Skript zum Modul “Mathematik 1 für KI”

Studiengang: Künstliche Intelligenz

Prof. Dr. Katherine Roegner
Technische Hochschule Ingolstadt
Stand: 2. Dezember 2019

Contents

1 Aussagenlogik

Was ist eine Aussage? Welche Verknüpfungen gibt es bei Aussagen? Wie beweist man die Korrektheit einer Aussage? In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung zu diesen Themen geben.

1.1 Aussagen

Eine Aussage ist grob formuliert ein Ausdruck, der entweder wahr oder falsch ist. Wir können bei einer Aussage immer entscheiden, ob diese stimmt oder nicht.[1]

Beipiele (Aussage / keine Aussage)

- Ein Maß Bier kostet durchschnittlich $11{,}50$ Euro auf dem Oktoberfest in München 2016. (Aussage)
  Ein Maß Bier kostet durchschnittlich $11{,}50$ Euro. (keine Aussage)

- Der Luftweg zwischen der THI und Berlin Alexanderplatz beträgt 560 Kilometer. (Aussage)
  Eine Fahrt zwischen Ingolstadt und Berlin beträgt 560 Kilometer. (keine Aussage)

- Die Menge alle Lösungen der Gleichung $3x^2 + 7x = 4$ ist gleich der Menge aller Lösungen der Gleichung $3x^2 + 7x - 4 = 0$. (Aussage)
  $3x^2 + 7x = 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 7x - 4 = 0$. (keine Aussage / diese Schreibweise soll vermieden werden!)

Bemerkung
Bei den ersten zwei Beispielen handelt es sich um eine genaue/ungenaue Formulierung der Zeit bzw. des Ortes. Im dritten Beispiel ist nur die erste Variante eine Aussage. Bei der zweiten Variante handelt es sich um eine Aussagenform, die bedauerlicherweise in der Schulmathematik häufig als tatsc̈hliche Aussage gilt. Die Gleichungen können jedoch nur auf Gültigkeit geprüft, wenn eine Zahl für x eingesetzt wird. Somit ist diese zweite Variante keine Aussage. Dieser Unterschied ist für Normalsterbliche völlig egal, aber bei Mathematikern und Informatikern eben nicht.

1.2 Logische Verknüpfungen und Wahrheitstabellen

Eine logische Variable p stellt den Wahrheitswert eine Aussage dar. Hierbei kann p 0 (falsch) oder 1 (wahr) annehmen. Manchmal ist es hilfreich die Negation von p ($\neg p$) zu betrachten.

Haben wir eine zweite Variable q, dann können wir die zwei Variablen verknüpfen, um eine neue Aussage zu erhalten. Die grundlegenden Operationen sind $\wedge$ (Und), $\vee$ (Oder), XOR (exklusives Oder), $\Rightarrow$ (Implikation) und $\Leftrightarrow$ (Äquivalenz). Diese Verknüpfungen werden durch eine *Wahrheitstabelle* oder *Wahrheitstafel* definiert. Diese Tabelle gibt alle mögliche Kombinationen für die Werte von p und q und den Wert der Verknüpfung an. Die logischen Werte von p und q sind jeweils 0 (falsch) und 1 (wahr).

[1] Graue Zonen gehöhren zum Gebiet der “Fuzzy Logik”.

Die Verknüpfung Und wird so definiert.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Der logische Wert von Und ist nur wahr, wenn p und q gleichzeitig wahr sind.

Die Operation Oder ist wahr, wenn mindestens einer von p und q wahr ist. Dies ist anders als "entweder oder", welches dem XOR entspricht. Diese zwei Operationen sind in der folgenden Wahrheitstabelle aufgeführt.

p	q	$p \vee q$	p XOR q
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Die zwei Operationen $\Rightarrow$ (Implikation) und $\Leftrightarrow$ (Äquivalenz) sind miteinunder verbunden, sodass wir diese in folgender Wahrheitstafel gleichzeitig definieren.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Äquivalenz nimmt nur den Wert 1 an, wenn p und q den selben Wert haben. Zwei Aussagen sind jedoch äquivalent, wenn

$$p \Leftrightarrow q$$

nur den Wert 1 annimmt. Man spricht von einer *Tautologie*. Als kleine Übung könnte die folgende Äquivalenz gezeigt werden:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)).$$

Die Implikation ist nicht intuitiv, denn $p \Rightarrow q$ (sprich aus p folgt q oder p impliziert q) ist wahr selbst wenn p falsch ist. Warum haben sich die Mathematiker so etwas ausgedacht? Der Sinn davon wird hoffentlich durch das nächste Beispiel deutlich.

Beispiel

Formulieren wir es erst positiv: Eltern könnten ihren Kinder versprechen, wenn sie brav sind, bekommen sie zum Geburtstag ein Geschenk. Seien dazu p der Wahrheitswert der Aussage "Wenn du brav bist" und q der Wahrheitswert der Aussage "bekommst du ein Geschenk". Ist das Kind nicht brav ($p = 0$), können die Eltern dem Kind etwas schenken ($q = 1$) oder nicht ($q = 0$). Sie haben sich nicht widersprochen und alles ist gut ($(p \Leftrightarrow q) = 1$). Ist das Kind brav ($p = 1$) und bekommt sein Geschenk ($q = 1$), dann ist auch alles gut ($(p \Leftrightarrow q) = 1$). Beschissen ist nur, wenn das Kind brav ist ($p = 1$) und trotzdem kein

Geschenk ($q = 0$) bekommt. Die Eltern haben sich widersprochen und nun ist mit Recht $(p \Leftrightarrow q) = 0$.

Eltern, die ihre Kinder bedrohen, lügen mehr. In dieser Situation sind $\neg p$ der Wahrheitswert der Aussage "Wenn du nicht brav bist" und $\neg q$ der Wahrheitswert der Aussage "bekommst du kein Geschenk". Ist das Kind nicht brav ($\neg p = 1$), und doch ein Geschenk bekommt ($\neg q = 0$), was meistens der Fall ist, haben die Eltern sich widersprochen. Nur die harten Nüsse schaffen es, sich nicht zu widersprechen, und dann landen diese ehrlichen Menschen irgendwann im Altersheim.

Stellen wir diese Situationen in einer gemeinsamen Wahrheitstabelle dar.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1

Wir sehen, dass die Aussagen $p \Rightarrow q$ und $\neg p \Rightarrow \neg q$ nicht äquivalent sind. Bitte diese Tatsache einprägen. Es ist ein häufiger Fehler in Prüfungen! Richtig ist die Äquivalenz der Implikation zu der *Kontraposition* $\neg q \Rightarrow \neg p$:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1

1.3 Mathematische Beweise

Bevor wir uns mit verschiedenen Methoden beschäftigen, eine allgemeine wichtige Warnung:
Ein logischer Fehler, welcher sehr häufig vorkommt, ist das, was gezeigt werden soll, anzunehmen.[2] Beispielsweise um zu zeigen, dass eine Formel richtig ist, setzen Studierenden irrtümlicherweise beide Seiten gleich und rechnen nach. Das ist falsch. Wenn wir annehmen, was gezeigt werden soll, auch wenn die Formel nicht gilt, können wir zu einem richtigen Schluss kommen. Das folgt aus die Implikation. Falsche Prämissen (Vordersatz) können zu wahren Ergebnissen führen. Richtig wäre in dieser Situation die kompliziertere Seite zu vereinfachen, bis die einfachere Seite entsteht. Dies ist manchmal mühsam, aber nur so ist die Argumentation logisch schlüssig.

Ähnlich geht ein *direkter Beweis* ($p \Rightarrow q$). Man nimmt an, dass die Prämisse p wahr ist, und rechnet oder argumentiert bis die Wahrheit von q gezeigt wird.

[2] Machen Sie diesen Fehler bitte nicht! In einer Prüfungssituation werden gnadenlos Punkte abgezogen. In der Realität stürzen die Märkte ein, und die Welt, wie wir sie kennen, existiert nicht mehr.

Beispiel (direkter Beweis)
Sei n eine ungerade (natürliche) Zahl.[3] Dann ist n^2 auch eine ungerade Zahl.

Beweis. Wir nehmen an, dass $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl ist. Dann hat n die Form $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (die ungerade Zahlen können als eine gerade Zahl +1 dargestellt). Durch quadrieren erhalten wir

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

mit $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Dies ist wiederum der Form einer geraden Zahl +1. Daraus folgt $n^2 \in \mathbb{N}$ ist eine ungerade Zahl.

Bei einem sogenannten Widerspruchsbeweis wird angenommen, dass p wahr ist und q falsch ist. Falls ein Widerspruch entsteht, dann ist die Annahme, dass q falsch ist, falsch gewesen. Damit folgt q aus p.

Beispiel (Widerspruchsbeweis)
Es existieren unendlich viele Primzahlen.

In diesem Beispiel ist nicht sofort klar, was p und q sind. Wir formulieren die Aussage als Implikation: p sei der Wahrheitswert der Aussage M ist die Menge aller Primzahlen, q sei der Wahrheitswert der Aussage M enthält unendlich viele Elemente.

Beweis. Angenommen M ist die Menge aller Primzahlen und M ist endlich. Dann besteht M aus den Primzahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$, wobei $m_i \neq m_j$ für alle $1 \leq i < j \leq k$. Betrachten wir das Produkt aller Primzahlen und addieren 1 dazu:

$$n = m_1 m_2 \cdots m_k + 1.$$

Diese natürliche Zahl ist zu jeder Primzahl in M teilerfremd, denn m_i teilt $m_1 m_2 \cdots m_k$ aber nicht 1, also kann keine m_i die Summe $m_1 m_2 \cdots m_k + 1$ teilen. D.h. n ist eine Primzahl im Gegensatz zu der Annahme, dass $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ alle Primzahlen enthählt. Die Annahme, dass M endlich sei, ist falsch gewesen. Es folgt daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Hier ist noch ein (scherzhaftes) Beispiel, welches nicht so gut im Deutschen deutlich wird.

Theorem
The natural numbers are interesting.

Proof by contradiction. Suppose the natural numbers are not interesting. Then, by the well-ordering principle, there must be a least such one, which makes it interesting. This contradicts the assumption that the natural numbers are not interesting. Thus the natural numbers are indeed interesting. qed

Haben wir eine Aussage, die für alle n bewiesen werden soll, verwendet man i.d.R. "vollständige Induktion". Empfehlenswert ist ein sicherer Umgang mit dieser Methode, um u.a. die Richtigkeit von Algorithmen zu untersuchen.

---

[3] Die natürlichen Zahlen bestehen aus die Zahlen $1, 2, 3$, usw.

Bevor die vollständige Induktion genauer definiert wird, ist eine Motivation nötig. Die Methode ist kinderleicht, wenn man die Herangehensweise verstanden hat. Bis man diese versteht, naja das kann dauern. Keine Panik falls man nur Bahnhof versteht. Irgendwann, nach ausreichender Übung, macht's klack.

Als Motivation betrachten wir eine Reihe von unendlich viele Dominosteinen, die in einer Reihe aufgestellt sind. Schubsen wir den ersten Stein, sodass dieser fällt, dann sollen alle nachfolgenden Steine auch fallen. Was könnte schief gehen? Vielleicht schubsen wir nicht kräftig genug, und der erste Dominostein bleibt stehen. Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist und dass wir so weit in der Reihe gekommen sind, dass die ersten n-ten Dominosteine gefallen sind. Muss das unbedingt heißen, dass der $(n + 1)$-te Stein fällt? Nein! Es könnte irgendwo eine größere Lücke geben. D.h. wir müssen uns vergewissern, dass die Abstände zwischen den Steinen nicht zu groß sind. Haben wir kräftig genug geschubst und sind die Abstände zwischen den Dominosteine klein genug, dann fallen (theoretisch) alle Dominosteine.

Dieses Szenario ist ganz analog zu der vollständigen Induktion.

Beweismethode (vollständige Induktion)

1. Gegeben sei die Aussage $A(n)$, die von n abhängt mit n eine natürliche Zahl.

2. Es muss als Erstes gezeigt werden, dass die Aussage $A(1)$ stimmt. (Manchmal fängt man mit einer höheren Zahl an. Die Methode verfolgt jedoch das selbe Prinzip.) Hier setzt man die Eins in die Aussage für n ein und argumentiert (beispielsweise durch eine Berechnung), dass die Aussage $A(1)$ gültig ist. (Induktionsanfang: IA)

3. Im nächsten Schritt wird angenommen, dass die Aussage $A(n)$ für ein beliebiges aber festes n, welches nicht durch eine Zahl ersetzt werden soll, gilt. (Induktionsvoraussetzung: IV)

4. Als drittes Schritt wird gezeigt, dass aus $A(n)$ die Aussage $A(n + 1)$ folgt. (Induktionsbeweis: IB)

Beispiel (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie, dass die Summe der ersten n Zahlen $\dfrac{n(n+1)}{2}$ beträgt.

Wir setzen $A(n)$ zu der Behauptung $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, wobei $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$ darstellt. ($\sum$ ist das *Summensymbol*).

IA: $A(1)$ gilt, da einerseits ist nach Definition des Summensymbols $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ und andererseits gilt durch Einsetzen in die rechte Seite $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. [4]

[4]Es ist wichtig, die enzelnen Seiten der Gleichung zu prüfen. Durch Einsetzen in jede Seite der Gleichung gleichzeitig wie

IV: Angenommen $A(n)$ gilt für ein bestimmtes jedoch beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h. für n gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

IB: Zu zeigen, aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$, d.h. $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

(Fangen wir mit der linken Seite an und formen um, bis wir die rechte Seite erreicht haben. Dabei ist der Sinn von der Methode, irgendwann IV zu verwenden.)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&\overset{\text{mit 1 erweitern}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&\overset{(n+1) \text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}
$$

was zu zeigen war. Die Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen.

Bemerkung
Man könnte denken, dass der Induktionsbeweis immer anwendbar ist. Dies tritt auf, da die Aufgaben so konstruiert sind, dass alles klappt.

In der Praxis kommt es oftmals vor, dass man ein Muster entdeckt, welches nur zufällig für die ausgewählten Zahlen zutrifft.
Als Beispiel betrachten wir die Aussage alle ungeraden Zahlen größer 1 sind Primzahlen. 3 ist eine Primzahl, 5 ist eine Primzahl, 7 ist eine Primzahl. Das Argument reicht nicht. Im nächsten Schritt kommt ein Gegenbeispiel: 9 ist keine Primzahl.

2 Zahlenmengen

Die ganzen Zahlen hat der lieben Gott gemacht. Alles andere ist Menschenwerk.
– Leopold Kronecker

$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2}$, sieht es so aus, als ob angenommen wurde, was bewiesen werden soll! Wenn man den Sinn tatsächlich verstanden hat, wurde man dies nicht so aufschreiben. Ein leicht verdienter Punkt in der Prüfung geht so verloren.

2.1 Bekannte Zahlenmengen

Eine Menge ist einfach eine Sammlung von Objekten.
Die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

enthält die intuitivsten Objekte der Mathematik. Diese Zahlen sind entstanden, da die Menschen das Bedürfnis hatten, Objekte (wie etwa Nutzvieh) zu zählen.

Die Teilung des Tages in Stunden, Stunden in Minuten und Minuten in Sekunden, Winkeln bei der Astronomie und Navigation, Steuern auf Grundstücke: die Menschheit hat sehr früh den Begriff Brüche benutzt. Brüche, wie wir sie heutzutage verwenden, existierten in Europa erst ab dem 17. Jahrhundert.[5]
Im Gegensatz zu früheren Zeiten zählen auch negative Werte zu den rationalen Zahlen (oder Quotienten)

$$Q := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \right\}.$$

Teilerfremd bedeutet, dass es keine natürliche Zahl größer eins gibt, welche p und q in den ganzen Zahlen teilt. Beispielsweise sind $4 = 2 \cdot 2$ und $15 = 3 \cdot 5$ teilerfremd, $6 = 2 \cdot 3$ und $21 = 3 \cdot 7$ nicht. Mit dieser Definition ist die Darstellung von jeder Zahl in $\mathbb{Q}$ eindeutig. Zahlen, die nicht in dieser Form sind, sind äquivalent zu genau einer Zahl in $\mathbb{Q}$. Als Beispiel sind $\frac{2}{-4}$ und $\frac{-1000}{2000}$ zu $\frac{-1}{2} \in \mathbb{Q}$. äquivalent.

Die Zahl Null wurde vor 2600 Jahren in Indien mit der Entwicklung des dezimalen Stellenwertsystem erschaffen. Die erste schriftliche Verwendung kommt aus Kambodscha jedoch erst vor 1300 Jahren. Zu dieser Zeit sind negative Zahlen bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen erstmal aufgetreten.[6]
Insgesamt bilden $\mathbb{N}$, 0 und die negativen Zahlen die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Dass es irrationale Zahlen gibt (Zahlen, die nicht als Bruch exakt dargestellt werden können), ahnten die Alt-Griechen. In der Zeit von Pythagoras (vor 2500 Jahren) war die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ein wichtiges Resultat.

Satz (Irrationalität von $\sqrt{2}$)
Die Wurzel aus 2 kann nicht als Bruch dargestellt werden.

Beweis. Nach dem Satz des Pythagoras hat ein rechteckiges Dreieck mit den Katheten der Länge 1 eine Hypotheneuse der Länge 2

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Falls c eine rationale Zahl ist, müssen nach der Definition von $\mathbb{Q}$ zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit m und n teilerfremd existieren, sodass

$$c^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2.$$

[5] L. Pumfrey, *History of Fractions*, nrich.math.org/2515
[6] de.m.wikipedia.org

Es folgt daraus

$$m^2 = 2n^2,$$

sodass m^2 (eine ganze Zahl) eine gerade Zahl (nämlich $2n^2$) sein muss. Wäre m ungerade, so wäre dann auch m^2 ungerade. Folglich ist m eine gerade Zahl. D.h. $m = 2r$ für ein $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Damit ist

$$2n^2 = m^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

oder

$$n^2 = 2r^2.$$

Weil nun auch n gerade sein muss, sind m, n nicht teilerfremd, denn 2 teilt beide Zahlen. Dies widerspricht die Annahme, sodass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Das Problem mit den rationalen Zahlen ist, dass es zwischen zwei Brüchen immer wieder einen Bruch gibt. Die Menge der rationalen Zahlen ist nicht dicht.
Die reellen Zahlen (genannt von Rene Descartes im 17. Jahrhundert) wurden in ihrer Dezimalform im 16. Jahrhundert von Simon Stevin erstmals dargestellt. Eine zufriedenstellende Definition wurde erst 1871 durch Georg Cantor geliefert.[7] Interessanterweise gibt es reelle Zahlen, die kein Wurzel eines ganzzahligen Polynoms sind. Solche Zahlen heißen transzendente Zahlen. Zum Beispiel ist π transzendent (bewiesen durch Adrien-Marie Legendre Ende des 18. Jahrhunderts).

Wollen wir jedes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten komplett in linear Faktoren zerlegen, reichen die reellen Zahlen nicht. Über die reellen Zahlen ist beispielsweise die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

nicht lösbar. Es gibt keine reelle Zahl mit $x^2 = -1$. Dieses Problem führte zu der Einführung der komplexen Zahlen. Die erste Erwähnung wird Geronimo Cardano (16. Jahrhundert) zugeordnet. Ende der 18. Jahrhundert bis Mitte der 19. Jahrhundert wurden die Begriffe eingeführt und ihre arithmetische und geometrische Bedeutung (Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauß, William Hamilton) untersucht.
Die Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i \,|\, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

ist groß genug, um jedes Polynom mit ganzen Koeffizienten, reellen Koeffizienten, sogar komplexe Koeffizienten komplett zu zerlegen; d.h. es gibt so viele Nullstellen wie der Grad des Polynoms.
Wichtig ist, dass die komplexen Zahlen (wie die reellen Zahlen) einen Körper bilden. Alle Gesetze (Distribution usw.) gelten auch hier. Es gibt auch Körper, die zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ liegen. Diese sogenannten Körpererweiterungen bilden ein Fundament für moderne kryptographische Verfahren. Es lohnt sich deshalb, die komplexe Zahlen näher zu betrachten.

2.2 Komplexe Zahlen

2.2.1 Kartesische Darstellung der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl hat die Form $z = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot i$, wobei a und b reelle Zahlen sind. Sie hat einen **Realteil** (Re$(z) = a$) und einen **Imaginärteil** (Im$(z) = b$). Das Symbol „i" ist eine abstrakte Zahl, für die gilt

[7] de.m.wikipedia.org

$i^2 = -1$. Dies ist nicht als ein Teil vom $\text{Im}(z)$ zu betrachten. Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet (in Symbolen: $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$).

Bemerkungen

- Um eine komplexe Zahl geometrisch darzustellen wurde die „Gauß'sche Zahlenebene" (logischerweise von Gauß) eingeführt. Hierbei wird die y-Achse in die „Imaginär-Achse" umbenannt. Die x-Achse bleibt reel. Die komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ wird dem Punkt $(a; b)$, der die **kartesischen Koordinaten** von z enthält, zugeordnet. In der Literatur werden die komplexen Zahlen deshalb auch mit dem kartesischen Produkt $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times i\,\mathbb{R}$ dargestellt. (Ob i vor oder hinter der reellen Zahl geschrieben wird ist egal.)
- Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ kann als eine komplexe Zahl verstanden werden, denn es gilt $a = a + 0 \cdot i$. Damit sind die reellen Zahlen in den komplexen Zahlen enthalten (in Symbolen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Zahlen der Form $z = b \cdot i = 0 + b \cdot i$ heißen **(rein) imaginär**.

Definition (Grundlegende Rechenregeln - Summe, Produkt, Konjugierte)
Für $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i, z_2 = a_2 + b_2 \cdot i \in \mathbb{C}$ ist die **Summe** $z_1 + z_2$ und das **Produkt** $z_1 \cdot z_2$ so definiert:

$$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 := (a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i.$$

Die zu $z := a + b \cdot i$ **konjugierte** Zahl $\overline{z}$ (sprich: z quer) ist gegeben durch:

$$\overline{z} := a - b \cdot i.$$

Bemerkung
Geometrisch betrachtet ist die zu $z = a + b \cdot i$ konjugierte Zahl $\overline{z}$ die Spiegelung des zugeordneten Punkts $(a; b)$ an der reellen Achse.

Beispiel (Rechenregeln für komplexe Zahlen)
Seien $z_1 := 1 - 2i,\ z_2 := 2 + 3i,\ z_3 := 3 - 4i$. Bestimmen Sie

$$z_1 + z_2 \quad , \quad z_3 - 2z_1 \quad , \quad z_1 \overline{z}_2.$$

$$z_1 + z_2 = (1 - 2i) + (2 + 3i) = 3 + i$$
$$z_3 - 2z_1 = (3 - 4i) - 2(1 - 2i) = 1 + 0i = 1$$
$$\overline{z}_2 = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$$

Rechenregeln für die Konjugation
Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 := a + b \cdot i$ gelten

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = a^2 + b^2 \qquad \overline{\overline{z_1}} = z_1 \qquad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Wir prüfen die erste Regel nach:

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + b \cdot i)\overline{(a + b \cdot i)} \overset{\downarrow \text{ Konjugation}}{=} (a + b \cdot i)(a - b \cdot i) \overset{\substack{\text{3. binom.} \\ \downarrow \text{ Formel}}}{=} (a^2 - b^2 \cdot i^2) \overset{\downarrow\, i^2 = -1}{=} a^2 + b^2 \qquad (*),$$

d.h. $z_1 \cdot \overline{z_1}$ ist eine reelle Zahl!

Erweitern mit der komplex-konjugierten Form ($\overline{z} = a - b \cdot i$)

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + b \cdot i \neq 0$. Um den Bruch $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + b \cdot i}$ als komplexe Zahl darzustellen, erweitern wir mit 1:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - b \cdot i}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

So haben wir die Zahl $\frac{1}{z}$ in die komplexe Schreibweise $c + d \cdot i$ mit $c = \frac{a}{a^2 + b^2}$ und $d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$ reelle Zahlen transformiert.

