2.4 Zufallsvariable

Wir erinnern uns an die Definitionen aus Kapitel 1 (Deskriptive Statistik):
Ein quantitatives Merkmal X war eine Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$ von der Menge Ω (= Grundgesamtheit) in die reellen Zahlen. Die einzelnen Bilder $X(\omega) = x$ waren die sogenannten Ausprägungen des Merkmals X.

Im Kontext Wahrscheinlichkeitsrechnung ist Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments und $X: \Omega \to \mathbb{R}$ eine „messbare" (eine Voraussetzung, um die wir uns bei den üblichen Anwendungen nicht zu kümmern brauchen) Abbildung. Wir führen noch ein paar in diesem Zusammenhang gebräuchliche **Abkürzungen** ein (Wobei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß über Ω sein soll und x eine reelle Zahl).

$\{X = x\} := \{\omega \in \Omega : \mathrm{X}(\omega) = x\}$
$\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : \mathrm{X}(\omega) \leq x\}$
$\{x_1 < X \leq x_2\} := \{\omega \in \Omega : x_1 < \mathrm{X}(\omega) \leq x_2\}$

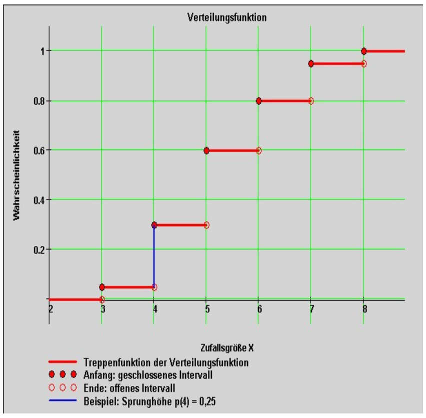
Entsprechendes für $\{X > x\}, \{x_1 \leq X \leq x_2\}$, usw.

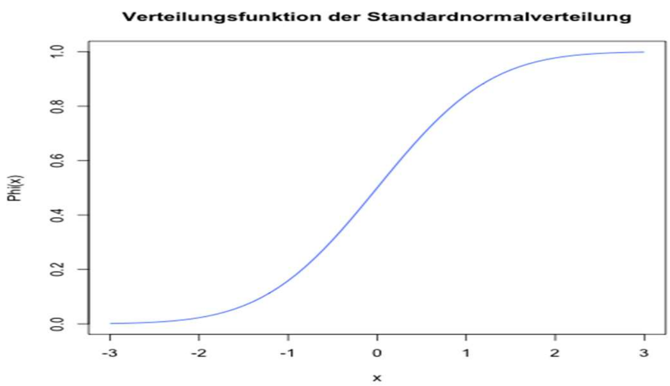
$P(X = x) := P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega : \mathrm{X}(\omega) = x\})$
$P(X \leq x) := P(\{X \leq x\}) = P(\{\omega \in \Omega : \mathrm{X}(\omega) \leq x\})$
$P(x_1 < X \leq x_2) := P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = P(\{\omega \in \Omega : x_1 < \mathrm{X}(\omega) \leq x_2\})$

Entsprechendes für $P(X > x), P(x_1 \leq X \leq x_2)$ usw.

Man beachte, dass $\{X = x\}, \{x_1 < X \leq x_2\}, \{X \leq x\}$ ... Teilmengen von Ω, also Ereignisse sind und $P(X = x), P(x_1 < X \leq x_2), P(X \leq x)$, ... deren Wahrscheinlichkeiten, also reelle Zahlen zwischen Null und Eins.

Definition: Bei einem Zufallsexperiment mit Ergebnismenge Ω und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist eine **Zufallsvariable** (oder Zufallsgröße) eine Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$. Die Zahlen $x = X(\omega)$ heißen auch die **Realisierungen** von X.
Die dazugehörige **Verteilung** $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ ist definiert als $F(x) := P(X \leq x)$.





