TECHNISCHE HOCHSCHULE INGOLSTADT | Fakultät I
Prof. Dr. Katherine Roegner | Mathematik 1 für KI

Übungsblatt 8

Konvergenzradius und -intervall

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(5x-3)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}x^n$

$$\text{a) } \rho = \frac{1}{5},\ I = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{b) } \rho = \frac{1}{2},\ I = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

$$\text{c) } \rho = 0,\ I = \{0\}$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Maclaurin-Reihe der Funktion $f(x) = \cos(x^2)$.

b) Leiten Sie die Reihe in Teil a) ab.

c) Leiten Sie die Funktion $f(x)$ ab. Bestimmen Sie die Maclaurin-Reihe von $f'(x)$.

d) Zeigen Sie, dass die Reihen in b) und c) identisch sind.

a) Die Maclaurin-Reihe der Funktion $\cos x$ ist gegeben durch

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Von daher ist die Maclaurin-Reihe der Funktion $f(x) = \cos(x^2)$

$$\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k}}{(2k)!}.$$

b) Für $k=0$ ist $(-1)^k\frac{x^{4k}}{(2k)!}$ eine Konstante. Die Ableitung des ersten Summanden ist 0.

$$(\cos(x^2))' = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4kx^{4k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2x^{4k-1}}{(2k-1)!}$$

c) Die Maclaurin-Reihe der Funktion $\sin x$ ist gegeben durch

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$f'(x) = -2x\sin(x^2)$ ist identisch zu der Maclaurin-Reihe

$$\begin{aligned}
-2x\sin(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-2x) \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-2x) \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2x^{4k+3}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

d) Wir führen eine Indexverschiebung durch:

$$\begin{aligned}
(\cos(x^2))' &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2x^{4k-1}}{(2k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2x^{4(k+1)-1}}{(2(k+1)-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2x^{4k+3}}{(2k+1)!} \\
&= -2x\sin(x^2)
\end{aligned}$$

Aufgaben aus Edwards und Penney, *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall (1986).