2.2.2 Komplexe Zahlen und Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl z kann auf verschiedene Weisen dargestellt werden. Es hängt vom Zweck oder von der Fragestellung einer Aufgabe ab, welche Darstellung benutzt werden soll. Wir haben in der Einführung zu komplexen Zahlen die kartesische Form $z = a + b \cdot i$ und die kartesischen Koordinaten $(a; b)$ schon kennengelernt. Diese vertraute Vorstellung kann jedoch eine Aufgabe viel schwieriger machen. Oft ist eine andere Darstellung hierfür günstiger.

Betrachten wir die Größen $r \geq 0$ (der Abstand vom Ursprung) sowie φ (der Winkel im Bogenmaß von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn). Dies ist möglich, weil jeder Punkt in der Ebene auf einem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ liegt, der den Mittelpunkt im Ursprung hat und den Radius r besitzt.

- Für $z = 0$ ist der Abstand vom Ursprung $r = 0$, sodass φ frei gewählt werden kann.
- Für $z \neq 0$ ist der Winkel im Bogenmaß bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Aus der Trigonometrie erhalten wir die Formeln, mit denen wir die Polarkoordinaten aus den kartesischen Koordinaten berechnen können:

$$a = r \cos \varphi$$
$$b = r \sin \varphi.$$

Diese Gleichungen führen zu einer anderen Schreibweise für $z = a + b \cdot i = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot i$, die sogenannte Polarform von z.

Definition (Polarform)
Die **Polarform** der komplexen Zahl z ist gegeben durch

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

Bemerkungen

- Für die Lesbarkeit wird i vor die Sinus-Funktion geschrieben.
- Ist $z \neq 0$, so ist r eindeutig und φ bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Normalerweise legt man einen Definitionsbereich in Form eines Intervalls der Länge 2π für φ (beispielsweise mit $[0; 2\pi[$ oder noch besser $]-\pi; \pi]$) fest, sodass die Darstellung eindeutig ist.
- Der Winkel φ heißt **Argument** von z. Für $z = 0$ gilt $r = 0$. Obwohl φ frei gewählt werden kann, ist es möglich, φ als Null festzulegen. In diesem Fall ist die Polarform der Zahl $0 + 0i$ einfach $0(\cos 0 + i \sin 0)$.
- Eine andere Notation oder Kurzform für die Polarform (die sogenannte Exponentialform) ist:

$$z = r \cdot \exp(\varphi \cdot i) = re^{\varphi \cdot i}.$$

- Die Exponentialform ist für die Multiplikation von komplexen Zahlen oder für das Lösen von Gleichungen der Form $z^n = a + b \cdot i$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ besonders vorteilhaft. Wie dies gemacht wird, wird später erklärt.

2.2.3 Umrechnung: Polarkoordinaten, kartesische Koordinaten

Sind die Polarkoordinaten $(r; \varphi)$ gegeben, so ist es simpel diese in kartesische Koordinaten umzurechnen, wie vorher beschrieben: $(a; b) = (r \cos \varphi; r \sin \varphi)$.

Beispiel (Polarkoordinaten in kartesischen Koordinaten)
Bestimmen Sie aus der Polarform von $z = 2(\cos \pi + (\sin \pi) \cdot i)$ die kartesische Form von z.

Die Polarkoordinaten sind leicht zu erkennen: $r = 2 \qquad \varphi = \pi$
Es gilt: $a = r \cos \varphi = 2 \cos \pi = -2 \qquad b = r \sin \varphi = 2 \sin \pi = 0$
Die kartesischen Koordinaten sind $(-2; 0)$, d.h. $z = a + b \cdot i = -2 + 0 \cdot i$ ist die kartesische Form von z.

Sind umgekehrt die kartesischen Koordinaten gegeben, gestaltet sich die Umrechnung etwas komplizierter. Der Abstand der komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ vom Ursprung ist nach dem Satz von Pythagoras immer noch einfach zu berechnen

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Das Argument φ wird so bestimmt:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad a = 0, b < 0 \\ \text{arctan}(\frac{b}{a}) & \text{für} \quad a > 0 \\ \text{arctan}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

(weil für $a \neq 0$ ist $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a}$ und für $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist $\text{arctan}(\tan(\varphi)) = \varphi$). Um zu verstehen, wie φ bestimmt wird, betrachten wir die verschiedenen Fälle.

$a = 0$: $z = a + b \cdot i$ ist eine imaginäre Zahl, d.h. der Punkt $(0; b)$ liegt auf der Imaginäre-Achse. Weil $r \geq 0$, ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $b > 0$ ist und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $b < 0$. (Im Fall $b = 0$ ist φ frei wählbar.)

Ist $a \neq 0$, setze $\alpha := \arctan(|\frac{b}{a}|)$.

$a > 0$: Der Punkt $(a; b)$ liegt im Quadrant I oder Quadrant IV, sodass φ im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ liegt. Weil dies den Wertebereich von arctan entspricht, ist $\arctan(\frac{b}{a}) = \varphi$. Es gilt für $b > 0$, dass $\varphi = \alpha$ und für $b < 0$, $\varphi = -\alpha$.

$a < 0$: Sei $z_1 := |a| + |b| \cdot i$. Der Punkt $z := (a; b)$ liegt im Quadrant II ($z = -\overline{z}_1$) oder Quadrant III ($z = -z_1$). Um den Winkel in den Quadranten II bzw. III zu bestimmen, müssen wir den Winkel für $(-a; -b)$ bestimmen und dann $\pi \quad (180°)$ dazu addieren.

Beispiel (kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten)
Bestimmen Sie die Polarkoordinaten $z = -\sqrt{3} + i$. Stellen Sie z in die Polarform und in die Exponentialform dar.

Wir betrachten den Punkt $(-\sqrt{3}; 1)$ in der Gauß'schen Ebene. Der Abstand von z zu $(0; 0)$ ist

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{-3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Aus der folgenden Tabelle für $\sin$ und $\cos$ (und $\tan$), die unbedingt auf den Spicker für die Prüfung enthalten sein sollte, lässt sich nun der Winkel φ exakt darstellen.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	undefiniert

Die Werte der Tabelle sind jedoch nur für den Quadrant I bestimmt. Es handelt sich in diesem Beispiel aber um einen Punkt im Quadrant II. Zuerst bestimmen wir

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right) = \arctan\left(\frac{|1|}{|-\sqrt{3}|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Weil das Vorzeichen von a mit dem Vorzeichen von b nicht übereinstimmt, wird zunächst $-\frac{\pi}{6}$ betrachtet. Um in den II Quadrant zu kommen, addieren wir π dazu: $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

Die Polarkoordinaten von $-\sqrt{3}+i$ sind $(r, \varphi) = (2; \frac{5\pi}{6})$. Die Polarform ist $z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + \sin(\frac{5\pi}{6}) \cdot i)$. In der Exponentialform ist z gegeben durch $re^{\varphi \cdot i} = 2e^{\frac{5\pi}{6} \cdot i}$.

Zur Prüfung der Antwort berechnen wir die kartesischen Koordinaten, um die Ausgangsdarstellung zu erhalten:

$$\begin{aligned} r \cdot e^{\frac{5\pi}{6} \cdot i} &= 2(\cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} \cdot i) \\ &= 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot i \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot i = -\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

2.3 Multiplikation komplexer Zahlen

Die Formel für die Multiplikation zweier komplexen Zahlen in kartestischen Form wurde bereits angegeben (siehe Seite 11). Diese Form ist natürlich richtig, aber es unterstütz unsere geometrische Vorstellung nicht. Als Vorarbeit für die Multiplikation zweier komplexen Zahlen in der Polarform werden zwei trigonometrische Identitäten benötigt:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

Definieren wir zwei komplexe Zahlen in Polarform:

$$z_1 := r_1(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha) \text{ und } z_2 := r_2(\cos\beta + i\cdot\sin\beta).$$

Das Produkt rechnen wir rein algebraisch und dann wenden wir die Identitäten an.

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)\\ &= r_1r_2(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)\\ &= r_1r_2(\cos\alpha\cos\beta + i\cdot\cos\alpha\sin\beta + i\cdot\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta)\\ &= r_1r_2((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta))\\ &= r_1r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

Rechenregel in Polarform
Das Produkt zweier komplexen Zahlen $z_1 := r_1(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ und $z_2 := r_2(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)$ in Polarform ist gegeben durch

$$z_1\cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta)).$$

Bemerkungen

- In Exponentialform ist die Formel noch kompakter. Für $z_1 := r_1e^{\alpha\cdot i}$, $z_2 := r_2e^{\beta\cdot i}$ gilt
$$z_1\cdot z_2 = r_1r_2e^{(\alpha+\beta)i}.$$
- Die Beträge werden miteinander *multipliziert*. Die Argumente werden miteinander *addiert*.

Beispiele
Bestimmen Sie die folgenden Produkte der komplexen Zahlen

$$z_1 := 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right),\ z_2 := \frac{1}{3}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{-\pi}{6}\right),\ z_3 := \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}:$$

$z_1\cdot z_2, z_1\cdot\frac{1}{z_2}, (z_3)^k$ für, $k = 1,\ldots,9$.

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{-\pi}{6}\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{6}\right)\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

In der Exponentialform wendet man die Potenzgesetze an.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}}{\frac{1}{3}e^{\frac{-\pi}{6}\cdot i}} \\ &= 2e^{\frac{\pi}{3}\cdot i} \cdot 3e^{\frac{\pi}{6}\cdot i} \\ &= 6e^{\frac{3\pi}{6}\cdot i} \\ &= 6e^{\frac{\pi}{2}\cdot i} \end{aligned}$$

Interessanterweise beim Potenzieren einer komplexen Zahl der Länge 1 mit Argument π mal einer rationalen Zahl wiederholen sich die Ergebnisse nach einigen Schritte, da $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ und $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$.

$$\begin{aligned} z_3^1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \\ z_3^2 &= \cos\frac{2\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i \\ z_3^3 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4} \\ z_3^4 &= \cos\frac{4\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1 \\ z_3^5 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4} \\ z_3^6 &= \cos\frac{6\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = -i \\ z_3^7 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4} \\ z_3^8 &= \cos\frac{8\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{8\pi}{4} = \cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi) = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1 \\ z_3^9 &= \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Dieses Verhalten deutet auf das nächte Resultat hin.

Satz (Wurzel aus 1)
Sei n eine natürliche Zahl. Die n-te Wurzel aus 1 sind die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1.$$

Die Lösungen nehmen in Exponentialform die Gestalt

$$z_k = e^{\frac{2\pi k}{n}\cdot i}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n$ an.

Bemerkungen

- Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind gleichmäßig auf dem komplexen Einheitskreis verteilt.
- Die Lösungen einer Gleichung der Form $z^n = w = re^{\varphi \cdot i}$ sind dann $z_k = (\sqrt[n]{r})e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\cdot i}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Diese Lösungen sind gleichermassen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$ verteilt.

2.4 Komplexe Polynomen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir Gleichungen der Form $z^n = 1$ bzw. $z^n = w$ betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir allgemeinere Gleichungen betrachten. Insbesondere wollen wir die Nullstellen vom komplexen Polynomen genauer beschreiben.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)
Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- Sei n der Grad des Polynoms p. Dann hat p genau n (nicht unbedingt verschiedene) komplexe Nullstellen, d.h. die Nullstellen können mehrfach auftreten.
- Seien die Koeffizienten eines Polynoms alle reelle Zahlen. Die echten komplexen Nullstellen kommen in komplex konjugierten Paaren; d.h. ist $a + b \cdot i$ mit $b \neq 0$ eine Nullstelle von p, so ist auch $a - b \cdot i$ eine Nullstelle von p.

Beispiele

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^3 - 3z^2 + z - 3$.

b) Ein komplexes Polynom 3. Grades mit reellen Koeffizienten hat die Nullstellen 4 und $3 + 4i$. Hat das Polynom weitere Nullstellen? Wenn ja, welche?

a) Bei einem Polynom vom Grad zwei kann die Mitternachtsformal einfach angewendet werden, um die Nullstellen zu berechnen (selbst wenn die Koeffizienten komplex sind). Hier geht es jedoch um ein Polynom vom Grad 3. Entweder muss man die erste Nullstelle raten und mit Polynomdivision weiter arbeiten, oder man lernt ein paar Tricks beim Ausklammern. Ich persönlich bevorzuge die zweite Variante.

$$\begin{aligned} z^3 - 3z^2 + z - 3 &= (z^3 + z) + (-3z^2 - 3) \\ &= z(z^2 + 1) - 3(z^2 + 1) \\ &= (z^2 + 1)(z - 3) \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind dementsprechend $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 3$.

b) Ein komplexes Polynom vom Grad 3 hat genau 3 Nullstellen, sodass eine weitere Nullstelle existiert. Die Koeffizienten des Polynoms sind reell, sodass echt komplexe Nullstellen in komplex konjugierten Paare auftreten. Die Nullstelle 4 ist reell (passt schon). Die Nullstelle $3 + 4i$ ist komplex, sodass $3 - 4i$ die dritte Nullstelle des Polynoms ist.

3 Relationen und Funktionen

Der Begriff "Funktion" ist von großer Bedeutung in der Analysis. Noch allgemeiner ist der Begriff "Relation". Relationale Datenbanken kommen in der Informatik sehr häufig vor, sodass es sich lohnt, diese Verallgemeinerung von Funktionen zu betrachten.
Eine Relation ist grob formuliert eine Menge von geordneten n-Tupeln. Eine Funktion lässt sich als geordnete Paare darstellen (denke einfach an den Graph einer Funktion). Die mathematische Formulierung ist ziemlich abstrakt. Für die Darstellung im Computer ist es jedoch notwendig, sich mit diesen Objekten auseinanderzusetzen.

3.1 Produktmengen und Relationen

Definition - Produktmenge, Potenzmenge
Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen. Dann heißen die folgenden Mengen *Produktmengen*:

$$A_1 \times A_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\} \text{ (\textit{geordnete Paare})}$$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\} \text{ (\textit{geordnete } n\text{-\textit{Tupel}})}$$

Spezialfall (*Potenzmenge*): $A := A_1 = A_2 = \cdots = A_n$. Definiere

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A \ (n \text{ Mal}).$$

Beispiele - Produktmengen

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ xy\text{-Ebene}$$
$$A := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$$
$$A^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in [0, 1]\}, \text{ Einheitswürfel}$$

Definition - Relation
Eine Teilmenge R einer Produktmenge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ heißt (*n-stellige*) *Relation*.

Beispiel - Relation
Die Menge

$$R_{\text{Kreis}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

ist eine 2-stellige Relation.

Besondere Eigenschaften mancher Relationen $R \subseteq G^2$

1. *reflexiv*, wenn für alle $(x, y) \in R, (x, x) \in R$
2. *symmetrisch*, wenn für alle $(x, y) \in R, (y, x) \in R$
3. *transitiv*, wenn für alle $((x, y)$ und $(y, z)) \in R$, $(x, z) \in R$
4. *Äquivalenzrelation*, wenn Eigenschaften 1, 2 und 3 gelten.

Beispiel - keine Äquivalenzrelation
Die Relation "ist Geschwister von" ist keine Äquivalenzrelation. Diese ist zwar symmetrisch jedoch nicht reflexiv und nicht transitiv, denn man ist nicht Geschwister von sich selbst.

Definition - Kongruenz
Die Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen kongruent modulo n (Bezeichnung: $x \equiv y \bmod n$), wenn bei Division durch n der gleiche Rest bleibt.

Bemerkung
Ist $x \equiv y \bmod n$, so ist $x - y$ durch n teilbar (Rest 0). Notation: $n|(x - y)$ (sprich n teilt x minus y)

Beispiel - Äquivalenzrelation
Definiere die Relation $R_{\text{Kong}} := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | x \equiv y \bmod n\}$.

1. *reflexiv*: Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \equiv x \bmod n$, denn n teilt $x - x = 0$.
2. *symmetrisch*: Für jedes $(x, y) \in R_{\text{Kong}}$ gilt
$$n|(x - y) \Rightarrow n| - (y - x) \Rightarrow n|(y - x) \Rightarrow (y, x) \in R_{\text{Kong}}.$$
3. *transitiv*: Seien (x, y) und (y, z) in R_{Kong}. Dann gilt
$$n|(x - y) \text{ und } n|(y - z);$$
d.h. $n|(x - y + y - z)$ oder einfach $n|(x - z)$. Somit ist $(x, z) \in R_{\text{Kong}}$.
4. *Äquivalenzrelation*: Die Eigenschaften 1, 2 und 3 sind erfüllt. R_{Kong} ist eine Äquivalenzrelation.

Bei einer (2-stelligen) Äquivalenzrelation können Repräsentaten für die sogenannten Äquivalenzklassen gewählt werden.

Zum Beispiel sind die Äquivalenzklassen modulo 2 durch
$$[0] := \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$$
und
$$[1] := \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$$
gegeben.

Als weiteres Beispiel betrachten wir Kongruenz modulo 5. Die Repräsentanten können so gewählt werden: $0, 1, 2, 3, 4$. Die entsprechenden Äquivalenzklassen sind
$$[0], [1], [2], [3], [4].$$

Aufgabe
Entscheiden Sie, ob die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch und / oder transitiv sind. Gibt es darunter eine Äquivalenzrelation?

a) $G =$ Webseiten, $R \subseteq G \times G$ mit $R =$ Verlinkungen
b) "=": $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ wie etwa $(2, 1 + 1)$ oder $(2, 5 - 3)$
c) "<": $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$
d) "≤": $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$

3.2 Funktionen

Definition - Funktion
Seien D, B Mengen. Eine Relation heißt *Funktion* (oder Abbildung) von D nach B genau dann, wenn für jedes Element $x \in D$ existiert **genau** ein Element $y \in B$ mit $(x, y) \in f$.

Beispiel - Funktion
$f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit

$$f := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 |\, y = x^2\}$$

Einige Elementen von f : $(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)$
Dies ist eine Funktion.

Beispiel - keine Funktion
$D = B = \mathbb{R}$, $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 || x| = |y|\},$$

wobei $|x|$ der Betrag von x bezeichne:

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Dies ist keine Funktion, denn die Relation enthält beispielsweise die Elementen $(1, 1)$ und $(1, -1)$. (Test mit vertikalen Geraden darf den Graph der Relation in höchsten einen Punkt schneiden.)

Definition - funktionale Notation
$f : D \to B$ mit $y = f(x)$
$f : D \to B, x \mapsto y$
$f(x) = y$, falls D und B klar sind.

D ist der *Definitionsbereich* oder die *Definitionsmenge*.
B ist der *Bildbereich* oder die *Zielmenge*.
$f(D) := \{y \in B|$ es existiert $x \in D$ mit $y = f(x)\}$ heißt das *Bild* oder die *Wertemenge*.
Achtung! Die Bennung in der Literatur ist uneinheitlich.

Beispiel
Die Funktion $f := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 |\, y = x^2\}$ kann in funktionaler Notation so dargestellt werden:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2.$$

Der Definitionsbereich lautet $\mathbb{R}$: jede reelle Zahl lässt sich quadrieren.
Die Zielmenge ist, wie hier gegeben, $\mathbb{R}$.
Das Bild ist jedoch $\mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}| x \geq 0\}$, denn negative Zahlen können nicht als Quadrat einer reellen Zahl realisiert werden.

Definition - Umkehrfunktion
Ist $f : D \to B$ eine Funktion, so heißt

$$f_u : B \to D := \{(y, x) \in B \times D | (x, y) \in f\}$$

die *Umkehrrelation* oder *inverse Relation* von f.

Motivation
Wir untersuchen, wann f_u selbst eine Funktion ist. Dabei überlegen wir, was dabei schief laufen kann.

- B ist nur die Zielmenge. Es muss nicht sein, dass jedes $y \in B$ ein Urbild hat, d.h. ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ (wie etwa bei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$). Dann wird f_u eine ungültige Definitionsmenge haben.
- Es kann sein (wie etwa bei $f(x) = x^2$), dass ein y-Wert zu mehreren x-Werte zugeordnet ist ($f(1) = 1$, $f(-1) = 1$). Dann wird die Zuordnung für f_u nicht eindeutig sein (f_u enthält $(1, 1)$ und $(1, -1)$).

Definition - surjektiv/injektiv/bijektiv, invertierbar

- f ist *surjektiv*: $f(D) = B$
  So vergewissern wir uns, dass jedes Element in B mindestens ein Urbild hat.
- f ist *injektiv*: Für $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  So hat f keinen y-Wert mit mehreren Urbilder.
- f ist *bijektiv* oder *invertierbar*, falls f gleichzeitig surjektiv und injektiv ist. Dann ist die Umkehrrelation die **Umkehrfunktion**.

Ist f bijektiv, setzen wir $f^{-1} := f_u$.

Achtung! Die Umkehrfunktion ist nicht unbedingt der Kehrwert der Funktion.

Beispiel - Einschränkung der Definitionsmenge und Zielmenge
$f_a := \{(x, |x|) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ ist nicht surjektiv, denn Bild($\mathbb{R}$) = $\mathbb{R}_0^+$. (Bildbereich anpassen!)

$f_a := \{(x, |x|) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ ist nicht injektiv, denn $(1, 1), (-1, 1) \in f_b$. (Definitionsmenge zerlegen!)

$f_{b,0} := \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ ist bijektiv.
$f_{b,1} := \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ ist bijektiv.

Diese Funktionen sind invertierbar mit Umkehrfunktionen $f_{b,0}^{-1}$ und $f_{b,1}^{-1}$.

Beispiel - nicht konstante Geraden
Jede Gerade mit Steigung ungleich Null ist umkehrbar.

Sei $f(x) = y = mx + b$ eine Gerade mit $m \neq 0$. Wir vertauschen die Rollen von x, y (entspricht eine Spiegelung der graphischen Darstellung der Funktion an der Winkelhalbierenden) und lösen nach y auf.

$$\begin{aligned} x &= my + b \\ y &= \frac{x-b}{m} =: f^{-1}(x) \end{aligned}$$

Bemerkung
Setzen wir $f(x)$ für x in $f^{-1}(x)$, erhalten wir wieder x:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(mx+b) = \frac{(mx+b)-b}{m} = \frac{mx}{m} = x$$

Wann ist es überhaupt möglich, eine Funktion in eine andere Funktion einzusetzen?

Definition - Verknüpfung von Funktionen
Die Funktionen $f : D_f \to B_f$ und $g : D_g \to B_g$ können verknüpft werden, wenn $f(D_f) \subseteq D_g$. Dann gilt $g \circ f : D_f \to B_g$ ist definiert durch $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Diese Operation wird auch *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* genannt.

Bemerkungen

- Falls $h \circ (g \circ f)$ definiert ist, gilt $(h \circ g) \circ f$. (assoziativ)
- Im Allgemeinen gilt $g \circ f = f \circ g$ *nicht*. (nicht kommutativ)
- Sind $f : D \to B$ und $f^{-1} : B \to D$ Umkehrfunktionen, dann sind die Verknüpfungen $f^{-1} \circ f$ und $f \circ f^{-1}$ immer definiert und immer gleich die Identitätsfunktion: $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Beispiele - nicht kommutativ

- Seien
  $$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5x, \\ g &: \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$
  Die Verknüpfung $g \circ f$ ist gar nicht definiert, denn $B_f = \mathbb{R} \not\subseteq D_g = \mathbb{R}^{\geq 0}$. Beispielsweise ist $g(f(-1)) = g(-5)$ nicht definiert.

  Die Verknüpfung $f \circ g$ geht problemlos:
  $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}.$$
  Von daher ist die Komposition nicht kommutativ.
- Gegeben seien die Funktionen
  $$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5x, \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Verknüpfungen $h \circ f$ sowie $f \circ h$. Ist die Komposition kommutativ?

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(5x) = (5x)^2 + 3 = 25x^2 + 3$$
$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x^2 + 3) = 5(x^2 + 3) = 5x^2 + 15$$

Die Verknüpfung ist nicht kommutativ.

- Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5x,$$

und

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{3}x$$

kommutativ ist.

$$f \circ k = f(k(x)) = f(\frac{1}{3}x) = 5 \cdot \frac{1}{3}x = \frac{5}{3}x$$
$$k \circ f = k(f(x)) = k(5x) = \frac{1}{3}(5x) = \frac{5}{3}x$$

In diesem Fall gilt $f \circ k = k \circ f$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass Kommutativität vorhanden ist.