Eigenschaften: Für $x_1 \leq x_2$ ist $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\}$, also $F(x_1) = P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2) = F(x_2)$.
Folglich ist F immer monoton steigend. Ähnlich kann man sich noch weitere Eigenschaften klarmachen (→Vorlesung). Wir fassen zusammen

- F ist monoton steigend
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \leq F(x) \leq 1 = \lim_{x \to \infty} F(x)$
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Definition:

a) X (und damit auch die Verteilung F) heißt **diskret**, wenn X nur endlich (oder abzählbar unendlich) viele Werte $x_i,\ i = 1,2,\dots,n$ (bzw. $i \in \mathbb{N}$) annehmen kann. Der Anschaulichkeit halber stellen wir uns gern den endlichen Fall $x_1, x_2, \dots x_n$ vor. Mit $p_i := P(X = x_i)$ definiert man dann zu X die dazugehörige **Wahrscheinlichkeitsfunktion** f:

$$f\colon \mathbb{R} \to [0;1] \quad f(x) := \begin{cases} p_i & falls\ x = x_i\ \text{für}\ ein\ i \in \{1,2,\dots n\} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Dann ist $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$ und

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} p_i = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

F ist eine Treppenfunktion und hat Sprungstellen mit den Sprunghöhen $p_i = f(x_i) = P(X = x_i)$ an den Stellen x_i, zwischen den Sprungstellen ist sie konstant.

b) Die Zufallsvariable X heißt **stetig**, wenn ihre Verteilung F stetig ist. In diesem Fall hat F eine sog. **Dichtefunktion** (**Wahrscheinlichkeitsdichte**) $f\colon \mathbb{R} \to [0;1]$ mit den Eigenschaften

$F'(x) = f(x)$ (dort, wo F differenzierbar ist)

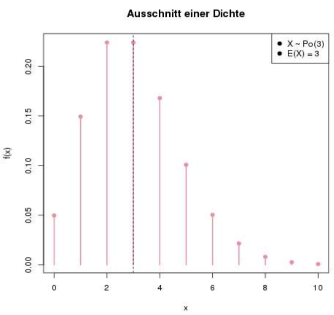
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

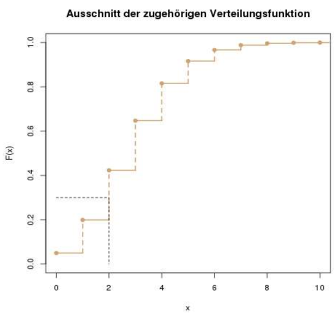
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

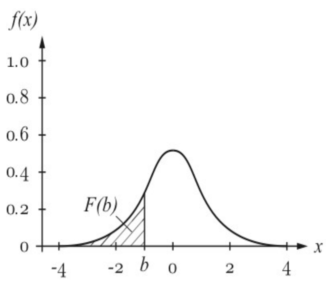
$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

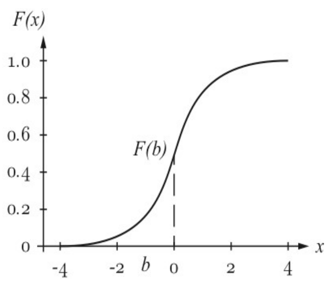
$P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Bemerkung: An die Stelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ im diskreten Fall tritt im stetigen Fall die Dichtefunktion $f(x)$. Sie ist ein Maß dafür, wie dicht sich mögliche Werte von X „um den Wert x scharen".









Bemerkung: $f(x)$ wird manchmal auch im diskreten Fall als Dichte bezeichnet. Oft wird auch nicht unterschieden zwischen den Bezeichnungen Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichte), hier $f(x)$, und Wahrscheinlichkeitsverteilung (Verteilung), hier $F(x)$, einer Zufallsvariablen.

Definition: Als **Erwartungswert** $E(X)$ (oder **Mittelwert** $\mu(X)$) definieren wir

$E(X) = \mu(X) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$ im diskreten Fall und

$E(X) = \mu(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$ im stetigen Fall.

