Binomialkoeffizienten

Zunächst ein paar

Definitionen:

$\boldsymbol{B} := \{0,1\}$, $\boldsymbol{B}^n$:= Menge aller **Binärwörter** der **Länge** n .
Schreibweise:
Binärwörter $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ schreiben wir oft (wenn keine Verwechslungen mit einem Produkt zu befürchten sind) auch als $\underline{x} = x_1 x_2 \dots x_n$.
Wir gehen aus von einer Grundmenge Ω , bezeichnen mit $Pot(\Omega)$ oder $\wp(\Omega)$ die sog. **Potenzmenge** von Ω und definieren $Pot(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$.
$Pot(\Omega)$ ist also die Menge aller Teilmengen von Ω : $A \in Pot(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq \Omega$.

Beispiel: $\Omega := \{x_1, x_2, x_3\}$. $Pot(\Omega) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \Omega\}$, hat also 8 Elemente, die jeweils ihrerseits Mengen sind. Wir listen $Pot(\Omega)$ einmal systematisch auf

$x_1 \in A$	$x_2 \in A$	$x_3 \in A$	A
0	0	0	$\emptyset$
0	0	1	$\{x_3\}$
0	1	0	$\{x_2\}$
0	1	1	$\{x_2, x_3\}$
1	0	0	$\{x_1\}$
1	0	1	$\{x_1, x_3\}$
1	1	0	$\{x_1, x_2\}$
1	1	1	Ω

und sehen sofort: Hat Ω n Elemente, etwa $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, so entspricht jedem Element $A \in Pot(\Omega)$ genau ein Binärwort $a_1 a_2 \dots a_n$ der Länge n und umgekehrt:
$a_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_i \in A \quad , \quad a_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i \notin A$
Somit gilt der

Satz: $\quad |Pot(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$

Eines der wichtigsten Werkzeuge für das Abzählen endlicher Mengen sind die sogenannten

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Es gibt viele Möglichkeiten, diese einzuführen. Wir wählen einen Weg, der einen starken Bezug zur Informatik hat:

Definition:

Das **Gewicht** $w(\underline{a})$ ($w =$ “weight“) eines Binärworts $\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n$ ist die Anzahl der Einsen in diesem Wort. Damit können wir definieren

$\binom{n}{k}$:= Anzahl der Binärwörter der Länge n vom Gewicht k .

Zum Beispiel ist $\binom{5}{2} = 10$, weil es 10 Binärwörter der Länge 5 vom Gewicht 2 gibt (nämlich 11000, 10100, 10010, 10001, 01100, 01010, 01001, 00110, 00101, 00011).

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ nennen wir **Binomialkoeffizienten** und sagen dazu „n **über** k“, oder „k **aus** n“.

Warum wir das tun, werden Sie im folgenden Satz unter e),f) und h) sehen. Außerdem definieren wir noch $Pot_k(\Omega) := \{A \in Pot(\Omega) : |A| = k\}$ (Menge aller $k-$elementigen Teilmengen von Ω**)**

Für $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ ist z.B. $Pot_2(\Omega) := \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$

Satz:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

e) Für $|\Omega| = n$ ist $|Pot_k(\Omega)| = \binom{n}{k}$

f) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n (verschiedenen) Dingen k Dinge auszuwählen (ohne zurücklegen).

g) eine **Rekursionsformel**: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

h) **Binomischer Lehrsatz**: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k$, $(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k$

i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Dabei ist $0! := 1$, $1! := 1$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, also $n! = (n-1)! n$

Beweis: Normalerweise sind wir mit Beweisen sparsam. Hier aber können Sie aus den Beweisen der nächsten 7 Seiten viel lernen: Sie üben die neuen Definitionen gleich ein, und verstehen auch besser die Zusammenhänge. Deshalb bieten wir Ihnen sogar manchmal Alternativbeweise an.

