x,y}) AndElimL 5
7. Set(x) -> Set({x}) TheoremInt
8. Set(x) AndElimL 0
9. Set({x}) ImpElim 8 7
10. ∀x.(((Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (U{x,y} = (x U y)))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = U{x,y})))) ForallInt 1
11. ((Set({x}) & Set(y)) -> ((∩{{x},y} = ({x} ∩ y)) & (U{{x},y} = ({x} U y)))) & ((¬Set({x}) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{{x},y}) & (U = U{{x},y}))) ForallElim 10
12. ∀y.(((Set({x}) & Set(y)) -> ((∩{{x},y} = ({x} ∩ y)) & (U{{x},y} = ({x} U y)))) & ((¬Set({x}) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{{x},y}) & (U = U{{x},y})))) ForallInt 11
13. ((Set({x}) & Set({x,y})) -> ((∩{{x},{x,y}} = ({x} ∩ {x,y})) & (U{{x},{x,y}} = ({x} U {x,y})))) & ((¬Set({x}) v ¬Set({x,y})) -> ((0 = ∩{{x},{x,y}}) & (U = U{{x},{x,y}})))
ForallElim 12
14. Set({x}) & Set({x,y}) AndInt 9 6
15. (Set({x}) & Set({x,y})) -> ((∩{{x},{x,y}} = ({x} ∩ {x,y})) & (U{{x},{x,y}} = ({x} U {x,y}))) AndElimL 13
16. (∩{{x},{x,y}} = ({x} ∩ {x,y})) & (U{{x},{x,y}} = ({x} U {x,y})) ImpElim 14 15
17. {x,y} = ({x} U {y}) DefEqInt
18. (∩{{x},{x,y}} = ({x} ∩ ({x} U {y}))) & (U{{x},{x,y}} = ({x} U ({x} U {y})))
EqualitySub 16 17
19. ((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) & ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z)))
TheoremInt
20. ∀x.(((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) & ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z))))
ForallInt 19
21. (({x} ∩ (y U z)) = (({x} ∩ y) U ({x} ∩ z))) & (({x} U (y ∩ z)) = (({x} U y) ∩ ({x} U z))) ForallElim 20
22. ∀y.((({x} ∩ (y U z)) = (({x} ∩ y) U ({x} ∩ z))) & (({x} U (y ∩ z)) = (({x} U y) ∩ ({x} U z)))) ForallInt 21
23. (({x} ∩ ({x} U z)) = (({x} ∩ {x}) U ({x} ∩ z))) & (({x} U ({x} ∩ z)) = (({x} U {x}) ∩ ({x} U z))) ForallElim 22
24. ∀z.((({x} ∩ ({x} U z)) = (({x} ∩ {x}) U ({x} ∩ z))) & (({x} U ({x} ∩ z)) = (({x} U {x}) ∩ ({x} U z)))) ForallInt 23
25. (({x} ∩ ({x} U {y})) = (({x} ∩ {x}) U ({x} ∩ {y}))) & (({x} U ({x} ∩ {y})) = (({x} U {x}) ∩ ({x} U {y}))) ForallElim 24
26. ((x U x) = x) & ((x ∩ x) = x) TheoremInt
27. ∀x.(((x U x) = x) & ((x ∩ x) = x)) ForallInt 26
28. (({x} U {x}) = {x}) & (({x} ∩ {x}) = {x}) ForallElim 27
29. ({x} U {x}) = {x} AndElimL 28
30. ({x} ∩ {x}) = {x} AndElimR 28
31. ({x} ∩ ({x} U {y})) = (({x} ∩ {x}) U ({x} ∩ {y})) AndElimL 25
32. ({x} U ({x} ∩ {y})) = (({x} U {x}) ∩ ({x} U {y})) AndElimR 25
33. (∩{{x},{x,y}} = (({x} ∩ {x}) U ({x} ∩ {y}))) & (U{{x},{x,y}} = ({x} U ({x} U {y})))
EqualitySub 18 31
34. (∩{{x},{x,y}} = ({x} U ({x} ∩ {y}))) & (U{{x},{x,y}} = ({x} U ({x} U {y})))
EqualitySub 33 30
35. (((x U y) U z) = (x U (y U z))) & (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z))) TheoremInt
36. ((x U y) U z) = (x U (y U z)) AndElimL 35
37. ∀x.(((x U y) U z) = (x U (y U z))) ForallInt 36
38. (({x} U y) U z) = ({x} U (y U z)) ForallElim 37
39. ∀y.((({x} U y) U z) = ({x} U (y U z))) ForallInt 38
40. (({x} U {x}) U z) = ({x} U ({x} U z)) ForallElim 39
41. ∀z.((({x} U {x}) U z) = ({x} U ({x} U z))) ForallInt 40

```
42. (({x} ∪ {x}) ∪ {y}) = ({x} ∪ ({x} ∪ {y}))  ForallElim 41
43. ({x} ∪ ({x} ∪ {y})) = (({x} ∪ {x}) ∪ {y})  Symmetry 42
44. (∩{{x},{x,y}} = ({x} ∪ ({x} ∩ {y}))) & (∪{{x},{x,y}} = (({x} ∪ {x}) ∪ {y}))
EqualitySub 34 43
45. (∩{{x},{x,y}} = ({x} ∪ ({x} ∩ {y}))) & (∪{{x},{x,y}} = ({x} ∪ {y}))  EqualitySub 44
29
46. z ε ({x} ∩ {y})  Hyp
47. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
48. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))  AndElimR 47
49. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)))
EquivExp 48
50. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))  AndElimL 49
51. ∀x.((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y)))  ForallInt 50
52. (z ε ({x} ∩ y)) -> ((z ε {x}) & (z ε y))  ForallElim 51
53. ∀y.((z ε ({x} ∩ y)) -> ((z ε {x}) & (z ε y)))  ForallInt 52
54. (z ε ({x} ∩ {y})) -> ((z ε {x}) & (z ε {y}))  ForallElim 53
55. (z ε {x}) & (z ε {y})  ImpElim 46 54
56. z ε {x}  AndElimL 55
57. (z ε ({x} ∩ {y})) -> (z ε {x})  ImpInt 56
58. ∀z.((z ε ({x} ∩ {y})) -> (z ε {x}))  ForallInt 57
59. ∀x.∀z.((z ε ({x} ∩ {y})) -> (z ε {x}))  ForallInt 58
60. ∀z.((z ε ({a} ∩ {y})) -> (z ε {a}))  ForallElim 59
61. ∀y.∀z.((z ε ({a} ∩ {y})) -> (z ε {a}))  ForallInt 60
62. ∀z.((z ε ({a} ∩ {b})) -> (z ε {a}))  ForallElim 61
63. ({a} ∩ {b}) ⊂ {a}  DefSub 62
64. (x ⊂ y) <-> ((x ∪ y) = y)  TheoremInt
65. ∀x.((x ⊂ y) <-> ((x ∪ y) = y))  ForallInt 64
66. (({a} ∩ {b}) ⊂ y) <-> ((({a} ∩ {b}) ∪ y) = y)  ForallElim 65
67. ∀y.((({a} ∩ {b}) ⊂ y) <-> ((({a} ∩ {b}) ∪ y) = y))  ForallInt 66
68. (({a} ∩ {b}) ⊂ {a}) <-> ((({a} ∩ {b}) ∪ {a}) = {a})  ForallElim 67
69. ((({a} ∩ {b}) ⊂ {a}) -> ((({a} ∩ {b}) ∪ {a}) = {a})) & (((({a} ∩ {b}) ∪ {a}) = {a}) -
> (({a} ∩ {b}) ⊂ {a}))  EquivExp 68
70. (({a} ∩ {b}) ⊂ {a}) -> ((({a} ∩ {b}) ∪ {a}) = {a})  AndElimL 69
71. (({a} ∩ {b}) ∪ {a}) = {a}  ImpElim 63 70
72. ∀a.((({a} ∩ {b}) ∪ {a}) = {a})  ForallInt 71
73. (({x} ∩ {b}) ∪ {x}) = {x}  ForallElim 72
74. ∀b.((({x} ∩ {b}) ∪ {x}) = {x})  ForallInt 73
75. (({x} ∩ {y}) ∪ {x}) = {x}  ForallElim 74
76. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))  TheoremInt
77. (x ∪ y) = (y ∪ x)  AndElimL 76
78. ∀x.((x ∪ y) = (y ∪ x))  ForallInt 77
79. (({x} ∩ {a}) ∪ y) = (y ∪ ({x} ∩ {a}))  ForallElim 78
80. ∀y.((({x} ∩ {a}) ∪ y) = (y ∪ ({x} ∩ {a})))  ForallInt 79
81. (({x} ∩ {a}) ∪ {x}) = ({x} ∪ ({x} ∩ {a}))  ForallElim 80
82. ∀a.((({x} ∩ {a}) ∪ {x}) = ({x} ∪ ({x} ∩ {a})))  ForallInt 81
83. (({x} ∩ {y}) ∪ {x}) = ({x} ∪ ({x} ∩ {y}))  ForallElim 82
84. ({x} ∪ ({x} ∩ {y})) = {x}  EqualitySub 75 83
85. (∩{{x},{x,y}} = {x}) & (∪{{x},{x,y}} = ({x} ∪ {y}))  EqualitySub 45 84
86. ({x} ∪ {y}) = {x,y}  Symmetry 17
87. (∩{{x},{x,y}} = {x}) & (∪{{x},{x,y}} = {x,y})  EqualitySub 85 86
88. (Set(x) -> ((∩{x} = x) & (∪{x} = x))) & (¬Set(x) -> ((∩{x} = 0) & (∪{x} = U)))
TheoremInt
89. Set(x) -> ((∩{x} = x) & (∪{x} = x))  AndElimL 88
90. (∩{x} = x) & (∪{x} = x)  ImpElim 8 89
91. (x,y) = {{x},{x,y}}  DefEqInt
92. {{x},{x,y}} = (x,y)  Symmetry 91
93. (∩(x,y) = {x}) & (∪(x,y) = {x,y})  EqualitySub 87 92
94. ∩(x,y) = {x}  AndElimL 93
95. ∪(x,y) = {x,y}  AndElimR 93
96. {x} = ∩(x,y)  Symmetry 94
97. {x,y} = ∪(x,y)  Symmetry 95
98. ∩{x} = x  AndElimL 90
99. ∩∩(x,y) = x  EqualitySub 98 96
100. ∪{x} = x  AndElimR 90
101. ∪∩(x,y) = x  EqualitySub 100 96
102. ((Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y)))) & ((¬Set(x) v
¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y})))  TheoremInt
103. (Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y)))  AndElimL 102
104. (∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y))  ImpElim 0 103
105. ∩{x,y} = (x ∩ y)  AndElimL 104
```

106. ∪{x,y} = (x ∪ y) AndElimR 104
107. ∩∪(x,y) = (x ∩ y) EqualitySub 105 97
108. ∪∪(x,y) = (x ∪ y) EqualitySub 106 97
109. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y})) AndElimR 102
110. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U)) TheoremInt
111. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y)) AndElimL 110
112. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) EquivExp 111
113. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)) AndElimR 112
114. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B)) TheoremInt
115. ¬(A & B) <-> (¬A v ¬B) AndElimR 114
116. (¬(A & B) -> (¬A v ¬B)) & ((¬A v ¬B) -> ¬(A & B)) EquivExp 115
117. (¬A v ¬B) -> ¬(A & B) AndElimR 116
118. (¬Set(x) v ¬B) -> ¬(Set(x) & B) PolySub 117
119. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ¬(Set(x) & Set(y)) PolySub 118
120. (A -> B) -> (¬B -> ¬A) TheoremInt
121. (Set((x,y)) -> B) -> (¬B -> ¬Set((x,y))) PolySub 120
122. (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) -> (¬(Set(x) & Set(y)) -> ¬Set((x,y))) PolySub 121
123. ¬(Set(x) & Set(y)) -> ¬Set((x,y)) ImpElim 113 122
124. ¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U) AndElimR 110
125. ¬Set(x) v ¬Set(y) Hyp
126. ¬(Set(x) & Set(y)) ImpElim 125 119
127. ¬Set((x,y)) ImpElim 126 123
128. (x,y) = U ImpElim 127 124
129. U = (x,y) Symmetry 128
130. (0 = ∩U) & (U = ∪U) TheoremInt
131. (0 = ∩(x,y)) & (U = ∪(x,y)) EqualitySub 130 129
132. U = ∪(x,y) AndElimR 131
133. 0 = ∩(x,y) AndElimL 131
134. (∩0 = U) & (∪0 = 0) TheoremInt
135. (0 = ∩∪(x,y)) & (U = ∪∪(x,y)) EqualitySub 130 132
136. (∩∩(x,y) = U) & (∪∩(x,y) = 0) EqualitySub 134 133
137. 0 = ∩∪(x,y) AndElimL 135
138. U = ∪∪(x,y) AndElimR 135
139. ∩∪(x,y) = 0 Symmetry 137
140. ∪∪(x,y) = U Symmetry 138
141. (∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0) AndInt 140 139
142. ∩∩(x,y) = U AndElimL 136
143. ∪∩(x,y) = 0 AndElimR 136
144. (∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U) AndInt 143 142
145. ((∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0)) AndInt 144 141
146. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> (((∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0))) ImpInt 145
147. (∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x}) AndInt 95 94
148. (∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x) AndInt 101 99
149. (∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y)) AndInt 108 107
150. ((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x)) AndInt 147 148
151. (((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x))) & ((∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y))) AndInt 150 149
152. (Set(x) & Set(y)) -> ((((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x))) & ((∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y)))) ImpInt 151
153. ((Set(x) & Set(y)) -> ((((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x))) & ((∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y))))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> (((∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0)))) AndInt 152 146 Qed

