Technische Hochschule Ingolstadt Prof. Dr. K. Roegner

Lösungen - Wiederholungsaufgaben
Grundlagen der Mathematik 1 - Analysis
- ohne Gewähr -

1. Aufgabe

Bstimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie das Bild der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = |x + 1|$
Jedes $x \in \mathbb{R}$ kann in die Betragsfunktion eingesetzt werden. Das Ergebnis ist eine nichtnegative reelle Zahl. Für die Funktion f bedeutet dies, dass der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ ist und das Bild von f ebenso die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen ist. (Achtung! Das Bild von $f^*(x) = |x| + 1$ ist $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$.)

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$
Die Wurzelfunktion nimmt nur nichtnegative Werte und liefert ebenfalls nichtnegative Funktionswerte.
Um den Definitionsbereich von g zu bestimmen, muss die Ungleichung

$$x^2 - 1 \geq 0$$

gelöst werden. Das Polynom $p(x) = x^2 - 1$ ist als Polynom stetig, sodass ein Vorzeichenwechsel nur unmittelbar links und rechts von einer Nullstelle auftreten kann. Die Nullstellen von p sind ± 1. Auf $]-\infty; -1[$ ist p positiv, auf $]-1; 1[$ ist p negativ und auf $]1; \infty[$ ist p wiederum positiv. Der Definitionsbereich von g ist $]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$ und das Bild von g ist $\{y \in \mathbb{R} | y \geq -1\}$.

c) $h(t) = \frac{1}{2}\sin(3t) + 3$
Alle reelle Zahlen können in $\sin t$ also auch in $\sin(3t)$ oder $\frac{1}{2}\sin(3t)+3$ eingesetzt werden (Definitionsbereich von h ist $\mathbb{R}$).
Um das Bild zu bestimmen, suchen wir das Maximum und das Minimum von h. Da die Funktion stetig und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, müssen alle Werte zwischen dem Maximum und dem Minimum angenommen werden.
Es gilt $h'(t) = \frac{3}{2}\cos(3t)$. Die Nullstellen von h befinden sich bei x-Werte der Form $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und zwar gilt

$$h\left(2j\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}5$$
$$h\left(2j\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 3{,}5.$$

Von daher ist das Bild von g das Intervall $[2,5; 3,5]$.

2. Aufgabe

a) Sei $f(x) = e^{-x} + x$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle auf dem Intervall $[0; 1]$ besitzt.
Die Funktion f ist stetig (Summe einer Exponentialfunktion und ein Polynom). Es gilt

$$f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$$
$$f(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x^* \in]0; 1[$ mit $f(x^*) = 0$.

b) Sei $g : [0;1] \to [0;1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $t \in [0;1]$ gibt, sodass $g(t) = t$ gilt.
Falls $g(0) = 0$ oder $g(1) = 1$, dann ist die Aussage wahr. Angenommen, $g(0) \neq 0$ und $g(1) \neq 1$. Die Funktion $j(x) = g(x) - x$ ist als Differenz stetiger Funktionen (g nach Voraussetzung, x als Polynom) selbst stetig.

$$j(0) = g(0) - 0 > 0 \quad \text{wegen} \quad 0 < g(0) \leq 1$$

$$j(1) = g(1) - 1 < 0 \quad \text{wegen} \quad 0 \leq g(1) < 1$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x^* \in \,]0;1[$ mit $j(x^*) = 0$, d.h. $g(x^*) - x^* = 0$ oder $g(x^*) = x^*$.

c) Die Funktion $h : [a;b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und dessen Ableitung streng monoton fallend. Unter welcher weiteren Bedingung hat die Funktion unbedingt ein Minimum und welche Kandidaten kommen in Frage?
Differenzierbare Funktionen sind stetig. Da h auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ definiert ist, gibt es ein Maximum und ein Minimum. Die Ableitung h' ist überall im Intervall negativ (und ungleich Null) ist, sodass nur die Randpunkte a und b möglich sind für das Minimum. (Mehr kann nicht gesagt werden.)

d) Untersuchen Sie die gegebene Funktion auf Stetigkeit.

$$k(t) = \begin{cases} \cos t, & t < \frac{\pi}{4} \\ \sin t, & t \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[, \\ \cos t - \sin t, & t \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[, \\ \cos t & x \geq 2\pi \end{cases}$$

Die trigonometrischen Funktionen $\cos t$ und $\sin t$ sowie ihre Differenz $\cos t - \sin t$ sind stetige Funktionen. Die Funktion ist deshalb auf den offenen Intervallen

$$]-\infty; \frac{\pi}{4}[\,,]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}[\,,]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[\,,]2\pi; \infty[$$

stetig. Die Funktion k ist in den t-Werte $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{2}$ gar nicht definiert, sodass k dort nicht stetig sein kann. Bei $t = 2\pi$ ist der Funktionswert $k(2\pi) = \cos(2\pi) = 1$. Ferner gilt

$$\lim_{t \to 2\pi^-} k(t) = \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{t \to 2\pi^+} k(t) = \cos(2\pi) = 1$$

Von daher ist k auch in $t = 2\pi$ stetig. Insgesamt ist k auf

$$]-\infty; \frac{\pi}{4}[\, \cup \,]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}[\, \cup \,]\frac{3\pi}{2}; \infty[$$

stetig.