Formeln: Sowohl im diskreten, als auch im stetigen Fall gilt

$E(c) = c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$

$E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$

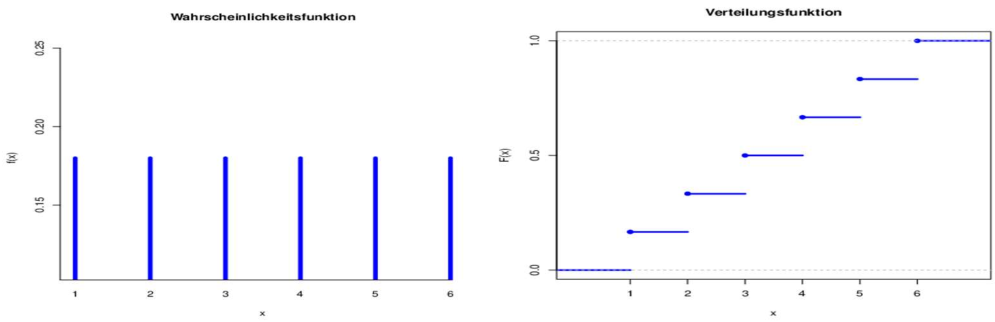
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Mit den Zufallsvariablen c, $c \cdot X$, $X + Y$ ist natürlich, wie immer bei Funktionen gemeint
$c(\omega) \coloneqq c$, $(c \cdot X)(\omega) \coloneqq c \cdot X(\omega)$, $(X + Y)(\omega) \coloneqq X(\omega) + Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$

Beispiel 1:

a) Es wird gewürfelt.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} = [1:6]$. $X(\omega) := \omega$. $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

Definition: Eine Zufallsvariable X heißt **gleichverteilt** auf $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, wenn jeder dieser Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ angenommen wird. Es ist dann $E(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ das arithmetische Mittel der x_i.



b) Es wird 2 mal gewürfelt. $\Omega = [1:6]^2 = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\}$
X sei die Augensumme, also $X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$. X nimmt die Werte $x_i = i = 2,3, \dots, 12$ an.
$f(2) = p_2 = P(X = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$, $f(3) = p_3 = P(X = 3) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36}$,
$f(4) = p_4 = P(X = 4) = P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36}, \dots$
$f(10) = p_{10} = P(X = 10) = P(\{(4,6),(5,5),(6,4)\}) = \frac{3}{36}, \dots$
Insgesamt ist $f(7 \pm k) = \frac{6-k}{36}$ für $0 \le k \le 5$, also
$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 7 \cdot \frac{6}{36} + \dots + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$
Schneller sieht man das so: Es ist $X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$.
Mit $X_1(\omega) := \omega_1$, $X_2(\omega) := \omega_2$ gilt dann $X = X_1 + X_2$, also $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.

Beispiel 2:

In einer Urne befinden sich N Kugeln. $M \leq N$ Kugeln sind schwarz, die anderen $N - M$ weiß.
Es werden **ohne Zurücklegen** $n \leq N$ Kugeln gezogen. (vgl. 2.2)
$X(\omega) :=$ Anzahl der schwarzen Kugeln in der Ziehung ω. Dann ist

$$f(i) = p_i = P(X = i) = \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}; \ 0 \leq i \leq n$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}} = n \cdot \frac{M}{N}$$

Definition: Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(i) = P(X = i) = \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}; \ 0 \leq i \leq n$$

heißt **hypergeometrisch verteilt** mit den Parametern M, N und $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$ sieht, grob gesprochen, ähnlich aus wie bei der Binomialverteilung (siehe unten).

Beispiel 3:

In einer Urne befinden sich N Kugeln. $M \leq N$ Kugeln sind schwarz, die anderen $N - M$ weiß.
Es werden **mit Zurücklegen** $n \leq N$ Kugeln gezogen. (vgl. 2.2)
$X(\omega) :=$ Anzahl der schwarzen Kugeln in der Ziehung ω. Dann ist mit $p := \frac{M}{N}$