Used Theorems

1. ((Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y)))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y})))
2. ((Set(x) & Set(y)) -> (Set({x,y}) & ((z ε {x,y}) <-> ((z = x) v (z = y))))) & (({x,y} = U) <-> (¬Set(x) v ¬Set(y)))
3. Set(x) -> Set({x})
4. ((x ∩ (y ∪ z)) = ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z))) & ((x ∪ (y ∩ z)) = ((x ∪ y) ∩ (x ∪ z)))
5. ((x ∪ x) = x) & ((x ∩ x) = x)
6. (((x ∪ y) ∪ z) = (x ∪ (y ∪ z))) & (((x ∩ y) ∩ z) = (x ∩ (y ∩ z)))
7. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
9. (x ⊂ y) <-> ((x ∪ y) = y)
10. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))
11. (Set(x) -> ((∩{x} = x) & (∪{x} = x))) & (¬Set(x) -> ((∩{x} = 0) & (∪{x} = U)))

```
1. ((Set(x) & Set(y)) -> ((∩{x,y} = (x ∩ y)) & (∪{x,y} = (x ∪ y)))) & ((¬Set(x) v
¬Set(y)) -> ((0 = ∩{x,y}) & (U = ∪{x,y})))
12. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))
13. (¬(A v B) <-> (¬A & ¬B)) & (¬(A & B) <-> (¬A v ¬B))
14. (A -> B) -> (¬B -> ¬A)
15. (0 = ∩U) & (U = ∪U)
16. (∩0 = U) & (∪0 = 0)

Th53. proj2(U) = U

0. proj2(x) = (∩∪x ∪ (∪∪x ~ ∪∩x))  DefEqInt
1. ∀x.(proj2(x) = (∩∪x ∪ (∪∪x ~ ∪∩x)))  ForallInt 0
2. proj2(U) = (∩∪U ∪ (∪∪U ~ ∪∩U))  ForallElim 1
3. (0 = ∩U) & (U = ∪U)  TheoremInt
4. (∩0 = U) & (∪0 = 0)  TheoremInt
5. 0 = ∩U  AndElimL 3
6. U = ∪U  AndElimR 3
7. ∩0 = U  AndElimL 4
8. ∪0 = 0  AndElimR 4
9. ∩U = 0  Symmetry 5
10. ∪U = U  Symmetry 6
11. proj2(U) = (∩U ∪ (∪U ~ ∪∩U))  EqualitySub 2 10
12. proj2(U) = (0 ∪ (∪U ~ ∪0))  EqualitySub 11 9
13. proj2(U) = (0 ∪ (U ~ ∪0))  EqualitySub 12 10
14. proj2(U) = (0 ∪ (U ~ 0))  EqualitySub 13 8
15. ((0 ∪ x) = x) & ((0 ∩ x) = 0)  TheoremInt
16. (0 ∪ x) = x  AndElimL 15
17. ∀x.((0 ∪ x) = x)  ForallInt 16
18. (0 ∪ (U ~ 0)) = (U ~ 0)  ForallElim 17
19. proj2(U) = (U ~ 0)  EqualitySub 14 18
20. (x ~ y) = (x ∩ ~y)  DefEqInt
21. ∀x.((x ~ y) = (x ∩ ~y))  ForallInt 20
22. (U ~ y) = (U ∩ ~y)  ForallElim 21
23. ∀y.((U ~ y) = (U ∩ ~y))  ForallInt 22
24. (U ~ 0) = (U ∩ ~0)  ForallElim 23
25. (~0 = U) & (~U = 0)  TheoremInt
26. ~0 = U  AndElimL 25
27. (U ~ 0) = (U ∩ U)  EqualitySub 24 26
28. ((x ∪ x) = x) & ((x ∩ x) = x)  TheoremInt
29. (x ∩ x) = x  AndElimR 28
30. ∀x.((x ∩ x) = x)  ForallInt 29
31. (U ∩ U) = U  ForallElim 30
32. (U ~ 0) = U  EqualitySub 27 31
33. proj2(U) = U  EqualitySub 19 32 Qed

Used Theorems

1. (0 = ∩U) & (U = ∪U)
2. (∩0 = U) & (∪0 = 0)
3. ((0 ∪ x) = x) & ((0 ∩ x) = 0)
5. (~0 = U) & (~U = 0)
6. ((x ∪ x) = x) & ((x ∩ x) = x)

Th54. ((Set(x) & Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y))) & ((¬Set(x) v
¬Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = U) & (proj2((x,y)) = U)))

0. Set(x) & Set(y)  Hyp
1. proj1(x) = ∩∩x  DefEqInt
2. proj2(x) = (∩∪x ∪ (∪∪x ~ ∪∩x))  DefEqInt
3. ((Set(x) & Set(y)) -> ((((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) &
(∩∩(x,y) = x))) & ((∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y))))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) ->
(((∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0))))  TheoremInt
4. (Set(x) & Set(y)) -> ((((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y)
= x))) & ((∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y))))  AndElimL 3
5. (((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x))) & ((∪∪(x,y) =
(x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y)))  ImpElim 0 4
6. ((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x))  AndElimL 5
7. (∪∩(x,y) = x) & (∩∩(x,y) = x)  AndElimR 6
8. ∩∩(x,y) = x  AndElimR 7
9. ∀x.(proj1(x) = ∩∩x)  ForallInt 1
10. ∀x.(proj1(x) = ∩∩x)  ForallInt 1
```

```
11. proj1((x,y)) = ∩∩(x,y)  ForallElim 10
12. proj1((x,y)) = x  EqualitySub 11 8
13. ∀x.(proj2(x) = (∩∪x ∪ (∪∪x ~ ∪∩x)))  ForallInt 2
14. proj2((x,y)) = (∩∪(x,y) ∪ (∪∪(x,y) ~ ∪∩(x,y)))  ForallElim 13
15. ∪∩(x,y) = x  AndElimL 7
16. (∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y))  AndElimR 5
17. ∪∪(x,y) = (x ∪ y)  AndElimL 16
18. ∩∪(x,y) = (x ∩ y)  AndElimR 16
19. proj2((x,y)) = (∩∪(x,y) ∪ ((x ∪ y) ~ ∪∩(x,y)))  EqualitySub 14 17
20. proj2((x,y)) = ((x ∩ y) ∪ ((x ∪ y) ~ ∪∩(x,y)))  EqualitySub 19 18
21. proj2((x,y)) = ((x ∩ y) ∪ ((x ∪ y) ~ x))  EqualitySub 20 15
22. z ε ((x ∪ y) ~ x)  Hyp
23. (x ~ y) = (x ∩ ~y)  DefEqInt
24. ∀x.((x ~ y) = (x ∩ ~y))  ForallInt 23
25. (a ~ y) = (a ∩ ~y)  ForallElim 24
26. ∀y.((a ~ y) = (a ∩ ~y))  ForallInt 25
27. (a ~ b) = (a ∩ ~b)  ForallElim 26
28. ∀a.((a ~ b) = (a ∩ ~b))  ForallInt 27
29. ((x ∪ y) ~ b) = ((x ∪ y) ∩ ~b)  ForallElim 28
30. ∀b.(((x ∪ y) ~ b) = ((x ∪ y) ∩ ~b))  ForallInt 29
31. ((x ∪ y) ~ x) = ((x ∪ y) ∩ ~x)  ForallElim 30
32. z ε ((x ∪ y) ∩ ~x)  EqualitySub 22 31
33. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
TheoremInt
34. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))  AndElimR 33
35. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)))
EquivExp 34
36. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))  AndElimL 35
37. ∀x.((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y)))  ForallInt 36
38. (z ε (a ∩ y)) -> ((z ε a) & (z ε y))  ForallElim 37
39. ∀y.((z ε (a ∩ y)) -> ((z ε a) & (z ε y)))  ForallInt 38
40. (z ε (a ∩ b)) -> ((z ε a) & (z ε b))  ForallElim 39
41. ∀a.((z ε (a ∩ b)) -> ((z ε a) & (z ε b)))  ForallInt 40
42. (z ε ((x ∪ y) ∩ b)) -> ((z ε (x ∪ y)) & (z ε b))  ForallElim 41
43. ∀b.((z ε ((x ∪ y) ∩ b)) -> ((z ε (x ∪ y)) & (z ε b)))  ForallInt 42
44. (z ε ((x ∪ y) ∩ ~x)) -> ((z ε (x ∪ y)) & (z ε ~x))  ForallElim 43
45. (z ε (x ∪ y)) & (z ε ~x)  ImpElim 32 44
46. z ε (x ∪ y)  AndElimL 45
47. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 33
48. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))
EquivExp 47
49. (z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))  AndElimL 48
50. (z ε x) v (z ε y)  ImpElim 46 49
51. z ε ~x  AndElimR 45
52. ~x = {y: ¬(y ε x)}  DefEqInt
53. z ε {y: ¬(y ε x)}  EqualitySub 51 52
54. Set(z) & ¬(z ε x)  ClassElim 53
55. ¬(z ε x)  AndElimR 54
56. z ε x  Hyp
57. _|_  ImpElim 56 55
58. z ε (y ∩ ~x)  AbsI 57
59. z ε y  Hyp
60. (z ε y) & (z ε ~x)  AndInt 59 51
61. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)))
EquivExp 34
62. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))  AndElimR 61
63. ∀y.(((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)))  ForallInt 62
64. ((z ε x) & (z ε a)) -> (z ε (x ∩ a))  ForallElim 63
65. ∀x.(((z ε x) & (z ε a)) -> (z ε (x ∩ a)))  ForallInt 64
66. ((z ε y) & (z ε a)) -> (z ε (y ∩ a))  ForallElim 65
67. ∀a.(((z ε y) & (z ε a)) -> (z ε (y ∩ a)))  ForallInt 66
68. ∀a.(((z ε y) & (z ε a)) -> (z ε (y ∩ a)))  ForallInt 66
69. ((z ε y) & (z ε ~x)) -> (z ε (y ∩ ~x))  ForallElim 68
70. z ε (y ∩ ~x)  ImpElim 60 69
71. z ε (y ∩ ~x)  OrElim 50 56 58 59 70
72. (z ε ((x ∪ y) ~ x)) -> (z ε (y ∩ ~x))  ImpInt 71
73. z ε (y ∩ ~x)  Hyp
74. (z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))  AndElimL 61
75. ∀y.((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y)))  ForallInt 74
76. (z ε (x ∩ a)) -> ((z ε x) & (z ε a))  ForallElim 75
77. ∀x.((z ε (x ∩ a)) -> ((z ε x) & (z ε a)))  ForallInt 76
```

