Zusätzliche Aufgaben – Übungsblatt 1

1) a) $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \wedge A)$

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \wedge A$	$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \wedge A)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0

← nur Nullen (Kontradiktion)

b) $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

nur 1 ← (Tautologie)

2) Beweisen Sie mit vollständigen Induktion:

a) $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar $(n \in \mathbb{N})$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ bzw. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\dots+n)^2$

a) $\underline{\text{IA}}$ $n = 1$ $\quad 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ ist durch 3 teilbar ✓

$\underline{\text{IV}}$ n^3+2n ist für ein $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar; d.h. $n^3+2n = 3k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

$(n+1)^3 + 2(n+1)$ ist durch 3 teilbar

$\underline{\text{IB}}$ zu zeigen $(n+1)^3 + 2(n+1)$

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\
&= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\
&\overset{\text{IV}}{=} 3k + 3n^2 + 3n + 3 \\
&= 3(k + n^2 + n + 1) \quad ✓
\end{aligned}
$$