Lösungen - Aufgabenblatt 6

Themen: Die Ableitung

Begründen Sie Ihre Antwort (Rechenweg zeigen; Sätze anwenden, nachdem die Voraussetzungen verifiziert sind, usw.)!

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Tangentengleichung zum Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 1$ in $x_0 = 1$.

Der Funktionswert in $x_0 = 1$ ist $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 1 - 4 = -3$; d.h. der Punkt $(1; -3)$ liegt auf der Tangente. Um die Steigung zu bestimmen, leiten wir ab und setzen x_0 ein:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 1 \qquad f'(1) = 3 - 8 - 1 = -6$$

Somit ist die Tangentengleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -3 - 6(x-1)$ oder $y = -6x + 3$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der gegebenen Funktion.

a) $f_1(x) = \sin x \cdot \cos x \qquad f_2(x) = e^x \cdot \ln x \qquad f_3(t) = 4t \sin t$

b) $g_1(x) = \dfrac{\sqrt{x^3} + 1}{\ln x},\ x > 1 \qquad g_2(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1} \qquad g_3(\theta) = \tan\theta$

c) $h_1(x) = \cos(x - x^2) \qquad h_2(x) = \sqrt[3]{x^3 \cdot \ln x} \qquad h_3(P) = \arctan\left(e^{4P}\right)$

a)

$$f_1'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f_2'(x) = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}$$

$$f_3'(t) = 4 \sin t + 4t \cos t$$

b)

$$g_1'(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot \ln x - (\sqrt{x^3} + 1) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$g_2'(x) = \frac{1(x^2+1) - (x+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

$$g_3'(\theta) = (\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{\cos^2\theta - (-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Aufgabe 3

Approximieren Sie $\sqrt{46}$ mit Hilfe der linearen Approximation. Dies wird in den folgenden Schritten gemacht.

1. Wählen Sie eine Zahl x_0 in der Nähe von 46, sodass $\sqrt{x_0}$ bekannt ist.
2. Berechnen Sie die Tangente zum Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ in $(x_0; f(x_0))$.
3. Setze $x = 46$ in die Tangentengleichung ein. y ist eine Approximation von $\sqrt{46}$.

Vergleichen Sie Ihre Antwort mit dem Wert in dem Taschenrechner.

1. Wähle $x_0 = 49$.
2. $f(49) = 7$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(49) = \dfrac{1}{2\sqrt{49}} = \dfrac{1}{14}$
$$y = 7 + \frac{1}{14}(x - 49)$$
3. $y = 7 + \frac{1}{14}(46 - 49) = 7 - \frac{3}{14} = 6{,}785714286$

Der Taschenrechner gibt $\sqrt{46} = 6{,}782329983$. Die erste drei Stellen stimmen überein.