# Kleines Einmaleins der Kombinatorik

$|M| = m$ ; $|N| = n$ ; … usw.

$\wp(M) :=$ Potenzmenge von $M$

$\wp_k(M) :=$ Menge aller $k-$elementigen Teilmengen von $M$

$N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_m = \prod_{i=1}^{m} N_i :=$ Menge aller Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ mit $x_i \in N_i \quad 1 \le i \le m$

$N^m := \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{m}$

**Das Taubenschlagprinzip** (Schubfachprinzip, pigeonhole principle, Dirichlet 1834)

Wir denken uns $M$ als eine Menge von $m$ Tauben und $N$ als eine Menge von $n$ Nistplätzen. Jetzt werden die Tauben auf die Nistplätze verteilt. Das entspricht einer Abbildung $f: M \to N$. $f$ ist genau dann injektiv, wenn kein Nistplatz mehrfach besetzt ist. Um solche Kollisionen vermeiden zu können, muss $m \le n$ sein. $f$ ist genau dann surjektiv, wenn kein Nistplatz leer ist. Dazu muss es genügend Tauben geben, also $m \ge n$. $f$ ist genau dann bijektiv (also injektiv und surjektiv), wenn in jedem Nistplatz genau eine Taube sitzt. Das geht nur dann wenn $m = n$ ist. Jetzt leuchtet unmittelbar ein der

**Satz**: Ist bei gleichmächtigen Mengen $M$ und $N$ (also $m = n$)
$f: M \to N$ eine Abbildung, so gilt $f$ injektiv $\Leftrightarrow$ $f$ surjektiv $\Leftrightarrow$ $f$ bijektiv

Dieses Prinzip macht man sich z.B. (mehr oder weniger bewusst) beim Sudoku zunutze.

Wir definieren

$Abb(M,N) :=$ Menge aller Abbildungen $f: M \to N$

$Inj(M,N) :=$ Menge aller injektiven Abbildungen $f: M \to N$

$Surj(M,N) :=$ Menge aller surjektiven Abbildungen $f: M \to N$

$Bij(M,N) :=$ Menge aller bijektiven Abbildungen $f: M \to N$

Es folgt eine kleine Formelsammlung.

1) $\left|\prod_{i=1}^{m} N_i\right| = \prod_{i=1}^{m} n_i$

2) $\left|N^m\right| = n^m$

3) $\left|\wp(M)\right| = 2^m$

4) $\left|\wp_k(M)\right| = \binom{m}{k}$

5) $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m$

6) $\left|Abb(M,N)\right| = n^m$

7) $\left|Inj(M,N)\right| = \begin{cases} 0 & \text{für } m > n \\ n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!} = m!\dbinom{n}{m} & \text{für } m \le n \end{cases}$

8) $\left|Surj(M,N)\right| = \begin{cases} 0 & \text{für } m < n \\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}(n-k)^m & \text{für } m \ge n \end{cases}$

9) $\left|Bij(M,N)\right| = \begin{cases} 0 & \text{für } m \ne n \\ n! & \text{für } m = n \end{cases}$

Bis auf 8) – eine Formel, die wir in dieser Vorlesung ohnehin nicht mehr brauchen – sind alle Beziehungen ziemlich leicht zu sehen. Eine mögliche Reihenfolge dafür wäre z.B. 1,2,6,3,7,9,4,5 (→ Vorlesung).
In **Moodle** finden Sie noch ein eigenes Kapitel über **Binomialkoeffizienten** zum Nachlesen.

Und dann gibt es noch die berühmte

**Siebformel** (Prinzip der Inklusion und Exklusion, Poincaré und Sylvester):
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
Für 3 Mengen: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
Allgemein: $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \ne T \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|T|+1} |\bigcap_{i \in T} A_i|$

Anstelle eines allgemeinen Beweises:
Für 2 Mengen sieht man unmittelbar: Wenn wir die Menge $A$ durchzählen, und dann die Menge $B$, so haben wir die Elemente in $A \cap B$ doppelt gezählt.
3 Mengen:
$|A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$
$= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap A \cap C|)$
$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
Die eigentliche Siebformel für $n$ Mengen $A_i$ bringt nichts Neues mehr, sondern es läuft lediglich auf die Frage hinaus, wie man sie einfach hinschreiben kann. Dazu eine kurze Erklärung des Summenzeichens $\sum_{\emptyset \ne T \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|T|+1} |\bigcap_{i \in T} A_i|$: Es bedeutet, dass summiert werden soll über alle nichtleeren Teilmengen von $\{1,2,\ldots,n\}$. Man hat also $2^n - 1$ Summanden insgesamt. Der Faktor $(-1)^{|T|+1}$ ist lediglich ein Vorzeichen.
Vorgehensweise: Man addiert zunächst alle $|A_i|$, dann subtrahiert man alle Terme mit 2 Mengen (das sind $\binom{n}{2}$ Stück), dann addiert man alle Terme mit 3 Mengen (das sind $\binom{n}{3}$ Stück), dann subtrahiert man alle Terme mit 4 Mengen (das sind $\binom{n}{4}$ Stück), usw. …
Der Beweis durch vollständige Induktion erfordert auch keine kreative Idee, und verläuft ganz ähnlich zum Schritt von 2 auf 3.

**Beispielaufgabe**:
Für die endlichen Mengen $A, B, C$ soll gelten

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C|$$

$$|A| = |B| = |C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 5$$

a) Finden Sie ein Beispiel für diese Situation!
b) Zeigen Sie, dass immer $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ gilt!

**Lösung**:
a) $A := \{a, x, y\}$, $B := \{b, x, y\}$, $C := \{c, x, y\}$
b) Für $n :=| A| = |B| = |C|$, $m :=| A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C|$ gilt nach der Siebformel

$$5 = 3n - 3m + |A \cap B \cap C| = 3 \cdot (n - m) + |A \cap B \cap C|.$$

Wäre $|A \cap B \cap C| = 0$, dann wäre 5 ein ganzzahliges Vielfaches von 3, was nicht geht.