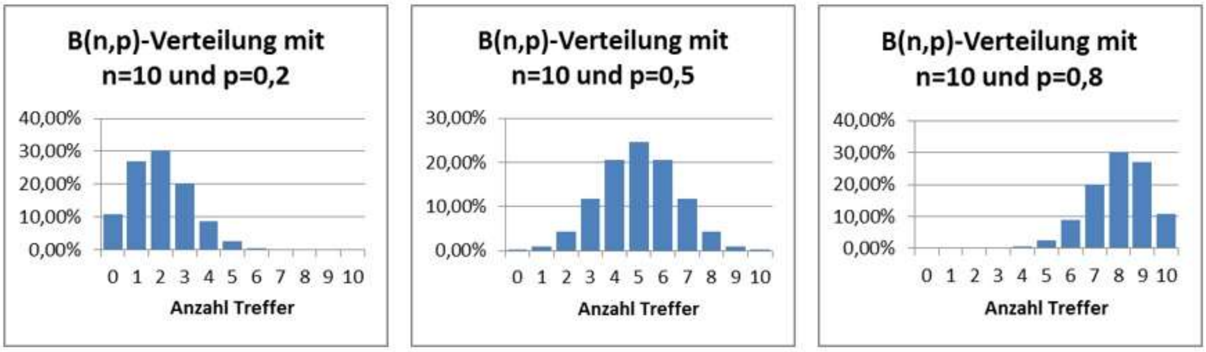
$$f(i) = p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i (1-p)^{n-i}; \ 0 \leq i \leq n$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = n \cdot p$$

Definition: Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(i) = P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i (1-p)^{n-i}; \ 0 \leq i \leq n$$

heißt **binomialverteilt** mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$.



http://www.elearning-freiburg.de/Mathe/Abi-Kurs/Vortraege/S09%20-%20Binomialverteilung.html

$X(\omega)$ kann man sich vorstellen als die Anzahl der Treffer bei der $n-$fachen Wiederholung eines Bernoulli-Experiments (Trefferwahrscheinlichkeit jedes Mal $= p$).

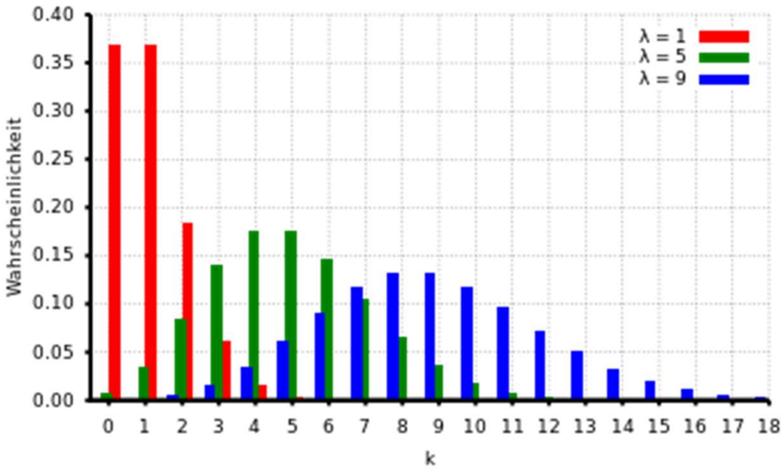
Beispiel 4
(vgl. https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws12/WR/Skript_6.pdf):

Definition: Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!};\ k = 0,1,2, \ldots$$

heißt **Poisson-verteilt** mit dem Parameter (auch Intensität genannt) $\lambda > 0$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot f(k) = \lambda$$



Poisson – Grenzwertsatz (o.B.) Es sei $p_n \in (0,1)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, und X_n eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p_n, dann gilt für alle $k = 0,1,2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Bemerkung:

Man stelle sich $X_n(\omega)$ vor als die Anzahl der Treffer in einem $n -$ fachen Bernoulli-Experiment mit einem sehr großen n und einer sehr kleinen Trefferwahrscheinlichkeit $p_n \approx \frac{\lambda}{n}$. Der Poisson – Grenzwertsatz besagt, dass die Trefferanzahl in einem solchen Experiment approximativ Poisson-verteilt ist. Beispiele für solche Zufallsvariablen:

- Anzahl der Schäden, die einer Versicherung gemeldet werden (viele Versicherungsverträge; jeder Vertrag erzeugt mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit einen Schaden.)
- Anzahl der Druckfehler in einem Buch (viele Buchstaben; jeder Buchstabe kann mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit ein Druckfehler sein.)
- Anzahl der Zugriffe auf einen Webserver (viele User; jeder User greift mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit zu.)

