Probe Klausur, Analysis I INFb FFI
Lösungen

1a) $f(x) = \ln(1-3x)$

$1-3x > 0$

$-3x > -1$

$x < 1/3$

Defn.: $]-\infty, 1/3[$

Bild.: $\mathbb{R}$

1b) $g(x) = (x^2+2x-3)^{1/4}$

$(x+3)(x-1) \geq 0$

Defn.: $]-\infty; -3] \cup [1; \infty[$

Bild: $\mathbb{R}^{\geq 0}$

1c) $h(t) = \frac{3}{2}\cos(3t+2)$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}\cos x \leq \frac{3}{2}$

Defn: $\mathbb{R}$

Bild: $[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$

2a) g_1, g_2 stetig auf $[a;b]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\underset{\text{R.R.}}{\Longrightarrow}$ $c_1 g_1$ und $c_2 g_2$ stetig auf $[a;b]$

$\underset{\text{R.R.}}{\Longrightarrow}$ $c_1 g_1 + c_2 g_2$ stetig auf $[a;b]$.

$\underset{\text{Satz.}}{\Longrightarrow}$ $c_1 g_1 + c_2 g_2$ hat ein Maximum auf $[a;b]$

2b) sin, cos stetig $\overset{RR}{\Rightarrow}$ cost − sint stetig

$\Rightarrow$ h ist stetig auf den offenen Intervallen

Die Randpunkte müssen untersucht werden:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to \pi/4^-} h(t) &= \lim_{t\to\pi/4^-} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\qquad\qquad\qquad\ \ \|\\ \lim_{t\to \pi/4^+} h(t) &= \lim_{t\to\pi/4^+} \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} = h\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\} \text{stetig in } t = \pi/4$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to 3\pi/2^-} h(t) &= \lim_{t\to \frac{3\pi}{2}^-} \sin t = -1\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \times\\ \lim_{t\to \frac{3\pi}{2}^+} h(t) &= \lim_{t\to\frac{3\pi}{2}^+} (\cos t - \sin t) = -^-1 = +1\end{aligned}\right\} \text{nicht stetig in } t = \frac{3\pi}{2}$$

h ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{\frac{3\pi}{2}\}$.

3a) 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1, 0, ... divergent

b) $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^1 \cdot \underbrace{2^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} = \underline{\underline{2}}$, konvergent

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1-\left(\frac{7}{9}\right)^k} = \underline{\underline{1}}$ $\quad\left(\frac{3}{4}\right)^k, \left(\frac{7}{9}\right)^k$ geom. Folgen mit $|q|<1$. konvergent.

d) $\lim_{k\to\infty} \dfrac{k^4-5k^2+1}{k^2+3}$, divergent (Grad Poly Zähler (GPZ) > Grad Poly Nenner (GPN))

e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+1000}{n^4+0{,}0001} = \underline{\underline{0}}$, konvergent (GPZ < GPN)

f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot k^3-4k+7}{2k^3+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$, konvergent (GPZ = GPN)

4a) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ falls die Ableitung in x existiert. f ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

4b) $g(0) = 3\cos(\pi/2) = 0$

$g'(t) = -3\sin(t+\pi/2)$ $\quad g'(0) = -3\sin(\frac{\pi}{2}) = -3$

$$T = g(0) + g'(0)(x - \pi/2)$$
$$= -3(x - \pi/2)$$

4 c) $h'(x) = e^x(x^2+5) + e^x(2x)$

$$j'(t) = \frac{\frac{1}{t}(t+3) - \ln t}{(t+3)^2}$$

$$k'(x) = \frac{15x^4 + 4}{2\sqrt{3x^5+4x+7}}$$

5ai) <u>QK</u> $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(4k+4)!}{(3k+3)!} \cdot \frac{(3k)!}{(4k)!} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}$

$\rightarrow \infty$ (GPZ > GPN)

<u>divergent</u>.

5aii) <u>Leibniz</u> alt und $\overset{\frac{1}{7k+1}}{\vee}$ monoton fallend:

$7(k+1)+1 - 7k+1 = 7 > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{7(k+1)+1} - \frac{1}{7k+1} < 0$.

<u>konvergent</u>

5aiii) $(-1)^{2n+4} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

harmonische Reihe, <u>divergent</u>

5aiv) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{5})^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$, $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$ geom. Reihe mit $|q| < 1$

<u>konvergent</u>

5av) QK

$$\lim_{k\to\infty} \frac{4(k+1)!}{(3k+3)!} \cdot \frac{(3k)!}{4k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{4(k+1)}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \overset{\overset{\text{GPZ<GPN}}{\downarrow}}{=} 0 < 1$$

<u>konvergent</u>

5avi) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{7k+1}$, $\left(\frac{k}{7k+1}\right)$ ist keine Nullfolge,

denn $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{7k+1} \overset{\overset{\text{GPZ=GPN}}{\downarrow}}{=} \frac{1}{7}$. <u>divergent</u>

5b) $n^2+3 > n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2}$

Es gilt $0 < \frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2}$.

Des Weiteren konvergiert $\sum \frac{1}{n^2}$ (Zeta-Reihe mit $s = 2 > 1$),

d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$ <u>konvergiert</u>.