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$:

Es gibt genau ein Wort $\in \boldsymbol{B}^n$ vom Gewicht 0, nämlich 000 …00,
und genau eines vom Gewicht n, nämlich 111 … 11.

b) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$:

Es gibt genau n Wörter $\in \boldsymbol{B}^n$ vom Gewicht 1, nämlich

100 … 00
010 … 00
001 … 00
…
000 … 10
000 … 01

und genau n Wörter vom Gewicht $n-1$, nämlich

011 … 11
101 … 11
110 … 11
…
111 … 01
111 … 10

c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$:

Wir ersetzen jedes Wort vom Gewicht k durch sein Komplementärwort (1 durch 0 ersetzen, 0 durch 1).
Dann bekommen wir alle Wörter vom Gewicht $n-k$. Die Argumentation in a) war ein Spezialfall davon.

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$:

Wir zerlegen die Menge aller Binärwörter der Länge n (2^n Stück) in Gewichtsklassen und zählen diese ab.

e) Für $|\Omega| = n$ ist $|Pot_k(\Omega)| = \binom{n}{k}$:

Wir stellen wie früher jedem $A \in Pot(\Omega)$ das entsprechende Binärwort $\underline{a} \in \boldsymbol{B}^n$ gegenüber. Dann ist $|A| = w(\underline{a})$. Also gibt es in $Pot_k(\Omega)$ genauso viele Mengen, wie es Wörter $\underline{a} \in \boldsymbol{B}^n$ mit $w(\underline{a}) = k$ gibt.

f) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n (verschiedenen) Dingen k Dinge auszuwählen (ohne

Zurücklegen):

Jedes $A \in Pot_k(\Omega)$ (also jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ mit k Elementen) entspricht einer solchen Auswahl und umgekehrt. Somit besagt f) das Gleiche wie e). Deshalb also die Sprechweise „k **aus** n“.

g) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$:

In $\boldsymbol{B}^n$ hängen wir an alle Wörter vom Gewicht k (das sind $\binom{n}{k}$ Stück) eine 1 dran, und an alle Wörter vom Gewicht $k+1$ (das sind $\binom{n}{k+1}$ Stück) hängen wir eine 0 dran. Auf diese Weise entstehen insgesamt $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ Binärwörter $\in \boldsymbol{B}^{n+1}$, jeweils vom Gewicht $k+1$, und zwar **alle** vom Gewicht $k+1$.

Ich zeige Ihnen diese Argumentation am Beispiel $n=4$, $k=2$

1110 → 11100
1101 → 11010
1011 → 10110
0111 → 01110

1100 → 11001
1010 → 10101
1001 → 10011
0110 → 01101
0101 → 01011
0011 → 00111

Bisher wissen wir überhaupt noch nicht, wie wir Binomialkoeffizienten ausrechnen sollen (außer $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ und $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$). Ordnen wir aber die Binomialkoeffizienten im sogenannten **Pascal-Dreieck** an, dann sehen wir sofort, wie nützlich die Formel $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ ist:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Den linken und rechten Rand (jeweils lauter Einsen) liefern uns die Formeln („Anfangswerte“) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Von einer bereits berechneten Zeile kommen wir dann auf die nächste mittels der **Rekursionsformel**

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, welche bei dieser Anordnung der Zahlen besagt, dass wir immer die Summe der beiden darüber stehenden Zahlen nehmen können. Wir bekommen also z.B. (bis einschließlich Zeile Nr. 7)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}
$$

Hier sehen Sie auch schön die Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ in jeder Zeile.

