Преобразование математических моделей динамической системы

Для описания поведения динамических систем используется различный математический аппарат. Наиболее распространенными способами математического описания линейных динамических систем являются:

- дифференциальные или разностные уравнения;
- уравнения состояния – система дифференциальных или разностных уравнений, записанная в форме Коши;
- передаточные функции.

Большинство реальных динамических систем представляют собой совокупность подсистем и отдельных элементов, определенным образом соединенных друг с другом и взаимодействующих между собой. Поэтому математическое описание системы, как правило, начинается с разбиения ее на звенья и описания этих звеньев. По уравнениям и характеристикам отдельных звеньев и связей между ними составляются уравнения и характеристики системы в целом, на основании которых и исследуется система.

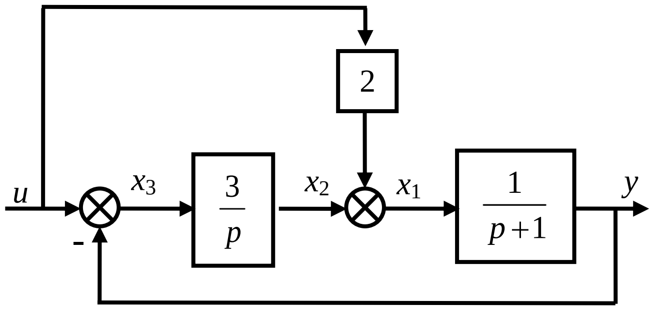
Динамическая система, которая может быть представлена как совокупность отдельных типовых звеньев, может быть изображена в виде структурной схемы. Под *структурной схемой* системы понимается ее условное графическое изображение, на котором каждый элемент системы изображается в виде блока с указанием входной и выходной переменных. Внутри блока записывается передаточная функция, связывающая входную и выходную переменные, а также указываются все связи между элементами системы. Структурная схема в наглядной форме отображает состав исследуемой системы и связи между ее элементами, направление передачи информации (сигналов).

Формирование математического описания системы по ее структурной схеме

Для получения математического описания системы по ее структурной схеме необходимо выполнить следующую последовательность структурных преобразований:

1. На структурной схеме для каждого элемента вводятся обозначения входных и выходных переменных.
2. Для каждого из элементов структурной схемы составляется уравнение связи между входной и выходной переменными. Полученная система уравнений задает описание всей структурной схемы. Число уравнений соответствует числу структурных элементов.
3. Последовательной подстановкой одного уравнения в другое исключаются промежуточные переменные, пока не останется уравнение связи между интересующими переменными, по которым находится искомая передаточная функция.

Рассмотрим на примере процесс формирования математической модели системы по ее структурной схеме. Найдем дифференциальное уравнение (модель «вход-выход») для системы, представленной следующей структурной схемой:



В данном примере система состоит из последовательно соединенных интегратора с усилителем $3/p$ и апериодического (инерционного) звена первого порядка $1/(p+1)$, а также усилителя с коэффициентом передачи равным 2.

$p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования такой, что $p^i x(t) = = \dfrac{d^i x(t)}{dt^i}$.

$u(t)$ – входной сигнал (задающее воздействие), $y(t)$ – выходной сигнал.

Для получения математического описания системы по ее структурной схеме для каждого элемента вводится обозначение входного и выходного сигналов и составляется уравнение связи между входом и выходом.

Для рассматриваемой схемы введем дополнительные переменные x_1, x_2, x_3, определяющие сигналы с выходов отдельных блоков схемы:

$x_3=u-y$

$$x_2 = \frac{3x_3}{p}$$

$x_1=2u+x_2$

$$y = \frac{x_1}{p+1}$$

Полученная система уравнений задает полное описание системы.

Выразим выходной сигнал y через управляющее воздействие u. Последовательная подстановка полученных уравнений позволяет исключить промежуточные переменные x_1, x_2, x_3 и получить уравнение связи между двумя интересующими переменными:

$$y = \frac{x_1}{p+1} = \frac{2u + x_2}{p+1} = \frac{2u + \dfrac{3x_3}{p}}{p+1}$$

$$y = \frac{2u \cdot p + 3x_3}{p(p+1)} = \frac{2u \cdot p + 3(u - y)}{p(p+1)}$$

Умножим обе части равенства на $p(p+1)$ и сгруппируем все элементы с y в левой части, с u в правой части выражения:

$$y(p^2+p+3)=u(2p+3) \qquad (1)$$

Полученное выражение представляет собой *модель «вход-выход»* исследуемой системы в операторной (символической) форме. Оно соответствует дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''(t) + y'(t) + 3y(t) = 2u'(t) + 3u(t), \qquad (2)$$