78. (z ε (y ∩ a)) -> ((z ε y) & (z ε a)) ForallElim 77
79. ∀a.((z ε (y ∩ a)) -> ((z ε y) & (z ε a))) ForallInt 78
80. (z ε (y ∩ ~x)) -> ((z ε y) & (z ε ~x)) ForallElim 79
81. (z ε y) & (z ε ~x) ImpElim 73 80
82. z ε y AndElimL 81
83. (z ε x) v (z ε y) OrIntL 82
84. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y)) AndElimR 48
85. z ε (x U y) ImpElim 83 84
86. z ε ~x AndElimR 81
87. (z ε (x U y)) & (z ε ~x) AndInt 85 86
88. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)) AndElimR 35
89. ∀y.(((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) ForallInt 88
90. ((z ε x) & (z ε a)) -> (z ε (x ∩ a)) ForallElim 89
91. ∀x.(((z ε x) & (z ε a)) -> (z ε (x ∩ a))) ForallInt 90
92. ((z ε (x U y)) & (z ε a)) -> (z ε ((x U y) ∩ a)) ForallElim 91
93. ∀a.(((z ε (x U y)) & (z ε a)) -> (z ε ((x U y) ∩ a))) ForallInt 92
94. ((z ε (x U y)) & (z ε ~x)) -> (z ε ((x U y) ∩ ~x)) ForallElim 93
95. z ε ((x U y) ∩ ~x) ImpElim 87 94
96. ((x U y) ∩ ~x) = ((x U y) ~ x) Symmetry 31
97. z ε ((x U y) ~ x) EqualitySub 95 96
98. (z ε (y ∩ ~x)) -> (z ε ((x U y) ~ x)) ImpInt 97
99. ((z ε ((x U y) ~ x)) -> (z ε (y ∩ ~x))) & ((z ε (y ∩ ~x)) -> (z ε ((x U y) ~ x))) AndInt 72 98
100. (z ε ((x U y) ~ x)) <-> (z ε (y ∩ ~x)) EquivConst 99
101. ∀z.((z ε ((x U y) ~ x)) <-> (z ε (y ∩ ~x))) ForallInt 100
102. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
103. ∀o.((((x U y) ~ x) = o) <-> ∀z.((z ε ((x U y) ~ x)) <-> (z ε o))) ForallElim 102
104. (((x U y) ~ x) = (y ∩ ~x)) <-> ∀z.((z ε ((x U y) ~ x)) <-> (z ε (y ∩ ~x))) ForallElim 103
105. ((((x U y) ~ x) = (y ∩ ~x)) -> ∀z.((z ε ((x U y) ~ x)) <-> (z ε (y ∩ ~x)))) & (∀z. ((z ε ((x U y) ~ x)) <-> (z ε (y ∩ ~x))) -> (((x U y) ~ x) = (y ∩ ~x))) EquivExp 104
106. ∀z.((z ε ((x U y) ~ x)) <-> (z ε (y ∩ ~x))) -> (((x U y) ~ x) = (y ∩ ~x)) AndElimR 105
107. ((x U y) ~ x) = (y ∩ ~x) ImpElim 101 106
108. proj2((x,y)) = ((x ∩ y) U (y ∩ ~x)) EqualitySub 21 107
109. ((x U y) = (y U x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x)) TheoremInt
110. (x ∩ y) = (y ∩ x) AndElimR 109
111. proj2((x,y)) = ((y ∩ x) U (y ∩ ~x)) EqualitySub 108 110
112. ((x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z))) & ((x U (y ∩ z)) = ((x U y) ∩ (x U z))) TheoremInt
113. (x ∩ (y U z)) = ((x ∩ y) U (x ∩ z)) AndElimL 112
114. ((x ∩ y) U (x ∩ z)) = (x ∩ (y U z)) Symmetry 113
115. ∀x.(((x ∩ y) U (x ∩ z)) = (x ∩ (y U z))) ForallInt 114
116. ((a ∩ y) U (a ∩ z)) = (a ∩ (y U z)) ForallElim 115
117. ∀y.(((a ∩ y) U (a ∩ z)) = (a ∩ (y U z))) ForallInt 116
118. ((a ∩ b) U (a ∩ z)) = (a ∩ (b U z)) ForallElim 117
119. ∀a.(((a ∩ b) U (a ∩ z)) = (a ∩ (b U z))) ForallInt 118
120. ((y ∩ b) U (y ∩ z)) = (y ∩ (b U z)) ForallElim 119
121. ∀b.(((y ∩ b) U (y ∩ z)) = (y ∩ (b U z))) ForallInt 120
122. ((y ∩ x) U (y ∩ z)) = (y ∩ (x U z)) ForallElim 121
123. ∀z.(((y ∩ x) U (y ∩ z)) = (y ∩ (x U z))) ForallInt 122
124. ((y ∩ x) U (y ∩ ~x)) = (y ∩ (x U ~x)) ForallElim 123
125. proj2((x,y)) = (y ∩ (x U ~x)) EqualitySub 111 124
126. z ε U Hyp
127. A v ¬A TheoremInt
128. (z ε x) v ¬(z ε x) PolySub 127
129. z ε x Hyp
130. (z ε x) v (z ε ~x) OrIntR 129
131. ∀y.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x U y))) ForallInt 84
132. ((z ε x) v (z ε ~x)) -> (z ε (x U ~x)) ForallElim 131
133. z ε (x U ~x) ImpElim 130 132
134. ¬(z ε x) Hyp
135. ∃y.(z ε y) ExistsInt 126
136. Set(z) DefSub 135
137. ¬(z ε x) & Set(z) AndInt 134 136
138. z ε {z: ¬(z ε x)} ClassInt 137
139. {y: ¬(y ε x)} = ~x Symmetry 52
140. z ε ~x EqualitySub 138 139
141. (z ε x) v (z ε ~x) OrIntL 140
142. z ε (x U ~x) ImpElim 141 132
143. z ε (x U ~x) OrElim 128 129 133 134 142

```
144. (z ε U) -> (z ε (x ∪ ~x))  ImpInt 143
145. ∀z.((z ε U) -> (z ε (x ∪ ~x)))  ForallInt 144
146. U ⊂ (x ∪ ~x)  DefSub 145
147. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)  TheoremInt
148. x ⊂ U  AndElimR 147
149. ∀x.(x ⊂ U)  ForallInt 148
150. (x ∪ ~x) ⊂ U  ForallElim 149
151. (U ⊂ (x ∪ ~x)) & ((x ∪ ~x) ⊂ U)  AndInt 146 150
152. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))  TheoremInt
153. ((x = y) -> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))) & (((x ⊂ y) & (y ⊂ x)) -> (x = y))  EquivExp 152
154. ((x ⊂ y) & (y ⊂ x)) -> (x = y)  AndElimR 153
155. ∀x.(((x ⊂ y) & (y ⊂ x)) -> (x = y))  ForallInt 154
156. ((U ⊂ y) & (y ⊂ U)) -> (U = y)  ForallElim 155
157. ∀y.(((U ⊂ y) & (y ⊂ U)) -> (U = y))  ForallInt 156
158. ((U ⊂ (x ∪ ~x)) & ((x ∪ ~x) ⊂ U)) -> (U = (x ∪ ~x))  ForallElim 157
159. U = (x ∪ ~x)  ImpElim 151 158
160. (x ∪ ~x) = U  Symmetry 159
161. proj2((x,y)) = (y ∩ U)  EqualitySub 125 160
162. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x)  TheoremInt
163. (x ∩ U) = x  AndElimR 162
164. ∀x.((x ∩ U) = x)  ForallInt 163
165. (y ∩ U) = y  ForallElim 164
166. proj2((x,y)) = y  EqualitySub 161 165
167. (proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y)  AndInt 12 166
168. (Set(x) & Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y))  ImpInt 167
169. ¬Set(x) v ¬Set(y)  Hyp
170. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> (((∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y)
= 0)))  AndElimR 3
171. ((∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0))  ImpElim 169 170
172. (∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)  AndElimL 171
173. ∩∩(x,y) = U  AndElimR 172
174. proj1((x,y)) = U  EqualitySub 11 173
175. (∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0)  AndElimR 171
176. ∩∪(x,y) = 0  AndElimR 175
177. ∪∪(x,y) = U  AndElimL 175
178. ∪∩(x,y) = 0  AndElimL 172
179. proj2((x,y)) = (∩∪(x,y) ∪ (U ~ ∪∩(x,y)))  EqualitySub 14 177
180. proj2((x,y)) = (∩∪(x,y) ∪ (U ~ 0))  EqualitySub 179 178
181. proj2((x,y)) = (0 ∪ (U ~ 0))  EqualitySub 180 176
182. ((0 ∪ x) = x) & ((0 ∩ x) = 0)  TheoremInt
183. (0 ∪ x) = x  AndElimL 182
184. ∀x.((0 ∪ x) = x)  ForallInt 183
185. (0 ∪ (U ~ 0)) = (U ~ 0)  ForallElim 184
186. proj2((x,y)) = (U ~ 0)  EqualitySub 181 185
187. ∀x.((x ~ y) = (x ∩ ~y))  ForallInt 23
188. (U ~ y) = (U ∩ ~y)  ForallElim 187
189. ∀y.((U ~ y) = (U ∩ ~y))  ForallInt 188
190. (U ~ 0) = (U ∩ ~0)  ForallElim 189
191. proj2((x,y)) = (U ∩ ~0)  EqualitySub 186 190
192. (~0 = U) & (~U = 0)  TheoremInt
193. ~0 = U  AndElimL 192
194. proj2((x,y)) = (U ∩ U)  EqualitySub 191 193
195. ((x ∪ x) = x) & ((x ∩ x) = x)  TheoremInt
196. (x ∩ x) = x  AndElimR 195
197. ∀x.((x ∩ x) = x)  ForallInt 196
198. (U ∩ U) = U  ForallElim 197
199. proj2((x,y)) = U  EqualitySub 194 198
200. (proj1((x,y)) = U) & (proj2((x,y)) = U)  AndInt 174 199
201. (¬Set(x) v ¬Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = U) & (proj2((x,y)) = U))  ImpInt 200
202. ((Set(x) & Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y))) & ((¬Set(x) v
¬Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = U) & (proj2((x,y)) = U)))  AndInt 168 201 Qed
```

Used Theorems

```
1. ((Set(x) & Set(y)) -> ((((∪(x,y) = {x,y}) & (∩(x,y) = {x})) & ((∪∩(x,y) = x) &
(∩∩(x,y) = x))) & ((∪∪(x,y) = (x ∪ y)) & (∩∪(x,y) = (x ∩ y))))) & ((¬Set(x) v ¬Set(y)) ->
(((∪∩(x,y) = 0) & (∩∩(x,y) = U)) & ((∪∪(x,y) = U) & (∩∪(x,y) = 0))))
2. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))
3. ((x ∪ y) = (y ∪ x)) & ((x ∩ y) = (y ∩ x))
4. ((x ∩ (y ∪ z)) = ((x ∩ y) ∪ (x ∩ z))) & ((x ∪ (y ∩ z)) = ((x ∪ y) ∩ (x ∪ z)))
0. A v ¬A
```

```
5. (0 ⊂ x) & (x ⊂ U)
6. (x = y) <-> ((x ⊂ y) & (y ⊂ x))
8. ((x ∪ U) = U) & ((x ∩ U) = x)
7. ((0 ∪ x) = x) & ((0 ∩ x) = 0)
9. (~0 = U) & (~U = 0)
10. ((x ∪ x) = x) & ((x ∩ x) = x)
```

Th55. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))

```
0. (Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))  Hyp
1. ((Set(x) & Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y))) & ((¬Set(x) v
¬Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = U) & (proj2((x,y)) = U)))  TheoremInt
2. (Set(x) & Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y))  AndElimL 1
3. Set(x) & Set(y)  AndElimL 0
4. (proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y)  ImpElim 3 2
5. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))  TheoremInt
6. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))  AndElimL 5
7. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  EquivExp 6
8. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))  AndElimL 7
9. Set((x,y))  ImpElim 3 8
10. (x,y) = (u,v)  AndElimR 0
11. Set((u,v))  EqualitySub 9 10
12. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  EquivExp 6
13. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))  AndElimR 12
14. ∀x.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 13
15. Set((u,y)) -> (Set(u) & Set(y))  ForallElim 14
16. ∀y.(Set((u,y)) -> (Set(u) & Set(y)))  ForallInt 15
17. Set((u,v)) -> (Set(u) & Set(v))  ForallElim 16
18. Set(u) & Set(v)  ImpElim 11 17
19. ∀x.((Set(x) & Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y)))  ForallInt 2
20. (Set(u) & Set(y)) -> ((proj1((u,y)) = u) & (proj2((u,y)) = y))  ForallElim 19
21. ∀y.((Set(u) & Set(y)) -> ((proj1((u,y)) = u) & (proj2((u,y)) = y)))  ForallInt 20
22. (Set(u) & Set(v)) -> ((proj1((u,v)) = u) & (proj2((u,v)) = v))  ForallElim 21
23. (proj1((u,v)) = u) & (proj2((u,v)) = v)  ImpElim 18 22
24. proj1((x,y)) = x  AndElimL 4
25. proj2((x,y)) = y  AndElimR 4
26. proj1((u,v)) = u  AndElimL 23
27. proj2((u,v)) = v  AndElimR 23
28. proj1((u,v)) = x  EqualitySub 24 10
29. u = x  EqualitySub 28 26
30. proj2((u,v)) = y  EqualitySub 25 10
31. v = y  EqualitySub 30 27
32. x = u  Symmetry 29
33. y = v  Symmetry 31
34. (x = u) & (y = v)  AndInt 32 33
35. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))  ImpInt 34 Qed
```

Used Theorems

```
1. ((Set(x) & Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = x) & (proj2((x,y)) = y))) & ((¬Set(x) v
¬Set(y)) -> ((proj1((x,y)) = U) & (proj2((x,y)) = U)))
2. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))
```

Th58. ((r∘s)∘t) = (r∘(s∘t))

```
0. z ε ((r∘s)∘t)  Hyp
1. (a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}  DefEqInt
2. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 1
3. ((r∘s)∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))}  ForallElim
2
4. ∀b.(((r∘s)∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))})
ForallInt 3
5. ((r∘s)∘t) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))}  ForallElim
4
6. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))}  EqualitySub 0 5
7. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_1.((((x,y) ε t) & ((y,x_1) ε (r∘s))) & (z = (x,x_1)))  ClassElim 6
8. ∃x.∃y.∃x_1.((((x,y) ε t) & ((y,x_1) ε (r∘s))) & (z = (x,x_1)))  AndElimR 7
9. ∃y.∃x_1.((((x,y) ε t) & ((y,x_1) ε (r∘s))) & (z = (x,x_1)))  Hyp
10. ∃x_1.((((x,y) ε t) & ((y,x_1) ε (r∘s))) & (z = (x,x_1)))  Hyp
11. (((x,y) ε t) & ((y,c) ε (r∘s))) & (z = (x,c))  Hyp
12. ((x,y) ε t) & ((y,c) ε (r∘s))  AndElimL 11
```

```
13. (y,c) ε (r∘s)  AndElimR 12
14. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 1
15. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 14
16. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 15
17. (r∘s) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 16
18. (y,c) ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  EqualitySub 13 17
19. Set((y,c)) & ∃x.∃x_2.∃z.((((x,x_2) ε s) & ((x_2,z) ε r)) & ((y,c) = (x,z)))
ClassElim 18
20. ∃x.∃x_2.∃z.((((x,x_2) ε s) & ((x_2,z) ε r)) & ((y,c) = (x,z)))  AndElimR 19
21. ∃x_2.∃z.((((a,x_2) ε s) & ((x_2,z) ε r)) & ((y,c) = (a,z)))  Hyp
22. ∃z.((((a,b) ε s) & ((b,z) ε r)) & ((y,c) = (a,z)))  Hyp
23. (((a,b) ε s) & ((b,d) ε r)) & ((y,c) = (a,d))  Hyp
24. ((a,b) ε s) & ((b,d) ε r)  AndElimL 23
25. (x,y) ε t  AndElimL 12
26. (a,b) ε s  AndElimL 24
27. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))  TheoremInt
28. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))  AndElimL 27
29. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  EquivExp 28
30. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))  AndElimR 29
31. ∀y.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 30
32. Set((x,c)) -> (Set(x) & Set(c))  ForallElim 31
33. ∀x.(Set((x,c)) -> (Set(x) & Set(c)))  ForallInt 32
34. Set((y,c)) -> (Set(y) & Set(c))  ForallElim 33
35. Set((y,c))  AndElimL 19
36. Set(y) & Set(c)  ImpElim 35 34
37. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))  TheoremInt
38. ∀y.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v)))  ForallInt 37
39. ((Set(x) & Set(c)) & ((x,c) = (u,v))) -> ((x = u) & (c = v))  ForallElim 38
40. ∀x.(((Set(x) & Set(c)) & ((x,c) = (u,v))) -> ((x = u) & (c = v)))  ForallInt 39
41. ((Set(y) & Set(c)) & ((y,c) = (u,v))) -> ((y = u) & (c = v))  ForallElim 40
42. ∀u.(((Set(y) & Set(c)) & ((y,c) = (u,v))) -> ((y = u) & (c = v)))  ForallInt 41
43. ((Set(y) & Set(c)) & ((y,c) = (a,v))) -> ((y = a) & (c = v))  ForallElim 42
44. ∀v.(((Set(y) & Set(c)) & ((y,c) = (a,v))) -> ((y = a) & (c = v)))  ForallInt 43
45. ((Set(y) & Set(c)) & ((y,c) = (a,d))) -> ((y = a) & (c = d))  ForallElim 44
46. (y,c) = (a,d)  AndElimR 23
47. (Set(y) & Set(c)) & ((y,c) = (a,d))  AndInt 36 46
48. (y = a) & (c = d)  ImpElim 47 45
49. y = a  AndElimL 48
50. c = d  AndElimR 48
51. (x,a) ε t  EqualitySub 25 49
52. ((x,a) ε t) & ((a,b) ε s)  AndInt 51 26
53. (b,d) ε r  AndElimR 24
54. g = (x,b)  Hyp
55. (((x,a) ε t) & ((a,b) ε s)) & (g = (x,b))  AndInt 52 54
56. ∃b.((((x,a) ε t) & ((a,b) ε s)) & (g = (x,b)))  ExistsInt 55
57. ∃a.∃b.((((x,a) ε t) & ((a,b) ε s)) & (g = (x,b)))  ExistsInt 56
58. ∃x.∃a.∃b.((((x,a) ε t) & ((a,b) ε s)) & (g = (x,b)))  ExistsInt 57
59. ∃r.((b,d) ε r)  ExistsInt 53
60. Set((b,d))  DefSub 59
61. ∀x.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 30
62. Set((b,y)) -> (Set(b) & Set(y))  ForallElim 61
63. ∀y.(Set((b,y)) -> (Set(b) & Set(y)))  ForallInt 62
64. Set((b,d)) -> (Set(b) & Set(d))  ForallElim 63
65. Set(b) & Set(d)  ImpElim 60 64
66. Set(b)  AndElimL 65
67. ∃t.((x,a) ε t)  ExistsInt 51
68. Set((x,a))  DefSub 67
69. ∀y.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 30
70. Set((x,a)) -> (Set(x) & Set(a))  ForallElim 69
71. Set(x) & Set(a)  ImpElim 68 70
72. Set(x)  AndElimL 71
73. Set(x) & Set(b)  AndInt 72 66
74. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  EquivExp 28
75. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))  AndElimL 74
76. ∀y.((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y)))  ForallInt 75
77. (Set(x) & Set(b)) -> Set((x,b))  ForallElim 76
78. Set((x,b))  ImpElim 73 77
79. (x,b) = g  Symmetry 54
80. Set(g)  EqualitySub 78 79
81. Set(g) & ∃x.∃a.∃b.((((x,a) ε t) & ((a,b) ε s)) & (g = (x,b)))  AndInt 80 58
82. g ε {w: ∃x.∃a.∃b.((((x,a) ε t) & ((a,b) ε s)) & (w = (x,b)))}  ClassInt 81
```

83. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
84. (s∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε s)) & (w = (x,z)))} ForallElim 83
85. ∀b.((s∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε s)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 84
86. (s∘t) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε s)) & (w = (x,z)))} ForallElim 85
87. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε s)) & (w = (x,z)))} = (s∘t) Symmetry 86
88. g ε (s∘t) EqualitySub 82 87
89. (x,b) ε (s∘t) EqualitySub 88 54
90. (g = (x,b)) -> ((x,b) ε (s∘t)) ImpInt 89
91. ∀g.((g = (x,b)) -> ((x,b) ε (s∘t))) ForallInt 90
92. ((x,b) = (x,b)) -> ((x,b) ε (s∘t)) ForallElim 91
93. (x,b) = (x,b) Identity
94. (x,b) ε (s∘t) ImpElim 93 92
95. ((b,d) ε r) & ((x,b) ε (s∘t)) AndInt 53 94
96. d = c Symmetry 50
97. z = (x,c) AndElimR 11
98. ((x,b) ε (s∘t)) & ((b,d) ε r) AndInt 94 53
99. (((x,b) ε (s∘t)) & ((b,d) ε r)) & (z = (x,c)) AndInt 98 97
100. (((x,b) ε (s∘t)) & ((b,c) ε r)) & (z = (x,c)) EqualitySub 99 96
101. ∃c.((((x,b) ε (s∘t)) & ((b,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 100
102. ∃b.∃c.((((x,b) ε (s∘t)) & ((b,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 101
103. ∃x.∃b.∃c.((((x,b) ε (s∘t)) & ((b,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 102
104. Set(z) AndElimL 7
105. Set(z) & ∃x.∃b.∃c.((((x,b) ε (s∘t)) & ((b,c) ε r)) & (z = (x,c))) AndInt 104 103
106. z ε {w: ∃x.∃b.∃c.((((x,b) ε (s∘t)) & ((b,c) ε r)) & (w = (x,c)))} ClassInt 105
107. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
108. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 107
109. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 108
110. (r∘(s∘t)) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 109
111. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} = (r∘(s∘t)) Symmetry 110
112. z ε (r∘(s∘t)) EqualitySub 106 111
113. z ε (r∘(s∘t)) ExistsElim 22 23 112
114. z ε (r∘(s∘t)) ExistsElim 21 22 113
115. z ε (r∘(s∘t)) ExistsElim 20 21 114
116. z ε (r∘(s∘t)) ExistsElim 10 11 115
117. z ε (r∘(s∘t)) ExistsElim 9 10 116
118. z ε (r∘(s∘t)) ExistsElim 8 9 117
119. (z ε ((r∘s)∘t)) -> (z ε (r∘(s∘t))) ImpInt 118
120. z ε (r∘(s∘t)) Hyp
121. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
122. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 121
123. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 122
124. (r∘(s∘t)) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 123
125. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} EqualitySub 120 124
126. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_4.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4))) ClassElim 125
127. ∃x.∃y.∃x_4.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4))) AndElimR 126
128. ∃y.∃x_4.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4))) Hyp
129. ∃x_4.((((x,y) ε (s∘t)) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4))) Hyp
130. (((x,y) ε (s∘t)) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c)) Hyp
131. z = (x,c) AndElimR 130
132. ((x,y) ε (s∘t)) & ((y,c) ε r) AndElimL 130
133. (x,y) ε (s∘t) AndElimL 132
134. (y,c) ε r AndElimR 132
135. (x,y) ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε s)) & (w = (x,z)))} EqualitySub 133 86
136. Set((x,y)) & ∃x_6.∃x_7.∃z.((((x_6,x_7) ε t) & ((x_7,z) ε s)) & ((x,y) = (x_6,z))) ClassElim 135
137. Set((x,y)) AndElimL 136
138. ∃x_6.∃x_7.∃z.((((x_6,x_7) ε t) & ((x_7,z) ε s)) & ((x,y) = (x_6,z))) AndElimR 136
139. ∃x_7.∃z.((((a,x_7) ε t) & ((x_7,z) ε s)) & ((x,y) = (a,z))) Hyp
140. ∃z.((((a,b) ε t) & ((b,z) ε s)) & ((x,y) = (a,z))) Hyp
141. (((a,b) ε t) & ((b,d) ε s)) & ((x,y) = (a,d)) Hyp
142. (x,y) = (a,d) AndElimR 141
143. Set((a,d)) EqualitySub 137 142
144. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)) AndElimR 74

145. ∀x.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) ForallInt 144
146. Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y)) ForallElim 145
147. ∀y.(Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y))) ForallInt 146
148. Set((a,d)) -> (Set(a) & Set(d)) ForallElim 147
149. Set(a) & Set(d) ImpElim 143 148
150. Set(a) AndElimL 149
151. Set(d) AndElimR 149
152. ((a,b) ε t) & ((b,d) ε s) AndElimL 141
153. (b,d) ε s AndElimR 152
154. ((b,d) ε s) & ((y,c) ε r) AndInt 153 134
155. Set(x) & Set(y) ImpElim 137 144
156. (Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (a,d)) AndInt 155 142
157. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v)) TheoremInt
158. ∀u.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))) ForallInt 157
159. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (a,v))) -> ((x = a) & (y = v)) ForallElim 158
160. ∀v.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (a,v))) -> ((x = a) & (y = v))) ForallInt 159
161. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (a,d))) -> ((x = a) & (y = d)) ForallElim 160
162. (x = a) & (y = d) ImpElim 156 161
163. y = d AndElimR 162
164. d = y Symmetry 163
165. ((b,y) ε s) & ((y,c) ε r) EqualitySub 154 164
166. h = (b,c) Hyp
167. ∃w.((b,d) ε w) ExistsInt 153
168. ∃w.((y,c) ε w) ExistsInt 134
169. Set((b,d)) DefSub 167
170. Set((y,c)) DefSub 168
171. ∀x.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) ForallInt 144
172. Set((b,y)) -> (Set(b) & Set(y)) ForallElim 171
173. ∀y.(Set((b,y)) -> (Set(b) & Set(y))) ForallInt 172
174. Set((b,d)) -> (Set(b) & Set(d)) ForallElim 173
175. ∀y.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) ForallInt 144
176. Set((x,c)) -> (Set(x) & Set(c)) ForallElim 175
177. ∀x.(Set((x,c)) -> (Set(x) & Set(c))) ForallInt 176
178. Set((y,c)) -> (Set(y) & Set(c)) ForallElim 177
179. Set(b) & Set(d) ImpElim 169 174
180. Set(y) & Set(c) ImpElim 170 178
181. Set(b) AndElimL 179
182. Set(c) AndElimR 180
183. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y)) AndElimL 74
184. ∀x.((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) ForallInt 183
185. (Set(b) & Set(y)) -> Set((b,y)) ForallElim 184
186. ∀y.((Set(b) & Set(y)) -> Set((b,y))) ForallInt 185
187. (Set(b) & Set(c)) -> Set((b,c)) ForallElim 186
188. Set(b) & Set(c) AndInt 181 182
189. Set((b,c)) ImpElim 188 187
190. (b,c) = h Symmetry 166
191. Set(h) EqualitySub 189 190
192. (((b,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (h = (b,c)) AndInt 165 166
193. ∃c.((((b,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (h = (b,c))) ExistsInt 192
194. ∃y.∃c.((((b,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (h = (b,c))) ExistsInt 193
195. ∃b.∃y.∃c.((((b,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (h = (b,c))) ExistsInt 194
196. Set(h) & ∃b.∃y.∃c.((((b,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (h = (b,c))) AndInt 191 195
197. h ε {w: ∃b.∃y.∃c.((((b,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (w = (b,c)))} ClassInt 196
198. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
199. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 198
200. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 199
201. (r∘s) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 200
202. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} = (r∘s) Symmetry 201
203. h ε (r∘s) EqualitySub 197 202
204. (b,c) ε (r∘s) EqualitySub 203 166
205. (h = (b,c)) -> ((b,c) ε (r∘s)) ImpInt 204
206. ∀h.((h = (b,c)) -> ((b,c) ε (r∘s))) ForallInt 205
207. ((b,c) = (b,c)) -> ((b,c) ε (r∘s)) ForallElim 206
208. (b,c) = (b,c) Identity
209. (b,c) ε (r∘s) ImpElim 208 207
210. (a,b) ε t AndElimL 152
211. x = a AndElimL 162
212. a = x Symmetry 211
213. (x,b) ε t EqualitySub 210 212
214. ((x,b) ε t) & ((b,c) ε (r∘s)) AndInt 213 209

215. (((x,b) ε t) & ((b,c) ε (r∘s))) & (z = (x,c)) AndInt 214 131
216. ∃c.((((x,b) ε t) & ((b,c) ε (r∘s))) & (z = (x,c))) ExistsInt 215
217. ∃b.∃c.((((x,b) ε t) & ((b,c) ε (r∘s))) & (z = (x,c))) ExistsInt 216
218. ∃x.∃b.∃c.((((x,b) ε t) & ((b,c) ε (r∘s))) & (z = (x,c))) ExistsInt 217
219. Set(z) AndElimL 126
220. Set(z) & ∃x.∃b.∃c.((((x,b) ε t) & ((b,c) ε (r∘s))) & (z = (x,c))) AndInt 219 218
221. z ε {w: ∃x.∃b.∃c.((((x,b) ε t) & ((b,c) ε (r∘s))) & (w = (x,c)))} ClassInt 220
222. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
223. ((r∘s)∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))} ForallElim 222
224. ∀b.(((r∘s)∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))}) ForallInt 223
225. ((r∘s)∘t) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))} ForallElim 224
226. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε (r∘s))) & (w = (x,z)))} = ((r∘s)∘t) Symmetry 225
227. z ε ((r∘s)∘t) EqualitySub 221 226
228. z ε ((r∘s)∘t) ExistsElim 140 141 227
229. z ε ((r∘s)∘t) ExistsElim 139 140 228
230. z ε ((r∘s)∘t) ExistsElim 138 139 229
231. z ε ((r∘s)∘t) ExistsElim 129 130 230
232. z ε ((r∘s)∘t) ExistsElim 128 129 231
233. z ε ((r∘s)∘t) ExistsElim 127 128 232
234. (z ε (r∘(s∘t))) -> (z ε ((r∘s)∘t)) ImpInt 233
235. ((z ε ((r∘s)∘t)) -> (z ε (r∘(s∘t)))) & ((z ε (r∘(s∘t))) -> (z ε ((r∘s)∘t))) AndInt 119 234
236. (z ε ((r∘s)∘t)) <-> (z ε (r∘(s∘t))) EquivConst 235
237. ∀z.((z ε ((r∘s)∘t)) <-> (z ε (r∘(s∘t)))) ForallInt 236
238. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
239. ∀y.((((r∘s)∘t) = y) <-> ∀z.((z ε ((r∘s)∘t)) <-> (z ε y))) ForallElim 238
240. (((r∘s)∘t) = (r∘(s∘t))) <-> ∀z.((z ε ((r∘s)∘t)) <-> (z ε (r∘(s∘t)))) ForallElim 239
241. ((((r∘s)∘t) = (r∘(s∘t))) -> ∀z.((z ε ((r∘s)∘t)) <-> (z ε (r∘(s∘t))))) & (∀z.((z ε ((r∘s)∘t)) <-> (z ε (r∘(s∘t)))) -> (((r∘s)∘t) = (r∘(s∘t)))) EquivExp 240
242. ∀z.((z ε ((r∘s)∘t)) <-> (z ε (r∘(s∘t)))) -> (((r∘s)∘t) = (r∘(s∘t))) AndElimR 241
243. ((r∘s)∘t) = (r∘(s∘t)) ImpElim 237 242 Qed

Used Theorems

2. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))
1. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))
1. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))

Th59. ((r∘(s ∪ t)) = ((r∘s) ∪ (r∘t))) & ((r∘(s ∩ t)) ⊂ ((r∘s) ∩ (r∘t)))