3. Aufgabe

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Sandwich-Prinzips, dass die Folge $\left(\frac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$ konvergiert.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$-1 \leq \cos n \leq 1.$$

Aus $n^{\frac{2}{3}} \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\frac{-1}{n^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{\cos n}{n^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

Die Folgen $\left(\frac{-1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$ und $\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$ sind Nullfolgen. Nach dem Sandwich-Prinzip konvergiert $\left(\frac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ auch gegen Null.

b) Untersuchen Sie die gegebenen Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

i) $(\sin(n+2)\pi)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 0}}$ ii) $\left(\sqrt[n]{n^{3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 0}}$

iii) $\left(\frac{2k^3-4k}{1-k^5}\right)_{k\in\mathbb{N}^{>1}}$ iv) $\left(\frac{3k^2-2k+1}{1-4k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^{\geq 0}}$

v) $\left(\frac{k^4-k^2+1}{k^3+k+2}\right)_{k\in\mathbb{N}^{\geq 0}}$ vi) $\left(\frac{2n!-n}{n-5n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 0}}$

i) $\sin(n+2)\pi = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Die Folge konvergiert gegen Null.
ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{3n}} = \lim_{n\to\infty}(n)^{(3n)\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^3 \to \infty$
Die Folge ist divergent. iii) Das Polynom im Nenner hat einen höheren Grad als das Polynom im Zähler.
Die Folge konvergiert gegen Null.
iv) Der Grad des Polynoms im Zähler ist gleich den Grad des Polynoms im Nenner.
Die Folge konvergiert gegen $-\frac{3}{4}$.
(v) Der Grad des Polynoms im Zähler ist größer als den Grad des Polynoms im Nenner.
Die Folge ist divergent.
(vi)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n!-n}{n-5n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1-\frac{n}{n!}}{\frac{n}{n!}-5} = -\frac{2}{5}$$

Die Folge konvergiert gegen $-\frac{2}{5}$

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 0}}$ ist durch $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$ rekursiv definiert. Angenommen, die Folge konvergiert mit Grenzwert L, berechnen Sie L.
Wegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

gilt

$$L = \frac{1}{5}\left(L + \frac{A}{L}\right).$$

Durch Umformung erhalten wir

$$5L = L + \frac{A}{L}$$

oder

$$5L^2 = L^2 + A,$$

d.h.

$$4L^2 = A$$

oder

$$L = \frac{\sqrt{A}}{2}.$$

(Man merkt, $L = -\frac{\sqrt{A}}{2}$ ist ungültig, da $a_0 = 2 > 0$ ist.)

4. Aufgabe

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ entscheiden Sie, ob $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ differenzierbar ist.
Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},$$

so lange die Ableitung definiert ist. Somit ist f differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Aufgabe

Berechnen Sie die Tangente zum Graphen der Funktion $g(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4})$ in $t = \frac{\pi}{2}$.

Wir ermitteln die Werte $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ für $g'(t) = \cos(t - \pi/4)$:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichung ist $y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

6. Aufgabe

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der gegebenen Funktion.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2 - x + 3)(e^x) \\ h'(x) &= (2x-1)e^x + (x^2 - x + 3)e^x = (x^2 + x + 2)e^x \\ j(t) &= \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ j'(t) &= \frac{-2\cos x \sin x - \cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{-2\cos x(\sin x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\ k(x) &= \ln\left(\sqrt{x^2 - 3x}\right) \\ k'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}} \cdot (\sqrt{x^2 - 3x})' = \frac{2x - 3}{2(x^2 - 3x)} \end{aligned}$$

7. Aufgabe

Bestimmen Sie reelle Zahlen a und b, sodass

$$f(x) = \begin{cases} |x| & |x| > 2 \\ a + bx^2 & |x| \leq 2 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

Hier nur das Ergebnis: $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$

8. Aufgabe

Untersuchen Sie die gegebenen Reihen auf Konvergenz. Berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

a) $\sum_{k=0}^{\infty}(3^{-k}-4^{-2k})$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+k}$ c) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k-1}}$ d) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-\sqrt{k}}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^3-5}$ f) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^3+1}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$ h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n!}$

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-n^3}{n^3+5^n}$ j) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ k) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}$ l) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+2}}{7k+1}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{5})^{1-n}$ o) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4k!}{(3k)!}$ p) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{7k+1}$

Hier nur die Ergebnisse mit einem möglichen Kriterium:
a) Differenz konvergierender geometrischen Reihen, konvergiert gegen $\frac{13}{30}$
b) konvergent, Majorantenkriterium
c) divergent, Minorantenkriterium
d) divergent, Minorantenkriterium
e) divergent, Minorantenkriterium
f) konvergent, Majorantenkriterium
g) konvergent, Wurzelkriterium
h) konvergent, Quotientenkriterium
i) konvergent, Majorantenkriterium
j) divergent, Integraltest
k) divergent, Quotientenkriterium
l) konvergent, Leibniz
m) divergent, Vergleich mit harmonischer Reihe
n) konvergent gegen $\sqrt{5}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}-1\right)$, Variation einer geometrischen Reihe
o) konvergent, Quotientenkriterium
p) divergent, $\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{7k+1}$ ist keine Nullfolge