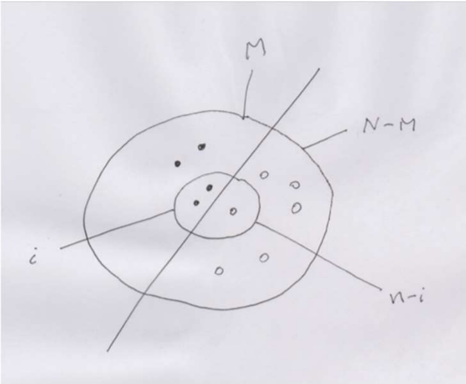
2.2 Klassische Laplace-Experimente

A) Stichproben *ohne* Zurücklegen

In einer Urne befinden sich N Kugeln. $M \leq N$ Kugeln sind schwarz, die restlichen $N - M$ sind weiß.
Es werden $n \leq N$ Kugeln *ohne* Zurücklegen gezogen. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_i : „Genau $i \leq n$ der gezogenen Kugeln sind schwarz (und folglich $n - i$ weiß)“. Wir gehen davon aus, dass alle Ziehungen gleichwahrscheinlich sind.



Jede Ziehung können wir als $n -$ elementige Teilmenge von $[1{:}N]$ (das sind die Nummern der N Kugeln) auffassen, also $\Omega = \wp_n([1{:}N])$, somit $|\Omega| = \binom{N}{n}$. In jeder Ziehung, welche zu A_i gehört, gibt es $\binom{M}{i}$ Möglichkeiten für die schwarzen Kugeln, und für jede dieser Möglichkeiten gibt es jeweils $\binom{N-M}{n-i}$ Möglichkeiten für die weißen Kugeln, folglich ist $|A_i| = \binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}$, und

$$P(A_i) = \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

Zahlenbeispiel (siehe Zeichnung): $N = 10,\ M = 4,\ n = 3,\ i = 2$, somit $P(A_i) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \cdot 6}{120} = 0{,}3$.

B) Stichproben *mit* Zurücklegen

In einer Urne befinden sich N Kugeln. $M \leq N$ Kugeln sind schwarz, die restlichen $N - M$ sind weiß.
Es werden n Kugeln *mit* Zurücklegen gezogen (Hier können wir die Bedingung $n \leq N$ fallen lassen!). Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_i : „Genau $i \leq n$ der gezogenen Kugeln sind schwarz (und folglich $n - i$ weiß)“. Wir gehen davon aus, dass alle Ziehungen gleichwahrscheinlich sind.
Jede Ziehung können wir als $n -$ Tupel $\in [1{:}N]^n =: \Omega$ auffassen. Die Menge A_i können wir uns so vorstellen: Wenn speziell die ersten i gezogenen Kugeln schwarz sind, und dann nur noch weiße Kugeln kommen, so gibt es dafür $M^i \cdot (N - M)^{n-i}$ Möglichkeiten. Nun stehen aber noch die Positionen der i schwarzen Kugeln zur Wahl. Das sind $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten (die Positionen für die weißen Kugeln sind dann zwangsläufig auch schon festgelegt). Sie können auch an Binärwörter der Länge n vom Gewicht i denken (i Einsen für die schwarzen Kugeln). Insgesamt ist also $|A_i| = \binom{n}{i} \cdot M^i \cdot (N - M)^{n-i}$, und $P(A_i) = \frac{\binom{n}{i} \cdot M^i \cdot (N-M)^{n-i}}{N^n}$.
Das schreibt man üblicherweise etwas anders:
Es ist $\frac{\binom{n}{i} \cdot M^i \cdot (N-M)^{n-i}}{N^n} = \binom{n}{i} \cdot \frac{M^i \cdot (N-M)^{n-i}}{N^i \cdot N^{n-i}} = \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^i \cdot \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-i}$
Mit $p := \frac{M}{N}$ (und $\frac{N-M}{N} = 1 - \frac{M}{N} = 1 - p$) ist also

$$P(A_i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$$

Bei dieser Formel sieht man, dass es nicht auf die absoluten Zahlen N und M ankommt, sondern nur auf den relativen Anteil $p := \frac{M}{N}$ der schwarzen Kugeln in der Urne. p ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen **einer** Kugel diese schwarz ist. Eine solche Ziehung ist also ein **Bernoulli-Experiment** ($p =$ Trefferwahrscheinlichkeit). Eine **Bernoulli-Kette** der Länge n besteht aus n unabhängigen Durchführungen eines Bernoulli-Experiments. $P(A_i)$ wäre dann die Wahrscheinlichkeit, dabei i Treffer zu erzielen. Obige Formel stammt von Jakob Bernoulli (1655-1705).

