Lösungsskizzen: Übungsblatt 10
Substitution, uneigentliche Integrale

Aufgabe 1

Verwenden Sie jeweils eine geeignete Substitution, um die folgenden Integrale zu lösen.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^4\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} \sin(2x)\cos^3(2x)\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta$

a) Definiere $u = x^2+1$. Dann ist $du = 2x\,dx$ oder $\frac{1}{2}\,du = x\,dx$. Eine Stammfunktion wird ermittelt.

$$\begin{aligned}\int x(x^2+1)^4\,dx &= \int \frac{1}{2}u^4\,du\\ &= \frac{1}{10}u^5\\ &= \frac{1}{10}(x^2+1)^5\end{aligned}$$

Wir setzen die Integrationsgrenzen entsprechend ein:

$$\frac{1}{10}(1^2+1)^5 - \frac{1}{10}((-1)^2+1)^5 = 0$$

b) Setze $u = \cos(2x)$. Dann gilt $du = -2\sin(2x)dx$; d.h. $-\frac{1}{2}du = \sin(2x)dx$.

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\cos^3(2x)\,dx &= \int \left(-\frac{1}{2}\right) u^3\,du\\ &= -\frac{1}{8}u^4\\ &= -\frac{1}{8}(\cos(2x))^4\end{aligned}$$

Integrationsgrenzen einsetzen:

$$-\frac{1}{8}(\cos(2\cdot\pi/6))^4 + \frac{1}{8}(\cos(2\cdot 0))^4 = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{8}(1)^4 = \frac{1}{128} - \frac{16}{128} = \frac{15}{128}$$

c) Sei $u = 1-\sin\theta$ und damit $du = -\cos\theta\,d\theta$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta &= \int -\frac{du}{u}\\ &= -\ln|u| + C\\ &= -\ln(1-\sin\theta) + C,\ \text{ da } 1-\sin\theta \text{ nicht negativ ist}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren. Berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

a) $\int_4^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ b) $\int_0^4 \frac{dx}{x^{3/2}}$ c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx$ d) $\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{1/3}}$

a)

$$\begin{aligned}\int_4^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} &= \lim_{a\to\infty} \int_4^a x^{-3/2}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty} \left(-2x^{-1/2}\right)\Big|_4^a \\ &= \lim_{a\to\infty} \left(-2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right)\right)\end{aligned}$$

Das Integral existiert. Der Grenzwert ist 1.

b) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ ist in Null nicht definiert. Das Integral ist uneigentlich.

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{dx}{x^{3/2}} &= \lim_{a\to 0} \int_a^4 x^{-3/2}\,dx \\ &= \lim_{a\to 0} \left(-2x^{-1/2}\right)\Big|_a^4 \\ &= \lim_{a\to 0} \left(-2\left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right) \to \infty\end{aligned}$$

Das Integral existiert nicht.

c) Wir wählen eine willkürliche Zahl aus, um das Integral aufzuspalten:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int_0^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx.$$

Exisitert das uneigentliche Integral, müssen beide Summanden auch existieren. Wir fangen mit der linken Seite an.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+4}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{x^2+4}\,dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big|_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(a^2+4) - \frac{1}{2}\ln(4)\right) \to \infty\end{aligned}$$

Das Integral existiert nicht.

d) Bei diesem Integral muss aufgepasst werden. Die Funktion $f(x) = x^{-1/3}$ ist in $x = 0$ nicht definiert. Wir müssen das Integral aufspalten und zwar in $x = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{8} \frac{dx}{x^{1/3}} &= \int_{-1}^{0} x^{-1/3}\,dx + \int_{0}^{8} x^{-1/3}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^{a} x^{-1/3}\,dx + \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{8} x^{-1/3}\,dx
\end{aligned}$$

Wie in Teil c) kann das ursprüngliche Integral nur existiert, wenn beide Summanden existieren. Wir fangen mit dem linken Summanden an.

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^{a} x^{-1/3}\,dx &= \lim_{a\to 0^-} \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{a} \\
&= \lim_{a\to 0^-} \frac{3}{2}(a^{2/3} - (-1)^{2/3}) \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Der erste Summand existiert also. Wir machen mit dem zweiten Summanden weiter.

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{8} x^{-1/3}\,dx &= \lim_{a\to 0^+} \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{a}^{8} \\
&= \lim_{a\to 0^+} \frac{3}{2}(8^{2/3} - (a)^{2/3}) \\
&= \frac{3}{2}(4) = 6
\end{aligned}$$

Beide Summanden existieren. Das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{dx}{x^{1/3}}$ existiert und konvergiert gegen

$$-\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}.$$

Aufgaben z. T. aus Edwards und Penney, *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall (1986).