Wiederholung zum Thema "Komplexe Zahlen"

Aufgabe 1
Seien $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = 2 - i$ komplexe Zahlen. Berechnen Sie

- $z_3 = z_1 + z_2$
- $z_4 = z_1 - z_2$
- $z_5 = z_1 \cdot z_2$
- $z_6 = \frac{z_1}{z_2}$
- $|z_n|$ für $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Aufgabe 2
Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen mit $z \in \mathbb{C}$ in Exponentialform sowie mit kartesischen Koordinaten.

a) $z^3 = 1$
b) $z^3 = -1$
c) $z^4 = 4i$

Aufgabe 3
Gegeben sei ein Polynom der Gestalt $p(z) = z^2 + az + b$ mit unbekannten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und Variable $z \in \mathbb{C}$. Eine Nullstelle ist $2 + 3i$. Bestimmen Sie a und b.

Lösungen

- ohne Gewähr -

Aufgabe 1

$z_3 = 4,\ z_4 = 2i,\ z_5 = 5,\ z_6 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{5},\ |z_3| = 4,\ |z_4| = 2,\ |z_5| = 5,\ |z_6| = 1$

Aufgabe 2

a) $z_0 = e^0 = 1 = 1 + 0 \cdot i,\ z_1 = e^{\frac{2\pi}{3} \cdot i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i,\ z_2 = e^{\frac{4\pi}{3} \cdot i} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

b) $z_0 = e^{\frac{\pi}{3} \cdot i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i,\ z_1 = e^{\frac{3\pi}{3} \cdot i} = -1 + 0 \cdot i,\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{3} \cdot i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

c) $z_0 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot i$ (exakter Wert mit Hilfe einer Internet-Recherche gefunden - in der Prüfung kommen die Werte aus der Tabelle)

$z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{8}} = -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot i,\ z_2 = \sqrt{2} e^{\frac{9\pi}{8}} = -\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot i$

$z_3 = \sqrt{2} e^{\frac{13\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} - \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot i$

Aufgabe 3

Da die Koeffizienten des komplexen Polynoms reell sind, kommen die Nullstellen in komplex konjugierten Paare. Die zweite Nullstelle ist deshalb $2 - 3i$. Das Polynom ist gegeben durch $p(z) = (z - (2 + 3i))(z - (2 - 3i)) = z^2 - 4z + 13$, d.h. $a = -4$ und $b = 13$.