Definition - besondere Eigenschaften mancher Funktionen

- monoton steigend bzw. fallend
  für alle $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton steigend bzw. fallend
  für alle $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$
- achsensymmetrisch (y-Achse) oder gerade
  für alle $x : f(-x) = f(x)$
- punktsymmetrisch (zum Ursprung) oder ungerade
  für alle $x : f(-x) = -f(x)$
- periodisch (mit Periode T)
  für alle $x : f(x + T) = f(x)$
- nach unten beschränkt
  für alle $x : f(x) \geq m$
- nach oben beschränkt
  für alle $x : f(x) \leq M$
- beschränkt
  für alle $x : m \leq f(x) \leq M$

Klassen von Funktionen

- Polynome: $y = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
- Exponentialfunktion: $y = e^x$
- allg. Potenzfunktionen: $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$
- natürlicher Logarithmus: $y = \ln x$
- allg. Logarithmen: $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$
- trigonometrische Funktionen:
  $\sin, \cos, \tan = \frac{\sin}{\cos}, \cot = \frac{\cos}{\sin}$
- Arkusfunktionen:
  $y = \text{arcsin}(x) = \sin^{-1}(x), y = \text{arccos}(x) = \cos^{-1}(x), y = \text{arctan}(x) = \tan^{-1}(x)$
- hyperbolische Funktionen:
  $y = \text{cosh}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, y = \text{sinh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

4 Folgen

Einleitung

Im Folgenden wird versucht, eine eher umgangssprachliche Idee zu geben, was eine *Folge* ist und ob diese *konvergiert* oder *divergiert*. In einer Prüfungssituation, sollten natürlich die mathematischen Begriffen und Methoden verwendet werden, da eine umgangssprachliche Formulierung meistens nicht präzis ist.

Was ist eine (mathematische) Folge? Einfach ausgedrückt ist es eine Anordnung von Zahlen wie

Beispiel A: $0, 1, 0, 1, \ldots$

Beispiel B: $1, 2, 3, 4, \ldots$

oder

Beispiel C: $0{,}1; 0{,}11; 0{,}111; \ldots.$

Beispiel A wiederholt sich abwechselnd zwischen 0 und 1. Beispiele B und C hingegen scheinen immer größer zu werden, je weiter wir in die Folge schauen. Natürlich ist dies nur so, wenn die Definition der tatsächlichen Folge mit unserer Intuition übereinstimmt. Zum Beispiel könnte Beispiel B lauten:

$$1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1, \ldots.$$

Wie eine Folge mathematisch definiert ist, wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels betrachtet.
Es lässt sich fragen, ob die Folgenglieder (d.h. die einzelnen Zahlen in der Folge) in der gegebenen Reihenfolge gegen *einen* bestimmten Wert (*Grenzwert*) "streben" oder nicht.

- Die Folgenglieder im Beispiel A wechseln sich zwischen 0 und 1 ab. Es gibt keine eindeutige Zahl, die "angestrebt" wird. Diese Folge ist *divergent*.

- Angenommen bei der Folge im Beispiel B, die die natürlichen Zahlen darstellt, wachsen die Folgenmitglieder jeweils mit dem Abstand eins. Die Zahlen wachsen ohne Grenze. Es gibt keine reelle Zahl, die "angestrebt" wird, aber diesmal etwas anders als im Beispiel A. In diesem Fall reden wir von *bestimmter Divergenz.*
- Im Beispiel C werden die Abstände zwischen zwei Folgengliedern immer deutlich kleiner. In diesem Fall, "strebt" die Folge den Bruch $\frac{1}{9}$ an. Der mathematische Begriff hierfür ist *Konvergenz.*

Eine mathematische Präzisierung von (bestimmter) Divergenz und von Konvergenz sowie weitere prototypischen Beispiele werden im zweiten Abschnitt behandelt.
Anschließend werden im dritten Abschnitt die Rechenregeln für konvergente Folgen aufgeführt und angewendet, um typische Konvergenzbeweise aufzuzeigen.

4.1 Mathematische Definition einer Folge

Streng genommen sieht eine Folge etwas anders aus als in der Einleitung, obwohl dies nur eine andere Sichtweise ist.

Definition (Folge)
Eine *Folge* ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ auf die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \mapsto a_n$$

(sprich a bildet N nach R ab, wobei n auf a_n abgebildet wird).

Erklärung
Wenn wir eine Folge als eine Anordnung von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

betrachten, dann ist es so zu verstehen, dass das n-te Folgeglied a_n der Funktionswert von n unter der Abbildung a entspricht (Notation: $a(n) = a_n$). Diese Betrachtungsweise wird in diesem Kurs eher verwendet. Die Folge ist in diesem Zusammenhang mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach (a_n) bezeichnet.

Beispiele

- Schauen wir Beispiel A $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ nochmal an und üben wir diese neue Notation damit. Die Funktion
$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \mapsto \begin{cases} 0 & n \text{ ist ungerade} \\ 1 & n \text{ ist gerade} \end{cases}$$
stellt die Folge $0, 1, 0, 1, \ldots$ dar. Wir schreiben hierzu
$$(a_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots.$$
Hier sind einige Folgenglieder:
$$\begin{aligned} a(1) = a_1 &= 0, (n = 1 \text{ ist ungerade}) \\ a(2) = a_2 &= 1, (n = 2 \text{ ist gerade}) \\ a(37) = a_{37} &= 0 \\ a_{543859736} &= 1. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass egal welche Zahl n in die Funktion a eingesetzt wird, können wir leicht den Funktionswert (oder entsprechendes Folgenglied) bestimmen. Die Darstellung der Folge ist *explizit*.

- Eine *rekursiv* definierte Folge nimmt einen Startwert (manchmal auch mehrere Startwerte) an und bildet mit Hilfe dieses Werts (oder dieser Werte) sukzessiv die nachfolgenden Folgenglieder. Betrachten wir hierzu Beispiel C $(0{,}1; 0{,}11; 0{,}111; \ldots)$. Als Startwert nehmen wir $c_1 = 0{,}1 = \left(\frac{1}{10}\right)^1$. Die nächsten Folgenglieder sind

$$c_2 = 0{,}11 = 0{,}1 + 0{,}01 = c_1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$c_3 = 0{,}111 = 0{,}11 + 0{,}001 = c_2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3.$$

Das Muster ist jetzt offensichtlich:

$$c_{n+1} = c_n + \left(\frac{1}{10}\right)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, n > 1$$

(sprich: n Element von N (alternativ n in N) mit n größer als 1). Die Folge als Funktion explizit zu beschreiben wäre nicht so elegant.

4.2 Konvergenz und Divergenz

Wenden wir uns nun der Frage zu, ob eine Folge gegen einen bestimmten Wert "anstrebt". Diese Terminologie ist, wie in der Einleitung erwähnt, nicht präzis und dient nur dazu die Intuition aufzubauen. Die Idee ist, dass je weiter wir in die Folge schauen, je näher wir den Grenzwert annähern. Dies ist besser, aber das Argument reicht nicht aus, um den Grenzwert zu bestimmen.
Betrachten wir hierzu Beispiel C $(0{,}1; 0{,}11; 0{,}111; \ldots)$. Die Folgenglieder konvergieren tatsächlich gegen den Grenzwert $\frac{1}{9} = 0{,}11111111\ldots$, wie wir später zeigen wollen. Die Folgenglieder kommen jedoch auch näher an beispielsweise den Wert 1 oder sogar 100. Eine Folge sollte nur einen Grenzwert und nicht zwei verschiedene haben.

Definition (Konvergenz, Grenzwert)
Sei (a_n) eine Folge. Die Folge *konvergiert* gegen den *Grenzwert* A, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ (griechischer Buchstabe epsilon) ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

für alle $n > n_\varepsilon$. Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Bemerkung
Wir erinnern uns daran, wie Betragsungleichungen aufzulösen sind. Seien dazu a, b, c reelle Zahlen. Ist $|a + b| > c$, so müssen eine der beiden Fälle $a + b > c$ oder $-(a + b) > c$ erfüllt sein.
Die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|a + b| < c$$

ist hingegen äquivalent zu der Ungleichungskette

$$-c < a + b < c.$$

Erlaubte Operationen mit einer Ungleichungskette, ohne eine Fallunterscheidung durchzuführen, sind Addition, Subtraktion und Multiplikation oder Division mit einer positiven Zahl.

Erklärung
In unserem Fall, haben wir die Betragsungleichung $|a_n - A| < \varepsilon$. Diese Umgleichung wandeln wir in eine Ungleichungskette um:

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon.$$

Addieren wir A durchaus, erhalten wir

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Man spricht von einem ε-Toleranzbereich oder einem ε-Korridor. Die Folgenglieder müssen alle ab einem Punkt n_ε im Intervall $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ liegen.
Um zu zeigen, dass eine Folge gegen einen gegebenen Grenzwert konvergiert, müssen wir zeigen, dass für einen beliebigen Toleranzbereich ε alle Folgenglieder ab einem bestimmten Folgenglied a_{n_ε} einen Abstand kleiner als ε von dem Grenzwert A haben.
Der Abstand zwischen A und die Folgenglieder, die am Anfang der Folge (d.h. vor a_{n_ε}) vorkommen, sind völlig egal. Sie können in dem ε-Toleranzbereich liegen oder eben nicht. Entscheidend ist das Verhalten der Folgengliedern am Ende der Folge. Happy End!

Weil ε eine beliebige reelle Zahl ist und es unendlich viele reellen Zahlen gibt, müssen wir bei Konvergenzbeweisen mit Buchstaben rechnen. Wir können nicht jede beliebige Zahl ausprobieren. (Manchmal hilft es allerdings ein paar exemplarische Werte für ε auszuprobieren, um ein Gefühl für die Lösung zu erhalten.)
Behilflich kann auch der folgenden Satz sein: Für jede gegebene reelle Zahl r existiert eine natürliche Zahl m mit $m > r$.

Beispiele

- Eine konstante Folge, wobei alle Folgenglieder gleich sind, ist immer konvergent. Betrachten wir als Beispiel die Folge $(a_n) = -1, -1, -1, -1, \ldots$. Es ist nicht besonders schwer zu zeigen, dass diese Folge gegen den Grenzwert $A = -1$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $n_\varepsilon = 1$. Für alle $n > n_\varepsilon$ gilt
$$|a_n - A| = |-1 - (-1)| = 0 < \varepsilon.$$
- Beweisen Sie, dass die Folge (b_n) mit $b_n = \dfrac{1}{n}$ den Grenzwert $B = 0$ besitzt.
Zu zeigen: für ein gegebenes $\varepsilon > 0$, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt
$$|b_n - B| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$
Wähle dazu $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$, d.h. $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Für $n > n_\varepsilon$ gilt
$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

- Zeigen Sie, dass eine Folge der Form $(c_n) = (q^n)$ mit $|q| < 1$ gegen $C = 0$ konvergiert.

  Zu zeigen: für ein gegebenes $\varepsilon > 0$, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass
  $$|c_n - C| = |q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$$
  für alle $n > n_\varepsilon$.

  Gesucht ist eine natürliche Zahl n_ε mit der gegebenen Bedingung. Untersuchen wir die Ungleichung $|q^{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) können wir annehmen, dass $q > 0$ ist, da $|q|$ eine positive Zahl ist. Wir wissen noch nicht, ob solch eine Zahl n_ε exisitiert. Wenn das so wäre, dann wäre auch
  $$\left(\frac{1}{q}\right)^{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$$
  oder
  $$\log_{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{q}\right)^{n_\varepsilon} > \log_{\frac{1}{q}} \frac{1}{\varepsilon},$$
  d.h
  $$n_\varepsilon > \log_{\frac{1}{q}} \frac{1}{\varepsilon}.$$
  Dies ist immer möglich, denn $\log_{\frac{1}{q}} \frac{1}{\varepsilon} = \log_q \varepsilon$ eine reelle Zahl ist und n_ε eine natürliche Zahl ist.

  Nun prüfen wir auf Konvergenz. Nach Voraussetzung ist $|q| < 1$, d.h. $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$. Für alle natürliche Zahlen n mit $n > n_\varepsilon$ gilt $\left(\frac{1}{q}\right)^n > \left(\frac{1}{q}\right)^{n_\varepsilon}$. Daraus folgt
  $$q^n < q^{n_\varepsilon} < q^{\log_{\frac{1}{q}} \frac{1}{\varepsilon}} = q^{\log_q \varepsilon} = \varepsilon.$$

- Zeigen Sie, dass die Folge (d_n) mit $d_n = \dfrac{2n-1}{n+5}$ gegen den Grenzwert $D = 2$ konvergiert.

  Zu zeigen: für ein gegebenes $\varepsilon > 0$, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass
  $$|d_n - D| = \left|\frac{2n-1}{n+5} - 2\right| < \varepsilon$$
  für alle $n > n_\varepsilon$. Wir untersuchen den Abstand zwischen $\dfrac{2n-1}{n+5}$ und 2, in dem wir einen gemeinsamen Nenner ermitteln und dann die Differenz bilden.
  $$\begin{aligned}\left|\frac{2n-1}{n+5} - 2\right| &= \left|\frac{2n-1}{n+5} - 2 \cdot \frac{n+5}{n+5}\right| \\ &= \left|\frac{2n-1}{n+5} - \frac{2n+10}{n+5}\right| \\ &= \left|\frac{-11}{n+5}\right| \\ &= \frac{11}{n+5}\end{aligned}$$

Nun ist $\dfrac{11}{n+5} < \varepsilon$, wenn Folgendes gilt.

$$\begin{aligned} \frac{n+5}{11} &> \frac{1}{\varepsilon} \\ n+5 &> \frac{11}{\varepsilon} \\ n &> \frac{11}{\varepsilon} - 5 \end{aligned}$$

Ganz konkret heißt das, dass wir n_ε so wählen, dass $n_\varepsilon > \frac{11}{\varepsilon} - 5$ ist. Ist nun $n > n_\varepsilon > \frac{11}{\varepsilon} - 5$, so gilt

$$\begin{array}{ccc} n & > & \frac{11}{\varepsilon} - 5 \\ n+5 & > & \frac{11}{\varepsilon} \\ \frac{1}{n+5} & < & \frac{\varepsilon}{11} \\ \frac{11}{n+5} & < & \varepsilon \\ \left| \frac{2n-1}{n+5} - 2 \right| & < & \varepsilon \end{array}$$

Je komplizierter eine konvergente Folge ist, desto schwieriger ist es i.A., die Ungleichung wie im letzten Beispiel für n_ε aufzulösen. Deshalb wurden andere Methoden für Konvergenzbeweise entwickelt, die handhablicher sind. Die erste Methode beinhaltet den Begriff der Monotonie.

Definition (Monotonie für Folgen)
Eine Folge (a_n) ist *monoton wachsend* (oder *monoton steigend*), falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Eine Folge (b_n) ist *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ (äquivalent $a_n \geq a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Monotonie ist *streng*, falls Gleichheit in den obigen Definitionen nicht erlaubt ist ($a_n < a_{n+1}$ für alle n oder $a_n > a_{n+1}$ für alle n).

Z.B. ist (n) eine monoton wachsenden Folge, wogegen $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ eine monoton fallende Folge ist.

Satz (Monoton beschränkte Folgen)
Eine monton wachsende (bzw. monoton fallende) Folge, die beschränkt ist, konvergiert.

Erklärung
Wenn die Folge beschränkt ist, bedeutet dies, dass es eine reelle Zahl M gibt, für die $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, die Folge besteht aus positiven Zahlen. Steigt die Folge monoton, dann können die Folgenglieder wegen der Beschränktheit nicht größer als M werden. Falls M nicht der Grenzwert der Folge ist, muss es eine Zahl M_1 echt kleiner als M geben, die die Folge auch beschränkt. Irgendwann erreichen wir auch den Grenzwert der Folge. Dies folgt aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen (d.h. für alle $b, d \in \mathbb{R}$ mit $b < d$ existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $b < c < d$). Der Beweis hierfür liegt außerhalb der Reichweite dieser Vorlesung.

Bemerkung
Der Satz ist ein Existenzsatz und sagt uns nicht, wie wir den Grenzwert kalkulieren können. Manchmal

ist dies jedoch möglich, wie wir im nächsten Beispiel sehen.

Beispiele

- Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}\right)$ konvergiert.

  1. $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+4}} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass die Folge beschränkt ist.
  2. $0 \leq \sqrt{n+4} \leq \sqrt{(n+1)+4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\dfrac{1}{\sqrt{n+4}} > \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)+4}}$. Von daher ist die Folge monoton fallend.

  Die Folge $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}\right)$ ist monoton und beschränkt also konvergent.

- Wir wollen nun zeigen, dass die Folge 0,1; 0,11; 0,111; … konvergiert, und den Grenzwert bestimmen.

  Die Folgenglieder sind offensichtlich monoton steigend und liegen jeweils zwischen 0 und 1. Von daher konvergiert die Folge gegen eine Zahl $C \in \mathbb{R}$.

  Wir setzen $C = 0{,}\overline{1}$. So ist $10C = 1{,}\overline{1}$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhalten wir
  $$9C = 1$$
  oder $C = \frac{1}{9}$.

Eine weitere Methode, die in günstigen Situationen verwendet werden kann, ist das sogenannte Sandwichprinzip (manchmal auch als Polizistenregel bekannt).

Satz (Sandwichprinzip)
Gegeben seien zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit dem gleichen Grenzwert A:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} b_n.$$
Ist (c_n) eine Folge mit
$$a_n \leq c_n \leq b_n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt
$$\lim_{n\to\infty} c_n = A.$$
Erklärung
Jeder Folgenglied der Folge (c_n) ist zwischen den entsprechenden Folgenglieder der Folgen (a_n) und (b_n) "gefangen". Der Grenzwert von (c_n) kann nicht "ausbrechen", d.h. der Grenzwert von (c_n) muss den Wert A haben.

Beispiel
Zeigen Sie mit Hilfe des Sandwichprinzips, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ gegen 0 konvergiert.

Wir merken, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Ungleichung gilt:

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Die konstante Folge (0) und die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergieren beide gegen Null. Von daher konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ auch gegen 0.

Ein ähnliches Argument kann verwendet werden um zu zeigen, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^r}\right)$ für alle reelle Zahlen r mit $r > 1$ gegen 0 konvergiert.

4.3 Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)
Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

und c eine reelle Zahl. Dann gelten die folgenden Regeln.

1. Die Folge $(c \cdot a_n)$ konvergiert gegen $c \cdot A$. $(\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A)$
2. Die Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $A + B$. $(\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B)$
3. Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $A \cdot B$. $(\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B)$
4. Die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $B \neq 0$ konvergiert gegen $\frac{A}{B}$. $(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B})$

Mit diesem Satz können wir auch $(a_n - b_n) = (a_n + (-1) \cdot b_n)$ für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) berechnen:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-1) \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-1) \cdot b_n = A + (-1) \lim_{n\to\infty} b_n = A - B.$$

Beispiele

- Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folgen $(a_n) = \left(\frac{4n^3 - 7n + 1}{5n^3 + n^2 - 3}\right)$ und $(b_n) = \left(\frac{5n}{n^2 + 7}\right)$.

  Bei beiden Folgen handelt es sich um eine rationale Funktion $\left(\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}\right)$. Der Standardtrick besteht darin, die höchste Potenz von n, die überhaupt vorkommt, oben und unten auszuklammen.

Danach werden die Rechenregeln angewendet.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 7n + 1}{5n^3 + n^2 - 3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} \cdot \frac{4 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(4 - \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(5 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^3}\right)}
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist gültig, denn der Nenner ist ungleich Null für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Zähler erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(4 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) &= \lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \\
&= 4 - 0 + 0
\end{aligned}$$

und im Nenner

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}\right) &= \lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3} \\
&= 5 + 0 - 0
\end{aligned}$$

Insgesamt beträgt der Grenzwert der Folge (a_n) den Wert $\frac{4}{5}$.

- Für (b_n) rechnen wir wie oben. Wir merken im Voraus, dass der Nenner nicht Null sein kein.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n^2 + 7} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{\frac{5}{n}}{1 + \frac{7}{n^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{7}{n^2}\right)} \\
&= \frac{0}{1 + 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Angenommen, die Folge $(c_n) = (\sqrt[n]{a})$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.
  Wir verwenden die Eigenschaften der logarithmischen Funktion $\log_a$ zusammen mit den Rechenregeln für konvergente Folgen.
  Im ersten Schritt schreiben wir mit Hilfe der Potenzregel $\sqrt[q]{m^p} = m^{\frac{p}{q}}$

$$c_n = a^{\frac{1}{n}}$$

und wenden wir den Logarithmus an:

$$\begin{aligned}
\log_a c_n &= \log_a a^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \log_a a \\
&= \frac{1}{n} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Von daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} \log_a c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Wegen der Eigenschaften von Logarithmen muss c_n gegen $n^0 = 1$ laufen, wenn n gegen unendlich läuft. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Bemerkung
Ein ähnliches Argument liefert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4.4 Divergenz, bestimmte Divergenz

Im letzten Abschnitt haben wir nur konvergente Folgen betrachtet aber Folgen müssen nicht immer konvergieren.

Definition (Divergenz)
Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt die Folge *divergent*.

Beispiele

- Die Folge $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, \ldots$ ist divergent. Angenommen, die Folge wäre konvergent, dann gäbe es einen Grenzwert A. Betrachte $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Einerseits muss $|A - 1| < \frac{1}{2}$, d.h. $-\frac{1}{2} < A - 1 < \frac{1}{2}$ oder
$$\frac{1}{2} < A < \frac{3}{2}.$$
Andererseits erhalten wir $|A - (-1)| < \frac{1}{2}$, d.h. $-\frac{1}{2} < A + 1 < \frac{1}{2}$ oder
$$-\frac{3}{2} < A < \frac{-1}{2}.$$
Dies ist ein Widerspruch, sodass die Annahme, A existiert, falsch sein muss.

- Die Folge $(\cos(n))$ ist divergent. Angenommen, die Folge konvergiert mit dem Grenzwert B: $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n) = B$.
Es folgt daraus, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(kn) = B$ für alle natürliche Zahlen k. Für $k = 2$ gibt es die trigonometrische Identität
$$\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1,$$
sodass
$$\lim_{n\to\infty} \cos(2n) = \lim_{n\to\infty} (2\cos^2 n - 1)$$
$$B = 2B^2 - 1$$
oder
$$2B^2 - B - 1 = 0$$

mit Lösungen $B_1 = 1$ und $B_2 = -\frac{1}{2}$.

Eine Formel für $k = 4$ kann ähnlich hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\cos(4n) &= 2\cos^2(2n) - 1 \\ &= 2(2\cos^2 n - 1)^2 - 1 \\ &= 2(4\cos^4 n - 4\cos^2 n + 1) - 1 \\ &= 8\cos^4 n - 8\cos^2 n + 1,\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\cos(4n) &= \lim_{n\to\infty}(8\cos^4 n - 8\cos^2 n + 1) \\ B &= 8B^4 - 8B^2 + 1\end{aligned}$$

oder

$$8B^4 - 8B^2 - B + 1 = 0.$$

Durch einsetzen von B_1 und B_2, sehen wir, dass nur $B_1 = 1$ die zweite Gleichung löst. Falls (b_n) konvergiert, ist $B_1 = 1$ der einzige Kandidat für B.
Wir wählen wiederum $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Falls wir immer wieder ein negatives Folgenglied finden können, je weiter wir in die Folge schauen, dann haben wir einen Widerspruch.

Die Werte von Cosinus sind negativ im Intervallen der Gestalt

$$\left]\frac{4k+3}{2}\pi, \frac{4k+5}{2}\pi\right[$$

mit k eine ganze, positive Zahl. Betrachten wir ein paar Intervalle:

k	$\frac{4k+3}{2}\pi$	$\frac{4k+5}{2}\pi$
0	$\frac{3}{2}\pi \approx 4{,}7$	$\frac{5}{2}\pi \approx 7{,}9$
1	$\frac{7}{2}\pi \approx 11$	$\frac{9}{2}\pi \approx 14{,}1$
2	$\frac{11}{2}\pi \approx 17{,}3$	$\frac{13}{2}\pi \approx 20{,}4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wir sehen, dass natürliche Zahlen immer in den gegebenen Intervallen liegen. Das macht ja auch Sinn, denn die Intervalle haben eine Länge von $\pi > 1$.