Nehmen wir wieder $N = 10,\ M = 4,\ n = 3,\ i = 2$, so ergibt sich jetzt
$P(A_i) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288$

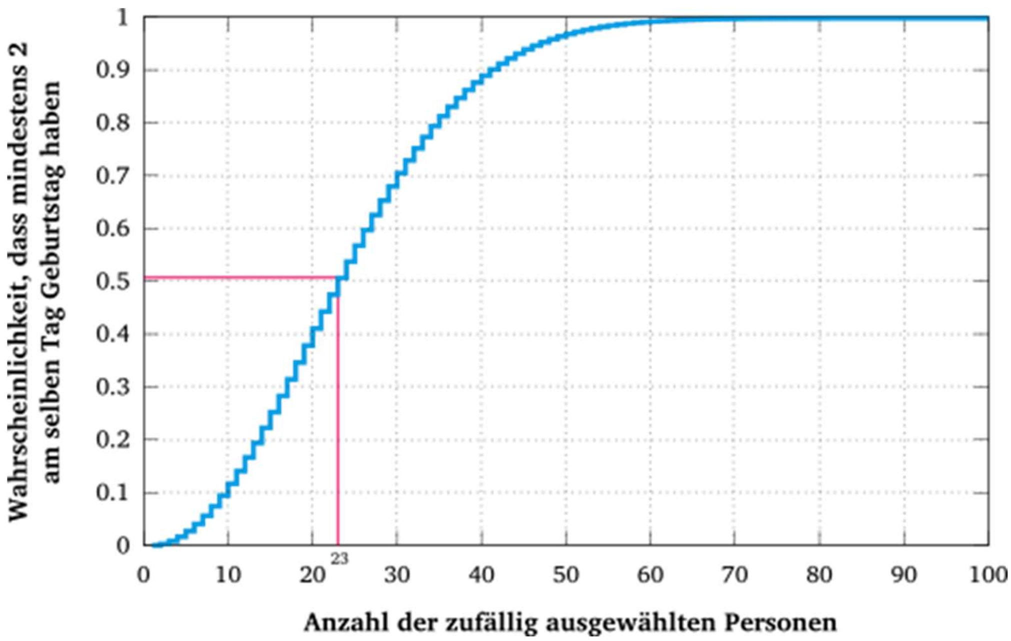
Ist der „Stichprobenumfang" n klein im Verhältnis zur „Grundgesamtheit" N (etwa $\frac{n}{N} \leq 10\%$), so macht es keinen großen Unterschied, ob man zurücklegt oder nicht, und man kann immer die handlichere Bernoulli-Formel verwenden.

C) Das Geburtstagsparadoxon

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Abbildung $f: [1:m] \to [1:n]$ nicht injektiv ist?
Als Zufallsexperiment betrachten wir die Auswahl irgendeiner Abbildung $f: [1:m] \to [1:n]$, und verwenden die Formel $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ über das Gegenereignis. Ist $m > n$, gibt es bei jeder Abbildung $f: [1:m] \to [1:n]$ Kollisionen, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 100%. Für $m \leq n$ entnehmen wir dem Kombinatorik-Kapitel ($M := [1:m], N := [1:n]$).

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{Inj(M,N)}{Abb(M,N)} = 1 - \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{n^m}$$

Dann wundert es einen nicht mehr, wenn bereits bei 23 Personen die Wahrscheinlichkeit für einen Geburtstagszwilling (gleicher Geburtstag im Jahr) höher als 50% ist. Dass $f: [1:23] \to [1:365]$ (das ist gerade die Geburtstagsliste für 23 Personen) nicht injektiv ist, hat die Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} \approx 0{,}5073$



https://matheguru.com/stochastik/geburtstagsproblem.htm

D) Fixpunktfreie Permutationen (Derangements)

Erinnerung: Wie viele Reihenfolgen von n Dingen sind möglich? Antwort: $n!$
Jede solche Reihenfolge entspricht genau einer bijektiven Abbildung $\pi: [1:n] \to [1:n]$, und umgekehrt.

Definition: Eine bijektive Abbildung $\pi: [1:n] \to [1:n]$ heißt auch **Permutation** (der Ordnung n). S_n bezeichnet die Menge aller Permutationen der Ordnung n. Wir nennen eine Permutation $\pi \in S_n$ **fixpunktfrei** oder ein **Derangement**, wenn es kein $i \in [1:n]$ gibt, für das $\pi(i) = i$ gilt. D_n sei die Menge Derangements in S_n.

Für $n = 3$ gibt es 6 Permutationen; darunter sind 2 Derangements:

$$\binom{123}{123} \binom{123}{132} \binom{123}{321} \binom{123}{213} \binom{123}{231} \binom{123}{312}$$

Wir haben hier die in der Algebra übliche Schreibweise $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$ für eine Permutation $\pi: [1:n] \to [1:n]$ verwendet. Fixpunkte sind rot markiert.

Für $n = 4$ gibt es 24 Permutationen; darunter sind 9 Derangements:

$\binom{1234}{1234}\binom{1234}{1324}\binom{1234}{3214}\binom{1234}{2134}\binom{1234}{2314}\binom{1234}{3124}\binom{1234}{1243}\binom{1234}{1342}\binom{1234}{3241}\binom{1234}{2143}\binom{1234}{2341}\binom{1234}{3142}$

$\binom{1234}{1423}\binom{1234}{1432}\binom{1234}{3421}\binom{1234}{2413}\binom{1234}{2431}\binom{1234}{3412}\binom{1234}{4123}\binom{1234}{4132}\binom{1234}{4321}\binom{1234}{4213}\binom{1234}{4231}\binom{1234}{4312}$

n	fixpunktfreie Permutationen	alle Permutationen	Anteil
2	1	2	0,5
3	2	6	0,33333333...
4	9	24	0,375
5	44	120	0,36666666...
6	265	720	0,36805555...
7	1.854	5.040	0,36785714...
8	14.833	40.320	0,36788194...
9	133.496	362.880	0,36787918...
10	1.334.961	3.628.800	0,36787946...

