Aufgabenblatt 4

Themen: Funktionen, Stetigkeit

Begründen Sie Ihre Antwort (Rechenweg zeigen; Sätze anwenden, nachdem die Voraussetzungen verifiziert sind, usw.)!

Aufgabe 1

Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie das Bild der gegebenen Funktionen an.

$$f_1 : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x-4} \qquad f_2 : D_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$$

Geben Sie Ihre Antwort in Intervallnotation an.

Bei f_1 muss $x - 4 \geq 0$ oder $x \geq 4$ sein.

$$D_1 = [4; \infty[$$

Die Wurzelfunktion nimmt nur nichtnegative Werte an. Aus $x - 4 \geq 0$ folgt $\sqrt{x-4} \geq 0$ für jedes $x \in D_1$. Das Bild von f_1 ist deshalb $[0; \infty[$.

Bei f_2 muss $x^2 + 3x + 2 > 0$, denn der Nenner darf nicht Null sein. Insofern lösen wir die Ungleichung

$$x^2 + 3x + 2 > 0.$$

Weil $x^2 + 3x + 2$ ein Polynom ist, kann ein Vorzeichenwechsel nur an Stellen stattfinden, wo der Graph der Funktion die x-Achse überquert. Wir suchen deshalb die Nullstellen und untersuchen die entsprechenden Intervalle.
Das Polynom zerlegt sich in zwei Faktoren: $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$
Die Nullstellen lauten: $x_1 = -2, x_2 = -1$
$\mathbb{R}$ wird in drei Intervalle unterteilt: $]-\infty; -2[\ ,\ ]-2; -1[\ ,\ ]-1; \infty[$
Wir wählen einen Repräsentant für jedes Teilintervall und setzen dies in das Polynom ein.
$p(-3) = (-3 + 2)(-3 + 1) = 2 > 0 \ \Rightarrow\ p(x)$ ist positiv auf $]-\infty; -2[$.
$p(-1,5) = (-1,5 + 2)(-1,5 + 1) = (0,5)(-0,5) < 0 \ \Rightarrow\ p(x)$ ist negativ auf $]-2; -1[$.
$p(0) = 2 > 0 \ \Rightarrow\ p(x)$ ist positiv auf $]-1; \infty[$.

$$D_2 =]-\infty; -2[\cup]-1; \infty[$$

Der Nenner nimmt alle Werte in $]0; \infty[$ an, sodass insgesamt das Bild von f_2 durch $]-\infty; 0[$ gegeben ist.

Aufgabe 2

a) Gegeben sei die Funktion

$$g_1(x) = \begin{cases} x - x^2, & x < -3 \\ 4x, & -3 \leq x \leq 2 \\ x - 3, & 2 < x < 5 \\ 7 - x, & x > 5. \end{cases}$$

Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ g_1 stetig ist.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion

$$g_2(x) = \begin{cases} 3a + 4x, & x \leq 2 \\ a^2 - x, & x > 2 \end{cases}$$

stetig ist.

a) Alle Teilfunktionen der stückweis definierten Funktion sind Polynomen, d.h. stetig im Inneren jedes Intervalls. Es müssen deshalb nur bei den Randpunkte der Intervallen geprüft, ob Stetigkeit beim Übergang zum nächsten Teilfunktion stetig ist.
Bei $x = -3$ ist g_1 stetig:

$$\lim_{x \to -3^-} g_1(x) = \lim_{x \to -3^-} x - x^2 = -3 - (-3)^2 = -12,$$

$$\lim_{x \to -3^+} g_1(x) = \lim_{x \to -3^+} 4x = 4(-3) = -12 = f(-3).$$

Bei $x = 2$ ist g_1 nicht stetig:

$$\lim_{x \to 2^-} g_1(x) = \lim_{x \to 2^-} 4x = 8 = f(2),$$

$$\lim_{x \to 2^+} g_1(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 3 = 2 - 3 = -1 \neq 8.$$

Bei $x = 5$ ist die Funktion gar nicht definiert, also kann die Funktion dort nicht stetig sein.
Die Funktion ist insgesamt stetig für alle $x \in \left]-\infty; 2\right[\cup \left]2; 5\right[\cup \left]5; \infty\right[$.

b) Bei g_2 sind die Teilfunktion ebenfalls Polynomen, sodass die Funktion für alle $x \neq 2$ stetig ist. Die Zahl a muss so ausgewählt, dass

$$\lim_{x \to 2^-} g_2(x) = \lim_{x \to 2^+} g_2(x) = g_2(2).$$

Nun gilt

$$\lim_{x \to 2^-} g_2(x) = \lim_{x \to 2^-} 3a + 4x = 3a + 8 = g_2(2)$$

sowie

$$\lim_{x \to 2^+} g_2(x) = \lim_{x \to 2^-} a^2 - x = a^2 - 2.$$

Die Funktion ist in $x = 2$ stetig genau dann, wenn

$$a^2 - 2 = 3a + 8$$

oder

$$a^2 - 3a - 10 = 0,$$

d.h. wenn

$$(a + 2)(a - 5) = 0.$$

Als Lösungen für a erhalten wir -2 und 5.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie einen Intervall I der Länge 2 oder weniger, sodass die Funktion

$$h(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 + x + 7}{x^2 + 1}$$

eine Nullstelle in I hat.

Die Funktion h ist eine rationale Funktion: ein Polynom geteilt durch ein Polynom. Solche Funktionen sind überall stetig, dort wo sie definiert sind. In diesem Fall ist der Nenner immer größer als Null, sodass h überall stetig ist.

Wir suchen x-Werte aus, wo der Zähler positiv ist bzw. negativ ist. Der Wert $y^* = 0$ liegt zwischen diesen Funktionswerte. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein x^* zwischen den x-Werte, wobei $h(x^*) = y^* = 0$, d.h. x^* ist eine Nullstelle.

$g(-2) = -24 + 20 - 2 + 7 = 1 > 0$ und $g(-3) = -81 + 45 - 3 + 7 = -32 < 0$. Es existiert eine Nullstelle auf $]-3; -2[$.