Bemerkung
Divergenzbeweise können manchmal noch kniffliger als Konvergenzbeweise.

Definition (bestimmte Divergenz)
Eine divergente Folge heißt *bestimmt divergent*, falls

1. zu jeder reellen Zahl M gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass
$$a_n - M > 0$$
für alle $n > n_\varepsilon$ (Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) oder
2. zu jeder reellen Zahl M gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass
$$a_n - M < 0$$
für alle $n > n_\varepsilon$ (Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Hilfssatz (Monotonie und Unbeschränktheit)
Ist ab einem Punkt die Folge (a_n) positiv und streng monoton wachsend ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) oder negativ und streng monoton fallend ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) sowie unbeschränkt, dann ist die Folge bestimmt divergent.
Beispiele

- Die Folge (n) ist streng monoton wachsend und divergiert deshalb bestimmt gegen ∞.
- Die Folge $(-n)$ ist streng monoton fallend und divergiert deshalb bestimmt gegen $-\infty$.
- Die geometrische Folge (q^n) mit $q > 1$ ist streng monoton wachsend (Exponentialfunktion mit Basis oder Grundzahl größer 1) und divergiert deshalb bestimmt gegen ∞.

4.5 Zusammenfassung

Eine Anordnung von Zahlen (*Folge*) kann *konvergent*, *divergent* oder sogar *bestimmt divergent* sein.

Konvergenz: Für eine gegebene Toleranz ε liegen alle Folgenglieder ab einen bestimmten Punkt n_ε innerhalb des Intervalls $]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$ (ε-Korridor), wobei A den Grenzwert bezeichnet.

Neben einem direkten Beweis (n_ε berechnen) können ggf. die folgenden Methoden hilfreich sein:

1. Monotonie und Beschränktheit
2. Sandwichprinzip
3. Rechenregeln für konvergente Folgen.

Divergenz ist das Gegenteil von Konvergenz: Dies wird oft mit einem Gegenbeispiel oder einem Widerspruchsbeweis nachgewiesen. Bestimmt Divergenz kann mit strenger Monotonie (ab einem Punkt) und Unbegrenztheit häufig begründet werden. Hierbei müssen die Folgenglieder zusätzlich (ab einem Punkt) positiv (für bestimmt gegen ∞) oder negativ (für bestimmt gegen $-\infty$) sein.

Wir sammeln hier das Verhalten einiger wichtigen Folgen (a_n).

(a_n)	konvergent/ divergent		(a_n)	konvergent/ divergent
$(k), k$ eine Konstante	konvergent		$((-k)^n), k \neq 0$	divergent
$\left(\frac{1}{n^s}\right)$, $s \geq 1$	konvergent		$\left(\frac{1}{n^s}\right)$, $s < 1$	b. divergent
$(q^n), 0 < q < 1$ geometrische Folge	konvergent		$(q^n), q > 1$ geometrische Folge	b. divergent
$(\sqrt[n]{a}), a > 0$	konvergent		$(\cos(n))$ und $(\sin(n))$	divergent

5 Unendliche Reihen

Einleitung

In dem letzten Kapitel wurden Folgen und ihre Eigenschaften untersucht. In diesem Kapitel werden bestimmte Summen von Folgenglieder betrachtet. Die Ergebnisse bilden eine neue Folge, die auch auf Konvergenz untersucht werden kann.

5.1 Grundlegende Begriffe

Definition (Sigma-Notation)
Eine unendliche Summe von Zahlen wird mit dem Summensymbol $\sum$ bezeichnet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Es lässt sich fragen, wie diese Summe zu interpretieren ist, da wir nicht alle vorkommenden Zahlen tatsächlich aufsummieren können. Von daher wird die Folge der Partialsummen definiert.

Definition (Partialsumme)
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine (unendliche) Reihe. Die n-te Partialsumme ist gegeben durch $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Beispiele

- Bestimmen Sie die ersten 4 Partialsummen der unendlichen Reihe

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k .$$

  Die Summe nimmt die Gestalt

  $$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$$

  an. Die Partialsummen sind in der folgenden Tabellen aufgeführt.

n	s_n	Summe
0	$s_0 = 1$	1
1	$s_1 = 1 + \frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	$s_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$	$\frac{13}{9}$
3	$s_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$	$\frac{40}{27}$

- Gegeben sei die unendliche Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k.$$
Bestimmen Sie die ersten 4 Partialsumme.
Die Summe nimmt die Gestalt
$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots$$
an. Die Partialsumme sind in der folgenden Tabellen aufgeführt.

n	s_n	Summe
0	$s_0 = 1$	1
1	$s_1 = 1 + 3$	4
2	$s_2 = 1 + 3 + 9$	13
3	$s_3 = 1 + 3 + 9 + 27$	40

Definition (Existenz/Nicht-Existenz einer unendlichen Reihe)

Gegeben sei eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Reihe existiert mit dem Grenzwert $S \in \mathbb{R}$, falls
$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$
d.h. die Folge der Partialsummen konvergiert gegen S. In diesem Fall sagen wir, dass die Reihe konvergiert.
Divergiert die Folge der Partialsummen, so existiert die unendliche Reihe nicht. Wir sagen, dass die Reihe divergiert.

Satz (notwendige Bedingung für Konvergenz einer unendlichen Reihe)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente unendliche Reihe. Die Folge der Summanden (a_k) konvergiert gegen 0. ((a_k) heißt *Nullfolge*.)

Bemerkungen

- Ist (a_k) keine Nullfolge, dann muss die Reihe divergieren.
- Vorsicht! Nur weil (a_k) eine Nullfolge ist, kann nicht Schlussgefolgert werden, dass die Reihe konvergent ist. Hier müssen andere Methoden angewendet werden.
- Konvergiert eine unendliche Reihe, dann muss die Partialsummen beschränkt sein. Ist dies nicht der Fall, dann muss die Reihe divergieren.

Beispiele

- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ konvergiert.
  Es kann gezeigt werden, dass
  $$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}.$$
  (Dies können Sie für die ersten paar Werte von n verifizieren!) Zu zeigen: die Folge s_n besitzt einen Grenzwert. Für n gegen unendlich erhalten wir
  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$
  Die Folge der Partialsummen konvergiert gegen $\frac{3}{2}$, sodass die Reihe gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert.
- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$ divergiert.
  In jedem Schritt wird eine Zahl, die größer als im letzten Schritt ist, dazu addiert. Die Folge der Partialsummen ist bestimmt divergent, sodass die Reihe divergent ist.

Die Ergebnisse in dem Beispiel können wie im nächsten Satz verallgemeinert werden.

Satz (geometrische Reihe)
Sei $q \in \mathbb{R}$. Die unendliche Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$
konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$.

Beispiel
Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist.
Aus den Eigenschaften der natürlichen Zahlen gilt für $m, n \in \mathbb{N}$
$$m < n \Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{n}.$$
Wir schätzen die Reihe von unten wie folgt ab:
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$> (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \to \infty.$$

Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist unbeschränkt und daher divergent.

Bemerkung
Dieser Beweis stammt von dem französischer Philosoph Nicolas Oresme Mitte des 14. Jahrhunderts und ist die grundlegende Idee hinter dem Vergleichstest für unendliche Reihen.

5.2 Konvergenz-, Divergenzkriterien

Satz - Vergleichstest für unendliche Reihen
Sei $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe.

- Divergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ und gilt $0 \leq b_k \leq a_k$ für alle $k \geq N$ (N groß), dann divergiert auch die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.
  (auch *Minorantenkriterium* genannt)

- Konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ und gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \geq N$ (N groß), dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.
  (auch *Majorantenkriterium* genannt)

Erklärungen

- Sind die Summanden einer Reihe $\sum a_k$ ab einem bestimmten Punkt größer als eine bekannte divergente Reihe $\sum b_k$, d.h. die Partialsummen von $\sum b_k$ sind unbeschränkt, so muss auch die Partialsummen von $\sum a_k$ unbeschränkt und somit divergent sein.

- Konvergiert die Reihe $\sum b_k$, so sind die Partialsummen von $\sum b_k$ beschränkt. Sind nun die a_k kleiner als (b_k) (jedoch nicht negativ), dann müssen die Partialsummen von $\sum a_k$ auch beschränkt sein. Die Partialsummen sind monoton steigend, denn alle sind nichtnegativ, und monoton beschränkte Folgen konvergieren.

Beispiele

1. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k-3}$ divergiert.
   Für alle natürlichen Zahlen $k \geq 4$ gilt
   $$k - 3 > 0 \text{ und } k - 3 < k,$$
   d.h.
   $$\frac{1}{k-3} > \frac{1}{k}$$
   und somit
   $$0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{k-3}.$$
   Die Reihe $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent (harmonische Reihe $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$), sodass nach dem Minorantenkriterium $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k-3}$ divergiert. Die Reihe existiert nicht.

2. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ konvergiert.
   Für alle natürlichen Zahlen k gilt
   $$0 < \frac{1}{7} \left(\frac{3}{4}\right)^k < \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$
   Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{3}{4} < 1$, also konvergent. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7} \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Hilfreich in manchen Situationen ist der folgende Satz von Leibniz (Ende des 17. Jahrhunderts).

Satz - Leibniz-Kriterium
Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge; d.h. $a_k \geq 0$. Dann konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Bemerkungen

- $((-1)^k a_k)$ ist eine *alternierende* Folge. Das Vorzeichen wechselt sich bei jedem Schritt.
- Die Voraussetzung impliziert, dass die a_k nichtnegative Zahlen sind.
- Dies ist ein Existenzsatz. Wie der Grenzwert zu berechnen ist, ist nicht klar.

Beispiel

Entscheiden Sie, ob die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{1}{k}$ konvergiert oder divergiert.

Die Folge der Summanden $(a_k) = (\frac{1}{k})$ ist eine Nullfolge, denn $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$. Sie ist monoton fallend, weil für alle $k \geq 1$ gilt $k < k+1$, d.h. $(0 <)\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ oder $0 < a_{k+1} < a_k$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe.

Zwei weitere Kriterien sind hilfreich, wenn Fakultäten oder Exponenten auftauchen.

Satz - Quotientenkriterium

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimme man

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$$

- Ist $\rho < 1$, so ist die Reihe konvergent.
- Ist $\rho > 1$, so ist die Reihe divergent.
- Ist $\rho = 1$ oder existiert er nicht, so gibt das Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe.

Satz - Wurzelkriterium

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimme man

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

- Ist $\rho < 1$, so ist die Reihe konvergent.
- Ist $\rho > 1$, so ist die Reihe divergent.
- Ist $\rho = 1$ oder existiert er nicht, so gibt das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe.

Beispiele Bestimmen Sie jeweils, ob die gegebene unendlich Reihe konvergiert oder divergiert.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^k}{(2k)!}$

  Wegen der Fakultät im Nenner wird das Quotientenkriterium angewendet. Wir können $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

aufschreiben und vereinfachen. Danach wird der Grenzwert bestimmt.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(2(k+1))!}}{\frac{k^k}{(2k)!}} \\
&= \frac{(k+1)^{k+1}}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{k^k} \\
&= \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \cdot \frac{(2k)!}{(2k+2)(2k+1)(2k)!} \\
&= \frac{(k+1)^k \cancel{(k+1)}}{k^k} \cdot \frac{\cancel{(2k)!}}{2\cancel{(k+1)}(2k+1)\cancel{(2k)!}} \\
&= \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{4k+2}
\end{aligned}
$$

$$
\rho = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{4k+2} = 1 \cdot 0 = 0 < 1
$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{e}{k}\right)^k$

  In dieser Aufgabe gibt es keine Fakultät sondern einen Ausdruck hoch k. Wir wenden deshalb das Wurzelkriterium an.

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(-1)^k| \left(\frac{e}{k}\right)^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{e}{k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Der Grenzwert $\rho = 0$ ist kleiner als 1, sodass die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergiert.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k^5}$

  In diesem Beispiel gibt es wiederum keine Fakultät, aber diesmal haben wir keinen Ausdruck hoch k, weil k als Potenz und als Grundzahl vorkommt. Wir üben mit dem Quotientenkriterium.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= |(-1)^{k+1}| \frac{2^{k+1}}{(k+1)^5} \cdot |(-1)^k| \frac{k^5}{2^k} \\
&= \frac{2^{k+1}}{2^k} \cdot \frac{k^5}{(k+1)^5} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^5
\end{aligned}
$$

$$
\rho = \lim_{k\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^5 = 2 \cdot 1
$$

Der Grenzwert $\rho = 2$ ist größer als 1. Die Reihe ist deshalb divergent.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k^2-4}{3k^2+7}\right)^k$
  Wenden wir das Wurzelkriterium an.

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{5k^2-4}{3k^2+7}\right)^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{5k^2-4}{3k^2+7} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2} \cdot \frac{5-\frac{4}{k^2}}{3+\frac{7}{k^2}} \\
&= \frac{5}{3} > 1
\end{aligned}$$

  Die Reihe ist divergent.

Den nächsten Satz fügen wir ohne große Erklärung ein. Dessen Gültigkeit wird erst, nachdem wir uneigentliche Integrale behandelt haben, ersichtlich.

Satz - Riemannsche Zetafunktionen
Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ ist konvergent für $s > 1$ und divergent für $s \leq 1$.

5.3 Zusammenfassung wichtiger Reihen

Konvergente Reihen	Divergente Reihen
geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k,\ \lvert q\rvert < 1$	geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k,\ \lvert q\rvert \geq 1$
alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$	harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
Riemannsche Zetafunktion $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},\ s > 1$	Riemannsche Zetafunktion $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},\ s \leq 1$

5.4 Checkliste zur Bestimmung von Konvergenz/Divergenz bei unendlichen Reihen

1. Schritt Ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine bekannte Reihe oder ein Vielfaches oder eine Variante davon? (Siehe Tabelle oben.) Oft muss man bei ähnlichen Reihen das Majoranten- oder Minorantenkriterium (Vergleichstest) benutzen (siehe 4. Schritt).

2. Schritt Ist (a_k) eine Nullfolge? (Falls dies nicht offensichtlich ist, ist Schritt 3 manchmal nützlicher.)

- Nein $\rightarrow$ die Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist divergent.
- Ja. Ist $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ alternierend und $|a_k|$ monoton fallend, dann ist die Reihe konvergent (Leibniz).
- Ja, aber Leibniz hilft nicht $\rightarrow$ Suchen Sie weiter.

3. Schritt (Quotienten- und Wurzelkriterien - Warnung: diese Kriterien sind nicht hilfreich, wenn a_k wie eine rationale Funktion in der Variabel k aussieht.) Existiert $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ bzw. $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} |\sqrt[k]{a_k}|$?

- $\rho < 1 \rightarrow$ die Reihe ist konvergent.
- $\rho > 1 \rightarrow$ die Reihe ist divergent.
- Nein oder $\rho = 1 \rightarrow$ dieses Kriterium hilft nicht weiter. Gehen Sie zum 4. Schritt.

4. Schritt (Vergleichstest (Majoranten-, Minorantenkriterium)) Suchen Sie eine bekannte Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$, für die $|a_k| \leq b_k, k \geq n_0$ oder aber $a_k \geq |b_k|, k \geq n_0$.

- $|a_k| \leq b_k, k \geq n_0$ und $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergent $\rightarrow \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.
- $a_k \geq |b_k|, k \geq n_0$ und $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |b_k|$ divergent $\rightarrow \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist divergent.

6 Stetigkeit

Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen ist die sogenannte *Stetigkeit*. Intuitiv sollten für kleine Änderungen in x die Änderungen in $f(x)$ relativ klein sein. Die meisten Funktionen, die uns bekannt sind, sind auch stetig: Polynomen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen, logarithmische Funktionen, trigonometrische Funktionen und rationale Funktionen (der Form $\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$) sind an alle Stellen stetig, dort wo die Funktion definiert ist.

Eine typische Anwendung der Stetigkeit ist das Nachweisen der Existenz eines bestimmten Funktionswertes (z.B. bei der Suche nach *Nullstellen*).

6.1 Definition der Stetigkeit

Es gibt zwei äquivalente Definitionen, die wir hier aufführen und kurz erläutern.

Definition (Stetigkeit an einer Stelle - epsilon-delta)
Die Funktion f heißt *stetig* an der Stelle x_0, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Diese Definition erinnert uns an die Definition für Konvergenz einer Folge. Im Prinzip bedeutet dies, dass für jede Folge von x-Werte, die gegen x_0 konvergieren, konvergiert auch die Folge der Funktionswerte.
Geometrisch betrachtet muss für jeden gegebenen Abstand ε um $f(x_0)$ einen bestimmten Abstand δ (abhängig von ε) um x_0 existieren, sodass das um $(x_0; f(x_0))$ zentrierte Rechteck alle Punkte der Funktion im Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ einschließt. Die Funktion "springt" nicht aus dem Kästchen heraus.

Der Begriff kann etwas einfacher formuliert werden, verliert jedoch die explizite geometrische Veranschaulichung.

Definition (Stetigkeit an einer Stelle - Grenzwert)
Die Funktion f heißt *stetig* an der Stelle x_0, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

In dieser Betrachtungsweise muss für jede Folge von x-Werte, die gegen x_0 konvergiert, die Folge der korrespondierenden Funktionswerten konvergieren und zwar gegen den Funktionswert $f(x_0)$. Dies setzt voraus, dass die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist.

Bemerkung
Manchmal ist es hilfreich, die Funktion links und rechts von x_0 jeweils zu untersuchen. Von beiden Seiten muss der Grenzwert der Funktionswerte gleich sein. Sonst kann die Funktion dort nicht stetig sein. Ein Beispiel hierfür ist wie folgt.
Beispiel
Untersuchen Sie die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ 2, & x \in]-1; 1[\\ x - 1, & x \in [1; 2] \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$

auf Stetigkeit an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$.
Die Funktion ist stetig an jeder Stelle in den Intervallen $x < -1$, $x \in]-1, 1[$, $x \in]1, 2[$, $x > 2$, da die Teilfunktionen Polynome sind und Polynome überall stetig sind. Die Randpunkte der Intervalle müssen gesondert untersucht werden.
$\underline{x_0 = -1}$

$$\text{von links: } \lim_{x \to -1^-} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$\text{von rechts: } \lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$$

Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte stimmen überein, allerdings ist die Funktion an der Stelle $x_0 = -1$ nicht definiert. Die Funktion ist nicht stetig an der Stelle $x_0 = -1$.

$\underline{x_0 = 1}$

$$\text{von links: } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

$$\text{von rechts: } \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 - 1 = 0$$

Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte stimmen nicht überein, sodass $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nicht existiert. Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig.

$\underline{x_0 = 2}$

$$\text{von links: } \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{von rechts: } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte stimmen beide mit dem Funktionswert $f(2) = 2 - 1 = 1$ überein. Die Funktion ist dort stetig.

Die Funktion f ist an allen Stellen x mit

$$x \in]-\infty; -1[\; \cup \;]-1; 1[\; \cup \;]1; \infty[$$

stetig. (Hinweis: $A \cup B$ ist die *Vereinigung* der Mengen A und B.)

Satz (Operationen für stetige Funktionen)
Seien f und g stetige reelle Funktionen und c eine reelle Konstante. Dann sind die Funktionen $cf, f \pm g, f \cdot g$ auch stetig. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $\dfrac{f}{g}$ ebenfalls stetig.

6.2 Zwischenwertsatz

Der Zwischenwertsatz ist ein Existenzsatz über mögliche Funktionswerte auf einem *abgeschlossenem* (oder *kompaktem*) Intervall $[a; b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Satz (Zwischenwertsatz)

Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a; b]$ mit $f(a) \neq f(b)$. Für jedes y^* zwischen $f(a)$ und $f(b)$ existiert ein $x^* \in]a; b[$ (oder zwischen a und b) mit $f(x^*) = y^*$.

Bemerkungen

- Der Zwischenwertsatz (ZWS) besagt uns nicht, wie wir x^* berechnen können. Deshalb heißt dieser ein Existenzsatz.
- Es kann mehrere Werte für $x^* \in]a; b[$ geben, d.h. x^* muss nicht eindeutig sein.
- Es kann auch Werte $\hat{x}$ geben, die außerhalb von $]a; b[$ liegen, mit $f(\hat{x}) = y^*$. Der Satz gibt jedoch keine Auskunft darüber.

Beispiele

- Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ den Wert $y^* = 5$ auf dem Intervall $[-1; 1]$ annimmt.
  Die Funktion ist ein Polynom (d.h. stetig) definiert auf einem kompakten Intervall, sodass der

ZWS angewendet werden kann. Die Funktionswerte in den Randpunkten sind durch $f(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ sowie $f(1) = 3 + 2 + 1 = 6$ gegeben. Der Wert $y^* = 5$ liegt zwischen 2 und 6. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein x^* zwischen -1 und 1 mit $f(x^*) = 5$.

- Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \ln x - \sin x$ eine Nullstelle auf dem Intervall $[1; e]$ besitzt. Es handelt sich um die Differenz stetiger Funktionen auf dem gegebenen Intervall, sodass die Funktion g auch stetig ist. Die Randpunkte haben die Funktionswerte

$$g(1) = \ln 1 - \sin 1 = 0 - \sin 1 < 0$$

$(1 \in]0, \pi[\Rightarrow 0 < \sin 1 \leq 1)$ und

$$g(e) = \ln e - \sin e = 1 - \sin e > 0$$

$(e \in]0, \pi[\Rightarrow 0 < \sin e \leq 1,\ e \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin e \neq 1)$. Dementsprechend liegt $y^* = 0$ zwischen $g(1)$ und $g(e)$. Nach dem ZWS existiert ein $x^* \in]1; e[$ mit $f(x^*) = 0$, sodass x^* eine Nullstelle ist.

Das zweite Beispiel ist vom Prinzip so wichtig, dass wir dies explizit formulieren.
Satz (Nullstellensatz von Bolzano)
Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a; b]$, wobei $f(c) \cdot f(d) < 0$ für $c, d \in [a; b]$ (d.h. es gibt auf dem Intervall einen Vorzeichenwechsel oder äquivalent $f(c)$ und $f(d)$ haben unterschiedliche Vorzeichen). Dann gibt es zwischen c und d eine Nullstelle.

Satz (Existenz von Extremwerte)
Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $c, d \in [a; b]$, sodass $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ für alle $x \in [a; b]$.

Bemerkungen

- $f(c) = m$ ist das *Minimum* und $f(d) = M$ ist das *Maximum* auf dem Intervall. Die Größen sind die *Extremwerte* (auch *Extrema* genannt).
- Im Gegensatz beziehen sich die *Extremstellen* auf die zugehörigen x-Werte (c und d im Satz).
- Die Punkte $(c; f(c))$ und $(d; f(d))$ sind *Extrempunkte*.

7 Die Ableitung (Differentialrechnung)

Einleitung

Die *Ableitung* kann als eine Änderungsrate betrachtet werden. Dabei wird untersucht, ob es einen Zusammenhang gibt zwischen Änderungen in den Funktionswerten (Δy) einer Funktion f und Änderungen in den x-Werten (Δx) gibt. Die Rate ist dann durch $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ gegeben. Ist die Funktion f eine Gerade, dann gibt es einen wohlbekannten Zusammenhang. Die Änderungsrate ist in diesem Fall die Steigung. Durch diese Sichtweise können wir die *Steigung einer allgemeinen Funktion* in einem gegebenen Punkt definieren, solange die Änderungsrate existiert.

Die Steigung einer Funktion in einem Punkt gibt Auskunft über das *Monotonieverhalten* einer Funktion. Damit können wir *Extremwerte* (größte und kleinste Werte) berechnen.

Achtung: Differentialrechnung kann nur stattfinden, wenn ein Intervall vorhanden ist. Es macht von daher keinen Sinn, eine Variable wie n mit n einer natürlichne Zahl abzuleiten.

Als weitere Anwendungen der Ableitung wird auf die Frage, ob eine Funktion einen bestimmten Wert für die Ableitung (z.B. bei der Suche nach *Extrema*) annimmt, eingegangen. Ferner sehen wir, wie Funktionswerte, die nicht leicht zu berechnen sind, approximiert *(lineare Approximation)* werden können.