Das Pascal-Dreieck ist zumindest für kleine n eine sehr effektive Methode, Binomialkoeffizienten auszurechnen. Außerdem brauchen wir oft, wie bei der nächsten Formel, die Binomialkoeffizienten einer ganzen Zeile (des Pascal-Dreiecks):

h) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k$

Die Formel heißt **Binomischer Lehrsatz**, weil er zur „Auswertung“ der Potenzen eines „Binoms“ $x+y$ dient. Bevor wir diese Formel beweisen, wollen wir sie mit Hilfe des Pascal-Dreiecks anwenden:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (Zeile Nr. 2 im Pascal-Dreieck; diesen Spezialfall kennen Sie aus der Schule)

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (Zeile Nr. 3 im Pascal-Dreieck)

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ (Zeile Nr. 4 im Pascal-Dreieck)

$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ (Zeile Nr. 5 im Pascal-Dreieck)

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$ (Zeile Nr. 6 im Pascal-Dreieck)

$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$ (Zeile Nr. 7 im Pascal-Dreieck)

Sie sehen in diesen Formeln schön, wie die $x-$ Potenzen hochgezählt und die $y-$ Potenzen gleichzeitig runtergezählt werden, und wie die beiden Exponenten zusammen immer n ergeben.

In der Formel $(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k$ bedeuten die Faktoren $(-1)^k$ einfach wechselnde (alternierende) Vorzeichen, also z.B. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ oder z.B.

$$(x-y)^7 = x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$$

Wir brauchen dafür keinen eigenen Beweis, denn nach der ersten Formel ist

$$(x-y)^n = (x+(-y))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k}(-y)^k \text{ und } (-y)^k = [(-1)\cdot y]^k = (-1)^k \cdot y^k.$$

Jetzt zum Beweis der Formel:

Erster Beweis:

Vorüberlegung: Wenn wir n Summen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (in unserem Fall immer $x+y$) miteinander multiplizieren, dann müssen wir alle möglichen Produkte bilden, welche entstehen, wenn wir aus jeder Summe einen Summanden auswählen. Wenn wir das auf $(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ anwenden, dann entsteht dabei genauso oft der Term $x^k y^{n-k}$, wie es Möglichkeiten gibt, aus diesen n Faktoren k mal das x auszuwählen (und aus den anderen dann jeweils das y). Es gibt dafür, wie wir in f) gesehen haben, genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Zweiter Beweis:

Wir bauen uns schrittweise Formeln für $(x+y)^2, (x+y)^3, (x+y)^4, \ldots$ auf, indem wir immer das bereits Erreichte wiederverwenden: $(x+y)^{n+1} = (x+y)\cdot(x+y)^n = x\cdot(x+y)^n + (x+y)^n \cdot y$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x^2+2xy+y^2) &= x^3 + 2x^2y + xy^2 \\ &\quad\ \ + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ \hline &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^4 = (x+y)\cdot(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) &= x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 \\ &\quad\ \ + x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4 \\ \hline &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^5 = (x+y)\cdot(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4) &= x^5 + 4x^4y + 6x^3y^2 + 4x^2y^3 + xy^4 \\ &\quad\ \ + x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + y^5 \\ \hline &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

Und so weiter …

Weil wir jedes Mal die beiden Summen versetzt untereinandergeschrieben haben, erkennen wir wieder das Strickmuster $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ der Binomialkoeffizienten. Die Anfangswerte stimmen auch überein. Folglich bleibt den Koeffizienten bei $x^k y^{n-k}$ in $(x+y)^n$ gar nichts anderes übrig, als mit den $\binom{n}{k}$

überein zu stimmen.

Genaugenommen müssten wir das „Und so weiter“, also den Schritt, in dem man sich $(x+y)^{n+1}$ aus $(x+y)^n$ aufbaut, allgemein beschreiben. Das wäre dann ein sog. Induktionsbeweis. Wenn die Idee so klar wie hier ist, werden wir Induktionsbeweise immer nur im Sinne von „und so weiter“ führen.