0. z ε (r∘(s ∪ t)) Hyp
1. (a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))} DefEqInt
2. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
3. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 2
4. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 3
5. (r∘(s ∪ t)) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 4
6. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} EqualitySub 0 5
7. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_1.((((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,x_1) ε r)) & (z = (x,x_1))) ClassElim 6
8. ∃x.∃y.∃x_1.((((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,x_1) ε r)) & (z = (x,x_1))) AndElimR 7
9. ∃y.∃x_1.((((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,x_1) ε r)) & (z = (x,x_1))) Hyp
10. ∃x_1.((((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,x_1) ε r)) & (z = (x,x_1))) Hyp
11. (((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c)) Hyp
12. ((x,y) ε (s ∪ t)) & ((y,c) ε r) AndElimL 11
13. (x,y) ε (s ∪ t) AndElimL 12
14. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) TheoremInt
15. (z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 14
16. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))) EquivExp 15
17. (z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y)) AndElimL 16
18. ∀x.((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) ForallInt 17
19. (z ε (s ∪ y)) -> ((z ε s) v (z ε y)) ForallElim 18
20. ∀y.((z ε (s ∪ y)) -> ((z ε s) v (z ε y))) ForallInt 19
21. (z ε (s ∪ t)) -> ((z ε s) v (z ε t)) ForallElim 20
22. ∀z.((z ε (s ∪ t)) -> ((z ε s) v (z ε t))) ForallInt 21
23. ((x,y) ε (s ∪ t)) -> (((x,y) ε s) v ((x,y) ε t)) ForallElim 22

24. ((x,y) ε s) v ((x,y) ε t) ImpElim 13 23
25. (x,y) ε s Hyp
26. (y,c) ε r AndElimR 12
27. ((x,y) ε s) & ((y,c) ε r) AndInt 25 26
28. z = (x,c) AndElimR 11
29. (((x,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c)) AndInt 27 28
30. ∃c.((((x,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 29
31. ∃y.∃c.((((x,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 30
32. ∃x.∃y.∃c.((((x,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 31
33. Set(z) AndElimL 7
34. Set(z) & ∃x.∃y.∃c.((((x,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) AndInt 33 32
35. z ε {w: ∃x.∃y.∃c.((((x,y) ε s) & ((y,c) ε r)) & (w = (x,c)))} ClassInt 34
36. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
37. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 36
38. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 37
39. (r∘s) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 38
40. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} = (r∘s) Symmetry 39
41. z ε (r∘s) EqualitySub 35 40
42. (z ε (r∘s)) v (z ε (r∘t)) OrIntR 41
43. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)) AndElimR 16
44. ∀x.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))) ForallInt 43
45. ((z ε (r∘s)) v (z ε y)) -> (z ε ((r∘s) ∪ y)) ForallElim 44
46. ∀y.(((z ε (r∘s)) v (z ε y)) -> (z ε ((r∘s) ∪ y))) ForallInt 45
47. ((z ε (r∘s)) v (z ε (r∘t))) -> (z ε ((r∘s) ∪ (r∘t))) ForallElim 46
48. z ε ((r∘s) ∪ (r∘t)) ImpElim 42 47
49. (x,y) ε t Hyp
50. ((x,y) ε t) & ((y,c) ε r) AndInt 49 26
51. (((x,y) ε t) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c)) AndInt 50 28
52. ∃c.((((x,y) ε t) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 51
53. ∃y.∃c.((((x,y) ε t) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 52
54. ∃x.∃y.∃c.((((x,y) ε t) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) ExistsInt 53
55. Set(z) & ∃x.∃y.∃c.((((x,y) ε t) & ((y,c) ε r)) & (z = (x,c))) AndInt 33 54
56. z ε {w: ∃x.∃y.∃c.((((x,y) ε t) & ((y,c) ε r)) & (w = (x,c)))} ClassInt 55
57. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
58. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 57
59. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 58
60. (r∘t) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 59
61. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} = (r∘t) Symmetry 60
62. z ε (r∘t) EqualitySub 56 61
63. (z ε (r∘s)) v (z ε (r∘t)) OrIntL 62
64. z ε ((r∘s) ∪ (r∘t)) ImpElim 63 47
65. z ε ((r∘s) ∪ (r∘t)) OrElim 24 25 48 49 64
66. z ε ((r∘s) ∪ (r∘t)) ExistsElim 10 11 65
67. z ε ((r∘s) ∪ (r∘t)) ExistsElim 9 10 66
68. z ε ((r∘s) ∪ (r∘t)) ExistsElim 8 9 67
69. (z ε (r∘(s ∪ t))) -> (z ε ((r∘s) ∪ (r∘t))) ImpInt 68
70. z ε ((r∘s) ∪ (r∘t)) Hyp
71. ∀x.((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) ForallInt 17
72. (z ε ((r∘s) ∪ y)) -> ((z ε (r∘s)) v (z ε y)) ForallElim 71
73. ∀y.((z ε ((r∘s) ∪ y)) -> ((z ε (r∘s)) v (z ε y))) ForallInt 72
74. (z ε ((r∘s) ∪ (r∘t))) -> ((z ε (r∘s)) v (z ε (r∘t))) ForallElim 73
75. (z ε (r∘s)) v (z ε (r∘t)) ImpElim 70 74
76. z ε (r∘s) Hyp
77. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 1
78. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 77
79. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 78
80. (r∘s) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} ForallElim 79
81. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} EqualitySub 76 80
82. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_2.((((x,y) ε s) & ((y,x_2) ε r)) & (z = (x,x_2))) ClassElim 81
83. ∃x.∃y.∃x_2.((((x,y) ε s) & ((y,x_2) ε r)) & (z = (x,x_2))) AndElimR 82
84. ∃y.∃x_2.((((x,y) ε s) & ((y,x_2) ε r)) & (z = (x,x_2))) Hyp
85. ∃x_2.((((x,y) ε s) & ((y,x_2) ε r)) & (z = (x,x_2))) Hyp
86. (((x,y) ε s) & ((y,m) ε r)) & (z = (x,m)) Hyp
87. ((x,y) ε s) & ((y,m) ε r) AndElimL 86
88. (x,y) ε s AndElimL 87
89. ((x,y) ε s) v ((x,y) ε t) OrIntR 88
90. (y,m) ε r AndElimR 87
91. ((z ε (x ∪ y)) -> ((z ε x) v (z ε y))) & (((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)))
EquivExp 15
92. ((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y)) AndElimR 91
93. ∀x.(((z ε x) v (z ε y)) -> (z ε (x ∪ y))) ForallInt 92

```
94. ((z ε s) v (z ε y)) -> (z ε (s U y))  ForallElim 93
95. ∀y.(((z ε s) v (z ε y)) -> (z ε (s U y)))  ForallInt 94
96. ((z ε s) v (z ε t)) -> (z ε (s U t))  ForallElim 95
97. ∀z.(((z ε s) v (z ε t)) -> (z ε (s U t)))  ForallInt 96
98. (((x,y) ε s) v ((x,y) ε t)) -> ((x,y) ε (s U t))  ForallElim 97
99. (x,y) ε (s U t)  ImpElim 89 98
100. ((x,y) ε (s U t)) & ((y,m) ε r)  AndInt 99 90
101. z = (x,m)  AndElimR 86
102. (((x,y) ε (s U t)) & ((y,m) ε r)) & (z = (x,m))  AndInt 100 101
103. ∃m.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,m) ε r)) & (z = (x,m)))  ExistsInt 102
104. ∃y.∃m.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,m) ε r)) & (z = (x,m)))  ExistsInt 103
105. ∃x.∃y.∃m.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,m) ε r)) & (z = (x,m)))  ExistsInt 104
106. Set(z)  AndElimL 82
107. Set(z) & ∃x.∃y.∃m.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,m) ε r)) & (z = (x,m)))  AndInt 106 105
108. z ε {w: ∃x.∃y.∃m.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,m) ε r)) & (w = (x,m)))}  ClassInt 107
109. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} = (r∘(s U t))
Symmetry 5
110. z ε (r∘(s U t))  EqualitySub 108 109
111. z ε (r∘(s U t))  ExistsElim 85 86 110
112. z ε (r∘(s U t))  ExistsElim 84 85 111
113. z ε (r∘(s U t))  ExistsElim 83 84 112
114. z ε (r∘t)  Hyp
115. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 78
116. (r∘t) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 115
117. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε t) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  EqualitySub 114 116
118. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_4.((((x,y) ε t) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4)))  ClassElim 117
119. ∃x.∃y.∃x_4.((((x,y) ε t) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4)))  AndElimR 118
120. ∃y.∃x_4.((((x,y) ε t) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4)))  Hyp
121. ∃x_4.((((x,y) ε t) & ((y,x_4) ε r)) & (z = (x,x_4)))  Hyp
122. (((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))  Hyp
123. ((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)  AndElimL 122
124. (x,y) ε t  AndElimL 123
125. ((x,y) ε s) v ((x,y) ε t)  OrIntL 124
126. (x,y) ε (s U t)  ImpElim 125 98
127. (y,e) ε r  AndElimR 123
128. ((x,y) ε (s U t)) & ((y,e) ε r)  AndInt 126 127
129. z = (x,e)  AndElimR 122
130. (((x,y) ε (s U t)) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))  AndInt 128 129
131. ∃e.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e)))  ExistsInt 130
132. ∃y.∃e.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e)))  ExistsInt 131
133. ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e)))  ExistsInt 132
134. Set(z)  AndElimL 118
135. Set(z) & ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e)))  AndInt 134 133
136. z ε {w: ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε (s U t)) & ((y,e) ε r)) & (w = (x,e)))}  ClassInt 135
137. z ε (r∘(s U t))  EqualitySub 136 109
138. z ε (r∘(s U t))  ExistsElim 121 122 137
139. z ε (r∘(s U t))  ExistsElim 120 121 138
140. z ε (r∘(s U t))  ExistsElim 119 120 139
141. z ε (r∘(s U t))  OrElim 75 76 113 114 140
142. (z ε ((r∘s) U (r∘t))) -> (z ε (r∘(s U t)))  ImpInt 141
143. ((z ε (r∘(s U t))) -> (z ε ((r∘s) U (r∘t)))) & ((z ε ((r∘s) U (r∘t))) -> (z ε (r∘(s
U t))))  AndInt 69 142
144. (z ε (r∘(s U t))) <-> (z ε ((r∘s) U (r∘t)))  EquivConst 143
145. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
146. ∀y.(((r∘(s U t)) = y) <-> ∀z.((z ε (r∘(s U t))) <-> (z ε y)))  ForallElim 145
147. ((r∘(s U t)) = ((r∘s) U (r∘t))) <-> ∀z.((z ε (r∘(s U t))) <-> (z ε ((r∘s) U (r∘t))))
ForallElim 146
148. (((r∘(s U t)) = ((r∘s) U (r∘t))) -> ∀z.((z ε (r∘(s U t))) <-> (z ε ((r∘s) U
(r∘t))))) & (∀z.((z ε (r∘(s U t))) <-> (z ε ((r∘s) U (r∘t)))) -> ((r∘(s U t)) = ((r∘s) U
(r∘t))))  EquivExp 147
149. ∀z.((z ε (r∘(s U t))) <-> (z ε ((r∘s) U (r∘t)))) -> ((r∘(s U t)) = ((r∘s) U (r∘t)))
AndElimR 148
150. ∀z.((z ε (r∘(s U t))) <-> (z ε ((r∘s) U (r∘t))))  ForallInt 144
151. (r∘(s U t)) = ((r∘s) U (r∘t))  ImpElim 150 149
152. z ε (r∘(s ∩ t))  Hyp
153. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 1
154. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 153
155. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))})  ForallInt
154
156. (r∘(s ∩ t)) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}
ForallElim 155
```

157. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} EqualitySub 152 156
158. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_5.((((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,x_5) ε r)) & (z = (x,x_5))) ClassElim 157
159. ∃x.∃y.∃x_5.((((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,x_5) ε r)) & (z = (x,x_5))) AndElimR 158
160. ∃y.∃x_5.((((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,x_5) ε r)) & (z = (x,x_5))) Hyp
161. ∃x_5.((((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,x_5) ε r)) & (z = (x,x_5))) Hyp
162. (((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e)) Hyp
163. ((x,y) ε (s ∩ t)) & ((y,e) ε r) AndElimL 162
164. (x,y) ε (s ∩ t) AndElimL 163
165. (z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)) AndElimR 14
166. ∀x.((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y))) ForallInt 165
167. (z ε (s ∩ y)) <-> ((z ε s) & (z ε y)) ForallElim 166
168. ∀y.((z ε (s ∩ y)) <-> ((z ε s) & (z ε y))) ForallInt 167
169. (z ε (s ∩ t)) <-> ((z ε s) & (z ε t)) ForallElim 168
170. ∀z.((z ε (s ∩ t)) <-> ((z ε s) & (z ε t))) ForallInt 169
171. ((x,y) ε (s ∩ t)) <-> (((x,y) ε s) & ((x,y) ε t)) ForallElim 170
172. (((x,y) ε (s ∩ t)) -> (((x,y) ε s) & ((x,y) ε t))) & ((((x,y) ε s) & ((x,y) ε t)) -> ((x,y) ε (s ∩ t))) EquivExp 171
173. ((x,y) ε (s ∩ t)) -> (((x,y) ε s) & ((x,y) ε t)) AndElimL 172
174. ((x,y) ε s) & ((x,y) ε t) ImpElim 164 173
175. (x,y) ε s AndElimL 174
176. (y,e) ε r AndElimR 163
177. ((x,y) ε s) & ((y,e) ε r) AndInt 175 176
178. z = (x,e) AndElimR 162
179. (((x,y) ε s) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e)) AndInt 177 178
180. ∃e.((((x,y) ε s) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) ExistsInt 179
181. ∃y.∃e.((((x,y) ε s) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) ExistsInt 180
182. ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε s) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) ExistsInt 181
183. Set(z) AndElimL 158
184. Set(z) & ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε s) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) AndInt 183 182
185. z ε {w: ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε s) & ((y,e) ε r)) & (w = (x,e)))} ClassInt 184
186. z ε (r∘s) EqualitySub 185 40
187. (x,y) ε t AndElimR 174
188. ((x,y) ε t) & ((y,e) ε r) AndInt 187 176
189. (((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e)) AndInt 188 178
190. ∃e.((((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) ExistsInt 189
191. ∃y.∃e.((((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) ExistsInt 190
192. ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) ExistsInt 191
193. Set(z) & ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)) & (z = (x,e))) AndInt 183 192
194. z ε {w: ∃x.∃y.∃e.((((x,y) ε t) & ((y,e) ε r)) & (w = (x,e)))} ClassInt 193
195. z ε (r∘t) EqualitySub 194 61
196. (z ε (r∘s)) & (z ε (r∘t)) AndInt 186 195
197. ((z ε (x ∩ y)) -> ((z ε x) & (z ε y))) & (((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) EquivExp 165
198. ((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y)) AndElimR 197
199. ∀x.(((z ε x) & (z ε y)) -> (z ε (x ∩ y))) ForallInt 198
200. ((z ε (r∘s)) & (z ε y)) -> (z ε ((r∘s) ∩ y)) ForallElim 199
201. ∀y.(((z ε (r∘s)) & (z ε y)) -> (z ε ((r∘s) ∩ y))) ForallInt 200
202. ((z ε (r∘s)) & (z ε (r∘t))) -> (z ε ((r∘s) ∩ (r∘t))) ForallElim 201
203. z ε ((r∘s) ∩ (r∘t)) ImpElim 196 202
204. z ε ((r∘s) ∩ (r∘t)) ExistsElim 161 162 203
205. z ε ((r∘s) ∩ (r∘t)) ExistsElim 160 161 204
206. z ε ((r∘s) ∩ (r∘t)) ExistsElim 159 160 205
207. (z ε (r∘(s ∩ t))) -> (z ε ((r∘s) ∩ (r∘t))) ImpInt 206
208. ∀z.((z ε (r∘(s ∩ t))) -> (z ε ((r∘s) ∩ (r∘t)))) ForallInt 207
209. (r∘(s ∩ t)) ⊂ ((r∘s) ∩ (r∘t)) DefSub 208
210. ((r∘(s ∪ t)) = ((r∘s) ∪ (r∘t))) & ((r∘(s ∩ t)) ⊂ ((r∘s) ∩ (r∘t))) AndInt 151 209
Qed