7.1 Die Ableitung an einer Stelle

Motivation
Als Grundidee betrachten wir *Sekanten* (Geraden die durch zwei unterschiedlichen Punkten an der Graph einer Funktion f durchlaufen), wobei ein Punkt $(x_0; y_0)$ fest gelegt wird. Nun lassen wir den zweiten Punkt $(x; y)$ so variieren, dass die x-Werte gegen x_0 konvergieren. Für jeden untersuchten Punkt $(x; y)$ wird die Steigung der Sekante durch $(x; y)$ und $(x_0; y_0)$ berechnet:

$$m_{(x;y)} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Die Frage ist, ob die Folge der entsprechenden Steigungen auch konvergiert. Wenn ja wird die Steigung der Funktion mit diesem Wert (die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 (oder im Punkt x_0) assoziiert.

Definition (Ableitung an einer Stelle)
Gegeben sei die Funktion f. Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

gegeben, falls dieser Grenzwert existiert. In diesem Fall heißt die Funktion *differenzierbar in* x_0. Sonst ist die Funktion *nicht differenzierbar in* x_0.

Bemerkung
Die Ableitung existiert nur, wenn alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergieren, den gleichen Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ aufweisen. Hierbei muss $x_n \neq 0$, sonst hätten wir nur den Punkt $(x_0; f(x_0))$. Wir benötigen jedoch zwei Punkte, um eine Gerade zu definieren.

Beispiele

- Eine konstante Funktion $f(x) = k$ hat in jedem Punkt die Ableitung Null.
  Um diese Aussage zu beweisen, müssen wir die Definition der Ableitung an einem gegebenen,

beliebigen Punkt $(x_0; f(x_0)) = (x_0; k)$ untersuchen.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{k-k}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x-x_0} \\
&\overset{x\neq x_0}{=} \lim_{x\to x_0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Die Ableitung der Funktion $f(x) = x$ hat an jeder Stelle den Wert 1.
  Sei dazu $(x_0; f(x_0)) = (x_0; x_0)$ ein beliebiger Punkt.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} \\
&\overset{x\neq x_0}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{x-x_0}} \cdot 1 \\
&= \lim_{x\to x_0} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Die Betragsfunktion

$$|\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

  ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar (d.h. die Ableitung existiert dort nicht).
  Um diese Aussage zu beweisen, betrachten wir eine Folge (x_n) von positiven Werte sowie eine Folge $(\hat{x}_n)$ von negativen Werte, die jeweils gegen 0 konvergiert.
  Von der rechten Seite ist die Steigung der Sekanten immer 1 (siehe das vorhergehende Beispiel)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1.$$

  Von der linken Seite ist $f(x) = -x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

  Die Grenzwerte stimmen nicht überein. Von daher ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Das vorangehende Beispiel zeigt, dass eine stetige Funktion nicht differenzierbar sein muss. Umgekehrt ist das nicht so.

Satz (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)
Ist f differenzierbar an jeder Stelle, so muss f stetig sein.

Der Beweis dafür folgt aus der Definition der Ableitung. Die Details finden Sie im Internet.

Definition (Tangente)
Existiert die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0, dann heißt die Gerade durch $(x_0; f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$ die *Tangente* an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0.

Formel (Tangente)
Mit der Notation in der Definition leiten wir eine Formel für die Tangente her. Aus der Formel für die Steigung erhalten wir

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle Punkte $(x; y)$ an der Geraden, die ungleich $(x_0; f(x_0))$ sind. Durch Mulitplikation auf beiden Seiten mit dem Faktor $(x - x_0)$ erhalten wir

$$f'(x_0)(x - x_0) = y - f(x_0).$$

Nun lösen wir nach y auf:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

In dieser Form ist die Formel einfach zu merken. Zusätzlich stimmt diese Formel mit dem sogenannten Taylor-Polynom 1. Grades überein. Die Taylor-Polynome werden eingeführt, nachdem wir Ableitungen höherer Ordnung betrachten.

Beispiele

- Die Tangente an den Graphen einer konstanten Funktion $f(x) = k$ an einer Stelle ist die Gerade $y = k$.
  Diese Aussage folgt aus der Formel mit $f(x_0) = k$ und $f'(x_0) = 0$:

  $$y = k + 0(x - x_0) = k.$$

- Die Tangente an den Graphen einer linearen Funktion $f(x) = mx+b$ an einer Stelle ist die Gerade $y = mx + b$.
  Betrachte eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(x_0) = mx_0 + b$. Die Ableitung der Funktion $f'(x) = m$ ist unabhängig von der Stelle. Setze die Daten in die Formel ein:

  $$\begin{aligned} y &= mx_0 + b + m(x - x_0) \\ &= \cancel{mx_0} + b + mx - \cancel{mx_0} \\ &= mx + b \end{aligned}$$

7.2 Die Ableitung einer Funktion

Oft ist man an der Ableitung an mehrerer Stellen interessiert. In diesem Fall untersucht man die Ableitung der Funktion im Allgemeinen. Es ist empfehlenswert die Sichtweise der Änderungsrate leicht zu ändern. Hierbei werden die variierenden Punkte an ihrem Abstand von der festgelegten Punkt (jetzt mit $(x; f(x))$ bezeichnet) betrachtet. Der zweite Punkt, der die Sekante bestimmt, wird durch $(x + h; f(x + h))$ definiert. Konvergieren nun die $x + h$-Werte gegen x, muss h gegen 0 konvergieren.

Definition (Ableitung einer Funktion)
Sei f eine Funktion. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

falls der Grenzwert existiert.

Im nächten Beispiel werden die Binomialkoeffizienten benötigt. Hierfür wird der Begriff Fakultät (in dem mathematischen Sinn) verwendet.

Definition (Fakultät)
Setze $0! = 1$. Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist $n!$ (sprich n Fakultät) rekursiv definiert als

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

Tabelle (Fakultät)

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
$\vdots$	$\vdots$

Bemerkung
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ das Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner gleich n:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Definition (Binomischer Lehrsatz)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Der Binomialkoeffizient ist mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet und als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiert.

Beispiele (Binomialkoeffizienten)

- $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 10$
- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ und $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$ und $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Entwickeln Sie das Polynom $(x+h)^n$ (n eine natürliche Zahl) mit Hilfe der Binomkoeffizienten.

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i \\ &= \binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 h^n \\ &= x^n + n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + n x h^{n-1} + h^n\end{aligned}$$

Für das kommende Beispiel merken wir, dass für $n \geq 2$ gilt

$$(x+h)^n = x^n + h \left(n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + n x h^{n-2} + h^{n-1} \right).$$

Beispiel (Ableitung der Funktion $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$)
Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(x) = x^n$ durch $f'(x) = nx^{n-1}$ gegeben ist.
Wir haben bereits gesehen, dass die Ableitung der Funktion $f(x) = x^1$ einfach $f'(x) = 1 = 1x^{1-1}$ ist. Wir zeigen die Aussage für $n > 1$ mit Hilfe des vorangehenden Beispiels. Betrachten wir dazu die Definition der Ableitung und rechnen nach.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + h\left(n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + n x h^{n-2} + h^{n-1}\right) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left(n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots + n x h^{n-2} + h^{n-1}\right)}{\cancel{h}} \\ &= n x^{n-1}\end{aligned}$$

Eigentlich ist diese Ableitungsformel gültig für beliebige reelle Zahlen n. Gegebenenfalls muss die Definitionsmenge der Funktion angepasst werden. Zum Beispiel für $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ist die Formel nur gültig für positive Werte von x.

Wie man sich vorstellen kann, ist der Umgang mit der formellen Definition der Ableitung nicht immer so einfach. In der Praxis wird auch nicht so gerechnet. Kennt man die Ableitungen einiger bekannten Grundfunktionen und wendet man die Rechenregeln an, können sehr viele informatik- oder ingenieurbezogenen Funktionen abgeleitet werden.
In der folgenden Tabelle sind die Ableitungen dieser Grundfunktionen aufgeführt.

Tabelle (Ableitungen der Grundfunktionen)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k eine Konstante	0	x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x	$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$(\ln a)a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$

Die wichtigsten Klassen von stetigen Funktionen (Polynome, Exponentialfunktionen, logarithmische Funktionen, trigonometrische Funktionen) sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Wie bei Stetigkeit können wir aus differenzierbaren Funktionen kompliziertere differenzierbare Funktionen bauen.

Satz (Operationen für differenzierbare Funktionen)
Seien f und g differenzierbare reelle Funktionen und c eine reelle Konstante. Dann sind die Funktionen $cf, f \pm g, f \cdot g$ auch differenzierbar. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $\dfrac{f}{g}$ ebenfalls differenzierbar.

7.3 Rechenregeln - Linearität der Ableitung

Satz (Rechenregeln für differenzierbare Funktionen)
Seien f und g differenzierbare Funktionen und c eine reelle Konstante. Dann gelten die folgenden Rechenregeln.

$$\begin{aligned} (c \cdot f)' &= c \cdot f' \\ (f \pm g)' &= f' \pm g' \end{aligned}$$

Beispiele

- Berechnen Sie die Ableitung des Polynoms $p(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5$.
  Jeder Summand ist entweder das Produkt einer Konstante mit einer Potenz von x oder einer Konstante. Alle Teilfunktionen sind differenzierbar. (Bemerkung: Diese Argumentation trifft bei jedem Polynom zu, d.h. Polynome sind differenzierbar.) Die Rechenregeln können angewendet werden.

$$\begin{aligned} p'(x) &= (3x^4 - 7x^3 + 5)' \\ &= (3x^4)' - (7x^3)' + (5)' \\ &= 3(x^4)' - 7(x^3)' + 0 \\ &= 3(4x^3) - 7(3x^2) \\ &= 12x^3 - 21x^2 \end{aligned}$$

(Hinweis: Die gegebene Lösung ist sehr ausführlich durchgeführt, um die Regeln aufzuzeigen. Es ist nicht notwendig in einer Prüfingssituation, die Schritte aufzuschreiben. Es reicht zu notieren: $p'(x) = 12x^3 - 21x^2$.)

- Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}; x \mapsto 7\sqrt{x} + 4\sqrt[5]{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Um die Ableitung zu berechnen, müssen wir die Summanden mit Hilfe von Potenzen umschreiben. Wir erinnern uns an die Potenzregeln,

$$\sqrt[q]{m^p} = m^{\frac{p}{q}}$$

und für $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Von daher ist

$$f(x) = 7x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{3}{5}} - x^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Ableitung können wir nun berechnen:

$$f'(x) = \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

- Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - x + 3$ an der Stelle $x_0 = 2$. Um die Tangente zu berechnen, müssen wir $f(x_0)$, $f(x)$ sowie $f'(x_0)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \\ f'(x) &= 2x - 1 \\ f'(2) &= 3. \end{aligned}$$

Die gesuchte Tangente ist dann

$$y = 5 + 3(x - 2)$$

oder

$$y = 3x - 1.$$

Es gibt drei weitere Rechenregeln, die uns helfen, eine breitere Klasse von Funktionen abzuleiten: Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel. Für die Übersichtlichkeit sammeln wir alle drei Regeln an einem Ort. Danach werden die Regeln einzeln diskutiert und mit Beispielen verdeutlicht.

Satz (Erweiterte Rechenregeln für differenzierbare Funktionen - Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
Seien f und g differenzierbare Funktionen.

$$\begin{array}{llcl} \text{Produktregel:} & (f\cdot g)' & = & f'\cdot g + f\cdot g' \\ \text{Quotientenregel:} & \left(\dfrac{f}{g}\right)' & = & \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{(g)^2} \\ \text{Kettenregel:} & (f\circ g)' = (f(g))' & = & f'(g)\cdot g' \end{array}$$

(Beweise für diese Regeln können im Internet gefunden werden, falls jemand daran Interesse hat.)

Diskussion und Beispiel: Produktregel
Handelt es sich um das Produkt von zwei differenzierbare Teilfunktionen, kann die Produktregel angewendet werden. Als Beispiel betrachten wir die folgende Aufgabe.
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h(x) = 3x^2 \cos x$.
Definiere dazu die Funktionen $f(x) = 3x^2$ und $g(x) = \cos x$.

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 6x\cos x + 3x^2(-\sin x) = 6x\cos x - 3x^2 \sin x$$

Diskussion und Beispiel: Quotientenregel
Wird eine Funktion durch eine andere Funktion geteilt, dann kann die Quotientenregel angewendet werden. Zum Beispiel können wir die folgende Aufgabe lösen.
Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $t(x) = \tan x$.
Auf den ersten Blick sieht die Funktion nicht so aus, als ob die Quotientenregel nicht zum Ziel führt, denn es gibt keinen Bruch. Die Tangenzfunktion ist jedoch durch die Sinus- und Cosinusfunktionen definiert:

$$t(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Von daher gilt

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Wir hätten am Ende anders umformen können.

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \\ &= 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

Beide Formeln sind äquivalent.

Diskussion und Beispiel: Kettenregel
Funktion können manchmal als die Komposition (Hintereinanderausführung, Verkettung) von Funktionen betrachtet. Ist dies der Fall, so kann die Kettenregel verwendet werden. Als Beispiel betrachten wir die folgende Aufgabe.
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\ell(x) = \ln(x^2 + x)$.
Wir schreiben $\ell(x)$ als die Komposition zweier Funktionen: $f(x) = \ln x$ (die äußere Funktion) und $g(x) = x^2 + x$ (die innere Funktion). Die Ableitungen der Funktionen sind $f'(x) = \frac{1}{x}$ (die äußere Ableitung) und $g'(x) = 2x + 1$ (die innere Ableitung). Setzen wir nun die Informationen in die Formel ein:

$$\ell'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1).$$

Eselsbrücke
äußere mal innere Ableitung

7.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ähnlich zum Zwischenwertsatz ist der Mittelwertsatz ein Existenzsatz. Diesmal erhalten wir die Existenz eines Funktionswert c, wobei $f'(c)$ einen bestimmten Wert annimmt. In Vorbereitung auf dieser Satz betrachten wir einen Hilfssatz, in dem $f'(c)$ den Wert 0 annimmt, d.h. c ist eine Nullstelle der Ableitung.

Hilfssatz (Satz von Rolle)
Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die differenzierbar auf dem Intervall $[a; b]$ ist. Haben die Randpunkte denselben Funktionswert $f(a) = f(b)$, so existiert eine relle Zahl $c \in]a; b[$ mit $f'(c) = 0$.
Beweis. Ist f eine konstante Funktion, so ist $f'(c) = 0$ für alle $c \in]a; b[$.
Angenommen f ist keine konstante Funktion. Dann hat f ein Maximum M und ein Minimum m ungleich $f(a)$ und $f(b)$ im Inneren des Intervalls, d.h. an einer Stelle $c \in]a; b[$. Von daher ist die Ableitung an der Stelle c Null: $f'(c) = 0$.

Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die differenzierbar auf dem Intervall $[a; b]$ ist. Es existiert einen Wert $c \in]a; b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Mit der Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

greifen wir auf den Satz von Rolle zurück. Wir müssen nur nachprüfen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

Weil $[a; b]$ ein Intervall ist, ist $b \neq a$, sodass der Nenner $b - a$ ungleich Null ist. Insofern ist g eine erlaubte Zusammensetzung von differenzierbaren Funktion, die zu einer differenzierbaren Funktion führt (siehe

dazu den Satz “Operationen für differenzierbare Funktionen” auf S. 53)
Nun berechnen wir die Funktionswerte an den Randpunkte a und b.

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a) - 0 = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}}\cancel{(b - a)} = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

Die Funktion g erfüllt die Voraussetzung für den Satz von Rolle. Nach diesem Satz existiert ein $c \in]a; b[$ mit $g'(c) = 0$. Die Ableitung von g ist gegeben durch

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Da $g'(c) = 0$ ist, gilt

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \text{ oder } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Konsequenzen / Beispiele

- Ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion auf einem Intervall überall Null, so ist die Funktion auf dem Intervall eine Konstante.
  Wählen wir zwei beliebige Punkte x_0 und x_1 mit $x_1 > x_0$ im Intervall. Nach dem MWS existiert ein $c \in]x_0; x_1[$ mit
  $$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$
  Nach Voraussetzung gilt $f'(c) = 0$. Dies kann nur passieren, wenn der Zähler Null ist. Aus $f(x_1) - f(x_0) = 0$ folgt die Behauptung $f(x_1) = f(x_0)$.

- Nimmt die Ableitung einer differenzierbare Funktion g immer positive Werte an, so wächst die Funktion im stregen Sinn (*Injektivität*).
  Um die Aussage mit Hilfe des Mittelwertsatzes (MWS) zu beweisen, wählen wir eine beliebige Zahl x_0 aus und betrachte eine weitere beliebige Zahl $x_1 > x_0$. Diese Zahlen definieren ein abgeschlossenes Intervall $[x_0; x_1]$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in]x_0; x_1[$ mit
  $$g'(c) = \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}.$$
  Nach Voraussetzung ist $g'(c) > 0$. Da der Nenner von $\frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}$ positiv ist, so muss auch der Zähler positiv sein, d.h. $g(x_1) - g(x_0) > 0$ oder $g(x_1) > g(x_0)$.

- Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x) = x^3 + 3x - 12$ genau eine Nullstelle hat.
  Die Funktion h ist ein Polynom, also stetig und differenzierbar. Eine genaue Lösung der Aufgabe scheint sich nicht einfach berechnen zu lassen. Wir versuchen die Existenz einer Nullstelle zu finden und kümmern uns anschließend um die Eindeutigkeit.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass eine Nullstelle existiert, falls die Funktion einen Vorzeichenwechsel aufweist. Wir wählen ein paar Zahlen und hoffen auf ein schnelles Ergebnis:

$$h(0) = -12 < 0, h(1) = -8 < 0, h(2) = 2 > 0.$$

Damit können wir sagen, dass es zwischen 1 und 2 eine Nullstelle gibt.
Die Ableitung der Funktion lautet

$$h'(x) = 3x^2 + 3.$$

Da $h'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist h eine wachsende Funktion, d.h. es kann keine weitere Nullstellen geben.

Dieses letzte Beispiel bringt uns wieder zurück zum Thema Monotonie.

7.5 Monotonieverhalten und Extrema

Monotonie haben wir bereits in Zusammenhang mit Folgen kennengelernt (monoton wachsend: $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n$). Dort wurde eine Funktion a von $\mathbb{N}$ nach R definiert:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \mapsto a_n.$$

(Achtung! Die Funktion a kann nicht abgeleitet werden, da die Definitionsmenge $\mathbb{N}$ ist.)
In diesem Abschnitt erweitern wir den Begriff "Monotonie" zu dem Fall einer reellen Funktionen. Hierbei bezeichnet D die Definitionsmenge der Funktion, die eine Teilmenge (Notation: $\subseteq$) der reellen Zahlen ist.

Definition (Monotonie für reelle Funktionen)
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *monoton steigend* (bzw. *streng monoton steigend*) auf dem Intervall I, falls aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in I$.
Die Funktion ist *monoton fallend* (bzw. *streng monoton fallend*) auf dem Intervall I, falls aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in I$.

Im folgenden Satz geben wir ein Kriterium an, wie man mit Hilfe der Ableitung das Monotonieverhalten bestimmen kann.

Satz (Monotonie und die Ableitung)
Sei f eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall I.
Ist $f'(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in I$, dann ist f streng monoton steigend im Punkt $(x_0; f(x_0))$.
Ist $f'(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in I$, dann ist f streng monoton fallend im Punkt $(x_0; f(x_0))$.

Bemerkungen

- Ist $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$, dann ist die Funktion monoton steigend und monoton fallend an der Stelle. Die Monotonie ist in diesem Fall nicht streng.
- Der Satz folgt aus dem Mittelwertsatz. Siehe S. 57.

Beispiele

- Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
  Die Definitionsmenge der Funktion lautet $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, da der Nenner dort gleich Null ist. (Dies ist eine sogenannte *Polstelle*.)
  Leiten wir die Funktion mit der Quotientenregel ab, erhalten wir
  $$f'(x) = \frac{1(x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0.$$
  Die Funktion ist auf dem Intervall $]-\infty, 1[$ sowie auf dem Intervall $]1, \infty[$ streng monoton fallend.

- Bestimmen Sie die Intervalle von R, auf denen die Funktion $g(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x$ monoton steigend bzw. monoton fallend ist.
  Die Ableitung von g lautet
  $$g'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 12(x^3 - 2x^2 - 5x + 6).$$
  Die Ableitung ist selbst ein Polynom (stetig), sodass ein Vorzeichenwechsel nur dort stattfinden kann, wo eine Nullstelle vorhanden ist. (Vgl. Nullstellensatz von Bolzano.)
  Hat das Polynom $h(x) = 1x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ rationale Nullstellen, müssen diese von der Form $\frac{\pm 1}{1}, \frac{\pm 2}{1}, \frac{\pm 3}{1}, \frac{\pm 6}{1}$ sein (Satz über rationale Nullstellen, wobei 1, 2, 3, 6 die Teiler von 6 sind). Setzen wir diese Zahlen in h ein, stellen wir fest, dass $-2, 1, 3$ die Nullstellen sind. Dann gilt $h(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$ und somit $g'(x) = 12(x+2)(x-1)(x-3)$.
  Die drei Nullstellen teilen $\mathbb{R}$ in 4 Teilintervallen auf:
  $$]-\infty; -2] \cup [-2; 1] \cup [1; 3] \cup [3; \infty].$$
  Das Monotonieverhalten bleibt stabil innerhalb jedem dieser Teilintervalle. Es genügt, einen Wert im Inneren jedes Intervalls zu testen. Zum Beispiel können die Zahlen $-3,\ 0,\ 2,\ 4$ gewählt werden.
  $$\begin{aligned} g'(-3) &= 12(-3+2)(-3-1)(-3-3) < 0 \text{ (m.f.)} \\ g'(0) &= 12(0+2)(0-1)(0-3) > 0 \text{ (m.s.)} \\ g'(2) &= 12(2+2)(2-1)(2-3) < 0 \text{ (m.f.)} \\ g'(4) &= 12(4+2)(4-1)(4-3) > 0 \text{ (m.s.)} \end{aligned}$$
  Die Funktion g ist monoton steigend auf $[-2; 1]$ und $[3; \infty[$.
  Die Funktion g ist monoton fallend auf $]-\infty; -2]$ und $[1; 3]$.

Satz (lokale Extrema)
Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $[a; b]$. Hat f ein Maximum oder Minimum an der Stelle $c \in]a; b[$, so muss die Ableitung dort verschwinden ($f'(c) = 0$).

Erklärung
Wechselt eine differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle c von streng monoton steigend

links von c auf streng monoton fallend rechts von c, so muss ein *lokales Maximum* (d.h. $f(x) < f(c)$ für alle x in der Nähe von c) vorhanden sein und die Ableitung an dieser Stelle muss Null sein.
Wechselt die Funktion an der Stelle c von streng monoton fallend links von c auf streng monoton steigend rechts von c, so handelt es sich um ein *lokales Minimum* (d.h. $f(x) > f(c)$ für alle x in der Nähe von c).
In beiden Fällen muss $f'(c) = 0$.

Strategie (lokale Extremstellen bestimmen)
Berechne die Nullstellen c_i der Ableitung und dann das Monotonieverhalten unmittelbar links und rechts von c_i. Gibt es eine Änderung, liegt ein Extrema vor, sonst nicht.

Beispiele

- Die Funktion $g(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x$ haben wir bereits auf Monotonie untersucht. Von links nach rechts ist das Monotonieverhalten wie folgt.
  streng monoton fallend auf $]-\infty; -2[$
  streng monoton steigend auf $]-2; 1[$
  streng monoton fallend auf $]1; 3[$
  streng monoton steigend auf $]3; \infty[$

  lokaler Minimumpunkt: $(-2; g(-2)) = (-2; -152)$
  lokaler Maximumpunkt: $(1; g(1)) = (1; 37)$
  lokaler Minimumpunkt: $(3; g(3)) = (3; -27)$

- Die Funktion $f(x) = x^3$ hat keine Extrema, obwohl die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ verschwindet. Erklären Sie, warum dies den Satz zur lokalen Extrema nicht widerspricht.
  Die Ableitung von $f(x)$ lautet $f'(x) = 3x^2$ und hat an der Stelle $x_0 = 0$ den Wert Null ($f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$). Sonst ist die Ableitung positiv. Links und rechts von $x_0 = 0$ ist deshalb die Funktion jeweils streng monoton steigend. Das Monotonieverhalten ändert sich an der Stelle $x_0 = 0$ nicht, sodass kein Extremum vorliegt.

