Lösungen zum Aufgabenblatt 3

Folgen

(ohne Gewähr)

Aufgabe 1

Gegeben ist die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie, dass die Folge von unten beschränkt und monoton fallend für $n \geq 1$ ist. Ist die Folge konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls (ggf.) den Grenzwert.

Als erstes merken wir, dass die Folgenglieder immer positiv sind (a_0 ist positive, und bei jedem Schritt wird nur mit Addition und Division von positiven Zahlen gearbeitet). Die Folge ist deshalb von unten beschränkt: $0 < a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Wir wollen zeigen, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. $a_n - a_{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{2}{2a_n} \\ &= \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} \end{aligned}$$

Der Nenner ist wie bereits erwähnt positiv. Es muss nur gezeigt werden, dass der Zähler auch positiv ist.

Für $n > 1$ ist nach Definition $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$. Setzten wir dies in $a_n^2 - 2$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2 &= \left(\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)\right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2}\right) - \frac{8}{4} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2} - 8}{4} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 - 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2}}{4} \\ &= \frac{\left(a_{n-1} - \frac{2}{a_{n-1}}\right)^2}{4} \end{aligned}$$

Der Quadrat einer Zahl ist immer größer gleich Null. Insofern ist $a_n^2 - 2 \geq 0$, sodass insgesamt $a_n - a_{n+1} \geq 0$ ist. Von daher ist die Folge monoton fallend und von unten und oben beschränkt. Solche Folgen sind konvergent.

Aufgabe 2

Welche der nachstehenden Folgen sind konvergent/bestimmt divergent/divergent?

a) (a_n) mit $a_n = \frac{3n(n^{\frac{3}{2}}-2000)}{n^2+1}$

b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $b_n = \frac{5+(-1)^n}{n} = (5+(-1)^n) \cdot \frac{1}{n}$

a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n\left(n^{\frac{3}{2}} - 2000\right)}{n^2+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cancel{n^{\frac{5}{2}}}(1 - \frac{2000}{n^{\frac{3}{2}}})}{\cancel{n^{\frac{5}{2}}}(n^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{5}{2}})}\end{aligned}$$

Der Zähler läuft gegen 3, der Nenner gegen 0. Insofern ist die Folge bestimmt divergent.

b) $5+(-1)^n$ pendelt zwischen 4 und 6 und ist damit beschränkt. Der andere Faktor konvergiert gegen 0. Von daher ist der Produkt weiterhin konvergent gegen 0. (Wäre $(5+(-1)^n)$ unbeschränkt oder der Grenzwert des einen Faktors nicht Null, hätte man keine Aussage ohne weitere Informationen treffen können.)

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ konvergiert. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$

Die ersten Folgenglieder sind: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}$ mit $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Wir vermuten deshalb, dass $a_n = \frac{n+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^{>0}$.
$a_1 = \frac{1+1}{1}$, sodass eine Basis für die Induktion vorhanden ist. ✓
Angenommen, $a_N = \frac{N+1}{N}$ für ein $N \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen: $a_{N+1} = \frac{(N+1)+1}{(N+1)} = \frac{N+2}{N+1}$

$$a_{N+1} = 2 - \frac{1}{a_N} = 2 - \frac{1}{\frac{N+1}{N}} = 2 - \frac{N}{N+1} = \frac{2(N+1)-N}{N+1} = \frac{N+2}{N+1} \checkmark$$

Diese Folge konvergiert gegen 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$