Used Theorems

1. ((z ε (x ∪ y)) <-> ((z ε x) v (z ε y))) & ((z ε (x ∩ y)) <-> ((z ε x) & (z ε y)))

Th61. Relation(r) -> (((r)$^{-1}$)$^{-1}$ = r)

0. z ε ((r)$^{-1}$)$^{-1}$ Hyp
1. (r)$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))} DefEqInt
2. ∀r.((r)$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))}) ForallInt 1
3. ((r)$^{-1}$)$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r)$^{-1}$) & (z = (y,x)))} ForallElim 2
4. z ε {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r)$^{-1}$) & (z = (y,x)))} EqualitySub 0 3

5. Set(z) & ∃x.∃y.(((x,y) ε (r)$^{-1}$) & (z = (y,x))) ClassElim 4
6. ∃x.∃y.(((x,y) ε (r)$^{-1}$) & (z = (y,x))) AndElimR 5
7. ∃y.(((x,y) ε (r)$^{-1}$) & (z = (y,x))) Hyp
8. ((x,y) ε (r)$^{-1}$) & (z = (y,x)) Hyp
9. (x,y) ε (r)$^{-1}$ AndElimL 8
10. (x,y) ε {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))} EqualitySub 9 1
11. Set((x,y)) & ∃x_0.∃x_2.(((x_0,x_2) ε r) & ((x,y) = (x_2,x_0))) ClassElim 10
12. ∃x_0.∃x_2.(((x_0,x_2) ε r) & ((x,y) = (x_2,x_0))) AndElimR 11
13. ∃x_2.(((c,x_2) ε r) & ((x,y) = (x_2,c))) Hyp
14. ((c,d) ε r) & ((x,y) = (d,c)) Hyp
15. z = (y,x) AndElimR 8
16. Set(z) AndElimL 5
17. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v)) TheoremInt
18. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U)) TheoremInt
19. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y)) AndElimL 18
20. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) EquivExp 19
21. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)) AndElimR 20
22. Set((y,x)) EqualitySub 16 15
23. ∀x.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) ForallInt 21
24. Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y)) ForallElim 23
25. ∀y.(Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y))) ForallInt 24
26. Set((a,x)) -> (Set(a) & Set(x)) ForallElim 25
27. ∀a.(Set((a,x)) -> (Set(a) & Set(x))) ForallInt 26
28. Set((y,x)) -> (Set(y) & Set(x)) ForallElim 27
29. Set(y) & Set(x) ImpElim 22 28
30. Set(y) AndElimL 29
31. Set(x) AndElimR 29
32. Set(x) & Set(y) AndInt 31 30
33. ∀u.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))) ForallInt 17
34. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (d,v))) -> ((x = d) & (y = v)) ForallElim 33
35. ∀v.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (d,v))) -> ((x = d) & (y = v))) ForallInt 34
36. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (d,c))) -> ((x = d) & (y = c)) ForallElim 35
37. (x,y) = (d,c) AndElimR 14
38. (Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (d,c)) AndInt 32 37
39. (x = d) & (y = c) ImpElim 38 36
40. x = d AndElimL 39
41. y = c AndElimR 39
42. (c,d) ε r AndElimL 14
43. d = x Symmetry 40
44. c = y Symmetry 41
45. (c,x) ε r EqualitySub 42 43
46. (y,x) ε r EqualitySub 45 44
47. (y,x) ε r ExistsElim 13 14 46
48. (y,x) ε r ExistsElim 12 13 47
49. (y,x) = z Symmetry 15
50. z ε r EqualitySub 48 49
51. z ε r ExistsElim 7 8 50
52. z ε r ExistsElim 6 7 51
53. (z ε ((r)$^{-1}$)$^{-1}$) -> (z ε r) ImpInt 52
54. Relation(r) Hyp
55. z ε r Hyp
56. ∀z.((z ε r) -> ∃x.∃y.(z = (x,y))) DefExp 54
57. (z ε r) -> ∃x.∃y.(z = (x,y)) ForallElim 56
58. ∃x.∃y.(z = (x,y)) ImpElim 55 57
59. ∃y.(z = (x,y)) Hyp
60. z = (x,y) Hyp
61. f = (y,x) Hyp
62. (x,y) ε r EqualitySub 55 60
63. ((x,y) ε r) & (f = (y,x)) AndInt 62 61
64. Set((y,x)) EqualitySub 16 15
65. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U)) TheoremInt
66. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y)) AndElimL 65
67. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) EquivExp 66
68. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)) AndElimR 67
69. ∃w.(z ε w) ExistsInt 55
70. Set(z) DefSub 69
71. Set((x,y)) EqualitySub 70 60
72. Set(x) & Set(y) ImpElim 71 68
73. Set(x) AndElimL 72
74. Set(y) AndElimR 72
75. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))) EquivExp 66

```
76. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))  AndElimL 75
77. ∀x.((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y)))  ForallInt 76
78. (Set(a) & Set(y)) -> Set((a,y))  ForallElim 77
79. ∀y.((Set(a) & Set(y)) -> Set((a,y)))  ForallInt 78
80. (Set(a) & Set(x)) -> Set((a,x))  ForallElim 79
81. ∀a.((Set(a) & Set(x)) -> Set((a,x)))  ForallInt 80
82. (Set(y) & Set(x)) -> Set((y,x))  ForallElim 81
83. Set(y) & Set(x)  AndInt 74 73
84. Set((y,x))  ImpElim 83 82
85. (y,x) = f  Symmetry 61
86. Set(f)  EqualitySub 84 85
87. ∃y.(((x,y) ε r) & (f = (y,x)))  ExistsInt 63
88. ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (f = (y,x)))  ExistsInt 87
89. Set(f) & ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (f = (y,x)))  AndInt 86 88
90. f ε {w: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (w = (y,x)))}  ClassInt 89
91. {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))} = (r)⁻¹  Symmetry 1
92. f ε (r)⁻¹  EqualitySub 90 91
93. (y,x) ε (r)⁻¹  EqualitySub 92 61
94. (f = (y,x)) -> ((y,x) ε (r)⁻¹)  ImpInt 93
95. ∀f.((f = (y,x)) -> ((y,x) ε (r)⁻¹))  ForallInt 94
96. ((y,x) = (y,x)) -> ((y,x) ε (r)⁻¹)  ForallElim 95
97. (y,x) = (y,x)  Identity
98. (y,x) ε (r)⁻¹  ImpElim 97 96
99. ((y,x) ε (r)⁻¹) & (z = (x,y))  AndInt 98 60
100. ∃x.(((y,x) ε (r)⁻¹) & (z = (x,y)))  ExistsInt 99
101. ∃y.∃x.(((y,x) ε (r)⁻¹) & (z = (x,y)))  ExistsInt 100
102. Set(z) & ∃y.∃x.(((y,x) ε (r)⁻¹) & (z = (x,y)))  AndInt 70 101
103. z ε {w: ∃y.∃x.(((y,x) ε (r)⁻¹) & (w = (x,y)))}  ClassInt 102
104. ∀r.((r)⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))})  ForallInt 1
105. ((r)⁻¹)⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r)⁻¹) & (z = (y,x)))}  ForallElim 104
106. {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r)⁻¹) & (z = (y,x)))} = ((r)⁻¹)⁻¹  Symmetry 105
107. z ε ((r)⁻¹)⁻¹  EqualitySub 103 106
108. z ε ((r)⁻¹)⁻¹  ExistsElim 59 60 107
109. z ε ((r)⁻¹)⁻¹  ExistsElim 58 59 108
110. (z ε r) -> (z ε ((r)⁻¹)⁻¹)  ImpInt 109
111. ((z ε ((r)⁻¹)⁻¹) -> (z ε r)) & ((z ε r) -> (z ε ((r)⁻¹)⁻¹))  AndInt 53 110
112. (z ε ((r)⁻¹)⁻¹) <-> (z ε r)  EquivConst 111
113. ∀z.((z ε ((r)⁻¹)⁻¹) <-> (z ε r))  ForallInt 112
114. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y)))  AxInt
115. ∀y.((((r)⁻¹)⁻¹ = y) <-> ∀z.((z ε ((r)⁻¹)⁻¹) <-> (z ε y)))  ForallElim 114
116. (((r)⁻¹)⁻¹ = r) <-> ∀z.((z ε ((r)⁻¹)⁻¹) <-> (z ε r))  ForallElim 115
117. ((((r)⁻¹)⁻¹ = r) -> ∀z.((z ε ((r)⁻¹)⁻¹) <-> (z ε r))) & (∀z.((z ε ((r)⁻¹)⁻¹) <-> (z
ε r)) -> (((r)⁻¹)⁻¹ = r))  EquivExp 116
118. ∀z.((z ε ((r)⁻¹)⁻¹) <-> (z ε r)) -> (((r)⁻¹)⁻¹ = r)  AndElimR 117
119. ((r)⁻¹)⁻¹ = r  ImpElim 113 118
120. Relation(r) -> (((r)⁻¹)⁻¹ = r)  ImpInt 119 Qed
```

Used Theorems

```
1. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))
2. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))
3. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))
```