7.6 Approximationsverfahren für Nullstellen

In verschiedenen Beispiele (z.B. auf Seite 57) haben wir die Existenz einer Nullstelle in einem Intervall, in dem ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte auftritt, mit dem ZWS nachgewiesen. In diesem Abschnitt werden zwei Methoden präsentiert, die uns ermöglichen, eine gute Annäherung der Nullstelle zu berechnen.

7.6.1 Intervallhalbierungsverfahren

Gesucht ist eine Nullstelle einer stetigen Funktion, die "schwer" zu berechnen ist. Gegeben ist ein Toleranz ε für den Fehler. Man fängt mit einem Intervall an, welches garantiert eine Nullstelle enthält und wählt immer kleinere Intervalle, die jeweils auch eine Nullstelle enthalten (d.h. es muss wiederum ein Vorzeichenwechsel geben), bis der Fehler klein genug ist.

Verfahren (Intervallhalbierung / Bisection) Sei f eine stetige Funktion mit einem Vorzeichenwechsel auf dem Intervall $[a;b]$.
Startwerte definieren: Setze $l_0 = a$ und $r_0 = b$ für den linken und den rechten Randpunkt.
Für $i = 1, \ldots, N$ mit N die kleinste natürliche Zahl, für die die Länge des Intervalls kleiner als 2ε ist, führe die folgenden Schritte sukzessiv durch.

1. Berechne $c = \dfrac{l_{i-1} + r_{i-1}}{2}$ und $f(c)$.
2. Ist $f(c) = 0$, Abbruch (Nullstelle gefunden).
3. Fallunterscheidung:

   a) Falls $(f(c) > 0$ und $f(l_{i-1}) < 0)$ oder $(f(c) < 0$ und $f(l_{i-1}) > 0)$, setze $l_i = l_{i-1}$ und $r_i = c$

   b) Falls $(f(c) > 0$ und $f(r_{i-1}) < 0)$ oder $(f(c) < 0$ und $f(r_{i-1}) > 0)$, setze $l_i = c$ und $r_i = r_{i-1}$

Die Randpunkte für die neuen Intervalle sind so gewählt, dass ein Vorzeichenwechsel auftritt.
Im letzten Schritt erhalten wir ein Intervall der Länge kleiner als 2ε. Setzen wir c anschließend zu $c = \dfrac{l_N + r_N}{2}$, so ist der Abstand von c zur tatsächlichen Nullstelle kleiner als ε.

Beispiel
Die Funktion $x^3 + 3x - 12$ besitzt eine Nullstelle in dem Intervall $[1;2]$ (vgl. Seite 57). Bestimmen Sie eine Annäherung an die Nullstelle mit einem x Fehler kleiner als $\varepsilon = 0{,}05$.

Die Anfangswerte werden gesetzt: $l_0 = 1$, $r_0 = 2$ (Anmerkung: $f(l_0) < 0, f(r_0) > 0$).

Der Algorithmus wird angewendet, bis die Länge des Intervalls klein genug ist.

$\underline{i = 1}$
$c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, f(c) = \frac{27}{8} + \frac{9}{2} - 12 = -4{,}125 < 0$
$l_1 = \frac{3}{2}, r_1 = 2, r_1 - l_1 = 0{,}5 > 2\varepsilon$

$\underline{i = 2}$
$c = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4}, f(c) = \frac{343}{64} + \frac{21}{4} - 12 = -1{,}3906 < 0$
$l_2 = \frac{7}{4}, r_2 = 2, r_2 - l_2 = 0{,}25 > 2\varepsilon$

$\underline{i = 3}$
$c = \frac{\frac{7}{4}+2}{2} = \frac{15}{8}, f(c) = \frac{15^3}{8^3} + \frac{45}{8} - 12 == 0{,}2168¿0$
$l_3 = 1, r_3 = \frac{15}{8}, r_3 - l_3 = 0{,}875 > 2\varepsilon$

$\underline{i = 4}$
$c = \frac{1+\frac{15}{8}}{2} = \frac{23}{16}, f(c) = \frac{23^3}{16^3} + \frac{69}{16} - 12 = -4{,}7170 < 0$

$l_4 = \frac{23}{16}, r_4 = \frac{15}{8}, r_4 - l_4 = 0{,}4375 > 2\varepsilon$

$\underline{i = 5}$
$c = \frac{\frac{23}{16}+\frac{15}{8}}{2} = \frac{53}{32}, f(c) = \frac{53^3}{32^3} + \frac{159}{32} - 12 = -2{,}4879 < 0$
$l_5 = \frac{53}{32}, r_5 = \frac{15}{8}, r_5 - l_5 > 0{,}2187 > 2\varepsilon$

$\underline{i = 6}$
$c = \frac{\frac{53}{32}+\frac{15}{8}}{2} = \frac{113}{64}, f(c) = \frac{113^3}{64^3} + \frac{339}{64} - 12 = -1{,}1989 < 0$
$l_6 = \frac{113}{64}, r_6 = \frac{15}{8}, r_6 - l_6 > 0{,}1093 > 2\varepsilon$

$\underline{i = 7}$
$c = \frac{\frac{113}{64}+\frac{15}{8}}{2} = \frac{233}{128}, f(c) = \frac{233^3}{128^3} + \frac{669}{128} - 12 = -0{,}5074 < 0$
$l_7 = \frac{233}{128}, r_7 = \frac{15}{8}, r_7 - l_7 > 0{,}0546 > 2\varepsilon$

$\underline{i = 8}$
$c = \frac{\frac{233}{128}+\frac{15}{8}}{2} = \frac{473}{256}, f(c) = \frac{473^3}{256^3} + \frac{1419}{256} - 12 = -0{,}1494 < 0$
$l_8 = \frac{473}{256}, r_8 = \frac{15}{8}, r_8 - l_8 > 0{,}0273 < 2\varepsilon$

Der Mittelwert der Randpunkte ist dann eine Annäherung der Nullstelle: $\frac{1}{2}\left(\frac{473}{256} + \frac{15}{8}\right) = 1{,}8613$.

Eine Annäherung an die Nullstelle ist $c = \dfrac{\frac{15}{16}+1}{2} = \dfrac{31}{32}$.

Diese Methode ist recht leicht zu verstehen und berechnen. Die Konvergenz ist allerdings für große Intervalle und sehr kleine Genauigkeiten noch langsamer.

7.6.2 Newton-Verfahren

Ein alternatives Verfahren wurde von Isaac Newton (1642 – 1726) entwickelt. Um diese Methode zu verwenden, muss die Funktion in einem Intervall, welches eine Nullstelle enthält, differenzierbar sein. Die Methode muss nicht immer funktionieren. Wenn es klappt, dann ist die Konvergenz des Algorithmus meistens schnell.

Die Grundidee ist wie folgt. Ein x_1 wird beliebig aus dem Intervall gewählt. Die Tangente T_1 an den Graphen der Funktion in $(x_1; f(x_1))$ wird konstruiert. Nun wird die Nullstelle der Tangente T_1 berechnet. Diese Nullstelle nennen wir x_2. Die Tangente T_2 an der Stelle x_2 wird konstruiert und die Nullstelle davon (x_3) berechnet. Das Verfahren wiederholt sich, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird oder bis ein Problem auftaucht (beispielsweise eine Tangente mit Steigung 0 auftritt).

Formel (Newton-Verfahren)

Die Tangente an den Graphen der differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_n ist gegeben durch

$$y = f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n).$$

Diese Gerade hat eine Nullstelle, wenn $y = 0$ ist:

$$0 = f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n).$$

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned} f'(x_n)(x - x_n) &= f(x_n) \\ x - x_n &\overset{f'(x_n)\neq 0}{=} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x &= x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck ist x_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Falls die Ableitung an einer Stelle x_i Null ist, muss das Verfahren abgebrochen werden. In dieser Situation kann es hilfreich sein, einen anderen Startwert zu wählen.

Beispiel
Die Funktion $x^3 + 3x - 12$ besitzt eine Nullstelle auf dem Intervall $[1; 2]$ (vgl. Seite 57). Bestimmen Sie eine Annäherung an die Nullstelle mit einem Fehler kleiner als $\varepsilon = 0{,}05$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Mit der gegebenen Funktion nimmt die Formel für x_{n+1} die Form

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n - 12}{3x_n^2 + 3}$$

an.
Als Startwert wählen wir $x_0 = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5 - \frac{(1{,}5)^3 + 3(1{,}5) - 12}{3(1{,}5)^2 + 3} = 1{,}9230 \\ x_2 &= 1{,}923 - \frac{(1{,}923)^3 + 3(1{,}923) - 12}{3(1{,}923)^2 + 3} = 1{,}8606 \\ x_3 &= 1{,}8606 - \frac{(1{,}8606)^3 + 3(1{,}8606) - 12}{3(1{,}8606)^2 + 3} = 1{,}8589 \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen x_2 und x_3 ist kleiner als $0{,}05$. Eine Annäherung an die Nullstelle mit der gewünschten Genauigkeit ist $1{,}8589$.

Dieses Verfahren ist im Vergleich zu dem Intervallhalbierungsverfahren schneller für die gegebene Funktion.

7.7 Lineare Approximation

Nicht nur können wir mit Hilfe der Ableitung x-Werte approximieren, die einen gegebenen Funktionswert annähern, sondern auch Funktionswerte mit einem bestimmten x-Wert. Die Idee hinter der linearen Approximation ist die Tangente an einer Stelle x_0 in der Nähe von dem gewünschten x-Wert zu konstruieren. Der y-Wert der Tangente an der Stelle x ist eine Annäherung zu dem gesuchten Funktionswert.

Der Grund, warum dies meistens gut funktioniert, liegt daran, dass in der Nähe von x_0 eine differenzierbare Funktion f wie eine Gerade aussieht. Nehme dazu einen sehr kleinen Kreis um $(x_0; f(x_0))$ und zoome heran.
Ist die Funktion nicht differenzierbar an einer Stelle, ist dies nicht der Fall. Betrachte hierzu die Betragsfunktion. Egal wie klein der Kreis um $(0; 0)$ ist, ist das Bild immer ein "V".

Verfahren (lineare Approximation) Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x \in]a; b[$. Dann ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Beispiele

- Bestimmen Sie eine Approximation der Zahl $\sqrt{19}$ mit Hilfe der linearen Approximation.
  Definiere die Funktion $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Die Ableitung der Funktion ist $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Wähle für x_0 eine Zahl, für die die Funktion und Ableitung leicht auszuwerten ist und die nah an x_0 ist, beispielsweise $x_0 = 16$. Dann ist

  $$f(x) \approx f(16) + f'(16)(x - 16) = 4 + \frac{1}{8}(x - 16).$$

  Setze $x = 19$ ein, um eine Approximation von $\sqrt{19}$ zu erhalten:

  $$f(19) \approx 4 + \frac{1}{8}(3) = 4{,}375.$$

  Der Taschenrechner gibt den Wert $\sqrt{19} = 4{,}35889844$. Der Fehler in unserer Approximation ist weniger als $0{,}4\%$.

- Bestimmen Sie eine Annäherung der Zahl $\ln 3$ mit linearer Approximation.
  Definiere $g(x) = \ln x$ und wähle $x_0 = e \approx 2{,}7182$. Die Ableitung von g lautet $g'(x) = \frac{1}{x}$, sodass

  $$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = \ln e + \frac{1}{e}(x - e) = 1 + \frac{1}{e}x - 1 = \frac{1}{e}x \approx 0{,}3679x.$$

  Für die gewünschte Approximation setzen wir 3 fur x ein:

  $$g(3) \approx 0{,}3679(3) = 1{,}1037.$$

  Der Taschenrechner gibt den Wert $1{,}0986$ an. Der Fehler in unserer Approximation beträgt $0{,}46\%$.

7.8 Ableitungen höherer Ordnung

Die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f ist wiederum eine Funktion. Falls f' ebenfalls differenzierbar ist, nennen wir die Ableitung davon die *zweite Ableitung* (Bezeichnung: f''). Falls die zweite Ableitung differenzierbar ist, so ist die *dritte Ableitung* $f''' = (f'')'$ die Ableitung von f''. Ab die *vierte Ableitung* werden Striche nicht mehr verwendet, sondern die Zahl wird in Klammern hochgestellt:

$$f^{(4)} = (f''')',\ f^{(5)} = (f^{(4)})', \ldots .$$

Natürlich können alle Ableitung mit dieser Schreibweise dargestellt, was für Formeln sehr praktisch sein kann. In diesem Zusammenhang wird die Funktion f durch $f^{(0)}$ dargestellt.

Die geometrische Interpretation der zweite Ableitung ist die Krümmung. Wachsen die Steigungen der Tangenten auf einem Intervall (von links nach rechts betrachtet), so ist die zweite Ableitung positiv. Fallen diese Steigungen, so ist die zweite Ableitung negativ.

7.8.1 Kurvendiskussion

In einer Kurvendiskussion sind einige Eigenschaften der Funktion zu untersuchen.

- Intervalle, auf denen die Funktion stetig ist
- Intervalle, auf denen die Funktion differenzierbar ist
- Intervalle, auf denen die Funktion zweimal differenzierbar ist
- Punkte, die nicht im Definitionsbereich von f liegen, Nullstellen von f, Intervalle, auf denen die Funktion positiv ist (Graph liegt oberhalb der x-Achse) bzw. negativ ist (Graph liegt unterhalb der x-Achse)
- Punkte, für die die Ableitung nicht definiert ist, Nullstellen von f', Intervalle, auf denen die Funktion monoton steigend (f’(x)¿0) bzw. fallend (f’(x)¡0) ist.
- Punkte, für die die zweite Ableitung nicht definiert ist, Nullstellen von f'', Intervalle, auf denen die Funktion konvex (f”(x)¿0) bzw. konkav (f”(x)¡0) ist.
- Extrempunkte
- ggf. Asymptoten

Beispiele hierfür werden in der Vorlesung präsentiert und im Tutorium vertieft.

7.8.2 Taylor-Polynome

Im Abschnitt 7.7 haben wir eine Formel für eine Gerade (Polynom 1. Grades) hergeleitet, die die Funktion in der Nähe eines gewählten Punkt approximiert. Hier erweitern wir die Definition, um die Approximation mit einem Polynom n-ten Grades durchzuführen. Intuitiv soll die Annäherung genauer werden, je größer der Grad ist.

Definition (Taylor-Polynom)
Sei f eine n-mal differenzierbare Funktion. Das Taylor-Polynom n-ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Bemerkung
Leiten wir das Taylor-Polynom k mal ab und setzen wir x_0 in das Ergebnis ein, erhalten wir $f^{(k)}(x_0)$. D.h. die ersten n Ableitungen des Taylor-Polynoms stimmen mit den ersten n Ableitungen der Funktion f an der Stelle x_0 überein. Somit verhält sich das Taylor-Polynom in der Nähe von x_0 sehr ähnlich zu der eigentlichen Funktion.

Beispiele

- Das Taylor-Polynom 1. Grades der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 16$ lautet $T_1(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16)$. (Siehe das Beispiel auf Seite 64.)
- Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 4. Grades für die Funktion $g(x) = e^x$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
  Erstellen wir eine Tabelle mit $g^{(k)}$ und $g^{(k)}(x_0)$ und setzen wir die Daten in die Formel ein:

k	$g^{(k)}$	$g^{(k)}(0)$
0	e^x	$e^0 = 1$
1	e^x	1
2	e^x	1
3	e^x	1
4	e^x	1

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{1}{0!}(x-0)^0 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4. \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 4. Grades für die Funktion $h(x) = \cos x$ im Entwicklungspunkt $x = 0$.
  Erstellen wir eine Tabelle mit $h^{(k)}$ und $h^{(k)}(x_0)$ und setzen wir die Daten in die Formel ein:

k	$h^{(k)}$	$h^{(k)}(0)$
0	$\cos x$	1
1	$-\sin x$	0
2	$-\cos x$	-1
3	$\sin x$	0
4	$\cos x$	1

$$\begin{aligned}T_4(x) &= \frac{1}{0!}(x-0)^0 + \frac{0}{1!}(x-0)^1 + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.\end{aligned}$$

Das n-te Taylor-Polynom $T_n(x)$ ist eine Annäherung an die Funktion f. Die Genauigkeit der Approximation T_n steigt mit steigendem Wert von n. Nun ist $T_{n+1}(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.
Es gibt somit einen Fehler, den wir mit $R_n(x)$ (*Restglied*) bezeichnen:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Satz von Taylor (Lagrange Form)
Sei f eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[x_0; x]$. Dann existiert ein $c \in]x_0; x[$ mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Dieser Satz folgt (nicht ganz offensichtlich) aus dem Mittelwertsatz und liefert eine Methode, um den Fehler auf einem Intervall abzuschätzen.

8 Potenzreihen

Bisher wurden unendlichen Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ betrachtet. Der Begriff kann erweitert werden, in dem *Potenzen* einer *Variable* und/oder komplexe Zahlen zugelassen werden: beispielsweise

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}.$$

Solche *Potenzreihen* kommen häufig als Lösungen zu Differentialgleichungen vor.[8] Im Hinblick auf die Taylor-Polynomen werden die Potenzreihen in einer allgemeinen Form definiert.

[8]Differentialgleichungen sind Gleichungen, die eine Beziehung zwischen einer Funktion und deren Ableitungen beschreibt. Solche Gleichungen können physikalische Prozesse, wie beispielsweise in der Schaltkreistheorie, beschreiben. Differentialgleichungen werden in einem anderen Kurs behandelt. In diesem Kurs vorbereiten wir uns darauf.

8.1 Allgemeine Potenzreihen

Definition (Potenzreihe)

Eine (komplexe) Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit $a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Eine (reelle) Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$.

Setzen wir einen Wert in die Variable ein, so erhalten wir eine unendliche Reihe mit konstanten Summanden. Die Frage nach Konvergenz kann mit Hilfe der unendlichen Reihen untersucht werden. Offensichtlich konvergiert die Reihe für den Wert $z = z_0$ (bzw. $x = x_0$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 \overbrace{(z_0-z_0)^0}^{=1} + a_1 \overbrace{(z_0-z_0)^1}^{=0} + a_2 \overbrace{(z_0-z_0)^2}^{=0} + \cdots = a_0.$$

Für welche anderen z Werte konvergiert die unendliche Reihe? Durch Anwendung des Quotientenkriteriums (QK) können wir für die meisten Werte eine Entscheidung schnell treffen. Angenommen, der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert und gleich eine von Null verschiedene Zahl ρ (sprich: rho) ist. Betrachten wir

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}\cancel{(z-z_0)^k}(z-z_0)}{a_k\cancel{(z-z_0)^k}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |z-z_0| = \rho \cdot |z-z_0|.$$

N ach dem QK konvergiert die Reihe für alle z, welche die Ungleichung $\rho \cdot |z-z_0| < 1$ erfüllen, d.h. für alle z, welche die Ungleichung $|z-z_0| < \frac{1}{\rho}$ erfüllen. Ferner divergiert die Reihe für alle z, die die Ungleichung $|z-z_0| > \frac{1}{\rho}$ erfüllen. Ist $|z-z_0| = \frac{1}{\rho}$, so ist keine Aussage mit dem QK möglich.

Falls ρ existiert, konvergiert die Reihe, wenn Punkte innerhalb des offenen Kreises (d.h. ohne Rand) mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius $R := \frac{1}{\rho}$ liegen. Die Reihe divergiert, wenn Punkte außerhalb des (abgeschlossenen) Kreises in die Potenzreihe eingesetzt werden. Aus diesem Grund heißt R der *Konvergenzradius* der Reihe.[9] Das Konvergenzverhalten der Reihe für einen Punkt am Kreisrand kann mit dem Quotientenkriterium nicht bestimmt werden, d.h. Randpunkte müssen einzeln behandelt werden.

Wir fassen diese Überlegungen im ersten Teil des folgenden Satzes. Zwei weitere Fälle können auch vorkommen, falls R oder ρ existieren.

Satz. (Konvergenz von Potenzreihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe und z_0 eine komplexe Zahl.

1. Fall. Für $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten die folgenden Aussagen.

[9]Achtung! Die Potenzreihe muss in Potenzen von $(z-z_0)$ entwickelt werden. Die Ergebnisse müssen angepasst werden, falls die Entwicklung der Form $(az-bz_0)$ für Zahlen a und b annimmt.

a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ist (absolut) konvergent für $|z-z_0| < R$.

b) Die Reihe ist divergent für $|z-z_0| > R$.

c) Die Reihe muss mit anderen Methoden überprüft, wenn $|z-z_0| = R$.

2. Fall. Ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \infty$, sagen wir , dass den Konvergenzradius unendlich ist und schreiben dafür $R = \infty$.[10] Die Potenzreihe konvergiert für jeden Wert von z in $\mathbb{C}$.

3. Fall. Für $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 0$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ nur an der Stelle $z = z_0$. Ist $z \neq z_0$, so ist die Reihe divergent.

Bemerkungen

- Im 1. und 2. Fall entspricht die Menge der komplexen Zahlen, die die Ungleichung $|z-z_0| < R$ für $R \in \mathbb{R}$ erfüllen, einem Kreis. Deshalb spricht man von einem *Konvergenzkreis*.

- Der Satz gilt analog für reelle Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. Die Lösungsmenge ist in den 1. oder 2. Fall ein Intervall, das *Konvergenzintervall*. Beim 3. Fall konvergiert die Potenzreihe nur für $z = z_0$. Hierbei besteht das Konvergenzintervall aus einen einzigen Punkt. Dies ist kein Intervall, aber wir benennen es so, um unnötig komplizierte Aufgabenstellungen zu vermeiden.

Beispiel - Konvergenzradius im Komplexen
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3-i}\right)^k \cdot (z-(1+3i))^k.$$

Entscheiden Sie, ob $z = 1-3i$ im Konvergenzkreis liegt.

Im ersten Schritt wird der Konvergenzradius berechnet.

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{i}{3-i}\right)^k \cdot \left(\frac{3-i}{i}\right)^{k+1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{3-i}{i}\right| = \frac{|3-1\cdot i|}{|0+1\cdot i|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{0^2+1^2}} = \sqrt{10}$$

Der Konvergenzradius ist $R = \sqrt{10}$, d.h. die Reihe konvergiert für alle z mit $|z-z_0| = |z-(1+3i)| < \sqrt{10}$.

Um zu überprüfen, ob die Potenzreihe $z = 1-3i$ konvergiert, müssen wir bestimmen, ob $z = 1-3i$ im Konvergenzkreis liegt. Nach der Aufgabestellung ist es nicht erforderlich, den Konvergenzkreis explizit zu bestimmen. Ist der Abstand zwischen und z_0 weniger als $\sqrt{10}$, dann liegt z innerhalb des Kreises.

[10] Streng genommen ist diese Schreibweise irreführend, weil ∞ keine Zahl ist.

Falls der Abstand mehr als $\sqrt{10}$ beträgt, so liegt der Punkt außerhalb des Konvergenzkreises.[11]

Der Abstand zwischen $z = 1 - 3i$ und $z_0 = 1 + 3i$ lautet

$$|z - z_0| = |1 - 3i - (1 + 3i)| = |0 - 6i| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6|\sqrt{10}.$$

Der Punkt $z = 1 - 3i$ liegt außerhalb des Konvergenzkreises.

Wenden wir uns nun den reellen Fall an.

Beispiel
Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzraduis sowie das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x)^k}{k!}$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(3k)!}{k!} (x+5)^k$

a) Um den Konvergenzradius zu berechnen, betrachten wir die Koeffizienten $\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{\rho} &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{k} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da die Potenzen der Variable x in der Form $x^k = (x - 0)^k$ auftreten, ist der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Nach dem QK konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$, die die Bedingung

$$|x - x_0| = |x| < 1$$

erfüllen. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$-1 < x < 1.$$

Das Konvergenzintervall schließt das Intervall $]-1; 1[$ ein. Ferner divergiert die Reihe für alle x mit $|x| > 0$, d.h. für alle $x < -1$ und alle $x > 1$. Es bleibt nur die Randpunkte $x = \pm 1$ auf konvergenz zu untersuchen.

