Aufgabenblatt 5

Thema: Reihen - Teil II

Aufgabe

Bestimmen Sie jeweils, ob die gegebene Reihe konvergent oder divergent ist.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(3^{-k}-4^{-2k})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{5})^{1-n}$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-\sqrt{k}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^{n}$

e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^3+1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n!}$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+k}$ h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+2}}{7k+1}$ j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}$ k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-n^3}{n^3+5^n}$ l) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4k!}{(3k)!}$

Lösungen

a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(3^{-k}-4^{-2k})=\sum_{k=0}^{\infty}3^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}4^{-2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^2}\right)^{k}$ ist die Differenz von zwei *konvergierenden geometrischen Reihen mit* $q_1=\frac{1}{3}<1$ und $q_2=\frac{1}{16}<1$, sodass sie auch **konvergent** ist.

b) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{5})^{1-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}=\sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{N}$ ist eine *geometrische Reihe mit* $q=\frac{1}{\sqrt{5}}<1$, also **konvergent**.

c) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-\sqrt{k}}$ ist ähnlich zu der harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$, die divergent ist. Das *Minorantenkriterium* kann angewendet werden, denn $k-\sqrt{k}<k$ für alle $k\geq 2$ bedeutet $\displaystyle\frac{1}{k-\sqrt{k}}>\frac{1}{k}>0$ für alle $k\geq 2$. Von daher ist auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-\sqrt{k}}$ **divergent**.

d) Weil der Index n als Potenz in $a_n=\left(\frac{3}{n}\right)^{n}$ auftaucht, versuchen wir es mit dem Wurzelkriterium.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0=\rho.$$

Weil $\rho = 0 < 1$ ist, konvergiert die Reihe.
Alternativ mit dem *Quotientenkriterium*. Hier muss jedoch viel mehr gerechnet werden.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{3}\right)^n\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{3^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|3\cdot\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|3\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{n+1}\right| = 0 < 1
\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$ **konvergent**.

e) Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^3+1}$ erinnert uns an die *Riemannsche Zetafunktion mit* $s = 3$, eine konvergente Reihe. Denn es gilt $0 \leq \frac{\cos^2 k}{k^3+1} \leq \frac{1}{k^3+1} < \frac{1}{k^3}$ für $k \geq 2$, **konvergiert** die gegebene Reihe nach dem *Majorantenkriterium*.

f) Der Index n kommt in der Potenz (und in der Fakultät) vor. Das Quotientenkriterium ist einen Versuch wert.

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_{k+1}\cdot\frac{1}{a_k}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}e^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^n e^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}}{e^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e}{(n+1)}\right| = 0 < 1$$

Nach dem *Quotientenkriterium* ist die Reihe **konvergent**.

g) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+k}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ ähnlich. Die letztere ist eine konvergente Riemannsche Zetafunktion mit $s = \frac{3}{2} > 1$. Ferner gilt

$$0 < \frac{\sqrt{k}}{k^2+k} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}+k^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}},$$

sodass die gegebene Reihe nach dem *Majorantenkriterium* **konvergent** ist.

h) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}$ ist **divergent**, weil aus

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(4k)!}{(3k)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{(4k)(4k-1)\cdots(3k+1)\cancel{(3k)!}}{\cancel{(3k)!}} = \infty$$

folgt, dass (a_k) keine Nullfolge ist.

i) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{7k+1}$ ist alternierend und die Summenglieder bilden eine Nullfolge, denn $\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{7k+1} = 0$. Ferner gilt $|\frac{(-1)^{k+2}}{7k+1}| = |\frac{1}{7k+1}|$ ist monoton fallend auf $[1,\infty[$ (die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{7x+1}$ ist $f'(x) = \frac{-7}{(7x+1)^2}$, die auf dem Intervall negativ ist). Die Reihe ist nach dem *Leibniz-Kriterium* **konvergent**.

j) Die Reihe ist (-1) Mal die *harmonische Reihe*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(-1)^1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(-1)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

und deshalb **divergent**.

k) Das Quotientenkriterium hilft auf den ersten Blick nicht, weil der Bruch zu kompliziert ist. Nach Erfahrung erwarten wir jedoch, dass die Reihe **konvergent** ist, weil der dominierende Teil für sehr große n hier 5^n ist, und dies ist im Nenner. Wir wenden deshalb die Majorantenkriterien an, um bei der Abschätzung eine einfachere Form zu erhalten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - n^3}{n^3 + 5^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - n^3}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}.$$

Die *geometrische Reihe* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ mit $\frac{2}{5} < 1$ ist konvergent. Die zweite Reihe in der Summe untersuchen wir mit dem Quotientenkriterium. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^3 \right| = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

ist kleiner als 1, sodass diese Reihe nach dem *Quotientenkriterium* konvergiert. Die *Summe von zwei konvergenten Reihen ist konvergent*, sodass nach dem *Majorantenkriterium* die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - n^3}{n^3 + 5^n}$ **konvergent** ist.

l) Wegen der Fakultät in den Summanden der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4k!}{(3k)!}$ versuchen wir das

Quotientenkriterium.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{4}(k+1)!}{(3(k+1))!}\cdot\frac{(3k)!}{\cancel{4}k!}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(3k)!}{(3k+3)!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|(k+1)\cdot\frac{(3k)!}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)(3k)!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|(k+1)\cdot\frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\cancel{(k+1)}\cdot\frac{1}{3\cancel{(k+1)}(3k+2)(3k+1)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{3(3k+2)(3k+1)}\right| = 0 < 1
\end{aligned}$$

Nach dem *Quotientenkriterium* ist die Reihe **konvergent**.