Для нахождения передаточной функции обозначим полином при y в уравнении (1) через $A(p)$, при u – через $B(p)$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$A(p)y = B(p)u$$

Формально передаточная функция в операторной форме определяется как отношение полиномов $B(p)$ и $A(p)$:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Для рассматриваемого примера передаточную функцию можно записать в виде $W(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+s+3}$, поскольку для стационарных систем передаточные функции в форме изображения Лапласа $W(s)$ и в операторной форме $W(p)$ совпадают.

Дифференциальное уравнение вида (2) задает наиболее полное описание системы. Передаточная функция взаимно однозначно связана с дифференциальным уравнением, если у нее нет одинаковых нулей и полюсов. Если имеет место равенство нулей и полюсов, то порядок передаточной функции понижается на число равных нулей и полюсов и передаточная функция будет уже неоднозначно связана с исходным дифференциальным уравнением. Различия в характере переходных процессов, полученных в результате решения дифференциального уравнения, порождаются ненулевыми начальными условиями. Если система полностью управляема и полностью наблюдаема, то передаточная функция и исходное дифференциальное уравнение связаны взаимно однозначно.

Описание линейной непрерывной стационарной системы в форме «*вход-состояние-выход*» представляет собой систему дифференциальных уравнений, записанных в нормальной форме Коши, описывающих изменение переменных состояния и выход системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases},$$

где $x \in R^n$, $u \in R^k$, $y \in R^l$;

A – (n×n) матрица, задающая динамические свойства системы,

B – (n×k) матрица входов,

C – (l×n) матрица выходов.

От модели «вход-состояние-выход» можно перейти к передаточной функции:

$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Обратный переход от описания «вход-выход» к уравнениям состояния неоднозначен и зависит от выбора базиса в пространстве состояний. На практике применяется несколько типовых способов перехода к уравнениям состояния, которые соответствуют так называемым каноническим представлениям системы. Например, описание системы в *канонической управляемой форме* имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots\ldots \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots - a_{n-1}x_n + u \\ y = b_0x_1 + b_1x_2 + \ldots \end{cases}$$

Соответственно,

$$A_у = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{vmatrix}; \qquad B_у = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$C_у = |b_0 \vdots b_1 \vdots \ldots \vdots 0 \vdots 0|$$

где a_0, a_1, …, a_{n-1}, b_0, b_1, … - параметры модели «вход-выход».

Также на практике часто используется *каноническая наблюдаемая форма*, имеющая вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0x_n + b_0u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1x_n + b_1u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}x_n \\ y = x_n \end{cases}$$

$$A_н = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-1} \end{vmatrix}; \qquad B_н = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ b_0 \end{vmatrix};$$

$$C_н = |0 \vdots \ldots \vdots 0 \vdots 1|$$

Для рассматриваемого примера описание модели «вход-состояние-выход» в канонической управляемой форме примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u \\ y = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \;\; C = \begin{vmatrix} 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Все описанные преобразования выполнить в среде MATLAB с помощью соответствующих команд из Control System Toolbox. В MATLAB Toolbox представляет собой проблемно-ориентированный набор дополнительных функций для решения задач, характерных для конкретной области. Control System Toolbox содержит дополнительный набор специальных функций для решения задач, связанных с разработкой и анализом систем управления.

Например, для нахождения передаточной функции по имеющимся уравнениям состояния необходимо найти матрицы системы *A*, *B*, *C*, *D* и выполнить команду

[num, den] = ss2tf(*A*, *B*, *C*, 1)/

Функция ss2tf (сокращение от *state-space to transfer function*) осуществляет переход от уравнений состояний к передаточной функции системы. Входными параметрами функции являются матрицы системы *A*, *B*, *C*, *D* и номер входа, относительно которого должна быть рассчитана передаточная функция. Возвращает функция вектор *den*, содержащий коэффициенты знаменателя передаточной функции в порядке убывания степени оператора дифференцирования *p*, и матрицу *num*, содержащую коэффициенты числителя, число строк матрицы *num* равно числу выходов системы *y*.

Аналогично можно выполнить обратный переход:

[A, B, C, D] = ts2ss(num, den)