Als Kriterium für die Verwendbarkeit der Poisson-Approximation der Binomialverteilung wird häufig $np \leq 10$ und $n \geq 1500p$ angegeben.

Unterbeispiel (https://www.poissonverteilung.de/) : In einer Brandmeldezentrale laufen die Meldungen von 2000 Rauchmeldern zusammen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Rauchmelder an einem Tag Fehlalarm schlägt, beträgt p = 0,0004. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag in der Brandmeldezentrale genau zwei Fehlalarme eingehen?

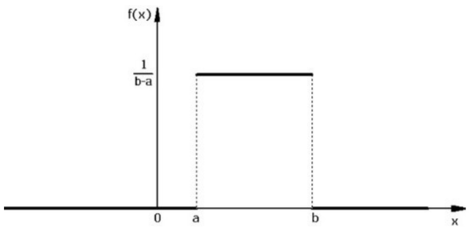
a) mit Binomialverteilung: $f(2) = \binom{2000}{2} \cdot 0{,}0004^2 \cdot 0{,}9996^{1998} \approx 0{,}14373$

b) mit Poisson-Verteilung: $\lambda = 0{,}0004 \cdot 2000 = 0{,}8$; $f(2) = e^{-0{,}8} \frac{0{,}8^2}{2!} \approx 0{,}14379$

Beispiel 5 (https://www.wiwiweb.de/wahrscheinlichkeitsrechnung/eindimensionale-verteilungen-mit-namen/stetige-verteilungen.html):

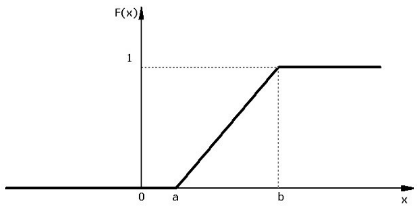
Definition: Wir gehen aus von zwei reellen Zahlen $a < b$. Eine Zufallsvariable X heißt **stetig gleichverteilt auf dem Intervall** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, wenn ihre Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \to [0; 1]$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & f\ddot{u}r\ x \in [a; b] \\ 0 & sonst \end{cases}$$



Ihre Verteilung $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ ist dann

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{, wenn } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{, wenn } b \leq x \end{cases}$$



und

$E(X) = \frac{a+b}{2}$

Beweis: $E(X) = \mu(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{1}{2}(b + a)$.

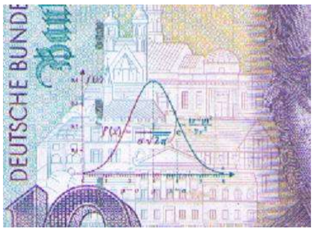
Unterbeispiel: Straßenbahn (https://mars.wiwi.hu-berlin.de/mediawiki/mmstat3/index.php/Stetige_Gleichverteilung):

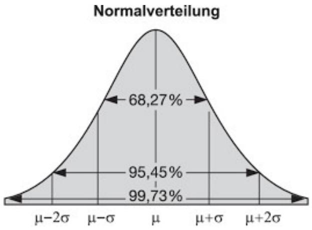
Eine Person kommt, ohne auf die Uhr zu sehen, zur Straßenbahn, welche im 20-Minuten-Takt fährt. Die Zufallsvariable X : "Wartezeit auf die nächste Straßenbahn in Minuten" kann dann jeden Wert aus dem Intervall $[0; 20]$ annehmen, Pünktlichkeit der Straßenbahn vorausgesetzt. Da die Person rein zufällig in einem hinreichend kleinen, gleichmöglichen Zeitintervall konstanter Länge (etwa von der Länge 30 Sekunden) an der Haltestelle eintrifft, kann die stetige Zufallsvariable X als gleichverteilt angesehen werden. Somit ist $E(X) = 10$. Falls sich die Person nicht besser orientiert, muss sie im Mittel mit einer Wartezeit von 10 Minuten rechnen.