Man sieht, dass mit wachsendem n der Anteil $\frac{|D_n|}{n!}$ der Derangements innerhalb der Permutationen sehr schnell gegen $\frac{1}{e} \approx 0{,}3679$ strebt (mit der Eulerschen Zahl e).

Satz: $\frac{|D_n|}{n!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k!}$

Beweis: Wir definieren $A_i := \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$. Dann ist π genau dann **nicht** fixpunktfrei, wenn es ein $i \in [1:n]$ gibt, für das $\pi(i) = i$, wenn also $i \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Wenn wir die Mächtigkeit dieser Menge kennen, dann sind wir im Prinzip schon fertig. Diese berechnen wir mit der Siebformel:

$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|T|+1} |\bigcap_{i \in T} A_i|$

Bei den hier vorkommenden Summanden ($2^n - 1$ Stück) sind viele gleiche:

Alle $|A_i|$, n Stück, sind gleich: $|A_i| = (n-1)!$
Alle $|A_i \cap A_j|$, $\binom{n}{2}$ Stück, sind gleich: $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$
Alle $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$, $\binom{n}{3}$ Stück, sind gleich: $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = (n-3)!$
$\vdots$
Alle $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$, $\binom{n}{k}$ Stück, sind gleich: $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$

Und das sieht man so: Wenn k Mengen $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ ausgewählt werden, dann haben die Elemente $\pi \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ die Form $\pi = \begin{pmatrix} \cdots i_1 \cdots i_2 \cdots\cdots i_k \cdots \\ \cdots i_1 \cdots i_2 \cdots\cdots i_k \cdots \end{pmatrix}$. Es sind also jeweils k Fixpunkte festgelegt, die übrigen $n-k$ Stellen (oben die Pünktchen) dürfen nach Belieben permutiert werden, und dafür gibt es $(n-k)!$ Möglichkeiten.

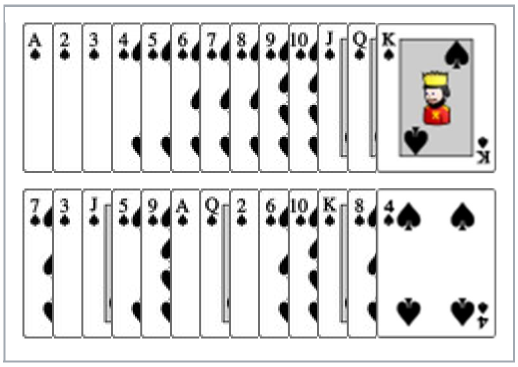
Fassen wir nun jeweils $\binom{n}{k}$ gleiche Summanden zusammen, so bekommen wir
$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$
Der Rest ergibt sich dann „von selber“:
$\frac{|D_n|}{n!} = \frac{1}{n!}|D_n| = \frac{1}{n!}|S_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \frac{1}{n!}(n! - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|) = 1 - \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k!}$

Korollar: $\lim_{n\to\infty} \frac{|D_n|}{n!} = \frac{1}{e} = e^{-1}$
Dies sieht man an der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$.

Der französische Mathematiker Pierre Rémond de Montmort stellte Anfang des 18. Jahrhunderts in seinem Buch Essai d'analyse sur les jeux de hazard ein Spiel namens Treize („Dreizehn“) vor, das in vereinfachter Form wie folgt beschrieben werden kann: Ein Spieler mischt einen Satz von 13 Spielkarten einer Farbe und legt ihn als Stapel vor sich hin. Nun deckt er die Karten der Reihe nach auf, wobei er jede Karte gemäß der Reihenfolge As, Zwei, Drei bis König aufruft. Sollte irgendwann die aufgerufene Karte mit der aufgedeckten Karte übereinstimmen, so gewinnt er das Spiel; trifft dies bei keiner der 13 Karten zu, verliert er.

Nun stellt de Montmort sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, mit der der Spieler das Spiel gewinnt.

Als Ergebnismenge Ω nehmen wir die Menge aller (gleichwahrscheinlichen) Permutationen der 13 Karten, also $\Omega = S_{13}$. Das Ereignis „Gewinn“ tritt genau dann ein, wenn das Ereignis D_{13} (Fixpunktfreiheit) nicht eintritt.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach $1 - \frac{|D_{13}|}{13!} \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 63\%$



Beim Treize-Spiel gewinnt der Spieler, wenn bei 13 durchmischten Spielkarten einer Farbe (untere Reihe) mindestens eine Karte in der richtigen Reihenfolge (obere Reihe) auftritt, hier die Zehn.

https://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktfreie_Permutation