Lösungen/ Ergebnisse: Übungsblatt 9

Riemannsche Summen, das bestimmte Integral, partielle Integration

Aufgabe 1

Approximieren Sie den Flächeninhalt zwischen der Kurve $f(x) = \sqrt{x}$ und die x-Achse auf dem Intervall $[0; 1]$. Verwenden Sie dazu

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{16}, \quad x_2 = \frac{1}{9}, \quad x_3 = \frac{1}{4}, \quad x_4 = 1$$

und jeweils

a) die linken Randpunkte

b) die rechten Randpunkte.

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$.

Um den Flächeninhalt zu approximieren, verwenden wir die folgenden Tabelle.

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	1	1

a) $f(x_{i-1})$ ist die Höhe des i-ten Rechtecks. Die Breite ist $x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, 4$.

$$\begin{aligned}
A_l &= \left(\frac{1}{16} - 0\right) 0 + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{2} \\
&= 0 + \left(\frac{16}{144} - \frac{9}{144}\right) \frac{1}{4} + \left(\frac{9}{36} - \frac{4}{36}\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4}\right) \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{576} + \frac{5}{108} + \frac{3}{8} \\
&= \frac{21}{1728} + \frac{80}{1728} + \frac{648}{1728} \\
&= \frac{749}{1728} \approx 0{,}433
\end{aligned}$$

b) $f(x_i)$ ist die Höhe des i-ten Rechtecks. Die Breite ist $x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, 4$.

$$\begin{aligned} A_l &= \left(\frac{1}{16} - 0\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)1 \\ &= \frac{1}{64} + \frac{7}{432} + \frac{5}{72} + \frac{3}{4} \\ &\approx 0{,}851 \end{aligned}$$

Das bestimmte Integral kann mit den Rechenregeln berechnet werden:

$$\int_0^1 x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}1^{3/2} - \frac{2}{3}0^{3/2} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(3x^2 + 2x + 4)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2x+1)^3\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

a) 24 b) 0 c) $\frac{28}{3}$

a)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2}(3x^2 + 2x + 4)\,dx &= (x^3 + x^2 + 4x)\Big|_{-1}^{2} \\ &= 2^3 + 2^2 + 4\cdot 2 - ((-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1)) \\ &= 8 + 4 + 8 - (-1 + 1 - 4) \\ &= 24 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0}(2x+1)^3\,dx &= \int_{-1}^{0}(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)\,dx \\ &= (2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x)\Big|_{-1}^{0} \\ &= 0 - (2(-1)^4 + 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1) \\ &= -(2 - 4 + 3 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) &= \int_1^9 (x^{1/2} - 2x^{-1/2})\,dx \\
&= (\frac{2}{3}x^{3/2} - 2 \cdot 2x^{1/2})\Big|_1^9 \\
&= \left(\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - 4\sqrt{x}\right)\Big|_1^9 \\
&= \left(\frac{2}{3}(\sqrt{9})^3 - 4\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}(\sqrt{1})^3 - 4\sqrt{1}\right) \\
&= \left(\frac{54}{3} - \frac{36}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{12}{3}\right) \\
&= \frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$ b) $\displaystyle\int t\sin t\,dt$ c) $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$

a) $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$ b) $-t\cos t + \sin t + C$ c) $\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$

Aufgaben z. T. aus Edwards und Penney, *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall (1986).