2.6 Zentraler Grenzwertsatz (vgl. Weber, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure, Stuttgart,1992)

Die Bezeichnung „zentraler Grenzwertsatz" findet man für eine Reihe von Sätzen, deren gemeinsamer Inhalt die Aussage ist, dass die Verteilung einer Summe von n stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen (unter recht häufig erfüllten Bedingungen) im Grenzfall $n \to \infty$ gegen eine Normalverteilung konvergiert. Hierin liegt auch der Grund für die zentrale Bedeutung der Normalverteilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Vorbemerkung: Das sogenannte **Standardisieren** einer Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, also $X \to Z := \frac{1}{\sigma}(X - \mu)$ funktioniert bei nicht nur bei einer Normalverteilung, sondern bei jeder Verteilung (mit $\sigma^2 > 0$): Z hat dann immer den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 (wie man leicht den Formeln $E(aX + b) = aE(X) + b$; $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ entnehmen kann).

Satz von Lindeberg – Lévy

Haben die n **unabhängigen** Zufallsvariablen X_i $(i = 1, \dots, n)$ die gleiche Verteilung mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, so konvergiert die Folge $F_n(z)$ der standardisierten Zufallsgrößen
$Z := \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$ für $n \to \infty$ gegen die Standard-Normalverteilung, also

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Bemerkungen:

a) Den Beweis dieses Satzes schenken wir uns. Was man aber unmittelbar sieht, ist, dass $Z := \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$ die Standardisierung von $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist, also den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 hat: Bezeichnen wir dazu (zur Unterscheidung) die gemeinsamen Erwartungswerte und Varianzen der X_i mit μ bzw. σ^2, und Erwartungswert und Varianz von $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit μ_X bzw. ${\sigma_X}^2$, so ist wegen der stochastischen Unabhängigkeit der X_i

   $\mu_X = E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu$ und
   ${\sigma_X}^2 = Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n\sigma^2$, folglich gilt für die Standardisierung Z von X:
   $Z = \frac{1}{\sigma_X}(X - \mu_X) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}[(\sum_{i=1}^{n} X_i) - n\mu)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)$

b) Der **Satz von Ljapunow** (1901) ist eine **Verallgemeinerung**, welche auch auf (stochastisch unabhängige) Zufallsvariablen anwendbar ist, welche nicht identisch verteilt sind. Wir sehen uns hingegen einen wichtigen **Spezialfall** des Satzes von Lindeberg – Lévy an, welcher von Laplace 1812 bewiesen wurde, nämlich den

Grenzwertsatz von Moivre – Laplace

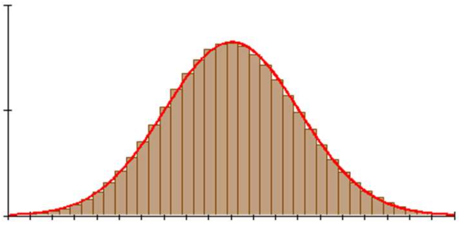
Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt mit den Parametern mit den Parametern n und p, so konvergiert die Folge $F_n(z)$ der Zufallsgrößen $Z := \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ für $n \to \infty$ gegen die Standard-Normalverteilung, also

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Bemerkungen:

a) Wir denken uns $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ als n −fache unabhängige Wiederholung eines Bernoulli-Experiments. Dieses wird jeweils durch die Zufallsvariable X_i beschrieben: $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$. Dann ist $\mu_X = np$ und ${\sigma_X}^2 = np(1 - p)$, also ist $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ die Standardisierung von X, und damit ist Moivre – Laplace ein Sonderfall von Lindeberg – Lévy.

b) Wir können den Grenzwertsatz von Moivre – Laplace auch so lesen: Hat eine Zufallsvariable X eine Binomialverteilung $F(x)$ mit den Parametern n und p, also
$F(x) = \sum_{0\le i\le x} f(i) = \sum_{0\le i\le x} \binom{n}{i} \cdot p^i(1-p)^{n-i}$,
dann ist (für hinreichend große Werte von n) $F(x)$ näherungsweise eine Normalverteilung mit $\mu = np$ und $\sigma^2 = np(1-p)$, und es gilt somit $F(x) \approx \Phi(z)$ mit $z := \frac{1}{\sigma}(x-\mu)$.



https://123mathe.de/approximation-binomialverteilung

c) Als **Kriterium** für die Zulässigkeit der Approximation wird allgemein $n > \frac{9}{p\cdot(1-p)}$ angegeben. Weil die Funktion $p \cdot (1-p)$ bei $p = 0{,}5$ ihr Maximum hat, ist die Approximation einer Binomialverteilung durch eine Normalverteilung auch schon bei kleineren Werten für n zulässig, je mehr p sich dem Wert 0,5 nähert, d.h. je symmetrischer die Binomialverteilung ist.

d) **Stetigkeitskorrektur**: Die Normalverteilung ist stetig, die Binomialverteilung hingegen diskret. Man kann deshalb die Approximation verbessern durch eine sog. Stetigkeitskorrektur: Anstatt
$P(X \le x) = F(x) \approx \Phi(z) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ nimmt man
$P(X \le x) = F(x) \approx \Phi\left(\frac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$, und anstatt
$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$ nimmt man
$$P(x_1 \le X \le x_2) \approx \Phi\left(\frac{x_2+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

e) Der Grenzwertsatz von Moivre – Laplace hat auch eine „**lokale Variante**", also eine Approximation von $P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x(1-p)^{n-x}$ durch die entsprechende Dichte einer Normalverteilung:
Mit $q = 1-p$, $\mu = np$, und $\sigma^2 = npq$ gilt für $n > \frac{9}{p\cdot q}$ die Näherung $P(X = x) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Beispiel: Ein regelmäßiger Würfel wird $n = 600$ mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) mindestens 110 mal, b) genau 110 mal eine 6 geworfen wird?
Die Zufallsgröße X = Anzahl der geworfenen Sechsen ist binomialverteilt mit den Parametern
$n = 600$, $p = \frac{1}{6}$, $\mu = np = 100$, $\sigma^2 = npq = \frac{500}{6}$ Wegen $n = 600 > \frac{9}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = 64{,}8$ ist, greift Moivre – Laplace:
Es ist
$P(X \ge 110) = 1 - P(X \le 109) \approx 1 - \Phi\left(\frac{109+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{109{,}5-100}{\sqrt{83{,}\overline{3}}}\right) = 1 - \Phi(1{,}04067) \approx 0{,}1492$
$P(X = 110) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 83{,}\overline{3}}} \cdot e^{-0{,}6} \approx 0{,}02398.$
Vergleich mit den „exakten" Werten:
$P(X \ge 110) = 1 - P(X \le 109) = 1 - \sum_{k=0}^{109}\binom{600}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{600-k} \approx 0{,}1492$
$P(X = 110) = \binom{600}{110} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{110} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{490} \approx 0{,}02344$