$x = 1$.
Wir setzen $x = 1$ in die Reihe ein:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

[11] In der unglücklichen Fall, dass der Abstand genau $\sqrt{10}$ beträgt, müssen wir $z = 1 - 3i$ in die Reihe setzen und nach Konvergenz untersuchen. Ein Beispiel für diese Situation betrachten wir im reellen Fall.

Dies ist die harmonische Reihe, die bekanntlich divergent ist. Der Punkt $x = 1$ gehört nicht zum Konvergenzintervall.

$x = -1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Dies ist die alternierende harmonische Reihe und die ist konvergent. Der Punkt $x = -1$ gehört zum Konvergenzintervall.

Insgesamt erhalten wir $[-1; 1[$ als Konvergenzintervall.

b) Der Konvergenzradiusbeträgt 3:

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{\rho} &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{3^{k+1}}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{3^{k+1}}{3^k} \right| \\ &= 3. \end{aligned}$$

Da die Potenzen der Variable der Form $(x - 2)$ annimmt, ist der Entwicklungspunkt $x = 2$. Die Reihen konvergiert (mindestens) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - 2| < 3$$

oder

$$-3 < x - 2 < 3.$$

Durch Addition mit 2 erhalten wir

$$-1 < x < 5.$$

Die Randpunkte müssen gesondert überprüftwerden.
$x = -1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1-2)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} -1$$

Die Summanden dieser Reihe bilden keine Nullfolge, sodass die Reihe divergiert, d.h. $x = -1$ nicht zum Konvergenzintervall gehört.

$x = 5$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5-2)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

Wiederum bilden die Summanden keine Nullfolge. $x = 5$ gehört ebenfalls nicht zum Konvergenzintervall.

Für alle weiteren x-Werte ist der Abstand von $x_0 > 3$, sodass keine weiteren Punkten im Konvergenzintervall liegen. Von daher ist das Konvergenzintervall $]-1;5[$.

c) Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$
Konvergenzradius:

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{\rho} &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} |(k+1)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Der Konvergenzkreis ist unendlich. Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gibt also keine Pandpunkte, die getestet werden müssen. Der Konvergenzkreis ist dementsprechend $]-\infty;\infty[$.

d) Entwicklungspunkt: $x_0 = -5$, denn $(x+5) = (x-(-5))$
Konvergenzradius:

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{\rho} &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(3k)!}{k!}}{\frac{(3(k+1))!}{(k+1)!}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(3k)!}{(3k+3)!} \cdot \frac{(k+1)!}{k!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{(3k)!}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)\cancel{(3k)!}} \cdot \frac{(k+1)\cancel{k!}}{\cancel{k!}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3\cancel{(k+1)}(3k+2)(3k+1)} \cdot \cancel{(k+1)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3(3k+2)(3k+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da der Konvergenzradius 0 ist, konvergiert die Reihe nur im Entwicklungspunkt $x_0 = -5$.
Das Konvergenzintervall $\{5\}$ besteht nur aus dem Punkt $x_0 = 5$.

8.2 Taylor- und Maclaurin-Reihen

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir die sogenannten Taylor- und Maclaurin-Reihen. Wir erinnern uns daran, dass das Taylor-Polynom T_n vom Grad n einer Funktion f und die Funktion selbst stimmen bei den ersten n-Ableitungen überein:

$$T_n(x_0) = f(x_0),\, T_n'(x_0) = f'(x_0),\, \ldots, T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Diese Polynomapproximationen der Funktion sind meistens ziemlich gut.
Nun erweitern wir diese Konstruktion zu unendlich oft differenzierbare Funktion mit Hilfe von Potenzreihen.

Definition - Taylor-Reihe, Maclaurin-Reihe
Sei f eine unendlich-oft differenzierbare Funktion. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt *Taylor-Reihe* der Funktion f im *Entwicklungspunkt* $x = x_0$.
Ist $x_0 = 0$, d.h. die Reihe nimmt die Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

an, heißt die Reihe die *Maclaurin-Reihe* der Funktion f. Diese ist selbst eine Taylor-Reihe.

Beispiel - Maclaurin-Reihe der Exponentialfunktion
Sei $f(x) = e^x$. Bestimmen Sie die Maclaurin-Reihe von f sowie den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall.

Stellen wir eine Tabelle für die Funktion, die Ableitungen und die Ableitungen ausgewertet im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	e^x	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Der Muster ist offensichtlich. Die Maclaurin-Reihe lautet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Konvergenzradius:

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{\rho} &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cancel{k!}}{\cancel{k!}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Die Maclaurin-Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (Konvergenzintervall: $]-\infty;\infty[$).
Dies ist ein wichtiges Ergebnis. Die Maclaurin-Reihe konvergiert gegen der Funktion $f(x) = e^x$ für alle x. Wir können deshalb

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

schreiben.
Beispiele mit weiteren Funktionen werden in der Vorlesung präsentiert.

Die Taylor- bzw. Maclaurin-Reihen können uns helfen, Ableitungen von hässlichen Funktionen zu bestimmen oder Integrale zu bestimmen, die mit den uns bekannten Methoden gar nicht lösbar sind. Diese Behauptungen basieren auf den folgenden Satz, den wir nur für Maclaurin-Reihen hier formulieren.

Satz - Integration und Differentiation von Maclaurin-Reihen
Angenommen die Funktion f ist durch eine Maclaurin-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit Konvergenzradius $R > 0$ darstellbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- f ist differenzierbar auf dem Konvergenzintervall $]-R;R[$ mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- f ist integrierbar auf dem Konvergenzintervall $]-R;R[$ mit

$$\int_0^x f'(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Die Ableitung und das Integral haben denselben Konvergenzradius R wie die Maclaurin-Reihe.

Beispiel
Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int e^{(x^2)}\,dx$.

Die Maclaurin-Reihe der Funktion $f(x) = e^x$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, also sicherlich auch für $x = x^2$. Wir setzen x^2 in die Maclaurin-Reihe für $f(x) = e^x$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}
e^{(x^2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} \\
&= \frac{x^{2\cdot 0}}{0!} + \frac{x^{2\cdot 1}}{1!} + \frac{x^{2\cdot 2}}{2!} + \frac{x^{2\cdot 3}}{3!} + \cdots \frac{x^{2\cdot k}}{k!} + \cdots \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2\cdot k}}{k!} + \cdots
\end{aligned}$$

Wir integrieren beide Seiten.

$$\begin{aligned}
\int e^{(x^2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{0!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2\cdot k}}{k!} + \cdots \right) dx \\
&= \frac{x}{1\cdot 0!} + \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} + \cdots + C \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!} + C
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist genau das, was wir durch Reinssetzen in die Formel erhalten hätten.

9 Integration

Motivation
In der Geometrie interessierte man sich für den Flächeninhalt einer gegeben Objekt: Kreis, Zylinder, usw. Dafür gibt es Formel, die vor tausenden von Jahren entwickelt wurden. Diese Objekten waren regelmäßig.
In der Praxis sind die Objekte, die wir betrachten, gar nicht regelmäßig. Wie kann beispielsweise der Flächeninhalt des Bodens eines Kofferraums bemessen werden? Eine gute Annäherung erhalten wir dadurch, dass wir den Boden des Kofferraums mit Rechtecken darstellen. Wir wählen hierfür Intervalle von links vorne nach links hinten gesehen mit einer bestimmten Breite, beispielsweise 20 cm. In jedem Intervall messen wir die Länge von links nach rechts und dies mit der Breite 20 cm multiplizieren. So haben wir den Flächeninhalte eines Rechtecks. Summieren wir die so erhaltenen Flächeninhalte auf, haben wir eine Approximation des gewünschten Flächeninhalts. Wollen wir eine genauere Annäherung, dann wählen wir eine kleinere Breite für die Intervalle.
In der Analysis wird der Flächeninhalt zwischen einer Funktion und die x-Achse auf einem abgeschlossenem Intervall nach dem selben Prinzip approximiert. Hat die Funktionen guten Eigenschaften, dann kann der

Flächeninhalt genau berechnet werden.

9.1 Das bestimmte Integral

Wir wiederholen das Verfahren in mathematischer Sprache. Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige oder monotone Funktion. Das Intervall wird in n Teilintervalle der Länge $\dfrac{b-a}{n}$ aufgeteilt. Die Randpunkte der Teilintervallen sind dementsprechend

$$\begin{aligned}
a_0 &= a \\
a_1 &= a + \frac{b-a}{n} = a + 1\frac{b-a}{n} \\
a_2 &= a_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2\frac{b-a}{n} \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + \frac{b-a}{n} = a + n\frac{b-a}{n} \\
&= a + b - a \\
&= b.
\end{aligned}$$

Da $\dfrac{b-a}{n}$ unabhängig von i ist, geben wir dies einen Namen: $\Delta x := \frac{b-a}{n}$. Für den linken Randpunkt jedes Teilinterval (d.h. $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$) berechnen wir

$$f(a_i) \cdot \Delta x$$

für $i = 0$, $i = 1$, …, $i = n-1$, wobei $f(a_i)$ die Höhe (y-Wert) und Δx die Breite eines Rechtecks verkörpern. Dieser Produkt ist eine Annäherung zum Flächinhalt zwischen der Funktion und die x-Achse auf dem Teilintervall.
Die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \cdot \Delta x$$

ist eine Annäherung zum Flächinhalt zwischen der Funktion und die x-Achse auf dem Gesamtintervall $[a;b]$.
Sollte die Annäherung genauer sein, dann wird n größer gewählt. Es lässt sich fragen, ob einen Grenzwert existiert. Für stetige und monotone Funktionen ist dies immer so. Für $n \to \infty$ läuft $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ gegen 0. Beim Grenzwertprozess ersetzen wir Δx mit dx, um uns daran zu erinnern, das die Funktionswerte (die Höhen) immer mit einer Breite (winzig klein aber ungleich Null!) multipliziert werden.

Definition - das bestimmte Integral
Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige oder monotone Funktion. Das bestimmte Intervall ist definiert als

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \cdot \Delta x.$$

Bemerkungen

- Schreiben wir
$$\int_a^b f,$$
d.h. wir lassen dx einfach weg, dann haben wir ein Problem. Die Breite jedes Teilintervalls ist 1 (wegen $f = f \cdot 1$). Dies ist kein Grenzwertprozess und kann deshalb nicht das Integral sein!
- Die Wahl des linken Randpunkts jedes Teilintervalls ist willkürlich. Wir hätten den rechten Randpunkt oder sogar einen beliebigen Punkt im inneren jedes Teilintervalls wählen können. Der Grenzwert ist *immer* gleich.

Aufgabe
Als kleine Übung können Sie ein Programm schreiben, um die Annäherungen des Flächeninhalts zwischen $f(x) = x^2$ und der x-Achse auf dem Intervall $[0; 1]$ für $n = 1, 2, \ldots, 10$ zu berechnen.

Satz - Integralabschätzung
Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a; b]$. Bezeichne mit m den minimalen Wert und M den maximalen Wert von f auf dem Intervall. Dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Erklärung
$m(b-a)$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit Höhe m und Breite $b-a$ (die Länge des Intervalls). Da $m \leq f(x)$ für alle $x \in [a; b]$ ist es logisch, dass $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.
$M(b-a)$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit Höhe M und Breite $b-a$. In diesem Fall ist $f(x) \leq M$ für alle $x \in [a; b]$, sodass $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ gelten muss.
Im Zweifelsfall malen Sie eine stetige Funktion auf.[12] Identifizieren Sie dazu den Minimumwert, den Maximumwert, die entsprechenden Rechtecken sowie den gesuchten Flächeninhalt $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right)$. Vergleichen Sie Ihr Bild mit der Ungleichung.

Mit Hilfe des Integrals können wir auch den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall definieren.

Satz - Mittelwertsatz der Integralrechnung
Sei f eine stetige Funktion. Der *Mittelwert* der Funktion auf dem Intervall $[a; b]$ ist gegeben durch

$$y^* = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Des Weiteren, existiert ein $x^* \in [a; b]$, sodass

$$y^* = f(x^*) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

[12] Seien Sie etwas sportlich dabei. Eine konstante Funktion ist vielleicht nicht so hilfreich.

Beweis.
Seien $m = f(c)$ der minimalen Wert und $M = f(d)$ der maximalen Wert der Funktion f auf $[a; b]$ mit $c, d \in [a; b]$. Nach dem Integralabschätzungssatz gilt

$$m = f(c) \leq y^* = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(d) = M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen existiert ein x^* zwischen c und d mit

$$f(x^*) = y^* = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

was zu zeigen war.

9.2 Stammfunktionen und Rechenregeln

In viele Anwendungen rechnet man nicht mit der Definition, weil die meisten vorkommenden Funktionen wohl bekannt sind. Hierfür wendet man den Hauptsatz der Integralrechnung und Rechenregeln für integrierbare Funktionen an. Vorher brauchen wir einen weiteren Begriff: Stammfunktion.

Definition - Stammfunktion
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (I darf auch ganz $\mathbb{R}$ sein). Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und gilt $F' = f$, so heißt F eine *Stammfunktion* von f.

Beispiele

- Die Funktion $F_0(x) = x^2$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2x$, denn es gilt $F_0'(x) = (x^2)' = 2x$.
- Die Funktion $F_1(x) = x^2 + 1$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2x$, denn es gilt $F_2'(x) = (x^2 + 1)' = 2x + 0 = 2x$.
- Die Funktion $F_k(x) = x^2 + k$ mit k eine Konstante ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2x$, denn es gilt $F_2'(x) = (x^2 + k)' = 2x + 0 = 2x$.

Bemerkung
Nicht jede Funktion hat eine Stammfunktion. Wenn jedoch f eine Stammfunktion F hat, dann gibt es unendlich viele Stammfunktionen. Eine weitere Stammfunktion erhalten wir durch Addition mit einer Konstante $C \in \mathbb{R}$, d.h. $G(x) = F(x) + C$ ist auch eine Stammfunktion.

Satz - Hauptsatz der Integralrechnung
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall I und $[a; b] \subset I$ ein Teilintervall mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a; b]$$

ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$$F'(x) = f(x).$$

(ii) Für jede Stammfunktion F von f auf I gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C = \int_a^x f(t)dt + F(a).$$

(iii) Insbesondere ist für $I = [a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b.$$

Die ersten zwei Behauptungen sind eher theoretisch. Der dritte Punkt ist für uns besonders relevant, weil wir dadurch sehr viel rechnen können.

Beispiel - bestimmtes Integral berechnen

Bestimmen Sie $\int_0^1 2xdx$.

$$\int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

Manche Leute verwenden keinen Strich sondern eckigen Klammern:

$$[x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Das ist in Ordnung. Gar nichts zu machen wäre in den meisten Fällen falsch

$$\int_0^1 2xdx = x^2 = 1^2 - 0^2 = 1,$$

denn einmal haben wir x^2 und dann sagen wir, dass x^2 gleich 1 ist. Das ist nicht richtig.

Stammfunktion bekannter Funktionen

f	F	f	F
0	$C, C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante	$k, k \in \mathbb{R}$ eine Konstante	kx
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$
e^x	e^x	$a^x, a \in \mathbb{R}^{>0}, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x = \tan^{-1} x$		

Falls wir die Stammfunktionen von verschiedenen Funktionen kennen, dann können wir die Rechenregeln für integrierbare Funktionen anwenden.

Satz - Rechenregeln für integrierbare Funktionen

Seien f und g *integrierbare* Funktionen (d.h. sie besitzen jeweils eine Stammfunktion) auf einem Intervall $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

$$(1) \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$(2) \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx,$$

$$(3) \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{für } a < c < b.$$

$$(4) \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)dx, \qquad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in I,$$

$$(5) \left| \int_a^b f(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bemerkungen

- Die ersten zwei Ergebnisse sollte einem an die Rechenregeln der Ableitung erinnern. Die sagen aus, dass Integration ein linearer Operator ist.
- Diese Rechenregeln gilt auch für die Bildung von Stammfunktionen (ohne ein bestimmtes, festgelegtes Intervall).
- (4) und (5) sind für Abschätzungen relevant.

Beispiele - Rechenregeln der Integration

- Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

$$\text{a) } \int_1^2 (x^2 + 7x - 5)dx \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x + 4\sin x)dx \quad \text{c) } \int_{-1}^1 |x|dx$$

a)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2+6x-5)dx &\overset{(1)}{=} \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 6x dx + \int_1^2 (-5) dx \\
&\overset{(2)}{=} \int_1^2 x^2 dx + 6\int_1^2 x dx - \int_1^2 5 dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} - 5x\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{8}{3} + 12 - 10 - (\frac{1}{3} + 3 - 5) \\
&= \frac{7}{3} + 2 - (-2) \\
&= \frac{7}{3} + 4 \\
&= \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x + 4\sin x)dx &\overset{(1)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin x\, dx \\
&\overset{(2)}{=} 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \\
&= (3\sin x - 4\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3}{2} - 4\cdot 0 - (3\cdot 0 - 4) \\
&= \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

c) In dieser Teilaufgabe verhält sich die Funktion unterschiedlich an den Intervallen $[-1;0]$ ($f(x) = |x| = -x$) und $[0;1]$ ($f(x) = |x| = x$). Wir wenden deshalb die dritte Rechenregel mit $c = 0$ an.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 |x| dx &\overset{(3)}{=} \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx \\
&= \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x\, dx \\
&= \frac{-x^2}{2}\Bigg|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 \\
&= \left(0 - \frac{-(-1)^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Stammfunktion der gegebenen Funktion.

$$\text{a)} \int \sqrt[4]{x^3}\,dx \quad \text{b)} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx \quad \text{c)} \int (5^x + 5) dx$$

a)

$$\begin{aligned}\int \sqrt[4]{x^3}\,dx &= \int x^{\frac{3}{4}} dx\\ &= \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C\\ &= \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C\\ &= \frac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}} + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx &= \int x^{-2} dx - \int \frac{dx}{x}\\ &= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \ln|x| + C\\ &= -\frac{1}{x} - \ln|x| + C\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int (5^x + 5) dx = \frac{5^x}{\ln 5} + 5x + C$

9.3 Integrationsmethoden

Stammfunktionen sind in der Regel schwieriger zu berechnen als Ableitungen, denn nicht alle Funktionen sind Linearkombinationen (d.h. von der Form $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und f, g Funktionen) von Grundfunktionen, die leicht zu integrieren [13]sind. Hierzu wendet man die Rechenregeln (1) und (2) an. In diesem Abschnitt betrachten wir drei Methoden, die häufig in der Praxis vorkommen: partielle Integration, Substitution und Partialbruchzerlegung. Beim ersten zwei Methoden geht es darum, Regeln für die Ableitung rückgängig zu machen, weil wir wissen dass die Ableitung einer Stammfunktion F der Funktion f wieder die Funktion f ergeben muss: $F' = f$. Die dritte Methode ist nur für rationale Funktionen (d.h. eine Polynom geteilt durch ein Polynom) relevant. Dieser Fall kommt jedoch in den Ingenieurwissenschaften und im Informatikbereich häufig vor.

9.3.1 Partielle Integration

Die Methode der partielle Integration ist mit der Produktregel verbunden. Als Erinnerung lautet die Produktregel

$$(f\,g)' = f'g + fg'$$

[13]In der Schulmathematik wird manchmal “aufleiten” für “integrieren” und “Aufleitung” für “Integral” benutzt. In der wissenschaftlichen Literatur findet man “aufleiten” und “Aufleitung” nicht. Mein Duden von 2000 enthält diese beiden Wörter auch nicht.

für differenzierbare Funktionen f und g. In der Literatur werden f und g nicht mehr f und g sondern u und v genannt, um maximale Verwirrung unter Studierenden zu erzeugen. Es ist jedoch nur eine andere Bezeichnung. Das Ergebnis ist gleich:

$$(u\,v)' = u'v + u\,v'.$$

Integrieren wir beide Seiten der Gleichung und formen um, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int (u\,v)' &= \int (u'v + u\,v') \\ u\,v &= \int u'v + \int u\,v' \\ \int u'v &= u\,v - \int u\,v'\end{aligned}$$

Dies ist die Formel für die partielle Integration.

Satz - partielle Integration
Sind u, v differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$\int u'v = u\,v - \int u\,v'.$$

Bemerkungen

- Differenzierbare Funktionen sind stetig, und stetige Funktionen sind immer integrierbar.
- Diese Methode ist geeignet für Integrale, die aus einer Produkt zweier Teilfunktionen besteht, wobei eine Teilfunktion leicht zu integrieren ist. Allerdings kann es sein, dass die Aufgabe dadurch noch komplizierter wird. Dann muss neu überlegt werden.

Beispiel - partielle Integration
Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration.

$$\text{a)} \int x \ln x \, dx \quad \text{b)} \int x e^x dx \quad \text{c)} \int t \sin t \, dt \quad \text{d)} \int e^t \sin t \, dt$$

a) Die Teilfunktionen sind leicht zu identifizieren: x und $\ln x$. Beide Teilfunktionen sind leicht zu differenzieren. Nur x ist leicht zu integrieren. Wir versuchen es mit $u' = x$ und $v = \ln x$. Für die Lesbarkeit stellen wir eine Tabelle auf. (Bitte in der Prüfung auch so machen.)

$$\begin{array}{rclcrcl} u' &=& x & \quad & v &=& \ln x \\ u &=& \frac{x^2}{2} & & v' &=& \frac{1}{x} \end{array}$$

Nun setzen wir die Informationen in die Formel ein und rechnen weiter.

$$\begin{aligned}\int x \ln x = \int u'v &= u\,v - \int u\,v' \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

b) Die Teilfunktionen x und e^x sind beide leicht zu integrieren. Wählen wir wiederum $u' = x$ $\left(\text{d.h. } u = \frac{x^2}{2}\right)$, dann gilt $v = e^x = v'$. Setzen wir die Informationen in die Formel ein, erhalten wir

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$

Die neu zu integrierende Funktion ist komplizierter als die ursprüngliche Funktion. Wir versuchen die Aufgabe zu lösen, im dem wir die Rollen von u' und v vertauschen.

$$\begin{array}{rclcrcl} u' &=& e^x & \qquad & v &=& x \\ u &=& e^x & & v' &=& 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int xe^x dx = \int v\, u' &= u\, v - \int u\, v' \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

c) Ob die Variable x oder t heißt ist ziemlich egal. Durch Erfahrung identifiziert man $u' = \sin t$ und $v = t$.

$$\begin{array}{rclcrcl} u' &=& \sin t & \qquad & v &=& t \\ u &=& -\cos t & & v' &=& 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int t \sin t\, dt = \int v\, u' &= u\, v - \int u\, v' \\ &= -t\cos t - \int (-\cos t) dt \\ &= -t\cos t + \int \cos t\, dt \\ &= -t\cos t + \sin t + C \end{aligned}$$

d) Wir versuchen es mit den folgenden Teilfunktionen.

$$\begin{array}{rclcrcl} u' &=& e^t & \qquad & v &=& \sin t \\ u &=& e^t & & v' &=& \cos t \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int e^t \sin t\, dt = \int u' v &= u\, v - \int u\, v' \\ &= e^t \sin t - \int e^t \cos t\, dt \end{aligned}$$

Das Integral rechts ist immer noch nicht leicht zu bestimmen. Es ist jedoch nicht komplizierter geworden, sodass die Rollen von der Teilfunktionen nicht vertauscht werden müssen bzw. dürfen. Wir wenden die partielle Integration nochmal an.

$$\begin{array}{rclcrcl} u' &=& e^t & \qquad & v &=& \cos t \\ u &=& e^t & & v' &=& -\sin t \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int e^t \sin t\, dt &= e^t \sin t - \int e^t \cos t\, dt\\ &= e^t \sin t - \left(e^t \cos t + C - \int e^t(-\sin t) dt\right)\\ &= e^t \sin t + C - e^t \cos t - \int e^t \sin t\, dt\end{aligned}$$

Es scheint, als ob wir nicht weiter gekommen sind. Das Integral rechts ist das ursprüngliche Integral allerdings mit einem anderen Vorzeichen. Addiere beide Seiten der folgenden Gleichung mit $\int e^t \sin t\, dt$:

$$\begin{aligned}\int e^t \sin t\, dt &= e^t \sin t + C - e^t \cos t - \int e^t \sin t\, dt\\ 2\int e^t \sin t\, dt &= e^t \sin t - e^t \cos t + C\\ \int e^t \sin t\, dt &= \frac{1}{2}\left(e^t \sin t - e^t \cos t + C\right)\end{aligned}$$

9.3.2 Substitution

Die Methode der Substitution ist aus der Kettenregel entstanden. Wir erinnern uns kurz an die Kettenregel. Seien g und u differenzierbare Funktionen und sei das Bild von u im Definitionsbereich von g enthalten. Dann kann die Verknüpfung $g \circ u$ gebildet werden: $(g \circ u)(x) = g(u(x))$. Nach der Kettenregel gilt dann

$$(g(u(x)))' = g'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Besipielsweise ist die Ableitung der Funktion $\sin(x^2 - x)$ gleich $\cos(x^2 - x)(2x - 1)$. Das Integral von $\cos(x^2 - x)(2x - 1)$ ist deshalb $\sin(x^2 - x) + C$.