Beispiel 6:

Definition: Wir gehen aus von zwei Zahlen $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Eine Zufallsgröße X mit der Dichtefunktion

$$f(x) = f(x|\mu;\sigma^2) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



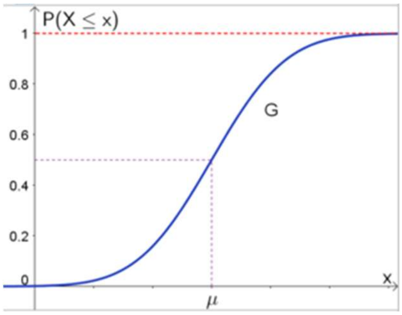


https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjjwYCngqfmAhVJJFAKHX0ECJkQMwhTKAQwBA&url=https%3A%2F%2Fwirtschaftslexikon.gabler.de%2Fdefinition%2Fnormalverteilung-39769&psig=AOvVaw0bktJEoCGXhZf813U0Y1xA&ust=1575927699822238&ictx=3&uact=3

heißt **normalverteilt** (C.F. Gauß) mit den Parametern μ und σ^2.

Die dazugehörige Verteilung $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ ist definiert als

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \text{ , } E(X) = \mu$$



Die Abweichungen der Messwerte vieler natur-, wirtschafts- und ingenieurwissenschaftlicher Vorgänge vom Erwartungswert lassen sich durch die Normalverteilung entweder exakt oder wenigstens in sehr guter Näherung beschreiben, vor allem Prozesse, die in mehreren Faktoren unabhängig voneinander in verschiedene Richtungen wirken (wie wir im Zentralen Grenzwertsatz noch sehen werden). Zufallsvariablen mit Normalverteilung benutzt man zur Beschreibung zufälliger Vorgänge wie:

- zufällige Streuung von Messwerten,
- zufällige Abweichungen vom Sollmaß bei der Fertigung von Werkstücken.

Der Graph der Dichtefunktion $f(x)$ hat eine „glockenförmige Gestalt" und ist achsensymmetrisch mit der Geraden $x = \mu$ als Symmetrieachse. Weiterhin hat die Wahrscheinlichkeitsdichte Wendepunkte bei $x = \mu \pm \sigma$
Die Graph der Verteilungsfunktion $F(x)$ ist punktsymmetrisch mit dem Symmetriezentrum $(\mu; 0{,}5)$.
Mit wachsendem σ wird die Kurve flacher, wird σ kleiner, so wird die Kurve steiler.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer normalverteilten Zufallsvariable hat kein definites Integral, das in geschlossener Form lösbar ist, sodass entsprechende Wahrscheinlichkeiten numerisch berechnet werden müssen. Sie können mithilfe einer Standardnormalverteilungstabelle (oder Python, auch mit manchen Taschenrechnern) ermittelt werden. Die nachstehende Tabelle war die primitivste, die ich finden konnte.

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

z	$F_N(z)$	z	$F_N(z)$	z	$F_N(z)$
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9772
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893
0,4	0,6554	1,4	0.9192	2,4	0,9918
0,5	0,6915	1,5	0,9332	2,5	0,9938
0,6	0.7257	1,6	0,9452	2,6	0,9953
0,7	0.7580	1,7	0,9554	2,7	0,9965
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,8	0,9974
0,9	0,8159	1,9	0,9713	2,9	0,9981

Um das zu sehen, benutzt man die Tatsache, dass eine lineare Funktion einer normalverteilten Zufallsvariablen selbst wieder normalverteilt ist. Konkret heißt das: Wenn X normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ^2, dann hat $Z := \frac{1}{\sigma}(X-\mu)$ eine sogenannte **Standardnormalverteilung**: Diese hat die Dichte $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, und die Verteilung $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, also $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.
Es gilt

