2.5 Varianz und Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Die **Varianz** einer Zufallsgröße $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Mittelwert: $Var(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$. $\sigma := \sqrt{Var(X)}$ heißt **Standardabweichung** von X.

Wir erinnern an den Erwartungswert einer Zufallsgröße X:
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$ und $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$ im stetigen Fall.
Bei der Varianz haben wir jetzt nur x_i bzw. x zu ersetzen durch $(x_i - \mu)^2$ bzw. durch $(x-\mu)^2$. Es ist also

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot f(x_i)$$ im diskreten Fall und

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$$ im stetigen Fall.

Analog zum Verschiebungssatz für die empirische Varianz $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = var(\boldsymbol{x}) + \bar{x}^2$
leitet man leicht her den Verschiebungssatz für die „theoretische" Varianz:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 .$$

Weiter gilt wie bei der empirischen Varianz

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Die Varianz ist also insbesondere invariant gegenüber Verschiebungen.

Im vorigen Kapitel haben wir uns einige typische Verteilungen angesehen. Die entsprechenden Varianzen lassen sich (mehr oder weniger) leicht berechnen (Den Erwartungswert schreiben wir nochmal dazu):

Beispiel 1:

a) Eine Zufallsvariable X sei **gleichverteilt** auf $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Es ist dann $E(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ das arithmetische Mittel der x_i und $Var(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Im Würfelbeispiel ist $Var(X) = \frac{35}{12}$

b) Beim Beispiel X = Augensumme bei zweimal Würfeln ist $X = X_1 + X_2$
$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$ und $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$.
Hier haben wir von der Beziehung $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$ Gebrauch gemacht. Sie gilt zwar bei diesem Beispiel (weil die beiden Würfe unabhängig sind), aber nicht im Allgemeinen (→ später in diesem Kapitel)!

Beispiel 2:

Bei einer **hypergeometrischen Verteilung** mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion
$f(i) = P(X = i) = \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$; $0 \leq i \leq n$ (also mit den Parametern M, N und n) ist $E(X) = n \cdot p$ mit $p := \frac{M}{N}$
und $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Beispiel 3:

Bei einer **Binomialverteilung** mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion
$f(i) = p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i (1-p)^{n-i}$; $0 \leq i \leq n$ (also mit den Parametern n und p) ist $E(X) = n \cdot p$
und $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Beispiel 4:

Bei einer mit der **Poisson-Verteilung** mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion
$f(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$; $k = 0,1,2, \ldots$ ist $E(X) = Var(X) = \lambda$

Beispiel 5:

Ist eine Zufallsvariable X **stetig gleichverteilt auf dem Intervall** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, also mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & für\ x \in [a;b] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ und $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Beispiel 6:

Ist X **normalverteilt** mit den Parametern μ und σ^2, so ist $E(X) = \mu$ und $Var(X) = \sigma^2$
Die Bezeichnungen sind natürlich schon so gewählt, dass es „passt“, aber das ist nicht selbstverständlich:
Ein elementarer Beweis für $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt = \sigma^2$ wird Poisson zugeschrieben.

Anders als beim Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen, für den gilt $E(\sum X_i) = \sum E(X_i)$, gilt $Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i)$ nicht ohne weitere Voraussetzungen:

Beispiel: In einer Urne befinden sich zwei Kugeln mit der Ziffer 1 und drei Kugeln mit der Ziffer 2. (11222)
Es werden ohne Zurücklegen hintereinander zwei Kugeln zufällig gezogen. Dazu definieren wir die folgenden Zufallsvariablen: Zu jeder Gesamtziehung ω sei $X(\omega) :=$ die Ziffer der ersten Kugel und $Y(\omega) :=$ die Ziffer der zweiten Kugel. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen f und g von X bzw. Y:

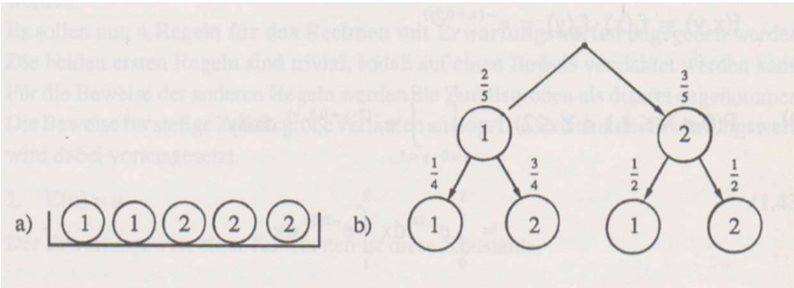

Bild 1. 18 a) Urne b) Baumdiagramm

$f(1) = \frac{2}{5}$, $f(2) = \frac{3}{5}$, $g(1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$, $g(2) = \frac{3}{5}$. Somit $E(X) = E(Y) = 1\cdot\frac{2}{5} + 2\cdot\frac{3}{5} = 1{,}6$ und
$Var(X) = Var(Y) = (1-1{,}6)^2\cdot\frac{2}{5} + (2-1{,}6)^2\cdot\frac{3}{5} = 0{,}24$, also $Var(X) + Var(Y) = 0{,}48$
Die Zufallsvariable $X+Y$ nimmt die Werte 2, 3 und 4 an. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion h ist
$h(2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $h(3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$, $h(4) = \frac{3}{10}$, $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}2$. Es ist aber
$Var(X+Y) == (2-3{,}2)^2\cdot\frac{1}{10} + (3-3{,}2)^2\cdot\frac{3}{5} + (4-3{,}2)^2\cdot\frac{3}{10} = 0{,}36 \neq 0{,}48 = Var(X) + Var(Y)$

Definition: Zwei Zufallsvariable X und Y heißen **unkorreliert**, falls gilt $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$

Summenregel für unkorrelierte Zufallsvariable: Sind die Zufallsvariablen X_i paarweise unkorreliert, so gilt $Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i)$

Definition: Zwei Zufallsvariable X und Y heißen **unabhängig**, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ereignisse $\{X \le x\}$ und $\{Y \le y\}$ unabhängig sind, das heißt, es muss gelten $P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}) = P(X \le x)\cdot P(Y \le y)$

Satz (o.B.): Sind X und Y unabhängig, so sind sie auch unkorreliert.

Die beiden Zufallsvariablen im vorigen **Beispiel** sind also auch abhängig.

Definition: Die Zufallsvariablen X_i $(i = 1, \dots, n)$ heißen **unabhängig**, wenn für alle $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ die n Ereignisse $\{X_i \le x_i\}$ total unabhängig sind.

Weil **unabhängige** Zufallsvariable auch paarweise unkorreliert sind, gilt auch für sie die **Summenregel** $Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i)$.

Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen

Wir betrachten die $n -$ fache Wiederholung eines Bernoulli-Experiments, jedes Mal mit der Trefferwahrscheinlichkeit p. Die dazugehörigen Zufallsvariablen X_i (die alle gleich sind) können dann nur zwei Werte annehmen:1 für Treffer, 0 für Niete. Folglich ist jedes Mal $E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$
$Var(X_i) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p \cdot (1-p)$.
$X \coloneqq \sum X_i$ zählt dann gerade die Treffer bei der $n -$ fachen unabhängigen Wiederholung dieses Bernoulli-Experiments. X hat folglich eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Es gilt
$E(X) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = n \cdot p$ und $Var(X) = Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Dies direkt über die Wahrscheinlichkeitsfunktion, also
$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = n \cdot p$ und $Var(X) = \sum_{i=0}^{n} (i - np)^2 \cdot \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = n \cdot p \cdot (1-p)$
zu berechnen, ist bedeutend mühsamer!