Th62. ((r∘s))⁻¹ = ((s)⁻¹∘(r)⁻¹)

```
0. z ε ((r∘s))⁻¹  Hyp
1. (r)⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))}  DefEqInt
2. ∀r.((r)⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))})  ForallInt 1
3. ((r∘s))⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x)))}  ForallElim 2
4. z ε {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x)))}  EqualitySub 0 3
5. Set(z) & ∃x.∃y.(((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x)))  ClassElim 4
6. ∃x.∃y.(((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x)))  AndElimR 5
7. (a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}  DefEqInt
8. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 7
9. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 8
10. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 9
11. (r∘s) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 10
12. ∃y.(((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x)))  Hyp
13. ((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x))  Hyp
14. (x,y) ε (r∘s)  AndElimL 13
15. (x,y) ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  EqualitySub 14 11
```

```
16. Set((x,y)) & ∃x_0.∃x_2.∃z.((((x_0,x_2) ε s) & ((x_2,z) ε r)) & ((x,y) = (x_0,z)))
ClassElim 15
17. ∃x_0.∃x_2.∃z.((((x_0,x_2) ε s) & ((x_2,z) ε r)) & ((x,y) = (x_0,z)))  AndElimR 16
18. ∃x_2.∃z.((((c,x_2) ε s) & ((x_2,z) ε r)) & ((x,y) = (c,z)))  Hyp
19. ∃z.((((c,d) ε s) & ((d,z) ε r)) & ((x,y) = (c,z)))  Hyp
20. (((c,d) ε s) & ((d,b) ε r)) & ((x,y) = (c,b))  Hyp
21. ∃w.((x,y) ε w)  ExistsInt 14
22. Set((x,y))  DefSub 21
23. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))  TheoremInt
24. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))  AndElimL 23
25. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  EquivExp 24
26. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))  AndElimR 25
27. Set(x) & Set(y)  ImpElim 22 26
28. (x,y) = (c,b)  AndElimR 20
29. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))  TheoremInt
30. ∀u.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v)))  ForallInt 29
31. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,v))) -> ((x = c) & (y = v))  ForallElim 30
32. ∀v.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,v))) -> ((x = c) & (y = v)))  ForallInt 31
33. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,b))) -> ((x = c) & (y = b))  ForallElim 32
34. (Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,b))  AndInt 27 28
35. (x = c) & (y = b)  ImpElim 34 33
36. x = c  AndElimL 35
37. y = b  AndElimR 35
38. c = x  Symmetry 36
39. b = y  Symmetry 37
40. (((x,d) ε s) & ((d,b) ε r)) & ((x,y) = (x,b))  EqualitySub 20 38
41. (((x,d) ε s) & ((d,y) ε r)) & ((x,y) = (x,y))  EqualitySub 40 39
42. ((x,d) ε s) & ((d,y) ε r)  AndElimL 41
43. h = (d,x)  Hyp
44. (x,d) ε s  AndElimL 42
45. ((x,d) ε s) & (h = (d,x))  AndInt 44 43
46. ∃d.(((x,d) ε s) & (h = (d,x)))  ExistsInt 45
47. ∃x.∃d.(((x,d) ε s) & (h = (d,x)))  ExistsInt 46
48. (x,d) ε s  AndElimL 45
49. ∃w.((x,d) ε w)  ExistsInt 48
50. Set((x,d))  DefSub 49
51. ∀y.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 26
52. Set((x,d)) -> (Set(x) & Set(d))  ForallElim 51
53. Set(x) & Set(d)  ImpElim 50 52
54. Set(d)  AndElimR 53
55. Set(x)  AndElimL 53
56. Set(x) & Set(d)  AndInt 55 54
57. (Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))  AndElimL 25
58. ∀x.((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y)))  ForallInt 57
59. (Set(d) & Set(y)) -> Set((d,y))  ForallElim 58
60. ∀y.((Set(d) & Set(y)) -> Set((d,y)))  ForallInt 59
61. (Set(d) & Set(x)) -> Set((d,x))  ForallElim 60
62. Set(d) & Set(x)  AndInt 54 55
63. Set((d,x))  ImpElim 62 61
64. (d,x) = h  Symmetry 43
65. Set(h)  EqualitySub 63 64
66. Set(h) & ∃x.∃d.(((x,d) ε s) & (h = (d,x)))  AndInt 65 47
67. h ε {w: ∃x.∃d.(((x,d) ε s) & (w = (d,x)))}  ClassInt 66
68. ∀r.((r)⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))})  ForallInt 1
69. (s)⁻¹ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε s) & (z = (y,x)))}  ForallElim 68
70. {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε s) & (z = (y,x)))} = (s)⁻¹  Symmetry 69
71. h ε (s)⁻¹  EqualitySub 67 70
72. (d,x) ε (s)⁻¹  EqualitySub 71 43
73. (h = (d,x)) -> ((d,x) ε (s)⁻¹)  ImpInt 72
74. ∀h.((h = (d,x)) -> ((d,x) ε (s)⁻¹))  ForallInt 73
75. ((d,x) = (d,x)) -> ((d,x) ε (s)⁻¹)  ForallElim 74
76. (d,x) = (d,x)  Identity
77. (d,x) ε (s)⁻¹  ImpElim 76 75
78. f = (y,d)  Hyp
79. (d,y) ε r  AndElimR 42
80. ((d,y) ε r) & (f = (y,d))  AndInt 79 78
81. ∃y.(((d,y) ε r) & (f = (y,d)))  ExistsInt 80
82. ∃d.∃y.(((d,y) ε r) & (f = (y,d)))  ExistsInt 81
83. Set(y)  AndElimR 27
84. Set(y) & Set(d)  AndInt 83 54
85. ∀y.((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y)))  ForallInt 57
```

86. (Set(x) & Set(d)) -> Set((x,d)) ForallElim 85
87. ∀x.((Set(x) & Set(d)) -> Set((x,d))) ForallInt 86
88. (Set(y) & Set(d)) -> Set((y,d)) ForallElim 87
89. Set((y,d)) ImpElim 84 88
90. (y,d) = f Symmetry 78
91. Set(f) EqualitySub 89 90
92. Set(f) & ∃d.∃y.(((d,y) ε r) & (f = (y,d))) AndInt 91 82
93. f ε {w: ∃d.∃y.(((d,y) ε r) & (w = (y,d)))} ClassInt 92
94. {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))} = (r)$^{-1}$ Symmetry 1
95. f ε (r)$^{-1}$ EqualitySub 93 94
96. (y,d) ε (r)$^{-1}$ EqualitySub 95 78
97. (f = (y,d)) -> ((y,d) ε (r)$^{-1}$) ImpInt 96
98. ∀f.((f = (y,d)) -> ((y,d) ε (r)$^{-1}$)) ForallInt 97
99. ((y,d) = (y,d)) -> ((y,d) ε (r)$^{-1}$) ForallElim 98
100. (y,d) = (y,d) Identity
101. (y,d) ε (r)$^{-1}$ ImpElim 100 99
102. ((y,d) ε (r)$^{-1}$) & ((d,x) ε (s)$^{-1}$) AndInt 101 77
103. z = (y,x) AndElimR 13
104. (((y,d) ε (r)$^{-1}$) & ((d,x) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (y,x)) AndInt 102 103
105. ∃x.((((y,d) ε (r)$^{-1}$) & ((d,x) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (y,x))) ExistsInt 104
106. ∃d.∃x.((((y,d) ε (r)$^{-1}$) & ((d,x) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (y,x))) ExistsInt 105
107. ∃y.∃d.∃x.((((y,d) ε (r)$^{-1}$) & ((d,x) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (y,x))) ExistsInt 106
108. Set(z) AndElimL 5
109. Set(z) & ∃y.∃d.∃x.((((y,d) ε (r)$^{-1}$) & ((d,x) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (y,x))) AndInt 108 107
110. z ε {w: ∃y.∃d.∃x.((((y,d) ε (r)$^{-1}$) & ((d,x) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (y,x)))} ClassInt 109
111. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 7
112. ((s)$^{-1}$∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))} ForallElim 111
113. ∀b.(((s)$^{-1}$∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 112
114. ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))} ForallElim 113
115. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))} = ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) Symmetry 114
116. z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) EqualitySub 110 115
117. z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) ExistsElim 19 20 116
118. z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) ExistsElim 18 19 117
119. z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) ExistsElim 17 18 118
120. z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) ExistsElim 12 13 119
121. z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) ExistsElim 6 12 120
122. (z ε ((r∘s))$^{-1}$) -> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)) ImpInt 121
123. z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) Hyp
124. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 7
125. ((s)$^{-1}$∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))} ForallElim 124
126. ∀b.(((s)$^{-1}$∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 125
127. ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))} ForallElim 126
128. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,z) ε (s)$^{-1}$)) & (w = (x,z)))} EqualitySub 123 127
129. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_5.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,x_5) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (x,x_5))) ClassElim 128
130. Set(z) AndElimL 129
131. ∃x.∃y.∃x_5.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,x_5) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (x,x_5))) AndElimR 129
132. ∃y.∃x_5.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,x_5) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (x,x_5))) Hyp
133. ∃x_5.((((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,x_5) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (x,x_5))) Hyp
134. (((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,a) ε (s)$^{-1}$)) & (z = (x,a)) Hyp
135. z = (x,a) AndElimR 134
136. ((x,y) ε (r)$^{-1}$) & ((y,a) ε (s)$^{-1}$) AndElimL 134
137. (x,y) ε (r)$^{-1}$ AndElimL 136
138. (y,a) ε (s)$^{-1}$ AndElimR 136
139. ∀r.((r)$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))}) ForallInt 1
140. (s)$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε s) & (z = (y,x)))} ForallElim 139
141. (x,y) ε {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))} EqualitySub 137 1
142. (y,a) ε {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε s) & (z = (y,x)))} EqualitySub 138 140
143. Set((x,y)) & ∃x_8.∃x_9.(((x_8,x_9) ε r) & ((x,y) = (x_9,x_8))) ClassElim 141
144. Set((y,a)) & ∃x.∃x_10.(((x,x_10) ε s) & ((y,a) = (x_10,x))) ClassElim 142
145. Set((x,y)) AndElimL 143
146. ∃x_8.∃x_9.(((x_8,x_9) ε r) & ((x,y) = (x_9,x_8))) AndElimR 143

```
147. Set((y,a))  AndElimL 144
148. ∃x.∃x_10.(((x,x_10) ε s) & ((y,a) = (x_10,x)))  AndElimR 144
149. ∃x_9.(((b,x_9) ε r) & ((x,y) = (x_9,b)))  Hyp
150. ((b,c) ε r) & ((x,y) = (c,b))  Hyp
151. ∃x_10.(((d,x_10) ε s) & ((y,a) = (x_10,d)))  Hyp
152. ((d,e) ε s) & ((y,a) = (e,d))  Hyp
153. (b,c) ε r  AndElimL 150
154. (d,e) ε s  AndElimL 152
155. (x,y) = (c,b)  AndElimR 150
156. (y,a) = (e,d)  AndElimR 152
157. Set(x) & Set(y)  ImpElim 145 26
158. (Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,b))  AndInt 157 155
159. ∀u.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v)))  ForallInt 29
160. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,v))) -> ((x = c) & (y = v))  ForallElim 159
161. ∀v.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,v))) -> ((x = c) & (y = v)))  ForallInt 160
162. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (c,b))) -> ((x = c) & (y = b))  ForallElim 161
163. (x = c) & (y = b)  ImpElim 158 162
164. x = c  AndElimL 163
165. y = b  AndElimR 163
166. c = x  Symmetry 164
167. b = y  Symmetry 165
168. ∀y.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 26
169. Set((x,a)) -> (Set(x) & Set(a))  ForallElim 168
170. ∀x.(Set((x,a)) -> (Set(x) & Set(a)))  ForallInt 169
171. Set((y,a)) -> (Set(y) & Set(a))  ForallElim 170
172. Set(y) & Set(a)  ImpElim 147 171
173. ((d,e) ε s) & ((b,c) ε r)  AndInt 154 153
174. ((d,e) ε s) & ((b,x) ε r)  EqualitySub 173 166
175. (Set(y) & Set(a)) & ((y,a) = (e,d))  AndInt 172 156
176. ∀u.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v)))  ForallInt 29
177. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (e,v))) -> ((x = e) & (y = v))  ForallElim 176
178. ∀y.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (e,v))) -> ((x = e) & (y = v)))  ForallInt 177
179. ((Set(x) & Set(a)) & ((x,a) = (e,v))) -> ((x = e) & (a = v))  ForallElim 178
180. ∀x.(((Set(x) & Set(a)) & ((x,a) = (e,v))) -> ((x = e) & (a = v)))  ForallInt 179
181. ((Set(y) & Set(a)) & ((y,a) = (e,v))) -> ((y = e) & (a = v))  ForallElim 180
182. ∀v.(((Set(y) & Set(a)) & ((y,a) = (e,v))) -> ((y = e) & (a = v)))  ForallInt 181
183. ((Set(y) & Set(a)) & ((y,a) = (e,d))) -> ((y = e) & (a = d))  ForallElim 182
184. (y = e) & (a = d)  ImpElim 175 183
185. y = e  AndElimL 184
186. a = d  AndElimR 184
187. e = y  Symmetry 185
188. ((d,y) ε s) & ((b,x) ε r)  EqualitySub 174 187
189. ((d,y) ε s) & ((y,x) ε r)  EqualitySub 188 167
190. d = a  Symmetry 186
191. ((a,y) ε s) & ((y,x) ε r)  EqualitySub 189 190
192. h = (a,x)  Hyp
193. Set(a)  AndElimR 172
194. Set(x)  AndElimL 157
195. Set(a) & Set(x)  AndInt 193 194
196. ∀x.((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y)))  ForallInt 57
197. (Set(a) & Set(y)) -> Set((a,y))  ForallElim 196
198. ∀y.((Set(a) & Set(y)) -> Set((a,y)))  ForallInt 197
199. (Set(a) & Set(x)) -> Set((a,x))  ForallElim 198
200. Set((a,x))  ImpElim 195 199
201. (a,x) = h  Symmetry 192
202. Set(h)  EqualitySub 200 201
203. (((a,y) ε s) & ((y,x) ε r)) & (h = (a,x))  AndInt 191 192
204. ∃x.((((a,y) ε s) & ((y,x) ε r)) & (h = (a,x)))  ExistsInt 203
205. ∃y.∃x.((((a,y) ε s) & ((y,x) ε r)) & (h = (a,x)))  ExistsInt 204
206. ∃a.∃y.∃x.((((a,y) ε s) & ((y,x) ε r)) & (h = (a,x)))  ExistsInt 205
207. Set(h) & ∃a.∃y.∃x.((((a,y) ε s) & ((y,x) ε r)) & (h = (a,x)))  AndInt 202 206
208. h ε {w: ∃a.∃y.∃x.((((a,y) ε s) & ((y,x) ε r)) & (w = (a,x)))}  ClassInt 207
209. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 7
210. (r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 209
211. ∀b.((r∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))})  ForallInt
210
212. (r∘s) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 211
213. {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε s) & ((y,z) ε r)) & (w = (x,z)))} = (r∘s)  Symmetry 212
214. h ε (r∘s)  EqualitySub 208 213
215. (a,x) ε (r∘s)  EqualitySub 214 192
216. (h = (a,x)) -> ((a,x) ε (r∘s))  ImpInt 215
```