$\varphi(x) = \varphi(-x)$ und $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Um also zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit $P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ einer normalverteilten Zufallsgröße (mit den Parametern μ und σ^2) zu berechnen, bilden wir $Z := \frac{1}{\sigma}(X-\mu)$ bzw. $z_i := \frac{1}{\sigma}(x_i - \mu)$, $i = 1,2$. Dann ist $P(x_1 \le X \le x_2) = P(z_1 \le Z \le z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

Unterbeispiel (Arens Kap. 39.3): Es sei X die Temperatur eines Kühlschranks im Haushalt. Beim Reinigen des Kühlschranks wird der Thermostat zufällig und unbeabsichtigt verstellt. Die Temperatur X, auf die sich der Kühlschrank nun einstellt, modellieren wir als zufällige normalverteilte Variable X mit $\mu = 3°C$ und $\sigma = 10°C$.

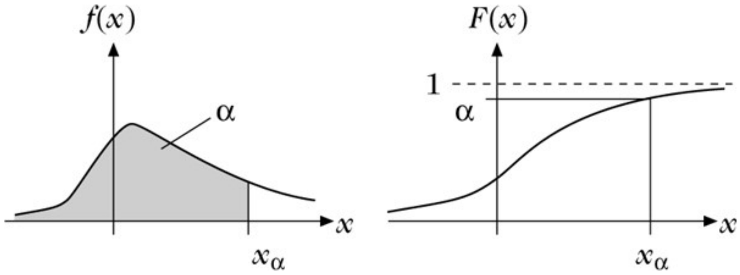
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Temperatur den als kritisch angesehenen Wert von $9°C$ übersteigt?
$$P(X > 9) = 1 - P(X \le 9) = 1 - P\left(Z \le \frac{9-3}{10}\right) = 1 - \Phi(0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Temperatur im Kühlschrank unter dem Gefrierpunkt $0°C$ liegt?
$$P(X \le 0) = P\left(Z \le \frac{0-3}{10}\right) = \Phi(-0{,}3) = 1 - \Phi(0{,}3) = 0{,}3821$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Temperatur zwischen $+1°C$ und $+7°C$?
$$P(1 \le X \le 7) = P\left(\frac{1-3}{10} \le Z \le \frac{7-3}{10}\right) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}2) = \Phi(0{,}4) - \big(1 - \Phi(0{,}2)\big) = 0{,}2347$$

d) Welche Temperatur c (in$°C$) wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht überschritten?
$0{,}99 = P(X \le c) = P(Z \le c^*) = \Phi(c^*)$ mit $c^* = \frac{c-3}{10}$
Hierzu bräuchten wir die Umkehrfunktion $\Phi^{-1}: (0;1) \to \mathbb{R}$ von $\Phi: \mathbb{R} \to (0;1)$.
Dann wäre hier einfach $c^* = \Phi^{-1}(0{,}99)$
Dafür sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eigene Bezeichnungen üblich:

Definition: Wir setzen hier eine stetige, streng monoton wachsende Verteilung F voraus, was beispielsweise bei jeder Normalverteilung der Fall ist (andernfalls wird die Definition etwas aufwändiger).
Für $0 < \alpha < 1$ ist das $\boldsymbol{\alpha}$ **– Quantil** (zu dieser Verteilung) derjenige Zahlenwert x_α , für den $F(x_\alpha) = \alpha$ ist.



https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/quantil/8227

Zum vorigen Beispiel betrachten wir eine Tabelle der Quantile der Standard-Normalverteilung