Haben wir ein kompliziertes Integral $\int h(x)dx$ zu lösen, können wir untersuchen, ob die Stammfunktion H eine Verknüpfung von Funktionen ist. Wir suchen hierfür eine Teilfunktion u von h, wobei u' auch in h (bis auf einem konstanten Faktor) vorkommt. Im vorhergehenden Beispiel ist $u(x) = x^2 - x$ und $u'(x) = 2x - 1$.
Eine andere Schreibweise für die Ableitung von u ist $\frac{du}{dx} = 2x - 1$ oder $du = (2x - 1)dx$.

Methode - Substitution
Sei $f \circ g$ die Komposition differenzierbarer Funktionen f und g. Mit der Substitution $u = g(x)$ gilt

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Ist $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$, so ist nach Rücksubstitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Für bestimmte Integrale müssen die Grenzwerte angepasst werden. Hierbei muss die innere Ableitung g' stetig sein. Mit der Substitution $u = g(x)$ gilt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Bemerkungen

- Ein sicherer Umgang mit Substitution erfolgt durch viel Übung.
- Bei einem bestimmten Integral kann man das unbestimmte Integral mit Hilfe einer Substitution lösen, die Rücksubstitution durchführen und dann die ursprünglichen Integrationsgrenzen a und b einsetzen.

Beispiel - Substitution
Berechnen Sie mit Hilfe einer Substitution die folgenden Integrale.

$$\text{a)} \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx \quad \text{b)} \int \cos(3x)e^{\sin(3x)}dx \quad \text{c)} \int_0^1 (xe^x+e^x)\sqrt{xe^x}dx \quad \text{d)} \int_0^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\tan(\sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$$

a) Die Ableitung eines Polynoms vom Grad n ist von Grad $n-1$, also eins weniger. Von daher wählen wir $u = x^2+2x+3$. Die Ableitung $\frac{du}{dx} = 2x+2$ ist nicht das, was im Zähler steht, sondern zweimal was im Zähler steht. Das ist in Ordnung. Durch Zahlen dürfen wir teilen (durch Variablen in dieser Methode nicht!). Wie bei partielle Integration stellen wir eine kleine Tabelle (auch in die Prüfung!) auf. Wir lösen für du mal eine Konstante.

$$\begin{aligned} u &= x^2+2x+3 \\ \frac{du}{dx} &= 2x+2 \\ \frac{du}{dx} &= 2(x+1) \\ du &= 2(x+1)dx \\ \frac{1}{2}du &= (x+1)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx &= \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| + C \end{aligned}$$

Um das Ergebnis nachzuprüfen, leitet man einfach ab. Wir prüfen nur den Fall $x^2+2x+3 \geq 0$.

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+3}(2x+2) = \frac{x+1}{x^2+2x+3} \quad \checkmark$$

b) In dieser Teilaufgabe suchen wir die allgemeine Stammfunktion der Funktion $\cos(3x)e^{\sin(3x)}$. Gesucht ist eine geeignete Substitution.
$e^{\sin(3x)}$ ist nicht geeignet, weil die Ableitung ebenfalls $e^{\sin(3x)}$ beinhaltet, und dies kommt nicht zweimal

vor.
Würden wir für u die Teilfunktion $\cos(3x)$ wählen, dann wäre $\dfrac{du}{dx} = -3\sin(3x)$ oder $-\frac{1}{3}du = \sin(3x)dx$. Der du wäre dann in der Exponentialfunktion gefangen: $ue^{-\frac{1}{3}du}$. So merken wir, dass die Substitution $u = \cos(3x)$ nicht richtig ist.
Wir wählen nun eine geeignete Substitution

$$\begin{aligned} u &= \sin(3x) \\ du &= 3\cos(3x)dx \\ \frac{1}{3}du &= \cos(3x)dx \end{aligned}$$

und ersetzen die entsprechenden Teile, um die Aufgabe zu lösen.

$$\int \cos(3x)e^{\sin(3x)}dx = \int \frac{1}{3}e^{u}du = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{\sin(3x)} + C$$

c) In dieser Teilaufgabe berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int_{1}^{\ln 2} (xe^x + e^x)\sqrt{xe^x}dx.$$

Die Wurzel kommt bei der Substitution nicht vor, den es keine weitere Wurzelfunktion gibt. Wir wählen die innere Funktion $g(x) = xe^x$ für die Substitution.

$$\begin{aligned} u &= xe^x \\ du &= (e^x + xe^x)dx \\ &= (xe^x + e^x)dx \end{aligned}$$

Ändern wir die Integrationsgrenzen, müssen wir untersuchen, ob die Ableitung der innere Funktion $g'(x) = xe^x + e^x$ stetig ist. Es handelt sich um einen Produkt zweier stetigen Funktionen summiert mit einer stetigen Funktion, also insgesamt stetig. Wir können den Satz anwenden und die neuen Integrationsgrenzen berechnen

$$g(1) = e, \qquad g(\ln 2) = \ln 2 \cdot e^{\ln 2} = 2\ln 2.$$

$$\int_{1}^{\ln 2} (xe^x + e^x)\sqrt{xe^x}dx = \int_{e}^{2\ln 2} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\bigg|_{e}^{2\ln 2} = \frac{2}{3}\left((2\ln 2)^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}}\right)$$

d) Die letzte Teilaufgabe

$$\int_{0}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\tan(\sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$$

lässt sich auch mit einer Substitution gut lösen. Falls man keine Stammfunktion von $\tan$ kennt, schreibt man diese Funktion um.

$$\int_{0}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\sin(\sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta}\,\cos(\sqrt{\theta})}d\theta$$

Wir behandeln das unbestimmte Integral und führen eine Rücksubstitution durch, bevor wir die Integrationsgrenzen einsetzen.
Substitution:

$$\begin{aligned} u &= \cos(\sqrt{\theta}) \\ du &= \sin(\sqrt{\theta}) \cdot (\sqrt{\theta})' \\ &= \sin(\sqrt{\theta}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\, d\theta \\ 2du &= \frac{\sin(\sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta}}\, d\theta \end{aligned}$$

$$\int \frac{\tan(\sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta}}\, d\theta = 2\frac{1}{u} du = 2\ln|u| + C = 2\ln|\cos(\sqrt{\theta})| + C$$

Setzen wir die Integrationsgrenzen ein:

$$\begin{aligned} 2\ln\left|\cos(\sqrt{\theta})\right|\Big|_0^{\frac{\pi^2}{16}} &= 2\ln\left|\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}\right)\right| - 2\ln|\cos(\sqrt{0})| \\ &= 2\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - 2\ln(1) \\ &= 2\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| - 0 \\ &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

9.3.3 Integration mit Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung wird verwendet, um eine rationale Funktion der Form $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, wobei der Grad des Polynoms im Zähler echt kleiner sein muss im Vergleich zum Grad des Polynoms im Nenner. Ist dies nicht der Fall, kann eine Polynomdivision durchgeführt werden. Der Rest wird dann zerlegt.

Wir zeigen das Prinzip der Partialbruchzerlegung (PBZ) mit einer Reihe von Beispielen.

Beispiel - PBZ - einfache Polstellen

$$f(x) = \frac{4x-2}{(x+1)(\boldsymbol{x-2})(\boldsymbol{x+3})} \overset{\text{Ansatz}}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{x+3}}$$

Multipliziere mit Nenner von f.

$$4x-2 = \frac{A}{(x+1)}(x+1)(x-2)(x+3) + \frac{B}{(\boldsymbol{x-2})}(x+1)(x-2)(x+3) + \frac{\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{x+3})}(x+1)(x-2)(x+3)$$

d.h. $A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2) = 4x-2 \quad *$

Setze die Polstellen (Nullstellen des Nenners) eine nach der anderen in * ein.

$$x=-1: A(-3)(2)+B(0)+C(0)=-4-2=-6,\ \text{d.h. } \underline{A=1}$$

$$x=2: A(0)+B(3)(5)+C(3)(0)=8-2=6,\ \text{d.h. } \underline{B=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}}$$

$$x=-3: A(0)+B(0)+C(-2)(-5)=-12-2=-14,\ \text{d.h. } \underline{C=\frac{-14}{10}=\frac{-7}{5}}$$

$$f(z)=\frac{1}{x+1}+\frac{\frac{2}{5}}{\boldsymbol{x-2}}+\frac{\frac{-7}{5}}{\boldsymbol{x+3}}$$

Schneller geht es mit der **Zuhaltemethode**. Für jede Polstelle a_i streicht man den Faktor $(x-a_i)$ im Nenner und dann setzt man a_i ein.

$$f(x)=\frac{4x-2}{(x+1)(\boldsymbol{x-2})(\boldsymbol{x+3})}=\frac{1}{x+1}+\frac{\frac{2}{5}}{\boldsymbol{x-2}}+\frac{\frac{-7}{5}}{\boldsymbol{x+3}}$$

Beispiel - PBZ - mehrfache Polstellen

Warnung: Die Zuhaltemethode funktioniert nur für diejenigen Koeffizienten, die jeweils der höchsten Potenz von $x-a_i$ zugeordnet sind.

$$f(x)=\frac{6x^2-15x+10}{(x-1)^2(\boldsymbol{x-2})}\overset{\text{Ansatz}}{=}\frac{\boldsymbol{A_1}}{x-1}+\frac{\boldsymbol{A_2}}{(x-1)^{\boldsymbol{2}}}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{x-2}}$$

$$\overset{\text{zuhalten}}{=}\frac{\boldsymbol{A_1}}{x-1}+\frac{\overset{\frac{6-15+10}{-1}}{-1}}{(x-1)^{\boldsymbol{2}}}+\frac{\overset{\frac{6(2^2)-30+10}{(2-1)^2}}{4}}{\boldsymbol{x-2}}$$

Multiplikation mit Nenner von f ergibt
* $A_1(x-1)(x-2)+A_2(x-2)+B(x-1)^2=6x^2-15x+10$

Setze A_2, B in * ein und löse für A_1:

$A_1(x^2-2x-x+2)-x+2+4(x^2-2x+1)=(A_1+4)x^2+(-3A_1-1-8)x+(2A_1+2+4)=6x^2-15x+10$

Koeff.vgl. $x^2: A_1+4=6$ ergibt $A_1=2$

$$f(x)=\frac{\boldsymbol{2}}{x-1}+\frac{\boldsymbol{-1}}{(x-1)^{\boldsymbol{2}}}+\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x-2}}$$

Gibt es im Nenner irreduzible quadratische Faktoren, dann gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder arbeitet man weiter über die reellen Zahlen oder man betrachtet die Funktion über den komplexen Zahlen. Wir zeigen beide Varianten hier.

Beispiel - PBZ - irreduzible quadratische Faktoren
in Reellen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x+7}{(x^2+1)^2(x-1)}\\
&\overset{\text{Ansatz}}{=} \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{E}{(x-1)}\\
&\overset{\text{zuhalten mit } x=1}{=} \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{(x-1)}\\
&\overset{\text{gemeinsamen Nenner}}{=} \frac{(Ax+B)(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x-1)+2(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)}
\end{aligned}$$

Der Zähler $(Ax+B)(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x-1)+2(x^2+1)^2$ muss gleich $x+7$ sein. Die Koeffizienten A, B, C, D müssen berechnet werden.

$$\begin{aligned}
&(Ax+B)(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x-1)+2(x^2+1)^2\\
&= (Ax^3+Bx^2+Ax+B)(x-1)+(Cx^2+Dx-Cx-D)+2(x^4+2x^2+1)\\
&= Ax^4+(B-A)x^3+(A-B)x^2+(B-A)x-B+Cx^2+Dx-Cx-D+2x^4+4x^2+2\\
&= (A+2)x^4+(B-A)x^3+(A-B+C+4)x^2+(B-A+D-C)x-B-D+1
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lrcccrcr}
x^4: & A+2 & = & 0 & \Rightarrow & A & = & -2\\
x^3: & B-A=B+2 & = & 0 & \Rightarrow & B & = & -2\\
x^2: & A-B+C+4=C+4 & = & 0 & \Rightarrow & C & = & -4\\
x^1: & B-A+D-C=D+4 & = & 1 & \Rightarrow & D & = & -3\\
x^0: & -B-D+2 & = & 7 & \checkmark & & &
\end{array}$$

Selbst wenn alle Koeffizienten bereits bestimmt sind, ist es hilfreich die letzte Gleichung nachzuprüfen. So habe ich einen Denkfehler, einen Rechenfehler und zwei Tippfehler entdeckt. ;-)

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{x+7}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{-2x-2}{x^2+1} + \frac{-4x+-3}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{(x-1)}$$

Nun zeigen wir wie dies über die komplexen Zahlen geschieht. Wir verwenden hier die Variable z an der Stelle von x, um uns daran zu erinnern, dass wir mit komplexen Variablen arbeiten.

Im Komplexen kann ein Polynom immer in Linearfaktoren zerlegt werden. Der Nenner wird so faktorisiert:

$$(z^2+1)^2(z-1) = (z+i)^2(z-i)^2(z-1).$$

$$\frac{z+7}{(z^2+1)^2(z-1)} = \frac{z+7}{(z+i)^2(z-i)^2(z-1)} \overset{\text{Ansatz}}{=} \frac{A}{z+i} + \frac{B}{(z+i)^2} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{(z-i)^2} + \frac{E}{z-1}$$

Die Zuhaltemethode kann angewendet werden, um B, D, E zu bestimmen. Die Berechnung ist etwas intensiver als zuvor.

$B\,(z=-i)$:

$$\frac{-i+7}{(-i-i)^2(-i-1)} = \frac{-i+7}{-4(-i-1)} = \frac{-i+7}{4(i+1)}$$

Erweitern mit $1 = \dfrac{i-1}{i-1}$:

$$= \frac{-i+7}{4(i+1)} \cdot \frac{i-1}{i-1} = \frac{-6+8i}{4(i^2-1)} = \frac{-6+8i}{-8} = \frac{3-4i}{4}$$

$D\,(z=i)$:

$$\frac{i+7}{(i+i)^2(i-1)} = \frac{i+7}{-4(i-1)}$$

Erweitern mit $1 = \dfrac{i+1}{i+1}$:

$$= \frac{i+7}{-4(i-1)} \cdot \frac{i+1}{i+1} = \frac{6+8i}{-4(i^2-1)} = \frac{6+8i}{8} = \frac{3+4i}{4}$$

Diese Berechnung hätten wir uns sparen können. Die Koeffizienten für komplex konjugierte Paare sind such komplex konjugiert (so lange die Koeffizienten von f reell sind). Es dient jedoch als Kontrolle der Richtigkeit unsere Berechnung.

$E\,(z=1)$:

$$\frac{1+7}{(1+i)^2(1-i)^2} = \frac{8}{(i^2-1)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Nun müssen A und C bestimmt werden. Bisher haben wir

$$\frac{z+7}{(z^2+1)^2(z-1)} = \frac{A}{z+i} + \frac{\frac{3-4i}{4}}{(z+i)^2} + \frac{C}{z-i} + \frac{\frac{3+4i}{4}}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-1}.$$

Wir bringen die rechte Seite auf einem gemeinsamen Nenner.

$$\frac{A}{z+i} + \frac{\frac{3-4i}{4}}{(z+i)^2} + \frac{C}{z-i} + \frac{\frac{3+4i}{4}}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-1}$$

$$= A(z+i)(z-i)^2(z-1) + \frac{3-4i}{4}(z-i)^2(z-1) + C(z-i)(z+i)^2(z-1) + \frac{3+4i}{4}(z+i)^2(z-1) + 2(z+i)^2(z-i)^2$$

$$= A(z^2+1)(z^2-(i+1)z+i) + \frac{3-4i}{4}(z^2-2zi-1)(z-1) + C(z^2-1)(z^2+(-1+i)z-i) +$$

$$+ \frac{3+4i}{4}(z^2+2i-1)(z-1) + 2(z^2+1)^2$$

OMG. So was kompliziertes kommt in der Prüfing nicht vor. Selbst ich habe keine Lust mehr, und ich rechne ja gerne. Wer Ehrgeiz hat, kann weiter rechnen. Am Ende sieht man, dass wenn man die komplexen Teile zusammenbringt, sind die Ergebnisse wie im reellen Fall. Als Übung könnte man einen

Programm schreiben, um diese Knochenarbeit zu übernehmen.

Die PBZ hilft uns bei der Integration von rationalen Funktionen. Wir zeigen Anhand eines Beispiels wie dies geht.

Wollten wir aus irgendwelchem Grund die Funktion

$$f(x) = \frac{4x-2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

integrieren, dann wenden wir PBZ an, da eine geeignete Substitution nicht offensichtlich ist. Wir haben gesehen, dass

$$f(x) = \frac{4x-2}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{2}{5}}{x-2} + \frac{\frac{-7}{5}}{x+3}$$

ist, sodass das Integral in kleineren Häppchen gelöst werden kann.

$$\int \frac{4x-2}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{\frac{2}{5}}{x-2} + \frac{\frac{-7}{5}}{x+3} \right) dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{2}{5}\ln|x-2| - \frac{7}{5}\ln|x+3| + C$$

Im Fall von quadratischen irreduziblen Faktoren im Nenner ist das Ergebnis mühsamer zu berechnen. Die Integration setzt häufig Substitution und/oder arctan ein. Falls es Zeit dafür gibt, wird in der Vorlesung gezeigt, wie das geht.

9.4 Uneigentliche Integrale

Wenden wir uns nun einem angenehmen Thema an: uneigentliche Integrale. Bisher haben wir bestimmte Integrale auf einem abgeschlossenem Intervall betrachtet sowie unbestimmte Integrale, bei denen keinen Intervall spezifiziert wurden. Nun betrachten wir Integrale auf Intervall der Form $[a;\infty[$, $]-\infty;a]$, Intervalle, auf denen eine Unstetigkeitsstelle gibt, sowie ganz $\mathbb{R}$.

Definition - uneigentliche Integral auf einem halb-offenen Intervall
Sei a eine festgelegte reele Zahl. Ist

$$\int_a^b f(x)dx$$

definiert für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$, dann wird das uneigentliche Integral durch

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

definiert.

Analog wird das uneigentliche Integral als

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx$$

definiert, falls

$$\int_b^a f(x)dx$$

für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b < a$ definiert ist.

Als Leitmotiv betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel - Grenzwert läuft gegen unendlich
Entscheiden Sie, ob die gegebenen uneigentlichen Integrale existieren oder nicht. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\text{a)} \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \qquad\qquad \text{b)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Beide Integrale sind auf $[1; b]$ für jedes $b > 1$ definiert, denn nur bei $x = 0$ gibt es eine Polstelle (Nullstelle im Nenner).

Im ersten Fall gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) \to \infty,$$

sodass das Integral gar nicht existiert. Es ist gegen unendlich divergent.

Beim zweiten Fall existiert das Integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -x^{-1}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} - (-1)\right) = 1,$$

denn $\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{b} = 0$.
Das uneigentliche Integral konvergiert gegen 1.

Bemerkung
Existiert das uneigentliche Integral, so ist der Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion und die x-Achse endlich. Ist der Flächeninhalt nicht endlich, so kann das Integral nicht existieren.

Satz
Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

mit $a > 0$

- divergiert gegen unendlich für $s \leq 1$,
- konvergiert gegen $\dfrac{1}{(s-1)a^{s-1}}$ für $s > 1$.

Beweis: Übung.

Wäre $a = 0$, dann musste das uneigentliche Integrale zwei Grenzwertprozesse beinhalten, denn bei der Auswertung des Integrals können wir Null nicht einsetzen. Wie dies gemacht wird, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel - Polstelle am Rand des Integrationsintervalls
Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx?$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^{-2}\,dx \\ &= \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}} \int_a^b x^{-2}\,dx \\ &= \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}} \left.\frac{-1}{x}\right|_a^b \\ &= \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}} \left(\frac{-1}{b} + \frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

Das erste Summanden läuft gegen 0 aber das zweite läuft gegen unendlich. Somit existiert das uneigentliche Integral nicht.

Manchmal ist ein uneigentliches Integral nicht von den Grenzwerten zu erkennen. Beispielsweise kann eine Funktion f auf einem Intervall $[a; b]$ integriert werden, wobei $f(a)$ und $f(b)$ definiert sind, aber zwischen a und b liegt eine Polstelle. Das Integral muss in diesem Fall links und rechts von der Polstelle einzeln betrachtet werden. Existiert ein Teil nicht, dann existiert das gesamte nicht. Existiert beide Teile, dann existiert das Integral.

Beispiel - Pollstelle innerhalb des Integrationsintervalls
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz. Berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

$$\text{a)}\ \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} \qquad\qquad \text{b)}\ \int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

a) Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ hat eine Pollstelle in $x = 0$. Wir betrachten deshalb das Integral als Summe uneigentlicher Integrale:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2}.$$

Untersucht werden die Summanden einzeln. Wir fangen mit dem linken Summanden an.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^{a} x^{-2} dx \\ &= \lim_{a\to 0^-} \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{a} \\ &= \lim_{a\to 0^-} \left(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{-1}\right) \\ &= \lim_{a\to 0^-} \left(\frac{-1}{a} - 1\right) \\ &\to \infty\end{aligned}$$

Das Teilintegral existiert nicht, sodass $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ nicht existieren kann. (Der zweite Summanden muss gar nicht untersucht werden.)

b) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ hat ebenfalls eine Pollstelle in $x = 0$. Wir schreiben deshalb das Integral als eine Summe zweier uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

und untersuchen den ersten Teil.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^{a} x^{-\frac{1}{3}} dx \\ &= \lim_{a\to 0^-} \left.\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right|_{-1}^{a} \\ &= \lim_{a\to 0^-} \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1\end{aligned}$$

Das erste Teil existiert mit Grenzwert $\frac{3}{2}$. Der zweiten Summanden muss deshalb untersucht werden.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{b\to 0^+} \int_{b}^{8} x^{-\frac{1}{3}} dx \\ &= \lim_{b\to 0^+} \left.\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right|_{b}^{8} \\ &= \lim_{b\to 0^+} \frac{3}{2}\left(8^{\frac{2}{3}} - (b)^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot 4 = 6\end{aligned}$$

Beide Summanden existieren. Insgesamt existiert das ursprüngliche Integral und zwar

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}.$$

Eine weitere Art vom uneigentlichen Integral hat ganz $\mathbb{R}$ als Integrationsintervall. Diese Situation erfordert eine Aufteilung des Integrals in Summanden an einer willkürlich ausgewählten Stelle.

Beispiel - Integrationsintervall gleich ganz $\mathbb{R}$

Bestimmen Sie, ob $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ existiert. Berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

Wähle $x = 0$ als Trennungspunkt, d.h. das Integral wird auf den Teilintervallen $]-\infty; 0]$ und $[0; \infty[$ betrachtet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{-\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Wiederum müssen die Summanden einzeln behandelt werden.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan(x)\Big|_{a}^{0} \\
&= \lim_{a\to-\infty} (\arctan(0) - \arctan(a)) \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Machen Sie die Probe! Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_{0}^{-\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ ebenfalls den Grenzwert $\dfrac{\pi}{2}$ hat. Insgesamt konvergiert das uneigentliche Integral gegen π.