217. ∀h.((h = (a,x)) -> ((a,x) ε (r∘s))) ForallInt 216
218. ((a,x) = (a,x)) -> ((a,x) ε (r∘s)) ForallElim 217
219. (a,x) = (a,x) Identity
220. (a,x) ε (r∘s) ImpElim 219 218
221. f = (x,a) Hyp
222. (x,a) = f Symmetry 221
223. Set((x,a)) EqualitySub 130 135
224. Set(f) EqualitySub 223 222
225. ((a,x) ε (r∘s)) & (f = (x,a)) AndInt 215 221
226. ∃x.(((a,x) ε (r∘s)) & (f = (x,a))) ExistsInt 225
227. ∃a.∃x.(((a,x) ε (r∘s)) & (f = (x,a))) ExistsInt 226
228. Set(f) & ∃a.∃x.(((a,x) ε (r∘s)) & (f = (x,a))) AndInt 224 227
229. ∀r.((r)$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))}) ForallInt 1
230. ∀r.((r)$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε r) & (z = (y,x)))}) ForallInt 1
231. ((r∘s))$^{-1}$ = {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x)))} ForallElim 230
232. {z: ∃x.∃y.(((x,y) ε (r∘s)) & (z = (y,x)))} = ((r∘s))$^{-1}$ Symmetry 231
233. f ε {w: ∃a.∃x.(((a,x) ε (r∘s)) & (w = (x,a)))} ClassInt 228
234. f ε ((r∘s))$^{-1}$ EqualitySub 233 232
235. (x,a) ε ((r∘s))$^{-1}$ EqualitySub 234 221
236. (f = (x,a)) -> ((x,a) ε ((r∘s))$^{-1}$) ImpInt 235
237. ∀f.((f = (x,a)) -> ((x,a) ε ((r∘s))$^{-1}$)) ForallInt 236
238. ((x,a) = (x,a)) -> ((x,a) ε ((r∘s))$^{-1}$) ForallElim 237
239. (x,a) = (x,a) Identity
240. (x,a) ε ((r∘s))$^{-1}$ ImpElim 239 238
241. f ε ((r∘s))$^{-1}$ EqualitySub 240 222
242. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 151 152 241
243. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 148 151 242
244. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 149 150 243
245. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 146 149 244
246. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 149 150 245
247. (h = (a,x)) -> (f ε ((r∘s))$^{-1}$) ImpInt 246
248. ∀h.((h = (a,x)) -> (f ε ((r∘s))$^{-1}$)) ForallInt 247
249. ∀h.((h = (a,x)) -> (f ε ((r∘s))$^{-1}$)) ForallInt 247
250. ((a,x) = (a,x)) -> (f ε ((r∘s))$^{-1}$) ForallElim 249
251. (a,x) = (a,x) Identity
252. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ImpElim 251 250
253. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 133 134 252
254. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 132 133 253
255. f ε ((r∘s))$^{-1}$ ExistsElim 131 132 254
256. (x,a) ε ((r∘s))$^{-1}$ EqualitySub 255 221
257. (x,a) = z Symmetry 135
258. z ε ((r∘s))$^{-1}$ EqualitySub 256 257
259. (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)) -> (z ε ((r∘s))$^{-1}$) ImpInt 258
260. ((z ε ((r∘s))$^{-1}$) -> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$))) & ((z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)) -> (z ε ((r∘s))$^{-1}$))
AndInt 122 259
261. (z ε ((r∘s))$^{-1}$) <-> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)) EquivConst 260
262. ∀x.∀y.((x = y) <-> ∀z.((z ε x) <-> (z ε y))) AxInt
263. ∀y.((((r∘s))$^{-1}$ = y) <-> ∀z.((z ε ((r∘s))$^{-1}$) <-> (z ε y))) ForallElim 262
264. (((r∘s))$^{-1}$ = ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)) <-> ∀z.((z ε ((r∘s))$^{-1}$) <-> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)))
ForallElim 263
265. ((((r∘s))$^{-1}$ = ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)) -> ∀z.((z ε ((r∘s))$^{-1}$) <-> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$)))) & (∀z.
((z ε ((r∘s))$^{-1}$) <-> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$))) -> (((r∘s))$^{-1}$ = ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$))) EquivExp 264
266. ∀z.((z ε ((r∘s))$^{-1}$) <-> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$))) -> (((r∘s))$^{-1}$ = ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$))
AndElimR 265
267. ∀z.((z ε ((r∘s))$^{-1}$) <-> (z ε ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$))) ForallInt 261
268. ((r∘s))$^{-1}$ = ((s)$^{-1}$∘(r)$^{-1}$) ImpElim 267 266 Qed

Used Theorems

1. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))
2. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))

Th64. (Function(f) & Function(g)) -> Function((f∘g))

0. Function(f) & Function(g) Hyp
1. Function(f) AndElimL 0
2. Function(g) AndElimR 0
3. (a,b) ε (f∘g) Hyp
4. (a,c) ε (f∘g) Hyp
5. (a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))} DefEqInt
6. ∀a.((a∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε a)) & (w = (x,z)))}) ForallInt 5

```
7. (f∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε f)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 6
8. ∀b.((f∘b) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε b) & ((y,z) ε f)) & (w = (x,z)))})  ForallInt 7
9. (f∘g) = {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & (w = (x,z)))}  ForallElim 8
10. (a,b) ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & (w = (x,z)))}  EqualitySub 3 9
11. (a,c) ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & (w = (x,z)))}  EqualitySub 4 9
12. Set((a,b)) & ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,b) = (x,z)))  ClassElim 10
13. Set((a,c)) & ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,c) = (x,z)))  ClassElim 11
14. ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,b) = (x,z)))  AndElimR 12
15. ∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,b) = (x,z)))  Hyp
16. ∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,b) = (x,z)))  Hyp
17. (((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,b) = (x,z))  Hyp
18. ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,c) = (x,z)))  AndElimR 13
19. ∃y.∃z.((((u,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & ((a,c) = (u,z)))  Hyp
20. ∃z.((((u,v) ε g) & ((v,z) ε f)) & ((a,c) = (u,z)))  Hyp
21. (((u,v) ε g) & ((v,w) ε f)) & ((a,c) = (u,w))  Hyp
22. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))  TheoremInt
23. (Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))  AndElimL 22
24. ((Set(x) & Set(y)) -> Set((x,y))) & (Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  EquivExp 23
25. Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y))  AndElimR 24
26. ∀x.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 25
27. Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y))  ForallElim 26
28. ∀y.(Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y)))  ForallInt 27
29. Set((a,b)) -> (Set(a) & Set(b))  ForallElim 28
30. Set((a,b))  AndElimL 12
31. Set(a) & Set(b)  ImpElim 30 29
32. Set(a)  AndElimL 31
33. Set(b)  AndElimR 31
34. ∀x.(Set((x,y)) -> (Set(x) & Set(y)))  ForallInt 25
35. Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y))  ForallElim 34
36. ∀y.(Set((a,y)) -> (Set(a) & Set(y)))  ForallInt 35
37. Set((a,c)) -> (Set(a) & Set(c))  ForallElim 36
38. Set((a,c))  AndElimL 13
39. Set(a) & Set(c)  ImpElim 38 37
40. Set(c)  AndElimR 39
41. (a,b) = (x,z)  AndElimR 17
42. (Set(a) & Set(b)) & ((a,b) = (x,z))  AndInt 31 41
43. (a,c) = (u,w)  AndElimR 21
44. (Set(a) & Set(c)) & ((a,c) = (u,w))  AndInt 39 43
45. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))  TheoremInt
46. ∀x.(((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v)))  ForallInt 45
47. ((Set(a) & Set(y)) & ((a,y) = (u,v))) -> ((a = u) & (y = v))  ForallElim 46
48. ∀y.(((Set(a) & Set(y)) & ((a,y) = (u,v))) -> ((a = u) & (y = v)))  ForallInt 47
49. ((Set(a) & Set(b)) & ((a,b) = (u,v))) -> ((a = u) & (b = v))  ForallElim 48
50. ∀u.(((Set(a) & Set(b)) & ((a,b) = (u,v))) -> ((a = u) & (b = v)))  ForallInt 49
51. ((Set(a) & Set(b)) & ((a,b) = (x,v))) -> ((a = x) & (b = v))  ForallElim 50
52. ∀v.(((Set(a) & Set(b)) & ((a,b) = (x,v))) -> ((a = x) & (b = v)))  ForallInt 51
53. ((Set(a) & Set(b)) & ((a,b) = (x,z))) -> ((a = x) & (b = z))  ForallElim 52
54. (a = x) & (b = z)  ImpElim 42 53
55. ∀y.(((Set(a) & Set(y)) & ((a,y) = (u,v))) -> ((a = u) & (y = v)))  ForallInt 47
56. ((Set(a) & Set(c)) & ((a,c) = (u,v))) -> ((a = u) & (c = v))  ForallElim 55
57. ∀v.(((Set(a) & Set(c)) & ((a,c) = (u,v))) -> ((a = u) & (c = v)))  ForallInt 56
58. ((Set(a) & Set(c)) & ((a,c) = (u,w))) -> ((a = u) & (c = w))  ForallElim 57
59. (a = u) & (c = w)  ImpElim 44 58
60. a = x  AndElimL 54
61. b = z  AndElimR 54
62. a = u  AndElimL 59
63. c = w  AndElimR 59
64. ((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)  AndElimL 17
65. ((u,v) ε g) & ((v,w) ε f)  AndElimL 21
66. (y,z) ε f  AndElimR 64
67. (v,w) ε f  AndElimR 65
68. (x,y) ε g  AndElimL 64
69. (u,v) ε g  AndElimL 65
70. x = u  EqualitySub 62 60
71. (u,y) ε g  EqualitySub 68 70
72. Relation(g) & ∀x.∀y.∀z.((((x,y) ε g) & ((x,z) ε g)) -> (y = z))  DefExp 2
73. ∀x.∀y.∀z.((((x,y) ε g) & ((x,z) ε g)) -> (y = z))  AndElimR 72
74. ∀y.∀z.((((u,y) ε g) & ((u,z) ε g)) -> (y = z))  ForallElim 73
75. ∀z.((((u,y) ε g) & ((u,z) ε g)) -> (y = z))  ForallElim 74
76. (((u,y) ε g) & ((u,v) ε g)) -> (y = v)  ForallElim 75
77. ((u,y) ε g) & ((u,v) ε g)  AndInt 71 69
```

```
78. y = v  ImpElim 77 76
79. (v,z) ε f  EqualitySub 66 78
80. Relation(f) & ∀x.∀y.∀z.((((x,y) ε f) & ((x,z) ε f)) -> (y = z))  DefExp 1
81. ∀x.∀y.∀z.((((x,y) ε f) & ((x,z) ε f)) -> (y = z))  AndElimR 80
82. ∀y.∀z.((((v,y) ε f) & ((v,z) ε f)) -> (y = z))  ForallElim 81
83. ∀x_0.((((v,z) ε f) & ((v,x_0) ε f)) -> (z = x_0))  ForallElim 82
84. (((v,z) ε f) & ((v,w) ε f)) -> (z = w)  ForallElim 83
85. ((v,z) ε f) & ((v,w) ε f)  AndInt 79 67
86. z = w  ImpElim 85 84
87. b = w  EqualitySub 61 86
88. w = c  Symmetry 63
89. b = c  EqualitySub 87 88
90. b = c  ExistsElim 20 21 89
91. b = c  ExistsElim 19 20 90
92. b = c  ExistsElim 18 19 91
93. b = c  ExistsElim 16 17 92
94. b = c  ExistsElim 15 16 93
95. b = c  ExistsElim 14 15 94
96. ((a,c) ε (f∘g)) -> (b = c)  ImpInt 95
97. ((a,b) ε (f∘g)) -> (((a,c) ε (f∘g)) -> (b = c))  ImpInt 96
98. A -> (B -> C)  Hyp
99. A & B  Hyp
100. A  AndElimL 99
101. B -> C  ImpElim 100 98
102. B  AndElimR 99
103. C  ImpElim 102 101
104. (A & B) -> C  ImpInt 103
105. (A -> (B -> C)) -> ((A & B) -> C)  ImpInt 104
106. (((a,b) ε (f∘g)) -> (B -> C)) -> ((((a,b) ε (f∘g)) & B) -> C)  PolySub 105
107. (((a,b) ε (f∘g)) -> (((a,c) ε (f∘g)) -> C)) -> ((((a,b) ε (f∘g)) & ((a,c) ε (f∘g)))
-> C)  PolySub 106
108. (((a,b) ε (f∘g)) -> (((a,c) ε (f∘g)) -> (b = c))) -> ((((a,b) ε (f∘g)) & ((a,c) ε
(f∘g))) -> (b = c))  PolySub 107
109. (((a,b) ε (f∘g)) & ((a,c) ε (f∘g))) -> (b = c)  ImpElim 97 108
110. Relation(g)  AndElimL 72
111. Relation(f)  AndElimL 80
112. z ε (f∘g)  Hyp
113. z ε {w: ∃x.∃y.∃z.((((x,y) ε g) & ((y,z) ε f)) & (w = (x,z)))}  EqualitySub 112 9
114. Set(z) & ∃x.∃y.∃x_2.((((x,y) ε g) & ((y,x_2) ε f)) & (z = (x,x_2)))  ClassElim 113
115. ∃x.∃y.∃x_2.((((x,y) ε g) & ((y,x_2) ε f)) & (z = (x,x_2)))  AndElimR 114
116. ∃y.∃x_2.((((x,y) ε g) & ((y,x_2) ε f)) & (z = (x,x_2)))  Hyp
117. ∃x_2.((((x,y) ε g) & ((y,x_2) ε f)) & (z = (x,x_2)))  Hyp
118. (((x,y) ε g) & ((y,l) ε f)) & (z = (x,l))  Hyp
119. z = (x,l)  AndElimR 118
120. ∃l.(z = (x,l))  ExistsInt 119
121. ∃x.∃l.(z = (x,l))  ExistsInt 120
122. ∃x.∃l.(z = (x,l))  ExistsElim 117 118 121
123. ∃x.∃l.(z = (x,l))  ExistsElim 116 117 122
124. ∃x.∃l.(z = (x,l))  ExistsElim 115 116 123
125. (z ε (f∘g)) -> ∃x.∃l.(z = (x,l))  ImpInt 124
126. ∀z.((z ε (f∘g)) -> ∃x.∃l.(z = (x,l)))  ForallInt 125
127. Relation((f∘g))  DefSub 126
128. ∀c.((((a,b) ε (f∘g)) & ((a,c) ε (f∘g))) -> (b = c))  ForallInt 109
129. ∀b.∀c.((((a,b) ε (f∘g)) & ((a,c) ε (f∘g))) -> (b = c))  ForallInt 128
130. ∀a.∀b.∀c.((((a,b) ε (f∘g)) & ((a,c) ε (f∘g))) -> (b = c))  ForallInt 129
131. Relation((f∘g)) & ∀a.∀b.∀c.((((a,b) ε (f∘g)) & ((a,c) ε (f∘g))) -> (b = c))  AndInt
127 130
132. Function((f∘g))  DefSub 131
133. (Function(f) & Function(g)) -> Function((f∘g))  ImpInt 132 Qed

Used Theorems

1. ((Set(x) & Set(y)) <-> Set((x,y))) & (¬Set((x,y)) -> ((x,y) = U))
2. ((Set(x) & Set(y)) & ((x,y) = (u,v))) -> ((x = u) & (y = v))
>>>
```