Łösungen: Übungsblatt 11

Numerische Integration, Integration von Potenzreihen

Aufgabe 1

Berechnen Sie T_{10} und S_{10}, um das Integral $\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx$ zu approximieren.

Als erstes berechnen wir die x_i- und $f(x_i)$-Werte für $f(x) = \sqrt{2-x^2}$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_i = f(x_i)$	1,414	1,411	1,400	1,382	1,356	1,323	1,281	1,229	1,166	1,091	1,000

Bemerkung: $\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$

$$\begin{aligned}
T_{10} &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + 2y_8 + 2y_9 + y_{10}\right)\\
&= (0{,}05)(1{,}414 + 2{,}822 + 2{,}800 + 2{,}764 + 2{,}712 + 2{,}646 + 2{,}562 + 2{,}458 + 2{,}332 + 2{,}182 + 1)\\
&= (0{,}05)(25{,}692)\\
&= 1{,}2846
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}\right)\\
&= (0{,}0\overline{3})(1{,}414 + 5{,}644 + 2{,}800 + 5{,}528 + 2{,}712 + 5{,}292 + 2{,}562 + 4{,}916 + 2{,}332 + 4{,}364 + 1)\\
&= (0{,}0\overline{3})(38{,}564)\\
&= 1{,}2855
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^x \frac{-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$$

mit Hilfe von Potenzreihen.

Die Potenzreihe der Funktion e^t ist gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Von daher gilt

$$e^{(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$$

oder

$$\frac{-e^{(-t^2)}}{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-2}}{n!}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{-e^{-t^2}}{t^2}\, dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-2}}{n!}\, dt \\
&= \int_0^x \left((-1)t^{-2} + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-2}}{n!} \right) dt \\
&= \left(t^{-1} + t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-1}}{(2n-1)n!} \right) \Bigg|_0^x \\
&= x^{-1} + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)n!} \\
&= x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)n!}
\end{aligned}$$

Aufgaben z. T. aus Edwards und Penney, *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall (1986).