$\alpha = \Phi(z_\alpha)$

α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α
0.9999	3.7190	0.9955	2.6121	0.975	1.9600	0.780	0.7722
0.9998	3.5401	0.9950	2.5758	0.970	1.8808	0.770	0.7388
0.9997	3.4316	0.9945	2.5427	0.965	1.8119	0.760	0.7063
0.9996	3.3528	0.9940	2.5121	0.960	1.7507	0.750	0.6745
0.9995	3.2905	0.9935	2.4838	0.955	1.6954	0.740	0.6433
0.9994	3.2389	0.9930	2.4573	0.950	1.6449	0.730	0.6128
0.9993	3.1946	0.9925	2.4324	0.945	1.5982	0.720	0.5828
0.9992	3.1559	0.9920	2.4089	0.940	1.5548	0.710	0.5534
0.9991	3.1214	0.9915	2.3867	0.935	1.5141	0.700	0.5244
0.9990	3.0902	0.9910	2.3656	0.930	1.4758	0.690	0.4959
0.9989	3.0618	0.9905	2.3455	0.925	1.4395	0.680	0.4677
0.9988	3.0357	0.9900	2.3263	0.920	1.4051	0.670	0.4399
0.9987	3.0115	0.9895	2.3080	0.915	1.3722	0.660	0.4125
0.9986	2.9889	0.9890	2.2904	0.910	1.3408	0.650	0.3853
0.9985	2.9677	0.9885	2.2734	0.905	1.3106	0.640	0.3585
0.9984	2.9478	0.9880	2.2571	0.900	1.2816	0.630	0.3319
0.9983	2.9290	0.9875	2.2414	0.895	1.2536	0.620	0.3055
0.9982	2.9112	0.9870	2.2262	0.890	1.2265	0.610	0.2793
0.9981	2.8943	0.9865	2.2115	0.885	1.2004	0.600	0.2533
0.9980	2.8782	0.9860	2.1973	0.880	1.1750	0.590	0.2275
0.9979	2.8627	0.9855	2.1835	0.875	1.1503	0.580	0.2019
0.9978	2.8480	0.9850	2.1701	0.870	1.1264	0.570	0.1764
0.9977	2.8338	0.9845	2.1571	0.865	1.1031	0.560	0.1510
0.9976	2.8202	0.9840	2.1444	0.860	1.0803	0.550	0.1257
0.9975	2.8070	0.9835	2.1321	0.855	1.0581	0.540	0.1004
0.9974	2.7944	0.9830	2.1201	0.850	1.0364	0.530	0.0753
0.9973	2.7821	0.9825	2.1084	0.845	1.0152	0.520	0.0502
0.9972	2.7703	0.9820	2.0969	0.840	0.9945	0.510	0.0251
0.9971	2.7589	0.9815	2.0858	0.835	0.9741	0.500	0.0000
0.9970	2.7478	0.9810	2.0749	0.830	0.9542		
0.9969	2.7370	0.9805	2.0642	0.825	0.9346		
0.9968	2.7266	0.9800	2.0537	0.820	0.9154		
0.9967	2.7164	0.9795	2.0435	0.815	0.8965		
0.9966	2.7065	0.9790	2.0335	0.810	0.8779		
0.9965	2.6968	0.9785	2.0237	0.805	0.8596		
0.9964	2.6874	0.9780	2.0141	0.800	0.8416		
0.9963	2.6783	0.9775	2.0047	0.795	0.8239		
0.9962	2.6693	0.9770	1.9954	0.790	0.8064		
0.9961	2.6606	0.9765	1.9863	0.785	0.7892		
0.9960	2.6521	0.9760	1.9774	0.780	0.7722		

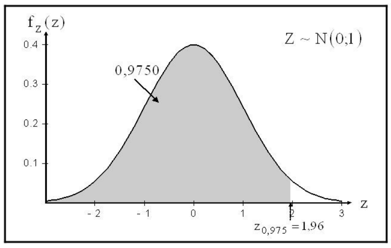
Beispiel 6.13:

Bis zu welchem Wert der standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z hat sich 97,5 % der Wahrscheinlichkeitsmasse unter der Dichtefunktion kumuliert?

Man sucht die Wahrscheinlichkeit 0,975 in der Tabelle zur Verteilungsfunktion und liest den entsprechenden z-Wert ab:

$z_{0,975} = 1{,}90 + 0{,}06 = 1{,}96.$

Das abgelesene Quantil kann man auch grafisch darstellen:



https://slideplayer.org/slide/2712503/

Weil $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, ist $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$ braucht man nur eine Tabelle für den Bereich $\alpha \geq 0{,}5$
Im Beispiel ergibt sich $\frac{c-3}{10} = c^* = z_{0{,}99} = 2{,}3263$, also $c = 26{,}263\ °C$.