Wiederholungsaufgaben
Grundlagen der Mathematik 1 - Analysis

1. Aufgabe

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie das Bild der gegbenen Funktionen.

a) $f(x) = |x + 1|$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$

c) $h(t) = \frac{1}{2}\sin(3t) + 3$

2. Aufgabe

a) Sei $f(x) = e^{-x} + x$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle auf dem Intervall $[0; 1]$ besitzt.

b) Sei $g : [0; 1] \to [0; 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $t \in [0; 1]$ gibt, sodass $g(t) = t$ gilt.

c) Die Funktion $h : [a; b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und dessen Ableitung streng monoton fallend. Unter welcher weiteren Bedingung hat die Funktion unbedingt ein Minimum und welche Kandidaten kommen in Frage?

d) Untersuchen Sie die gegebene Funktion auf Stetigkeit.

$$k(t) = \begin{cases} \cos t, & t < \frac{\pi}{4} \\ \sin t, & t \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[, \\ \cos t - \sin t, & t \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[, \\ \cos t & x \geq 2\pi \end{cases}$$

3. Aufgabe

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Sandwich-Prinzips, dass die Folge $\left(\frac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}\geq 1}$ konvergiert.

b) Untersuchen Sie die gegebenen Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

i) $(\sin(n+2)\pi)_{n\in\mathbb{N}\geq 0}$

ii) $\left(\sqrt[n]{n^{3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}\geq 0}$

iii) $\left(\frac{2k^3-4k}{1-k^5}\right)_{k\in\mathbb{N}>1}$

iv) $\left(\frac{3k^2-2k+1}{1-4k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}\geq 0}$

v) $\left(\frac{k^4-k^2+1}{k^3+k+2}\right)_{k\in\mathbb{N}\geq 0}$

vi) $\left(\frac{2n!-n}{n-5n!}\right)_{n\in\mathbb{N}\geq 0}$

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\geq 0}$ ist durch $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$ rekursiv definiert. Angenommen, die Folge konvergiert mit Grenzwert L, berechnen Sie L.

4. Aufgabe

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ entscheiden Sie, ob $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ differenzierbar ist.

5. Aufgabe

Berechnen Sie die Tangente zum Graphen der Funktion $g(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4})$ in $t = \frac{\pi}{2}$.

6. Aufgabe

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der gegebenen Funktion.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2 - x + 3)(e^x) \\ j(t) &= \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ k(x) &= \ln\left(\sqrt{x^2 - 3x}\right) \end{aligned}$$

7. Aufgabe

Bestimmen Sie reelle Zahlen a und b, sodass

$$f(x) = \begin{cases} |x| & |x| > 2 \\ a + bx^2 & |x| \leq 2 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

8. Aufgabe

Untersuchen Sie die gegebenen Reihen auf Konvergenz. Berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(3^{-k} - 4^{-2k})$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k-1}}$ d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-\sqrt{k}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^3-5}$ f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^3+1}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n!}$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-n^3}{n^3+5^n}$ j) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(4k)!}{(3k)!}$ l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+2}}{7k+1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}$ n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{5})^{1-n}$ o) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4k!}{(3k)!}$ p) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{7k+1}$