W-Theorie, Prof. Dr. v. Koch
Blatt 2

Aufgabe 1
(Weber, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure, Stuttgart,1992)

In einer Fabrik wurden bestimmte (gleiche) Werkstücke an drei Maschinen M1, M2 und M3 gefertigt.
M1 liefert 3% Ausschuss und 50% der Gesamtproduktion.
M2 liefert 1% Ausschuss und 30% der Gesamtproduktion.
M3 liefert 2% Ausschuss und 20% der Gesamtproduktion.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der Produktion ausgewähltes Werkstück Ausschuss ist?
b) Ein Werkstück sei Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es von M1 gefertigt wurde?

Antworten: a) 2,2% b) 68,18%

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für zwei Ereignisse A und B die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) A und B sind stochastisch unabhängig
b) A und $\bar{B}$ sind stochastisch unabhängig
c) $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind stochastisch unabhängig
d) $\bar{A}$ und B sind stochastisch unabhängig

Aufgabe 3

Wir betrachten zwei Ereignisse A und B, und ihre Vierfeldertafeln bzw. Baumdiagramme. Dabei brauchen nur so viele Felder ausgefüllt (bzw. Kanten beschriftet) zu sein, wie nötig sind, damit sich der Rest eindeutig ergänzen lässt.

a) Wie lässt sich anhand einer Vierfeldertafel leicht prüfen, ob A und B stochastisch unabhängig sind?
b) Wie lässt sich anhand eines Baumdiagramms leicht prüfen, ob A und B stochastisch unabhängig sind?

Aufgabe 4 (Arens, Kap. 37.2)

Man kann für zwei Ereignisse definieren: „A ist günstig für B“ genau dann, wenn $P(B|A) > P(B)$.

a) Wenden Sie diese Definition auf das Beispiel „Studienplatzvergabe“ aus der Vorlesung an! ($A = F, B = Z$ bzw. $A = M, B = Z$)
b) Zeigen Sie am Beispiel $\Omega = [1:6]$, $A = \{1,2,3\}; B = \{2,3,4\}; C = \{3,4,5\}$,

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,3

dass die Relation „ist günstig für“ im Allgemeinen nicht transitiv ist!

Aufgabe 5
(Weber, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure, Stuttgart,1992)

Ein (Laplace-) Würfel wird zweimal geworfen. Betrachtet werden die drei Ereignisse $A_1 =$ gerade Augenzahl beim ersten Wurf, $A_2 =$ gerade Augenzahl beim zweiten Wurf, $A_3 =$ gerade Augensumme der beiden Würfe. Zeigen Sie, dass die drei Ereignisse zwar paarweise, aber nicht vollständig unabhängig sind!

Aufgabe 6

In einer Urne befinden sich 5 Kugeln mit den Ziffern 1,2,3,4 und 5. Es werden ohne Zurücklegen 2 Kugeln gezogen. Die Zufallsgröße X sei der größere Zahlenwert der beiden gezogenen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert von X!

Antwort: $E(X) = 4$

Aufgabe 7

Bei einem Wurf mit 3 Würfeln erhält ein Spieler 10 € bei 18 Augen und 5 € bei 17 Augen. In allen anderen Fällen bekommt er nichts. Pro Spiel sind 0,20 € zu bezahlen. Berechnen Sie den Erwartungswert von X = „Gewinn pro Spiel“!

Antwort: $E(X) \approx -0{,}08426$ €

Aufgabe 8

Eine Zeitschrift veranstaltet ein Ratespiel, bei dem als Preise zu gewinnen sind: 1 mal 1000 €, 4 mal 500 € und 200 Buchpreise im Wert von jeweils 18 €. Diese Preise werden unter den Einsendern (keine Mail, nur ausreichend frankierte Postkarten) richtiger Lösungen ausgelost. Jeder darf nur eine Postkarte schicken!

a) Unter der Annahme, dass genau 10 000 richtige Lösungen eingehen, berechne man den Erwartungswert des Gewinnes, der auf eine eingesandte richtige Lösung entfällt.
b) Unter Berücksichtigung des Postkartenportos von 0,60 € als Unkosten des Teilnehmers bestimme man, wie viel richtige Lösungen höchstens eingehen dürften, damit sich die Beteiligung für einen Einsender einer richtigen Lösung dem Erwartungswert nach gerade noch nicht negativ ist?

Antworten: a) $E(X) = 0{,}66$ € b) höchstens 11 000.

Aufgabe 9

Wir betrachten ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

a) Gegeben sei eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$. Wie oft muss man dieses Experiment mindestens durchführen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment mindestens einmal erfolgreich ist, mindestens gleich θ ist.
b) Das Bernoulli-Experiment soll so oft wiederholt werden, bis sich zum ersten Mal Erfolg einstellt. Wie oft „im Schnitt“ muss man dazu dieses Experiment durchführen?

Aufgabe 10

Aus einer Menge von 10 Schrauben, unter denen sich 4 defekte Schrauben befinden, werden ohne Zurücklegen 2 Schrauben zufällig entnommen. Für die Zufallsvariable $X =$ „Anzahl der gezogenen defekten Schrauben“ sollen Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion bestimmt werden.

Aufgabe 11

Einer Lieferung wird mit Zurücklegen eine Stichprobe vom Umfang $n = 40$. Entnommen. Enthält die Stichprobe mehr als 2 unbrauchbare Teile, so wird die Lieferung zurückgewiesen. $L(p)$ sei die Annahmewahrscheinlichkeit der Lieferung in Abhängigkeit vom Ausschussanteil p der Lieferung. $L(p)$ heißt auch Annahmekennlinie, Operationscharakteristik oder OC-Kurve des Stichprobenplans.
Skizzieren Sie dies Annahmekennlinie!