Übrigens folgt aus der Binomischen Formel auch noch mal $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, indem wir

$(x+y)^n = (y+x)^n$ verwenden. Auch sehen wir noch einmal algebraisch (anstatt „kombinatorisch“)

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Diese Formel ist nützlich, weil wir manchmal für ein relativ großes n gezielt $\binom{n}{k}$ ausrechnen wollen. Dabei können wir in der Formel noch Vieles kürzen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Obige Formel benutzen wir also in der Praxis so:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots\ (n-k+1)}{k(k-1)\qquad\cdots\qquad 1}$$

Wir schreiben zuerst $\frac{n}{k}$ hin, und zählen dann oben und unten herunter, bis wir im Nenner bei der Eins angelangt sind (also jeweils k Faktoren, wenn wir die Eins mitzählen). Dabei können wir es wegen

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ immer so einrichten, dass k nie größer als $n/2$ ist.

Beispiel: $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56$.

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Lotto mit einer Tippreihe 6 Richtige anzukreuzen?

Die Chance ist Eins zu $\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 49\cdot 47\cdot 46\cdot 3\cdot 44 \approx 14$ Mio.

Interessant ist auch, dass man dem Bruch

$$\frac{n(n-1)\cdots\ (n-k+1)}{k(k-1)\qquad\cdots\qquad 1}$$

auf den ersten Blick nicht ansieht, dass er ganzzahlig ist (diese Division also immer aufgeht). Erst die Interpretation als Binomialkoeffizient (als Anzahl der Elemente einer endlichen Menge) sorgt automatisch dafür.

Erster Beweis:

Wir definieren zwischenzeitlich $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, und überzeugen uns, dass für diese Zahlen ebenfalls die Anfangsbedingungen wie in a) und die Rekursionsformel wie in g) gelten. Dann erzeugen sie nämlich ebenfalls das Pascal-Dreieck.

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

Das war nur etwas Bruchrechnen, und die zu beweisende Formel hat uns die Schritte, die wir dabei machen mussten, quasi aufgedrängt. Eine besondere Beweisidee war dazu nicht nötig. Trotzdem bleibt ein schales Gefühl zurück: Wie **kommt** man denn auf solch eine Formel? (Denn diese dann hinterher zu verifizieren ist kein Kunststück.)

Deshalb zeige ich Ihnen noch einen zweiten Beweis, der schon für sich genommen sehr aufschlussreich ist (Es gäbe auch noch einen Dritten, rein kombinatorischen Beweis, den Sie in fast jedem Lehrbuch finden können).

Zweiter Beweis:

Zunächst stellen wir ganz allgemein fest, dass sich die Koeffizienten a_k eines beliebigen Polynoms vom Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

durch die Ableitungen von $p(x)$ beschreiben lassen:

$$p(0) = a_0$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$

$$p'(0) = a_1$$

$$p''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5 x^3 + \ldots$$

$$p''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_1$$

$$p'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_5 x^2 + \ldots$$

$$p'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3$$

$$p^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_5 x + \ldots$$

$$p^{(4)}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_4$$

Und so weiter (Das ist wieder vollständige Induktion), und wir bekommen für $0 \le k \le n$: $p^{(k)}(0) = k! a_k$, also

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} .$$

Dabei ist natürlich die „nullte Ableitung“ $p^{(0)}(x) := p(x)$ .Wir können also für jedes Polynom $p(x)$ vom Grad n auch schreiben $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{p^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ (Das kennen Sie vielleicht unter dem Begriff „Taylor-Entwicklung“).

Das wenden wir jetzt auf das Polynom $p(x) := (1+x)^n$ an:

$p^{(0)}(0) = p(0) = 1$

$p'(x) = n \cdot (1+x)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad p'(0) = n$

$p''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (1+x)^{n-2} \quad \Rightarrow \quad p''(0) = n \cdot (n-1)$

$p'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (1+x)^{n-3} \quad \Rightarrow \quad p'''(0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

Und so weiter …

$p^{(k)}(0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$

Somit gilt für die Koeffizienten a_k in $p(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$:

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots\ (n-k+1)}{k(k-1)\qquad\cdots\quad 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Andererseits ist nach dem Binomischen Lehrsatz $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$, also $a_k = \binom{n}{k}$.